V. Puiseux's Untersuchungen über die algebraischen Functionen

Fischer, Hermann

Halle, 1861

Zweiter Theil.

Zweiter Theil.

18. Nachdem wir festgestellt haben, dass der Werth der Function u_1 für den Punkt K ungeändert bleibt, wenn der von Z zurückgelegte Weg CMK zwischen den festen Punkten C und K verschoben wird, jedoch ohne Ueberschreitung eines von denjenigen Punkten, für welche diese Function unendlich, oder eine vielfache Wurzel der Gleichung

$$f(u, z) = 0$$

wird; nachdem ferner die Methode zur Berechnung dieses Werthes von u_1 für eine bekannte Curve CMK dargelegt worden; wollen wir gegenwärtig den Fall ins Auge fassen, dass sich die Verschiebung dieser Curve über einen oder mehrere der genannten Punkte hinaus erstreckt, wodurch nämlich der Werth von u_1 für den Punkt K im Allgemeinen eine Aenderung erleidet, und dann werden wir auf die unter den verschiedenen Werthen von u_1 kreisenden Vertauschungen näher eingehen.

Es soll zunächst der Deutlichkeit wegen vorausgesetzt werden, dass der Coefficient der höchsten Potenz von u im Polynom $f(u,z)$ unabhängig sei von z, damit die aus der Gleichung

$$f(u,z) = 0$$

entspringenden Werthe von u für endliche Werthe von z niemals ins Unendliche anwachsen können.

Fig. 9

Wenn p der Gleichung

$$f(u,z) = 0$$

genügende Functionen $u_1, u_2, \ldots u_p$ von z für den $z = a$ entsprechenden Punkt A den gemeinschaftlichen Werth b erhalten und der bewegliche Punkt Z unter dieser Voraussetzung um A eine unendlich kleine geschlossene Curve $CLMC$ (Fig. 9.), und zwar von dem $z = c$ entsprechenden Punkte C aus beschreibt*); so ist es ein Ergebniss unserer frühern Untersuchung, dass diejenigen der Gleichung

$$f(u,z) = 0$$

genügenden Functionen von z, welche für den Punkt A verschiedene Werthe besitzen, im Ausgangspunkte ihre, von diesem unendlich wenig abweichenden Anfangswerthe wieder annehmen, während noch zu entscheiden ist, wie sich zugleich jene p Functionen $u_1, u_2, \ldots, u_p$ in Bezug auf ihre ursprünglichen, von b unendlich wenig abweichenden Werthe verhalten werden.

Beachten wir, dass die Polynome

$$f(u,a), \frac{\partial f(u,a)}{\partial u}, \frac{\partial^2 f(u,a)}{\partial u^2}, \ldots, \frac{\partial^{p-1} f(u,a)}{\partial u^{p-1}}$$

für $u = b$ verschwinden müssen, die hierauf folgende Ableitung $\frac{\partial^p f(u,a)}{\partial u^p}$ aber einen von Null verschiedenen Werth A annehmen muss, so wird die Gleichung

$$f(u,z) = 0$$

durch Substitution von

$$u = b + \beta,\ z = a + \alpha$$

die Form

$$(1) \qquad \mathrm{A}\beta^p + \Sigma \mathrm{B}\beta^q \alpha^r = 0$$

erhalten, wo Σ das Zeichen einer Summe von Termen ist, deren Exponenten positive ganze Zahlen sind, der Art, dass q in denjenigen Termen, wo r Null ist, grösser als p, und dass r wenigstens in einem der Terme, wo q Null ist, von Null verschieden sein muss, weil sonst die Gleichung (1) durch β, oder die Gleichung

$$f(u,z) = 0$$

durch $u - b$ theilbar, diese also nicht irreductibel sein würde.

---

*) In der Folge soll immer vorausgesetzt werden, dass die unendlich kleine Curve $CLMC$ nur einen Umgang um den Punkt A macht, d. h. dass der Winkel des Radiusvectors AZ gegen eine feste Axe nur bis 2π anwächst, während Z auf der Curve $CLMC$ einen Umlauf vollbringt.

Da der Punkt Z in unendlich kleiner Entfernung von A genommen ist, so ist die Norm der Differenz $z - a = \alpha$ unendlich klein, so dass sich unter den, der Gleichung

$$f(u,z) = 0$$

entnommenen correspondirenden Werthen von u eine Anzahl von p Werthen finden, für welche die Norm der Differenz $u - b = \beta$ unendlich klein ist. Um diese zu bestimmen, hat man die p der Gleichung (1) genügenden unendlich kleinen Werthe von β aufzusuchen, zu deren genäherten Berechnung es nur der Terme von der niedrigsten Ordnung dieser Gleichung bedarf.

Gehen wir von dem gewöhnlichsten Falle aus, wo nämlich die partielle Ableitung $\frac{\partial f(u,z)}{\partial z}$ für $z = a$, $u = b$ nicht verschwindet, so besitzt die Gleichung (1) einen Term von der Form $B\alpha$, so dass dann offenbar die beiden Terme $A\beta^p$ und $B\alpha$ von niedrigerer Ordnung sind, als alle übrigen, und mithin die p gesuchten Werthe von β näherungsweise durch die Gleichung

$$A\beta^p + B\alpha = 0 \text{ oder } \beta^p = h\alpha,$$

wo $h = -\frac{B}{A}$, gegeben sind. Nimmt man jetzt $\alpha = \varrho e^{\tau i}$, wo ϱ die Länge AZ und τ ihren Winkel gegen die Richtung der positiven x bezeichnet, und versteht unter $(h\varrho)^{\frac{1}{p}}$ einen der Werthe von $\sqrt[p]{h\varrho}$, so findet man für β folgende p der Gleichung

$$\beta^p = h\alpha$$

genügende Werthe:

$$\beta_1 = (h\varrho)^{\frac{1}{p}} e^{\frac{\tau}{p}i}, \quad \beta_2 = (h\varrho)^{\frac{1}{p}} e^{\frac{\tau + 2\pi}{p}i},$$

$$\beta_3 = (h\varrho)^{\frac{1}{p}} e^{\frac{\tau + 4\pi}{p}i}, \ldots, \beta_p = (h\varrho)^{\frac{1}{p}} e^{\frac{\tau + 2(p-1)\pi}{p}i}$$

Weil nun der Radiusvector ϱ denselben Werth wieder annimmt, und zwar ohne durch Null zu gehen, sobald der Punkt Z auf der Curve $CLMC$ nach vollendetem Umlaufe in seine anfängliche Lage C zurückkehrt, also auch $(h\varrho)^{\frac{1}{p}}$ wieder seinen Anfangswerth erhält; während dagegen der Winkel τ um 2π anwächst: so nimmt β_1 den Anfangswerth von β_2, β_2 den von β_3, u. s. f., endlich β_p den von β_1 an.

Dass es sich auch in aller Strenge so verhält, wenngleich wir für $\beta_1, \beta_2, \ldots. \beta_p$ nur genäherte Werthe angegeben haben, zeigt sich auf folgende Weise. Obschon bei Vernachlässigung der Terme höherer Ordnungen in vorstehenden Formeln, vorausgesetzt β_1, $\beta_2, \ldots. \beta_p$ bezeichneten die genauen Werthe jener Functionen, jedesmal ein Fehler von unendlich kleiner Grösse zu befürchten wäre, dessen Ordnung jedoch $\frac{1}{p}$ übersteigt, wenn ϱ als eine Grösse erster Ordnung gilt; so lässt der Umstand, dass die Gleichung (1) nur dasselbe Werthsystem für β liefern kann, sobald der Punkt Z wieder zu seinem Ausgangsorte gelangt, die Annahme nicht zu, dass der Endwerth von β_1 nach einem Umlauf von Z nicht mit dem Anfangswerthe von β_2 zusammenfalle, weil derselbe sonst mit dem Anfangswerthe einer andern, von β_2 verschiedenen Wurzel der Gleichung (1) identisch sein, mithin von jenem Anfangswerthe entweder um eine endliche, oder um eine unendlich kleine Grösse von der Ordnung $\frac{1}{p}$, die nicht gleich Null sein kann, so lange ϱ von Null verschieden ist, abweichen müsste. Da sich auf gleiche Weise ergibt, dass der Endwerth von β_2 mit dem Anfangswerthe von β_3 in aller Strenge zusammenfällt, u. s. f.; so gelangen wir zu folgendem Satze:

Falls die partielle Ableitung $\frac{\partial f(u,z)}{\partial z}$ für $z=a$, $u=b$ nicht verschwindet, lassen sich die p Functionen u_1, $u_2, \ldots. u_p$, welche sämmtlich für den Punkt A gleich b werden, auf einem Kreise der Art anordnen, dass der einer jeden zukommende Endwerth, nachdem Z auf einer unendlich kleinen Curve den Punkt A umkreiset hat, dem Anfangswerthe der folgenden gleich ist.

Wir werden uns der Kürze wegen des Ausdrucks bedienen:

die Functionen bilden ein *cyklisches System* von p Termen um den Punkt A.

So wie der Punkt Z, wie bisher, die Curve $CLMC$ im *directen Sinne*, d. h. so, dass der Winkel τ wächst, durchlaufen hat, kann die Umkreisung auch im entgegengesetzten Sinne stattfinden, in welchem Falle die Endwerthe von u_1, $u_2, \ldots, u_p$ bezüglich die Anfangswerthe von u_p, u_1, $u_2, \ldots u_{p-1}$ sind.

Wenn der Punkt Z statt eines Umlaufs zwei Umläufe im directen Sinne macht, so sind die Endwerthe der Functionen u_1, $u_2, \ldots, u_p$ bezüglich gleich den Anfangswerthen von u_3, $u_4, \ldots$, u_2; nach drei Umläufen sind sie den Anfangswerthen von u_4, $u_5, \ldots$, u_3 gleich, u. s. f. Erst nach p Umläufen des Punktes Z erhalten diese Functionen ihre ursprünglichen Werthe wieder.

19. Da die gefundenen Resultate in den Fällen, wo die Ableitung $\frac{\partial f(u,z)}{\partial z}$ für $z=a$, $u=b$ verschwindet, nicht immer streng gültig sind, so bedarf es der Behandlung einer neuen Aufgabe, welche sich aus folgenden Gesichtspunkten übersehen lässt.

Um zunächst über das Verhalten der Wurzeln nach einem Umlauf des Punktes Z für den gegenwärtigen Fall Rechenschaft zu erhalten, suchen wir die Terme niedrigster Ordnung der Gleichung (1) auf. Wenn wir nämlich gewisse Terme T der Gleichung (1) von andern unterscheiden, in welchen die Exponenten von α und β zugleich kleiner sind, als in T (während jedoch einer von beiden Exponenten eben so gross sein kann) und die Summe der Terme T mit Δ, ferner die Summe der übrigen mit Δ' bezeichnen, so dass

$$f(b+\beta,\ a+\alpha) = \mathrm{A}\beta^p + \Sigma \mathrm{B}\beta^q\alpha^r = \Delta + \Delta'$$

ist; so werden 1) die Terme niedrigster Ordnung sicher der Summe Δ angehören und dann 2) wenn wir die Terme von Δ nach den fallenden Exponenten von β anordnen, die Exponenten von α aufsteigen, weil sonst die Exponenten von α und β in einem dieser Terme bezüglich kleiner als in einem andern sein würden, also der zweiten Summe Δ' zufielen. Demnach hat Δ folgende Form

$$\Delta = A\beta^{p} + A_1\beta^{p_1}\alpha^{q_1} + A_2\beta^{p_2}\alpha^{q_2} + \ldots + A_i\alpha^{q_i}$$

wo die Reihe ganzer Zahlen $p, p_1, p_2, \ldots, p_{i-1}$ fällt, während die Reihe ganzer Zahlen $q_1, q_2, \ldots, q_i$ steigt. Somit bietet sich folgende Aufgabe dar:

Aus den Termen des Polynoms Δ auf alle möglichen Arten Klassen zu bilden, deren jede nur solche Terme enthält, welche von gleicher und zwar niedrigerer Ordnung sind, als alle übrigen, wenn α als eine unendlich kleine Grösse erster Ordnung betrachtet wird, während die Ordnung von β einer angemessenen Wahl unterliegt.

Sobald alle diese Klassen aufgestellt sind, hat man dieselben gleich Null zu setzen, um Gleichungen zu erhalten, durch welche ein oder mehrere der p unendlich kleinen Werthe von β näherungsweise bestimmt sind.

Stellen nämlich

$$A^{(f)}\beta^{p_f}\alpha^{q_f}, \quad A^{(g)}\beta^{p_g}\alpha^{q_g}$$

zwei Terme gleicher Ordnung vor, während alle übrigen Terme von Δ mindestens von derselben Ordnung sind, und bezeichnet μ die Ordnung von β, so hat man

$$\mu p_f + q_f = \mu p_g + q_g$$

und für jeden andern von f und g verschiedenen Werth h:

$$\mu p_h + q_h \geqq \mu p_f + q_f.$$

(Sollen sich diese Bezeichnungen auf die Endterme von Δ beziehen, so hat man $p_0 = p$, $q_0 = 0$, $p_i = 0$ zu setzen.)

Um uns von der Bedeutung dieser Bedingungen eine klare Vorstellung zu bilden, betrachten wir die ganzen Zahlen p_k und q_k als die Abscisse und Ordinate eines Punktes M_k, so dass der Punkt M_0 (Fig. 10.) auf der x-Axe, der Punkt M_i auf der y-Axe, alle übrigen Punkte M_k innerhalb des Winkels der Positiven x und y

liegen, und dann die gerade Verbindungslinie irgend zweier dieser Punkte M_k und M_l die Axen auf der positiven Seite schneiden, weil nämlich, während die Abscisse p_k grösser als p_l ist, die Ordinate q_k kleiner als q_l sein muss.

Da sich nun ergibt, dass die Projection von OM_k auf einer geraden Linie OL, deren Gleichung den trigonometrischen Coefficienten $\frac{1}{\mu}$ besitzt, durch die Grösse $\frac{\mu p_k + q_k}{\sqrt{1+\mu^2}}$ dargestellt wird, so drückt die Gleichung

$$\mu p_f + q_f = \mu p_g + q_g$$

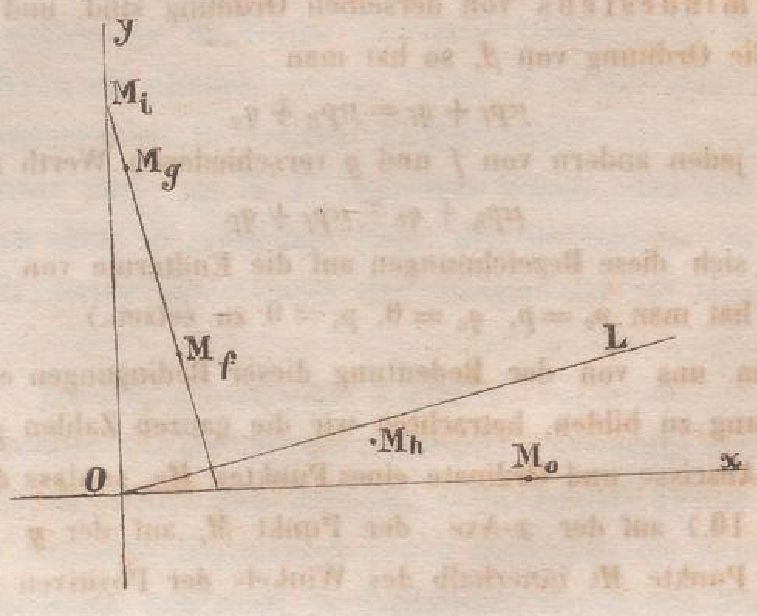
die Gleichheit der Projectionen von OM_f und OM_g auf OL, d. h. die Perpendicularität der Linien OL und M_fM_g aus, während der Bedingung

$$\mu p_h + q_h \geqq \mu p_f + q_f$$

zufolge die Projection von OM_h auf OL grösser oder wenigstens eben so gross als die von OM_f sein muss, so dass der Punkt M_h in Bezug auf den Anfangspunkt jenseits der Linie M_fM_g, oder auf dieser selbst liegt.

Es sind demnach, weil den zusammenzustellenden Termen des Polynoms $\varDelta$ gewisse unter den Punkten M_0, M_1, M_2, ... entsprechen, offenbar auf alle möglichen Arten zwei Punkte M_f, M_g zu

Fig 10.



ermitteln, deren Verbindungslinie $M_f M_g$ einerseits alle übrigen jener Punkte von dem Anfangspunkte andrerseits trennt. Wenn sich auf dieser Linie noch andere Punkte M_k, M_l, ... finden, und wenn die Gleichung

$$\mu p_f + q_f = \mu p_g + q_g$$

zur Bestimmung der Ordnung von β:

$$\mu = \frac{q_g - q_f}{p_f - p_g}$$

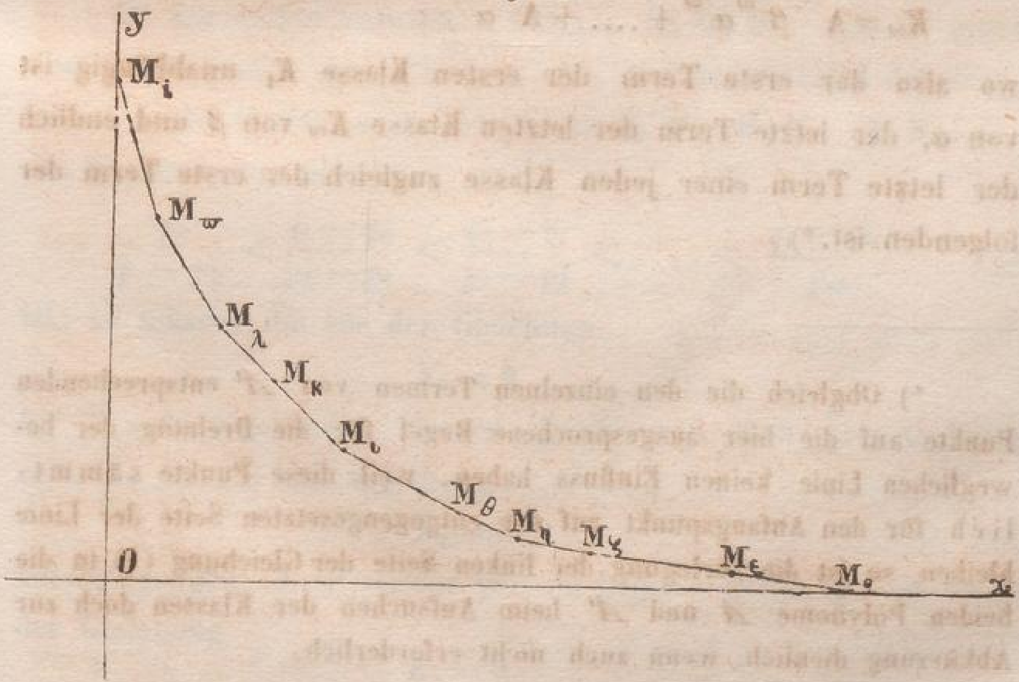
dient, so repräsentirt

$$K = A^{(f)} \beta^{p_f} \alpha^{q_f} + A^{(g)} \beta^{p_g} \alpha^{q_g} + A^{(k)} \beta^{p_k} \alpha^{q_k} + A^{(l)} \beta^{p_l} \alpha^{q_l} + \ldots.$$

eine der verlangten Klassen, wo die Ordnung der Terme $\mu p_f + q_f$ durchweg dieselbe und zwar niedriger, als die aller übrigen Terme der Summe Δ, also überhaupt der Gleichung (1) ist.

Damit keine der Klassen K bei der Bildung derselben ausgelassen werde, verfahren wir auf folgende Weise. Wir nehmen im Punkte M_0 (Fig. 11.) eine mit der x-Axe zusammenfallende Linie an, drehen dieselbe um den Punkt M_0 in dem Sinne, dass sie immer die Axe der positiven y schneidet, und zwar bis sie durch einen der Punkte M_1, M_2, ... geht; fallen dann noch mehrere

Fig. 11.



Punkte M_ε, $M_\zeta, \ldots,$ M_η, wo die Indices $\varepsilon, \zeta, \ldots, \eta$ der Grösse nach geordnet sind, in diese Linie, so bilden die den Punkten M_0, M_ε, $M_\zeta, \ldots,$ M_η entsprechenden Terme von Δ eine erste Klasse. Nun drehen wir die bewegliche Linie um den Punkt M_η immer in demselben Sinne fort, bis sie zu einem der Punkte $M_{\eta+1}$, $M_{\eta+2}, \ldots$ gelangt; alsdann entsprechen alle diejenigen Punkte M_η, $M_\Theta, \ldots,$ M_ι, welche der Linie in der neuen Lage angehören, den Termen der zweiten Klasse. Ferner drehen wir die Linie um den Punkt M_ι fort, wo sie die Punkte M_ι, $M_\varkappa, \ldots,$ M_λ verbinden mag, und bilden dann die den letzteren entsprechenden Terme der dritten Klasse. Fahren wir so fort, bis die bewegliche Linie durch den letzten Punkt M_i geht, so erhalten wir die folgenden Klassen:

$$K_1 = A\beta^{p} + A^{(\varepsilon)}\beta^{p_\varepsilon}\alpha^{q_\varepsilon} + \ldots + A^{(\eta)}\beta^{p_\eta}\alpha^{q_\eta},$$

$$K_2 = A^{(\eta)}\beta^{p_\eta}\alpha^{q_\eta} + A^{(\Theta)}\beta^{p_\Theta}\alpha^{q_\Theta} + \ldots + A^{(\iota)}\beta^{p_\iota}\alpha^{q_\iota},$$

$$K_3 = A^{(\iota)}\beta^{p_\iota}\alpha^{q_\iota} + A^{(\varkappa)}\beta^{p_\varkappa}\alpha^{q_\varkappa} + \ldots + A^{(\lambda)}\beta^{p_\lambda}\alpha^{q_\lambda},$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$K_\omega = A^{(\tilde\omega)}\beta^{p_{\tilde\omega}}\alpha^{q_{\tilde\omega}} + \ldots + A^{(i)}\alpha^{q_i},$$

wo also der erste Term der ersten Klasse K_1 unabhängig ist von α, der letzte Term der letzten Klasse K_ω von β und endlich der letzte Term einer jeden Klasse zugleich der erste Term der folgenden ist.*)

---

*) Obgleich die den einzelnen Termen von Δ' entsprechenden Punkte auf die hier ausgesprochene Regel für die Drehung der beweglichen Linie keinen Einfluss haben, weil diese Punkte sämmtlich für den Anfangspunkt auf der entgegengesetzten Seite der Linie bleiben, so ist die Zerlegung der linken Seite der Gleichung (1) in die beiden Polynome Δ und Δ' beim Aufsuchen der Klassen doch zur Abkürzung dienlich, wenn auch nicht erforderlich.

Wenn man diese verschiedenen Klassen der Reihe nach gleich Null setzt, so erhält man die Gleichungen für die unendlich kleinen Näherungswerthe von β. So liefert die Gleichung

$$K_1 = 0,$$

nachdem durch $\beta^{p_\iota}\alpha^{q_\eta}$ dividirt worden, $p_\eta - p_\iota$ Werthe von der Ordnung $\frac{q_\iota - q_\eta}{p_\eta - p_\iota}$; ferner die Gleichung

$$K_3 = 0,$$

nachdem durch $\beta^{p_\lambda}\alpha^{q_\iota}$ dividirt worden, $p_\iota - p_\lambda$ Werthe von der Ordnung $\frac{q_\lambda - q_\iota}{p_\iota - p_\lambda}$, u. s. f.; endlich die Gleichung

$$K_\omega = 0,$$

nachdem durch α^{q_ω} dividirt worden, p_ω Werthe für β von der Ordnung $\frac{q_i - q_\omega}{p_\omega}$, so dass im Ganzen

$$p - p_\eta + p_\eta - p_\iota + p_\iota - p_\lambda + \ldots + p_\omega,$$

d. h. eben p unendlich kleine Werthe von β verhanden sind.

Da das vorhin construirte Polygon $M_0 M_\eta M_\iota \ldots M_\omega M_i$ gegen den Anfangspunkt convex ist, da also die Zahlenwerthe der trigonometrischen Coefficienten der Linien $M_0 M_\eta$, $M_\eta M_\iota$, $M_\iota M_\lambda, \ldots,$ $M_\omega M_i$ zunehmen, also

$$\frac{q_\eta}{p - p_\eta} < \frac{q_\iota - q_\eta}{p_\eta - p_\iota} < \frac{q_\lambda - q_\iota}{p_\iota - p_\lambda} < \ldots < \frac{q_i - q_\omega}{p_\omega}$$

ist; so müssen die aus der Gleichung

$$K_1 = 0$$

für β sich ergebenden kleinen Werthe von niedrigerer Ordnung sein, als die aus der Gleichung

$$K_2 = 0$$

entspringenden, diese wieder von niedrigerer Ordnung, als die in der Gleichung

$$K_3 = 0$$

enthaltenen, u. s. f.

Betrachten wir nun eine dieser Gleichungen insbesondere, z. B.

$$K_2 = 0$$

oder

$$A^{(\eta)} \beta^{p_\eta - p_\iota} + A^{(\Theta)} \beta^{p_\Theta - p_\iota} \alpha^{q_\Theta - q_\eta} + \ldots. + A^{(\iota)} \alpha^{q_\iota - q_\eta} = 0.$$

Da die hieraus für β entspringenden Werthe von der Ordnung $\mu = \dfrac{q_\iota - q_\eta}{p_\eta - p_\iota}$ sind, d. h., wenn man den gemeinschaftlichen Factor φ von Zähler und Nenner forthebt,

$$\mu = \frac{r}{s};$$

da ferner alle Terme jener Gleichung von gleich hoher Ordnung sind, also

$$\mu(p_\eta - p_\iota) = \mu(p_\Theta - p_\iota) + q_\Theta - q_\eta = \ldots. = q_\iota - q_\eta$$

oder, wenn hier mit s multiplicirt wird,

$$r(p_\eta - p_\iota) = r(p_\Theta - p_\iota) + s(q_\Theta - q_\eta) = \ldots. = s(q_\iota - q_\eta) = rs\varphi$$

ist; und weil nun die Summe $r(p_\Theta - p_\iota) + s(q_\Theta - q_\eta)$ durch s theilbar ist, d. h. also der Theil $r(p_\Theta - p_\iota)$ derselben, wo aber r und s keinen gemeinschaftlichen Factor besitzen: so muss $\dfrac{p_\Theta - p_\iota}{s}$ eine ganze Zahl ψ sein. Setzt man jetzt in der Gleichung

$$r(p_\Theta - p_\iota) + s(q_\Theta - q_\eta) = rs\varphi$$

$s\psi$ an Stelle von $p_\Theta - p_\iota$, so ergibt sich

$$q_\Theta - q_\eta = r(\varphi - \psi),$$

mithin verwandelt sich die Gleichung

$$K_2 = 0$$

in:

$$A^{(\eta)}\beta^{s\varphi} + A^{(\Theta)}\beta^{s\psi}\alpha^{r(\varphi - \psi)} + \ldots. + A^{(\iota)}\alpha^{r\varphi} + 0$$

oder, wenn man $\beta^s = \alpha^r x$ setzt, in

$$(2) \qquad A^{(\eta)}x^{\varphi} + A^{(\Theta)}x^{\psi} + \ldots. + A^{(\iota)} = 0.$$

Bezeichnen wir nun die aus dieser Gleichung sich ergebenden φ Werthe von x, welche sämmtlich von Null verschieden sind und zunächst auch s ä m m t l i c h von einander verschieden sein mögen, mit $h_1, h_2, \ldots., h_\varphi$; setzen dann in der Relation $\beta^s = \alpha^r x$ die erste Wurzel $x = h_1$ und auserdem wie früher $\alpha = \varrho e^{\tau\iota}$ ein; so finden wir für β folgende s Werthe:

$$(3)\left\{\begin{array}{l}\beta_1 = (h_1 \varrho^r)^{\frac{1}{s}} e^{\frac{r\tau}{s}i},\ \beta_2 = (h_1 \varrho^r)^{\frac{1}{s}} e^{\frac{r(\tau+2\pi)}{s}i}, \\ \beta_3 = (h_1 \varrho^r)^{\frac{1}{s}} e^{\frac{r(\tau+4\pi)}{s}i},\ \ldots\ldots,\ \beta_s = (h_1 \varrho^r)^{\frac{1}{s}} e^{\frac{r[\tau+2(s-1)\pi]}{s}i},\end{array}\right.$$

wo $(h_1\varrho^r)^{\frac{1}{s}}$ einen der Werthe von $\sqrt[s]{h_1\varrho^r}$ vorstellt. Um noch die übrigen Näherungswerthe von β, also überhaupt alle $s\varphi = p - p_\eta$ der Gleichung

$$K_2 = 0$$

genügenden Werthe zu erhalten, brauchen wir nur in die eben gefundenen an Stelle von h_1 der Reihe nach $h_2, h_3, \ldots., h_\varphi$ einzusetzen.

Weil nun ϱ denselben Werth wieder annimmt, ohne durch Null zu gehen, sobald der Punkt Z den Punkt A in directem Sinne umkreiset und in seine anfängliche Lage C zurückkehrt, folglich auch der Factor $(h_1\varrho^r)^{\frac{1}{s}}$ seinen Anfangswerth wieder erhält; während dagegen der Winkel τ um 2π anwächst: so geht jeder der s Werthe von β des Systems (3) in den Anfangswerth des folgenden über.

Die Herleitung der so eben interpretirten Ausdrücke (3) geschah allerdings auf dem Wege der Näherung, dessenungeachtet muss es sich in aller Strenge so verhalten. Dass nämlich auch dann, wenn β_k und β_{k+1} die wahren Werthe zweier durch die Näherungswerthe

$$(h_1\varrho^r)^{\frac{1}{s}} e^{\frac{r[\tau+(2k-2)\pi]}{s}i},\ (h_1\varrho^r)^{\frac{1}{s}} e^{\frac{r(\tau+2k\pi)}{s}i}$$

gegebenen Functionen von α bezeichneten, der Endwerth von β_k nach einem Umlauf von Z auf der unendlich kleinen Curve $CLMC$ mit dem Anfangswerthe von β_{k+1} identisch ist, wird durch den Umstand bedingt, dass das ganze System der Werthe von β nach einem Umlauf von Z wiederkehren, und dass folglich der Endwerth von β_k mit dem Anfangswerthe einer andern Wurzel β' der Gleichung (1) zusammenfallen muss.

Zunächst muss nämlich β', wie β_k, mit α zu Null herabsinken, somit einer der Gleichungen

$$K_1 = 0,\ K_2 = 0, \ldots.,\ K_\omega = 0$$

näherungsweise Genüge leisten, und zwar, da β' ausserdem wie β_k eine unendlich kleine Grösse von der Ordnung $\frac{r}{s} = \frac{p_\iota - q_\eta}{p_\eta - q_\iota}$ sein muss, der Gleichung

$$K_2 = 0$$

entsprechen, weil die den Gleichungen

$$K_1 = 0,\ K_3 = 0,\ \ldots.\ K_\omega = 0$$

genügenden Wurzeln, wie wir gesehen haben, von anderer Ordnung sind. Da nun aber die Ordnung der in den Formeln (3) begangenen unendlich kleinen Fehler $\frac{r}{s}$ übersteigt, so kann die Function β', deren Anfangswerth dem Endwerthe von $\beta_\varkappa$ gleich sein soll, widrigenfalls jener um eine Grösse von der Ordnung $\frac{r}{s}$ von diesem abweichen würde, nur β_{k+1} sein.

Somit ergibt sich, dass die durch die Gleichung

$$K_2 = 0$$

gegebenen unendlich kleinen Werthe von β in φ Klassen zerfallen, welche den Wurzeln $h_1, h_2, \ldots, h_\varphi$ der Gleichung (2) entsprechen, und dass die s Functionen einer Klasse dergestalt cyklisch angeordnet werden können, dass jede derselben nach einem Umlauf von Z dem Anfangswerthe der folgenden gleich wird; dass also jede solche Klasse ein cyklisches System ist (Nr. 18).

Wenn wir, um dieselbe Methode überhaupt auf alle Gleichungen

$$K_1 = 0,\ K_2 = 0, \ldots,\ K_\omega = 0$$

anzuwenden, mit φ_1 den gemeinschaftlichen Factor von $p - p_\eta$ und q_η, mit φ_2 den von $p_\eta - p_\iota$ und $q_\iota - q_\eta$, mit φ_3 den von $p_\iota - p_\lambda$ und $q_\lambda - q_\iota$, u. s. f. bezeichnen, ferner mit $s_1, s_2, s_3, \ldots,$ s_ω die ganzen Zahlen $\frac{p - p_\eta}{\varphi_1}, \frac{p_\eta - p_\iota}{\varphi_2}, \frac{p_\iota - p_\lambda}{\varphi_3}, \ldots, \frac{p_\omega}{\varphi_\omega}$; so finden wir, dass sich die durch die Gleichung

$$K_1 = 0$$

gegebenen unendlich kleinen Werthe von β in φ_1 cyklische Systeme sondern, deren jedes aus s_1 Termen besteht; dass ebenso die aus der Gleichung

$$K_2 = 0$$

entspringenden in φ_2 cyklische Systeme von s_2 Termen zerfallen, u. s. f. bis zu den durch die Gleichung

$$K\omega = 0$$

gegebenen Werthen, die $\varphi\omega$ cyklische Systeme von $s\omega$ Termen bilden.

Wir haben erkannt, dass die für $z = a$ in den gemeinsamen Werth b übergenden Functionen $u_1, u_2, \ldots, u_p$ von z, auf die sich, den Gleichungen

$$z = a + \alpha, \quad u = b + \beta$$

gemäss, die mit α gleichzeitig verschwindenden Werthe von β beziehen, immer eine gewisse Anzahl cyklischer Systeme um den um Punkt A darstellen. Wenn wir andererseits auch auf die Fälle Rücksicht nehmen, wo sich nur ein System darbietet, wo verschiedene Systeme ungleich viel Terme umfassen, wo endlich Systeme durch isolirte Terme vertreten sind; wenn wir also sowol die Functionen $u_1, u_2, \ldots, u_p$, deren Anfangswerthe sämmtlich von b unendlich wenig verschieden sind, als auch die übrigen Functionen $u_{p+1}, u_{p+2}, \ldots,$ deren Anfangswerthe von den einfachen Wurzeln der Gleichung

$$f(u, a) = 0$$

sehr wenig abweichen und nach einem Umlauf des Punktes Z auf der Curve $CLMC$ wiederkehren, welche mithin als aus isolirten Termen bestehende Systeme erscheinen, ohne Unterschied zusammenfassen: so finden die gewonnenen Resultate ihren Ausdruck in folgendem Satze:

Die verschiedenen der Gleichung

$$f(u, z) = 0$$

genügenden Functionen $u_1, u_2, \ldots, u_m$ können immer als eine gewisse Anzahl cyklischer Systeme um den Punkt A dargestellt werden.

20. Nachdem wir diesen Satz festgestellt haben unter der Voraussetzung, dass die Gleichung (2), so wie auch die übrigen, den Polynomen $K_1, K_3, \ldots, K_\omega$ entsprechenden Gleichungen nur ungleiche Wurzeln besitzen, wollen wir gegenwärtig den Fall untersuchen, wo die Gleichung (2) t Wurzeln h_1 hat. In diesem Falle enthält jede der Formeln (3) t Näherungswerthe von β zugleich, und es ist dann erforderlich, dass man für die st Werthe von β, welche der Wurzel h_1 entsprechen, zu weiterer Näherung fortschreitet.

Zu diesem Zwecke setzen wir in die Gleichung (1) die Werthe

$$\alpha = \alpha'^s, \quad \beta = h_1^{\frac{1}{s}} \alpha'^r + \beta'$$

ein, wodurch sich eine Gleichung (1′) zwischen α' und β' ergibt, welche st unendlich kleine Werthe von β' liefert, deren Ordnung die Zahl r übersteigt, wenn hier α' als eine Grösse erster Ordnung betrachtet wird. Hiernach wenden wir auf die Gleichung (1′) dieselbe Methode an, deren wir uns zur Unterscheidung der Terme niedrigster Ordnung der Gleichung (1) bedienten, und finden alsdann zur genäherten Bestimmung von β' Gleichungen, welche

$$K_1 = 0, \; K_2 = 0, \ldots.$$

analog sind, von denen wir aber nur diejenigen beibehalten, welche für β' solche Werthe liefern, deren Ordnung die Zahl r übersteigt.

Eine dieser Gleichungen $K' = 0$ wird nun durch Substitution von $\beta'^{s'} = \alpha'^{r'} x'$ für zwei passend gewählte ganze Zahlen r' und s' die der Gleichung (2) analoge Form

$$(2') \qquad A' x'^{\varphi'} + B' x'^{\psi'} + \ldots = 0$$

erhalten, für die wir jetzt voraussetzen wollen, dass keine gleichen Wurzeln vorhanden sind. Bezeichnen wir mit h' eine der Wurzeln, so finden sich unter den in Rede stehenden st Werthen von β folgende ss' Näherungswerthe:

$$\alpha'^s = \alpha, \quad \beta'^{s'} = \alpha'^{r'} h', \quad \beta = h_1^{\frac{1}{s}} \alpha'^r + \beta',$$

welche auch durch folgende Gleichung gegeben sind:

$$\beta = h_1^{\frac{1}{s}} \varrho^{\frac{r}{s}} e^{\frac{r(\tau + 2k\pi)}{s} i} + h' \varrho^{\frac{r'}{ss'}} e^{\frac{r'\left(\frac{\tau + 2k\pi}{s} + 2k'\pi\right)}{s'} i},$$

wo k alle ganzen Zahlen von 0 bis $s-1$ und k' alle Zahlen von 0 bis $s'-1$ durchläuft. Bezeichnen wir die rechte Seite mit $\beta_{k,k'}$, so lassen sich daher die ss' genügenden Werthe in folgender Ordnung cyklisch aufstellen:

$$(3')\left\{\begin{array}{l}\beta_{0,0},\quad \beta_{1,0},\quad \beta_{2,0},\ldots,\quad \beta_{s-1,0},\quad \beta_{0,1},\quad \beta_{1,1},\quad \beta_{2,1},\ldots,\\ \beta_{s-1,1},\quad \beta_{0,2},\ldots,\quad \beta_{0,s'-1},\quad \beta_{1,s'-1},\quad \beta_{2,s'-1},\ldots,\quad \beta_{s-1,s'-1}.\end{array}\right.$$

Da nun diese Werthe von β nach einem in directem Sinne auf der Curve $CLMC$ vollbrachten Umlaufe von Z, während der Winkel τ bis 2π anwächst und jeder der vorstehenden Werthe von β dem Anfangswerthe des folgenden gleich wird, ein cyklisches System bilden; so entsprechen den verschiedenen Wurzeln h' der Gleichung (2′) ebenfalls cyklische Werthsysteme von β, und folglich hat der am Schlusse von Nr. 19 aufgestellte Satz auch in dem soeben betrachteten Falle seine volle Gültigkeit.

Sollte die Gleichung (2′) selbst g l e i c h e W u r z e l n besitzen, etwa die t'-fache Wurzel von h', so würden dieser $ss't'$ Werthe von β entsprechen, und es würde jeder der Ausdrücke (3′) als Näherungswerth von t' derselben erscheinen. Durch Substitution von

$$\alpha=\alpha'^{s}=\alpha''^{ss'},\ \beta=h_1^{\frac{1}{s}}\alpha''^{rs'}+h'^{\frac{1}{s'}}\alpha''^{r'}+\beta''$$

in die Gleichung (1) würde sich alsdann eine Gleichung (1″) zwischen α'' und β'' ergeben, welche für β'' eine Reihe von $ss't'$ unendlich kleinen Werthen liefert, deren Ordnung die Zahl r' übersteigt, wenn α'' als eine Grösse erster Ordnung angesehen wird. Die weitere Ausführung dieser Methode würde schliesslich zu abgesonderten Näherungsformeln für sämmtliche unendlich kleine Werthe von β führen müssen, weil sonst Werthe von β einander gleich sein würden, wie gross auch α sein mag, d. h. gleiche Werthe von u vorhanden wären, was auch z sein mag, und folglich die Gleichung

$$f(u,z)=0$$

nicht irreductibel sein würde. Zugleich erkennen wir aus der Form der Näherungswerthe, dass sich die Werthe von β immer als cyklische Systeme darstellen werden. Somit ist endlich für alle Fälle die Gültigkeit des in Nr. 19 aufgestellten Satzes dargethan.

21. Wir haben durch die vorstehende Auseinandersetzung bewiesen, dass die mit $u_1, u_2, \ldots, u_p$ bezeichneten Functionen von z immer in eine gewisse Anzahl cyklischer Systeme zerfallen, und ferner eine Methode zur Darstellung derselben mitgetheilt; es wird nun von Nutzen sein zu zeigen, dass sich diese Functionen mit Hilfe derselben Methode in convergente, nach den gebrochenen Potenzen von $z-a$ fortschreitende Reihen entwickeln lassen.

Wenn die Zahl p gleich Eins ist, so gelangt man wieder zu dem in Nr. 14 bereits behandelten Falle, wo die Entwickelung der Function u_1 nach den ganzen Potenzen von $z-a$ aufsteigt. Wir schreiten gleich zu dem Falle in Nr. 18, wo p eine beliebige Zahl ist, während die Ableitung $\dfrac{\partial f(u,z)}{\partial z}$ für $u=b$, $z=a$ nicht verschwindet. Mit Beibehaltung der in dieser Nummer geltenden Bezeichnungen geben wir der Gleichung (1) folgende Form:

$$A\beta^p + B\alpha + \Sigma C\beta^q\alpha^r = 0,$$

wo r nicht Null sein kann, wenn q grösser als p ist, und wo q nicht Null sein kann, wenn r die Einheit übersteigt. Führen wir durch Substitution von $\alpha = \alpha'^p$ und $\beta = \alpha' v$ einerseits eine neue Variable α' ein, deren Ordnung mit der Ordnung der p unendlich kleinen Werhe von β übereinstimmt, und andererseits die Function v, welche demgemäss p correspondirende Werthe von endlicher Grösse erhält, dividiren hierauf durch α'^p; so geht die Gleichung (1) in folgende über:

$$(4) \qquad Av^p + B + \Sigma Cv^q\alpha'^{(r-1)p+q} = 0,$$

welche, da offenbar der Exponent $(r-1)p+q$ wenigstens gleich Eins ist, für $\alpha'=0$ die p endlichen und ungleichen, in $\sqrt[p]{-\dfrac{B}{A}}$ enthaltenen Werthe $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p$ von v liefert. Diejenige der Gleichung (4) genügende stetige Function v_n von α', welche für $\alpha'=0$ den Werth γ_n annimmt, kann nun nach Nr. 14

in eine convergente, nach den ganzen Potenzen von α' aufsteigende Reihe

$$v_n = \gamma_n + \mathfrak{a}_n\alpha' + \mathfrak{b}_n\alpha'^2 + \mathfrak{c}_n\alpha'^3 + \ldots,$$

entwickelt werden, wo die Coefficienten $\mathfrak{a}_n$, $\mathfrak{b}_n$, $\mathfrak{c}_n$, ... rationale Functionen von γ_n und von den Coefficienten der Gleichung (4) sind, die sich mit Hilfe des Taylor'schen Satzes leicht berechnen lassen, vorausgesetzt, dass die Norm von α' die kleinste der Normen solcher von Null verschiedenen Werthe von α', für welche die Gleichung (4) vielfache, oder unendliche Wurzeln besitzt, nicht übersteigt. Somit hat man für den correspondirenden Werth β_n von β die Reihe

$$\beta_n = \gamma_n\alpha' + \mathfrak{a}_n\alpha'^2 + \mathfrak{b}_n\alpha'^3 + \mathfrak{c}_n\alpha'^4 + \ldots$$

oder

$$\beta_n = \gamma_n\alpha^{\frac{1}{p}} + \mathfrak{a}_n\alpha^{\frac{2}{p}} + \mathfrak{b}_n\alpha^{\frac{3}{p}} + \mathfrak{c}_n\alpha^{\frac{4}{p}} + \ldots,$$

welche gültig ist, so lange die Norm von α die kleinste Norm solcher von Null verschiedenen Werthe von α, für welche die Gleichung (1) vielfache Wurzeln besitzt, nicht übersteigt, da die Norm von α gleichzeitig mit der von α' zu- oder abnimmt. So lange also der Punkt Z innerhalb desjenigen Kreises bleibt, welcher um den Punkt A mit der kleinsten der Längen AA', AA'', ... als Radius beschrieben ist, gilt die Gleichung

$$u_n = \gamma_n(z - a)^{\frac{1}{p}} + \mathfrak{a}_n(z-a)^{\frac{2}{p}} + \mathfrak{b}_n(z-a)^{\frac{3}{p}} + \mathfrak{c}_n(z-a)^{\frac{4}{p}} + \ldots,$$

wo der Index n alle ganzen Zahlen von 1 bis p zu durchlaufen hat, damit alle p Funktionen u_1, u_2 ....., u_p durch convergente Reihen ausgedrückt werden, welche nach den gebrochenen Potenzen von $z - a$ fortschreiten.

22. Wir wollen jetzt wie in Nr. 19 voraussetzen, dass die Ableitung $\frac{\partial f(u,z)}{\partial z}$ für $u = b$, $z = a$ verschwindet, dass also der Term $B\alpha$ in der Gleichung (1) fehlt. Wenn wir insbesondere die $s\varphi$ unendlich kleinen Näherungswerthe von β, welche die Gleichung

$$K_2 = 0$$

liefert, ins Auge fassen, mit Rücksicht darauf, dass die Gleichung (1), der dieselben in aller Strenge genügen, die Form

$$K_2 + \Sigma C \beta^k \alpha^l = 0,$$

annimmt, wo die Terme der Summe Σ von höherer Ornung sind als die von K_2, wenn α von der ersten und β von der Ordnung $\mu = \frac{r}{s}$ ist; so ergeben sich die Relationen

$$\frac{r}{s} k + l > \frac{r}{s} p_\eta + q_\eta$$

oder

$$r(k - p_\eta) + s(l - q_\eta) > 0.$$

Setzen wir nun $\alpha = \alpha'^s$, wodurch die Uebereinstimmung der Ordnungen von α'^r und der in Rede stehenden Werthe von β herbeigeführt ist, und dann $\beta = \alpha'^r v$, wo v eine Function bezeichnet, die $s\varphi$ correspondirende Werthe von endlicher Grösse erhält; so verwandelt sich die Gleichung (1), nachdem durch $\alpha'^{rp_\eta + sq_\eta}$ dividirt worden, in:

$$A^{(\eta)} v^{p_\eta} A + {}^{(\Theta)} v^{p_\Theta} + \dots + A^{(\iota)} v^{p_\iota} + \Sigma C v^k \alpha'^{r(k - p_\eta) + s(l - q_\eta)} = 0$$

oder, wenn mit σ eine Zahl bezeichnet wird, die grösser oder wenigstens eben so gross als die Einheit ist, in

$$(5) \quad v^{p_\iota} \left(A^{(\eta)} v^{s\varphi} + A^{(\Theta)} v^{s\psi} + \dots + A^{(\iota)} \right) + \Sigma C v^k \alpha'^\sigma = 0,$$

und alsdann für α' 0 in die Gleichung

$$(6) \quad A^{(\eta)} v^{s\varphi} + A^{(\Theta)} v^{s\psi} + \dots + A^{(\iota)} = 0,$$

die für v offenbar $s\varphi$ endliche, von Null verschiedene Werthe γ_1, $\gamma_2, \dots, \gamma_{s\varphi}$ liefert, nämlich die verschiedenen in den Wurzeln $\sqrt[s]{h_1}$, $\sqrt[s]{h_2}, \dots, \sqrt[s]{h_\varphi}$ enthaltenen, wo h_1, $h_2, \dots, h_\varphi$ wieder die Wurzeln der Gleichung (2) vorstellen. Sind nun, was jetzt vorausgesetzt wird, diese sämmtlich ungleich, so sind es auch jene.

Für die sich aus der Gleichung (5) ergebende stetige Function v_n von α', welche für $\alpha' = 0$ den Werth γ_n annimmt, erhalten wir nach Nr. 14 folgende convergente, nach den ganzen Potenzen von α' fortschreitende Entwickelung:

$$v_n = \gamma_n + \mathfrak{a}_n \alpha' + \mathfrak{b}_n \alpha'^2 + \dots,$$

deren Gültigkeit an die Bedingung gebunden ist, dass die Norm von α' die kleinste derjenigen Normen, welche den vielfachen oder unendlich grossen Wurzeln der Gleichung (5) entsprechenden, von Null verschiedenen Werthen von α' angehören, nicht übersteigt. Bezeichnet β_n den correspondirenden Werth von β, so ist daher auch

$$\beta_n = \gamma_n \alpha'^r + \mathfrak{a}_n \alpha'^{r+1} + \mathfrak{b}_n \alpha'^{r+2} + \ldots.$$

oder

$$\beta_n = \gamma_n \alpha^{\frac{r}{s}} + \mathfrak{a}_n \alpha^{\frac{r+1}{s}} + \mathfrak{b}_n \alpha^{\frac{r+2}{s}} + \ldots.$$

Demnach werden diejenigen der Functionen $u_1, u_2, \ldots, u_p$, welche durch die Gleichung

$$K_2 = 0$$

näherungsweise bestimmt sind, durch folgende Reihe ausgedrückt:

$$\gamma_n (z-a)^{\frac{r}{s}} + \mathfrak{a}_n (z-a)^{\frac{r+1}{s}} + \mathfrak{b}_n (z-a)^{\frac{r+2}{s}} + \ldots,$$

wo der Index n alle ganzen Zahlen von 1 bis p durchlaufen muss. Die hierdurch gewonnenen Formeln sind also gültig, so lange der Punkt Z innerhalb des um den Punkt A beschriebenen Kreises bleibt, dessen Radius der kleinsten von den Längen AA', AA''.... gleich ist.

23. Sollte nun die Gleichung (2), wie in Nr. 20, t Wurzeln gleich h_1, die Gleichung (2') aber nur ungleiche Wurzeln besitzen, so würde sich herausstellen, wenn wir die in dieser Nummer geltenden Bezeichnungen beibehalten, dass diejenigen den Werthen von β' correspondirenden Functionen v, welche der Gleichung

$$K' = 0$$

näherungsweise genügen, ebenfalls für $\alpha'' = 0$ endliche, ungleiche Werthe haben und nach den Potenzen von α'' entwickelt werden können. Es werden also die correspondirenden Werthe von β durch Reihen von der Form

$$h_1^{\frac{1}{s}} \alpha'^r + \gamma_n \alpha''^{r'} + \mathfrak{a}_n \alpha''^{r'+1} + \mathfrak{b}_n \alpha''^{r'+2} + \ldots.$$

$$= h_1^{\frac{1}{s}} \alpha''^{rs'} + \gamma_n \alpha''^{r'} + \mathfrak{a}_n \alpha''^{r'+1} + \mathfrak{b}_n \alpha''^{r'+2} + \ldots.$$

und folglich die der Gleichung

$$K' = 0$$

genügenden Functionen unter $u_1, u_2, \ldots, u_p$ durch Reihen von der Form

$$h_1^{\frac{1}{s}}(z-a)^{\frac{rs'}{ss'}} + \gamma_n(z-a)^{\frac{r'}{ss'}} + \mathfrak{a}_n(z-a)^{\frac{r'+1}{ss'}} + \mathfrak{b}_n(z-a)^{\frac{r'+2}{ss'}} + \ldots$$

ausgedrückt.

Falls die Gleichung (2′) selbst gleiche Wurzeln hätte, so würde man durch weitere Ausführung dieser Methode zuletzt zu einer den Gleichungen (2) und (2′) analogen Gleichung gelangen, die keine vielfachen Wurzeln mehr besitzt. Man wird auf diese Weise für alle Functionen $u_1, u_1, \ldots, u_p$ Reihenentwickelungen finden, welche nach den gebrochenen Potenzen von $z-a$ fortschreiten und gültig sind, so lange der Punkt Z innerhalb eines um den Punkt A beschriebenen Kreises bleibt, dessen Radius kleiner ist, als die kürzeste der Längen AA', AA'', ...

Wir sehen also, dass die Function u_n, welche einem cyklischen Systeme von μ Termen um den Punkt A angehört, immer innerhalb der eben angegebenen Grenzen in eine convergente, nach den ganzen Potenzen von $(z-a)^{\frac{1}{\mu}}$ fortschreitende Reihe entwickelt werden kann, oder mit andern Worten, dass der Nenner der gebrochenen Exponenten von $z-a$, welche diese Entwickelung enthält, der Anzahl der Umläufe gleich ist, die der Punkt Z auf einer unendlich kleinen geschlossenen Curve um den Punkt A vollbringen muss, damit die Function u_n ihren Anfangswerth wieder annimmt. Es mag beiläufig bemerkt werden, dass man sich bei der Beschränkung auf die vorhin dargelegte Berechnungsweise jenes Nenners, dann auch der Methode der unbestimmten Coefficienten bei den in Rede stehenden Reihen bedienen kann.

24. Um diesen Gang deutlicher hervortreten zu lassen, wollen wir einige Beispiele ausführlicher behandeln; wir wählen zuerst die binomische Gleichung

$$u^m - (z-a)(z-a')(z-a'')\ldots = 0,$$

wo die Grössen $a, a', a'', \ldots$ sämmtlich ungleich sein sollen.

Da alle hieraus entspringenden Werthe von u für $z = a$ gleich Null sind, und ferner die Ableitung $\frac{\partial f(u,z)}{\partial z}$ für $u = 0$, $z = a$ nicht verschwindet, sondern sich auf die Grösse $-(a-a')(a-a'')\ldots.$ reducirt, so erblicken wir hierin den Fall von Nr. 18 und schliessen demnach, dass die m Werthe von u nur ein cyklisches System um den Punkt A bilden und durch convergente, nach den ganzen Potenzen von $(z-a)^{\frac{1}{m}}$ aufsteigende Reihen dargestellt werden können, so lange der Punkt Z innerhalb eines Kreises bleibt, dessen Mittelpunkt A, und dessen Radius die kleinste der Längen AA', AA'', ... ist.

25. Als zweites Beispiel diene die Gleichung

$$u^m - (z-a)^l (z-a')^{l'} (z-a'')^{l''} \ldots. = 0,$$

wo die Grössen $a, a', a'', \ldots.$ wiederum sämmtlich ungleich sein sollen und der Exponent l grösser als Eins ist. Dass hier die m Werthe von u für $z = a$ sämmtlich Null sind und ferner die Ableitung $\frac{\partial f(u,z)}{\partial z}$ für $z = a$ verschwindet, ist charakteristisch für den Fall von Nr. 19. Setzt man also

$$z = a + \alpha, \quad u = \beta,$$

so verwandelt sich die gegebene Gleichung in

$$\beta^m - \alpha^l (a - a' + \alpha)^{l'} (a - a'' + \alpha)^{l''} \ldots. = 0,$$

mithin ist das Polynom $\mathcal{A}$ von Nr. 19 bloss $\beta^m - \mathrm{B}\alpha^l$, wo der Kürze wegen

$$(a-a')^{l'} (a-a'')^{l''} \ldots. = \mathrm{B}$$

gesetzt worden, und folglich reduciren sich die Klassen K_1, K_2, ... auf die eine Klasse $\beta^m - \mathrm{B}\alpha^l$; ferner geht hier, wenn φ den grössten gemeinschaftlichen Factor von m und l, ausserdem s den Quotienten $\frac{m}{\varphi}$ bezeichnet, die Gleichung (2) derselben Nummer über in:

$$x^{\varphi} - \mathrm{B} = 0.$$

Da diese keine vielfachen Wurzeln besitzt, so folgt, dass die m Werthe von u sich in φ cyklische Systeme von je s Termen um den Punkt A theilen und nach den ganzen Potenzen von $(z-a)^{\frac{1}{s}}$ entwickelt werden können, so lange der Punkt Z innerhalb eines wie früher bestimmten Kreises bleibt.

26. Wir wollen drittens die Gleichung

$$u^3 - u + z = 0,$$

betrachten, welche für $z = +\frac{2}{3\sqrt{3}}$ eine doppelte Wurzel gleich $+\frac{1}{\sqrt{3}}$ und eine einfache Wurzel gleich $-\frac{2}{\sqrt{3}}$ besitzt; es bezeichne hier A den $z = +\frac{2}{3\sqrt{3}}$ entsprechenden Punkt, ferner C den unendlich nahe liegenden Ausgangsort von Z, und u_1, u_2, u_3 seien drei der gegebenen Gleichung genügende Functionen, von denen die zwei ersten unendlich wenig von $+\frac{1}{\sqrt{3}}$ abweichende Werthe haben, während der Anfangswerth der dritten unendlich wenig von $-\frac{2}{\sqrt{3}}$ verschieden ist. Sobald nun Z den Punkt A auf der unendlich kleinen Curve $CLMC$ (Fig. 9) umkreiset und nach C zurückkehrt, nimmt die Function u_3 zufolge Nr. 7 ihren Anfangswerth wieder an, während sich in Betreff der beiden andern Functionen u_1 und u_2, weil die Ableitung $\frac{\partial f(u,z)}{\partial z}$ den Werth $+1$ erhält, der Fall von Nr. 18 darbietet, nämlich eine cyklische Vertauschung der Art, dass jede nach vollbrachtem Umlauf von Z in den Anfangswerth der andern übergeht.

Demnach lassen sich diese beiden Functionen (Nr. 21) nach den ganzen Potenzen von $\left(z - \frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$ in Reihen entwickeln; wir setzen zu diesem Zwecke, der oben angegebenen Methode folgend,

$$z = \frac{2}{3\sqrt{3}} + \alpha,\ u = \frac{1}{\sqrt{3}} + \beta$$

und erhalten dann

$$\sqrt{3}\,\beta^2 + \beta^3 + \alpha = 0$$

oder, $\alpha = \alpha'^2$, $\beta = \alpha' v$ gesetzt,

$$\sqrt{3}\,v^2 + 1 + \alpha' v^3 = 0.$$

Sind nun v_1 und v_2 diejenigen Werthe von v, welche sich für $\alpha' = 0$ bezüglich auf die endlichen Grössen $+\frac{i}{\sqrt[4]{3}}$ und $-\frac{i}{\sqrt[4]{3}}$ reduciren, so ergibt sich die nach den ganzen Potenzen von α' aufsteigende Entwickelung von v_1, wenn wir in jener Gleichung zuerst

$$v = +\frac{i}{\sqrt[4]{3}} + \mathrm{A}\alpha' + \mathrm{B}\alpha'^2 + \mathrm{C}\alpha'^3 + \ldots.$$

und dann die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von α' gleich Null setzen, um zugleich die Werthe der Coefficienten A, B, C,.... zu erhalten. Wir finden nämlich

$$v_1 = +\frac{i}{\sqrt[4]{3}} + \tfrac{1}{6}\alpha' - \frac{5i}{24(\sqrt[4]{3})^3}\alpha'^2 - \frac{1}{9\sqrt{3}}\alpha'^3 + \frac{77i}{1152\sqrt[4]{3}}\alpha'^4$$
$$+ \frac{7}{162}\alpha'^5 - \ldots.,$$

woraus durch Aenderung des Vorzeichens von i die Reihe für die Function v_2 abgeleitet werden kann. Somit ist

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{i}{\sqrt[4]{3}}\left(z - \frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{6}\left(z - \frac{2}{3\sqrt{3}}\right) - \frac{5i}{24(\sqrt[4]{3})^3}\left(z - \frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$
$$- \frac{1}{9\sqrt{3}}\left(z - \frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{77i}{1152\sqrt[4]{3}}\left(z - \frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{162}\left(z - \frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^3 - \ldots.,$$

und hieraus gewinnen wir durch Aenderung des Vorzeichens von i die Reihe für u_2.

Da übrigens die gegebene Gleichung nur für die Werthe $z = +\frac{2}{3\sqrt{3}}$, $z = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$ vielfache Wurzeln besitzt, so ist die gefundene Reihe gültig, so lange die Norm von $z - \frac{2}{3\sqrt{3}}$ kleiner ist, als die Differenz jener beiden Werthe, d. h. $\frac{4}{3\sqrt{3}}$, oder so lange der Punkt Z innerhalb des um den Punkt A mit dem Radius $\frac{4}{3\sqrt{3}}$ beschriebenen Kreises bleibt.

Auch die Function u_3 lässt sich innerhalb derselben Grenzen nach den ganzen Potenzen von $z - \frac{2}{3\sqrt{3}}$ entwickeln; man findet ohne Mühe

$$u_3 = -\frac{2}{\sqrt{3}} - \tfrac{1}{3}\left(z - \frac{2}{3\sqrt{3}}\right) + \frac{2}{9\sqrt{3}}\left(z - \frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^2 - \tfrac{7}{81}\left(z - \frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^3$$
$$- \frac{10}{81\sqrt{3}}\left(z - \frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^4 + \ldots.$$

27. Wir wollen endlich noch folgende Gleichung behandeln:

$$A(u-b)^7 + B(u-b)^5(z-a) + C(u-b)^4(z-a)^4 + D(u-b)^2(z-a)^5$$
$$+ E(u-b)(z-a)^7 + F(z-a)^9 + G(u-b)^8 + H(u-b)^4(z-a)^5$$
$$+ I(z-a)^{10} = 0,$$

wo die Coefficienten A, B, C, D, E, F von Null verschieden sein sollen.

Da sich für $z = a$ sieben Wurzeln gleich b ergeben und der Ausgangsort C von Z dem $z = a$ entsprechenden Punkte A unendlich nahe liegt, so sind es sieben Functionen von z, welche der Gleichung genügen und unendlich wenig von b abweichende Anfangswerthe besitzen. Es fragt sich nun, welche Verwandlungen der Werthe dieser Functionen durch einen Umlauf von Z auf einer unendlich kleinen, um den Punkt A beschriebenen geschlossenen Curve $CLMC$ (Fig. 9) herbeigeführt werden.

Weil hier die Ableitung $\dfrac{\partial f(u,z)}{\partial z}$ für $z = a$, $u = b$ verschwindet, so setzen wir wie in Nr. 19:

$$z = a + \alpha,\quad u = b + \beta$$

und erhalten dann aus der gegebenen Gleichung:

$$A\beta^7 + B\beta^5\alpha + C\beta^4\alpha^4 + D\beta^2\alpha^5 + E\beta\alpha^7 + F\alpha^9 + G\beta^8 + H\beta^4\alpha^5$$
$$+ I\alpha^{10} = 0;$$

dabei sind in dem Polynom Δ folgende Terme begriffen:

$$A\beta^7 + B\beta^5\alpha + C\beta^4\alpha^4 + D\beta^2\alpha^5 + E\beta\alpha^7 + F\alpha^9,$$

welche den Punkten $M_0, M_1, \ldots, M_5$ bezüglich entsprechen, deren Coordinaten

$$x_0 = 7,\ x_1 = 5,\ x_2 = 4,\ x_3 = 2,\ x_4 = 1,\ x_5 = 0,$$
$$y_0 = 0,\ y_1 = 1,\ y_2 = 4,\ y_3 = \ ,\ y_4 = 7,\ y_5 = 0$$

sind. Da nun die Linie M_0O, wie sich zeigt, bei der Drehung um den Punkt M_0 in solchem Sinne, dass dieselbe immer den positiven

Theil der y-Axe schneidet, zuerst dem Punkte M_1, sodann bei der Drehung um M_1 zuerst dem Punkte M_3 und endlich bei der Drehung um M_3 den Punkten M_4 und M_5 zu gleicher Zeit begegnet; so ergeben sich folgende drei Klassen:

$$K_1 = \mathrm{A}\beta^7 + \mathrm{B}\beta^5\alpha,$$
$$K_2 = \mathrm{B}\beta^5\alpha + \mathrm{D}\beta^2\alpha^5,$$
$$K_3 = \mathrm{D}\beta^2\alpha^5 + \mathrm{E}\beta\alpha^7 + \mathrm{F}\alpha^9.$$

Für die erste hat man also

$$s = 2,\ \varphi = 1,$$

daher an Stelle der Gleichung (2) in Nr. 19:

$$\mathrm{A}x + \mathrm{B} = 0,$$

und folglich entsprechen dieser Klasse zwei Functionen u von z, welche ein cyklisches System um den Punkt A bilden und innerhalb gewisser Grenzen in convergente, nach den ganzen Potenzen von $(z - a)^{\frac{1}{2}}$ aufsteigende Reihen entwickelt werden können.

Für die zweite Klasse ist

$$s = 3,\ \varphi = 1,$$

also gilt an Stelle der Gleichung (2) folgende:

$$\mathrm{B}x + \mathrm{D} = 0,$$

demnach entspricht dieser Klasse ein cyklisches System von drei Functionen, deren jede sich nach den ganzen Potenzen von $(z - a)^{\frac{1}{3}}$ entwickeln lässt.

Für die dritte Klasse hat man

$$s = 1,\ \varphi = 2,$$

mithin an Stelle der Gleichung (2):

$$\mathrm{D}x^2 + \mathrm{E}x + \mathrm{F} = 0.$$

Nehmen wir zunächst an, dass diese Gleichung nur ungleiche Wurzeln besitzt, so entsprechen dieser Klasse zwei cyklische Systeme von je einem Term, d. h. zwei Functionen von z, deren jede nach einem Umlauf von Z ihren eignen Anfangswerth wieder erhält und somit nach den ganzen Potenzen von $z - a$ entwickelt werden kann. Nehmen wir dafür an, dass die Wurzeln der Gleichung (2) zusammenfallen, also die simultanen Gleichungen:

$$Dh^2 + Eh + F = 0 \text{ und } 2Dh + E = 0$$

so begegnen wir dem Falle in Nr. 20. Weil alsdann

$$r = 2,\ s = 1$$

ist, substituiren wir in der zwischen α und β stattfindenden Gleichung

$$\alpha = \alpha',\ \beta = h\alpha'^2 + \beta';$$

zuvor bringen wir nämlich dieselbe in die Form

$$\alpha^5 (D\beta^2 + E\beta\alpha^2 + F\alpha^4) + A\beta^7 + B\beta^5\alpha + C\beta^4\alpha^4 + G\beta^8 + H\beta^4\alpha^5 + I\alpha^{10} = 0$$

und erhalten dann:

$$D\beta'^2\alpha^5 = A(h^7\alpha^{14} + \ldots) + B(h^5\alpha^{11} + \ldots) + C(h^4\alpha^{12} + \ldots) + G(h^8\alpha^{16} + \ldots) + H(h^4\alpha^{13} + \ldots) + I\alpha^{10} = 0,$$

wo α statt α' geblieben ist und ausserdem, wofern die Ordnung von β' die von α^2 übersteigt, die vernachlässigten Terme in jeder Parenthese von höherer Ordnung sind, als der beibehaltene Term. Wir sehen, dass sich die Klassen K' nur auf die eine

$$D\beta'^2\alpha^5 + I\alpha^{15}$$

reduciren, wo I nicht Null ist; ferner, da hier

$$r' = 5,\ s' = 2,\ \varphi' = 1$$

ist, mithin an Stelle der Gleichung (2') die Gleichung ersten Grades

$$Dx' + I = 0$$

eintritt, wo von gleichen Wurzeln nicht die Rede sein kann, und da überdiess

$$ss' = 2$$

ist, dass die beiden der Klasse K_3 entsprechenden Werthe von u nur e i n cyklisches System bilden und nach den ganzen Potenzen von $(z - a)^{\frac{1}{2}}$ entwickelt werden können. Wäre dagegen der Coefficient I gleich Null, so würde sich die Klasse K' in

$$D\beta'^2\alpha^5 + Bh^5\alpha^{14}$$

verwandeln, und ferner hätte man

$$r' = 3,\ s' = 1,\ \varphi' = 2,$$

also an Stelle der Gleichung (2'):

$$Dx'^2 + Bh^5 = 0.$$

Weil hier die Wurzeln ungleich sind und das Product ss' gleich Eins ist, so muss offenbar jeder der Klasse K_3 entsprechende Werth von u im gegenwärtigen Falle nach einem Umlauf von Z seinen eignen Anfangswerth wieder erhalten und sich alsdann in eine nach den ganzen Potenzen von $z-a$ aufsteigende Reihe entwickeln lassen.

28. An die bisherigen Untersuchungen über die Vertauschungen der Werthe der Functionen $u_1, u_2, \ldots, u_p$, welche durch einen Umlauf des Punktes Z auf einer unendlich kleinen um den Punkt A beschriebenen Curve hervorgerufen werden, schliesst sich die Betrachtung eines neuen Falles.

Es sei der Ausgangsort von Z der Punkt C, welcher einem beliebigen Werthe c von z entspricht, für den jedoch die Gleichung

$$f(u,c)=0$$

keine vielfachen Wurzeln besitzt; ferner seien wie immer A, A', A'', ... die den Werthen a, a', a'', ... von z entsprechenden Punkte, für welche die Gleichung

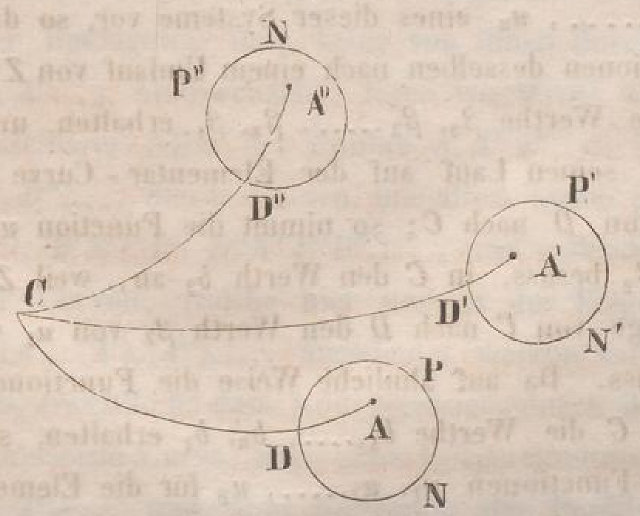
$$f(u,z)=0$$

vielfache Wurzeln liefert, und zwar mag die Gleichung

$$f(u,a)=0$$

p Wurzeln gleich b besitzen. Denken wir uns jetzt den Punkt A mit C durch eine zwar beliebige Curve CDA (Fig. 12) verbunden,

Fig. 12.



welche indessen durch keinen der Punkte $A, A', A'', \ldots$ hindurchgeht; bezeichnen wir nun mit $u_1, u_2, \ldots, u_p$ diejenigen der Gleichung

$$f(u,z) = 0$$

genügenden Functionen von z, welche in A den gemeinschaftlichen Werth b erhalten, sobald Z von C aus, wo die Anfangswerthe derselben $b_1, b_2, \ldots, b_p$ sein mögen, den Weg CDA zurückgelegt hat; und legen wir ferner durch einen in unmittelbarer Nähe von A befindlichen Punkt D dieser Curve eine unendlich kleine geschlossene Curve $DNPD$ mit einfachem Umgange um den Punkt A: so soll die aus der Curve CD der unendlich kleinen Curve DNP und schliesslich der Curve DC bestehende Linie den Namen *Elementar-Curve* führen. Es wird also der Punkt Z bei Durchlaufung derselben die Curve CD zweimal, aber in entgegengesetztem Sinne beschreiben.

Um nun zu sehen, wie sich die Functionen $u_1, u_2, \ldots, u_p$ verhalten, nachdem Z auf einer solchen Curve einen Umlauf gemacht hat, bezeichnen wir zunächst die Werthe derselben, welche Z beim ersten Eintreffen in D herbeiführt, mit $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$. Von hier aus durchläuft der bewegliche Punkt die unendlich kleine Curve $DNPD$, während nun, wie wir bewiesen haben, den Functionen $u_1, u_2, \ldots, u_p$ die Eigenschaft zu Theil wird, in eine gewisse Anzahl cyklischer Systeme um den Punkt A zu zerfallen. Stellt $u_1, u_2, \ldots, u_n$ eines dieser Systeme vor, so dass die einzelnen Functionen desselben nach einem Umlauf von Z über $DNPD$ bezüglich die Werthe $\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n, \beta_1$ erhalten, und vollendet der Punkt Z seinen Lauf auf der Elementar-Curve durch den Uebergang von D nach C; so nimmt die Function u_1, die in D den Werth β_2 besass, in C den Werth b_2 an, weil Z bei umgekehrtem Gange von C nach D den Werth β_2 von u_1 wieder herbeiführen muss. Da auf ähnliche Weise die Functionen $u_2, \ldots, u_{n-1}, u_n$ in C die Werthe $b_3, \ldots, b_n, b_1$ erhalten, so kommen folglich den Functionen $u_1, u_2, \ldots, u_p$ für die Elementar-Curve

CDNPDC dieselben Eigenschaften zu, welche für die unendlich kleine Curve *DNPD* nachgewiesen wurden. Da in beiden Fällen sowol die Anzahl der cyklischen Systeme, als auch die Anordnung ihrer Terme, als ferner diese selbst durchaus übereinstimmen, so reicht es zur Auffindung dieser Systeme immer hin, die Näherungswerthe der Functionen u_1, u_2, ... für einen von a unendlich wenig abweichenden Werth von z nach der oben gegebenen Methode zu berechnen.

Was die Functionen u_{p+1}, u_{p+2}, ... betrifft, deren Werthe für den Punkt A nur **einfache** Wurzeln der Gleichung

$$f(u,a) = 0$$

sind, so ist aus N. 7 klar, dass eine jede derselben nach einem Umlauf von Z auf der Elementar-Curve *CDNPDC* bloss ihren Anfangswerth wieder annimmt.

29. Wenn der Punkt Z von C aus eine beliebig gestaltete geschlossene Curve um A beschreibt, welche sich jedoch ohne Ueberschreitung eines der Punkte A, A', A'', ... auf die Elementar-Curve *CDNPDC* reduciren lässt; so sind die Functionen u_1, u_2,.... zufolge Nr. 6 auf jener Curve genau denselben Vertauschungen unterworfen, wie auf der Elementar-Curve.

30. Denken wir uns zwischen dem Punkte C einerseits und den verschiedenen Punkten A, A', A'', ... andererseits beliebige Curven CDA, $CD'A'$, $CD''A''$, ... ausgedehnt (Fig. 12), mit Vorbehalt der Bedingung, dass keine von ihnen durch einen der Punkte A, A', A'', ... hindurchgeht; legen wir ferner wieder durch die in unmittelbarer Nähe der Punkte $A, A' A''$, ... befindlichen Punkte D, D', D'', ... dieser Curven unendlich kleine geschlossene Curven $DNPD$, $D'N'P'D'$, $D''N''P''D''$, ..., und vollenden wir dann die Elementar-Curven, welche hier und in der Folge durch die Bezeichnung (A), (A'), (A''), ... angedeutet werden sollen; so ist ohne Weiteres ersichtlich, dass jede gegebene, durch den Punkt C gehende geschlossene Curve stets ohne Ueberschreitung eines der Punkte A, A', A'', ... und ohne Verlegung des Punktes C durch

Fortschiebung in eine Reihe von Elementar-Curven verwandelt werden kann.

Von der Wahrheit dieser, bei einiger Aufmerksamkeit selbstverständlichen Behauptung werden wir uns sofort überzeugen. Da sich die Curve *CLMC* (Fig. 13.) auf die Elementar-Curve *CDNPDC*, d. h. (A), oder die Curve *CLMC* (Fig. 14.) auf die doppelt beschrie-

Fig. 13.

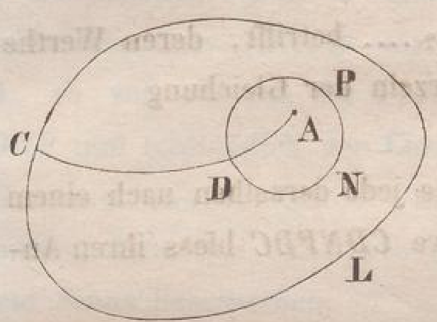
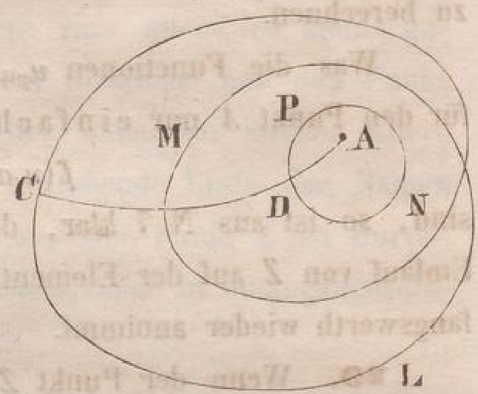
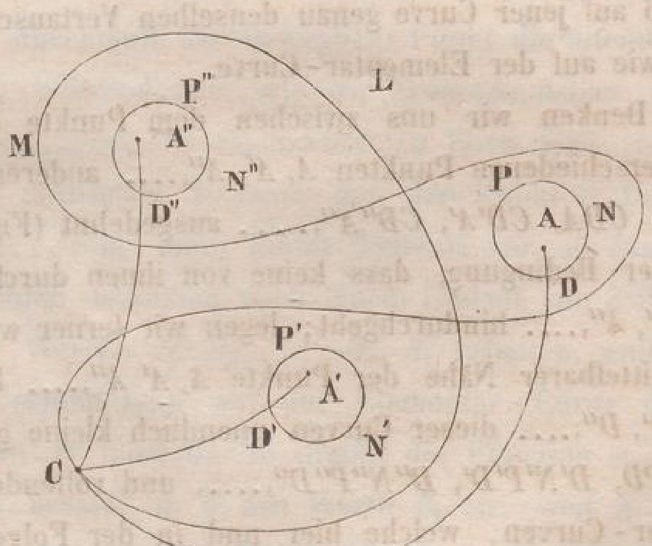


Fig. 14.



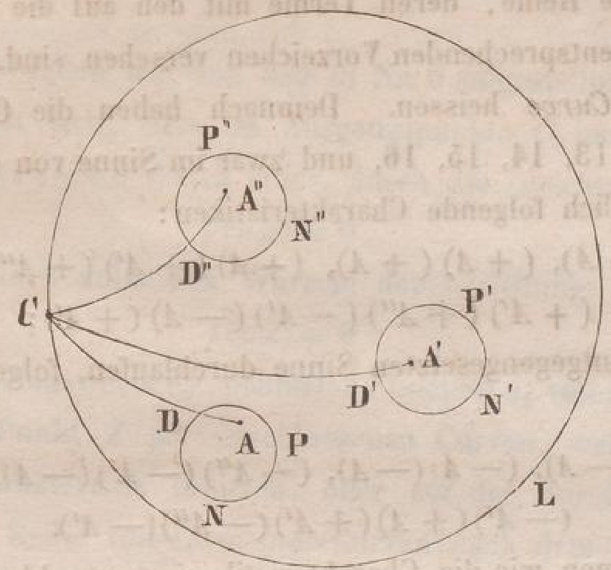
bene Curve (A), oder *CLMC* (Fig. 15.) auf die drei nach einander beschriebenen Elementar-Curven (A), (A'), (A''), oder endlich *CLMC*

Fig. 15



(Fig. 16.) auf die Curven-Reihe (A'), (A''), (A'), (A), (A') reduciren lässt; so ist, aus diesem Gesichtspunkte betrachtet, jede durch den Punkt *C* gehende geschlossene Curve durch diejenige Reihe von Elementar-Curven charakterisirt, mit welcher dieselbe zur Coincidenz gebracht werden kann.

Fig. 16.



Weil es jedoch wesentlich ist, dass der Sinn der Bewegung auf jeder Elementar-Curve mit angegeben wird, so wollen wir die Curve (A) durch $(+A)$, oder durch $(-A)$ bezeichnen, je nachdem sich der Punkt Z in directem, oder in umgekehrtem Sinne (Nr. 18) bewegt; gleichwol behalten wir die Bezeichnung (A) in denjenigen Fällen bei, wo es gleichgültig ist, wie der directe Sinn genommen wird. So reducirt sich die Curve $CLMC$ (Fig. 13.) auf $(+A)$, oder auf $(-A)$, je nachdem der Punkt Z im Sinne von $CLMC$, oder im Sinne von $CMLC$ fortgeht; desgleichen die Curve $CLMC$ (Fig. 16.) auf die Reihe $(+A')$, $(+A'')$, $(-A')$, $(-A)$, $(+A')$, wenn dieselbe im Sinne von $CLMC$, dagegen auf die Reihe $(-A')$ $(+A)$, $(+A')$, $(-A'')$, $(-A')$, wenn jene im entgegengesetzten Sinne durchlaufen wird. (Es mag hierbei bemerkt werden, dass man um die zweite Reihe aus der ersten abzuleiten, in allen Fällen nur die Ordnung und die Vorzeichen der Terme zugleich umzukehren braucht.)

Wenn nun eine durch den Punkt C gehende geschlossene Curve, welche in bestimmtem Sinne durchlaufen wird, wie übrigens auch ihre Gestalt beschaffen sein mag*), durch diejenige Reihe von Elementar-Curven repräsentirt wird, mit welcher dieselbe durch Verschiebung zur Coincidenz gebracht werden kann; so soll diese Reihe, deren Terme mit den auf die eben angegebene Weise entsprechenden Vorzeichen versehen sind, die *Charakteristik der Curve* heissen. Demnach haben die Curven $CLMC$ der Figuren 13, 14, 15, 16, und zwar im Sinne von $CLMC$ durchlaufen, bezüglich folgende Charakteristiken:

$$(+A),\ (+A)(+A),\ (+A)(+A')(+A''),$$
$$(+A')(+A'')(-A')(-A)(+A');$$

dagegen im entgegengesetzten Sinne durchlaufen, folgende Charakteristiken:

$$(-A),\ (-A)(-A),\ (-A'')(-A')(-A),$$
$$(-A')(+A)(+A')(-A'')(-A').$$

Bezeichnen wir die Charakteristik einer geschlossenen Curve, welche sich ohne Ueberschreitung eines der Punkte $A, A', A'', \ldots.$ auf einen blossen Punkt C reduciren lässt, mit (0), so ist klar, dass man eben so wol beliebig viele Terme (0) in der Charakteristik einer Curve an beliebigen Stellen einschalten, als auch unterdrücken darf.

Es ist leicht einzusehen, dass eine bestimmte Curve, während die Punkte $A, A', A'', \ldots.$ wie auch C und die Curven CDA, $CD'A'$ $CD''A'', \ldots.$ unverändert bleiben, nur eine Charakteristik zulässt (abgesehen von den Modificationen, welche die jederzeit unterdrückbaren Terme (0) erleiden können); ferner dass zwei Curven mit derselben Charakteristik immer mit einander zur Coincidenz gebracht werden können, ohne Ueberschreitung eines der Punkte $A, A', A'', \ldots.$; dass sich hingegen zwei im einen oder andern Sinne durchlaufene Curven mit verschiedenen Charakteristiken nicht auf einander reduciren lassen; dass endlich, wenn die

---

*) Es bleibt immer der Fall ausgeschlossen, dass diese Curve durch einen der Punkte $A, A', A'', \ldots$, hindurchgeht.

Curven CDA, $CD'A'$, $CD''A''$,.... eine Gestaltänderung erleiden, die Charakteristik einer gegebenen Curve dieselbe bleibt, so lange sich diese Aenderung nicht über einen der Punkte A, A', A'',.... hinaus erstreckt.

31. Wenden wir nun den in Nr. 6 aufgestellten Satz hierauf an, so ergibt sich, dass im Ausgangspunkte C immer nur ein und zwar derselbe Werth einer, durch die Gleichung

$$f(u,z) = 0$$

und durch einen unter den Wurzeln der Gleichung

$$f(u,c) = 0$$

gewählten Anfangswerth b_1, definirten Function u_1 von z wiederkehrt, so oft der Punkt Z auf geschlossenen Curven, welche eine und dieselbe Charakteristik besitzen, oder auf der durch diese selbst dargestellten Reihe von Elementar-Curven nach dem Punkte C zurückkehrt.

Somit kann der Werth jeder der m Functionen u_1, u_2,...., u_m von z, welche durch die Gleichung

$$f(u,z) = 0$$

und bezüglich durch die aus der Gleichung

$$f(u,c) = 0$$

entspringenden m Anfangswerthe b_1, b_2,...., b_m bestimmt sind, für den Punkt C gefunden werden, wenn die Charakteristik der von Z durchlaufenen geschlossenen Curve gegeben ist. Man ersetze nämlich die gegebene Curve durch die der Charakteristik entsprechende Reihe der Elementar-Curven und bestimme nun nach Nr. 28 den durch einen Umlauf des Punktes Z auf der ersten Elementar-Curve herbeigeführten Werth b_p von u_n, wozu schon die Kenntniss derjenigen Function hinreicht, welche der Function u_n in einem, auf den umkreiseten Punkt A, oder A',.... bezogenen cyklischen Systeme vorangeht, oder folgt; eben so ermittle man den Werth b_q, welchen die Functionen u_p nach Vollendung eines Umlaufs von Z auf der zweiten Elementar-Curve erhält, d. h. offenbar, welchen u_n nach Durchlaufung der beiden ersten Elementar-Curven annimmt; desgleichen suche man den Werth b_r, welchen u_q nach einem Umlauf von Z auf der dritten Elementar-Curve erhält, d. h. welcher u_n nach Durchlaufung der drei ersten Elementar-Curven zukommt. Fährt man so fort, so gelangt man schliesslich zu dem Werthe, welchen u_n erhält, sobald der Punkt Z seinen Umlauf über alle Elementar-Curven der Charakteristik, oder auch über die gegebene Curve selbst vollendet.

32. Als Beispiel diene uns wieder die Gleichung von Nr. 26:

$$u^3 - u + z = 0.$$

Da für zwei $z = +\frac{2}{3\sqrt{3}}$ und $z = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$ entsprechende Punkte der x-Axe A und A', welche zu beiden Seiten des Anfangspunktes der Coordinaten in der Entfernung $\frac{2}{3\sqrt{3}}$ liegen, zwei Wurzeln der Gleichung zusammenfallen, so wählen wir den Anfangspunkt zum Ausgangsorte C des Punktes Z, wo die drei der gegebenen Gleichung genügenden Functionen u_1, u_2, u_3 bezüglich die Anfangswerthe 0, $+1$, -1 besitzen und reell bleiben, wenn Z von C nach A auf der geraden Linie CA fortgeht; der Gleichung

$$\frac{du}{dz} = \frac{1}{1 - 3u^2}$$

gemäss wächst die Function u_1 an, während u_2 und u_3 abnehmen, bis für den Punkt A selbst

$$u_1 = u_2$$

geworden ist. Behalten wir die geraden Linien CA und CA' als die eigentlich messbaren (endlichen) Bestandtheile der Elementar-Curven (A) und (A') bei (Nr. 28), so bilden diese beiden Functionen u_1, u_2 nach Nr. 26 ein cyklisches System um jenen Punkt, indem jede nach einem Umlauf von Z auf der Elementar-Curve $(\pm A)$ den Anfangswerth der andern annimmt, während u_3 den eignen Anfangswerth wieder erhält. Eben so ergibt sich, dass jede der Functionen u_1, u_3 nach einem Umlauf von Z auf der Elementar-Curve $(\pm A')$ den Anfangswerth der andern annimmt, während

u_2 den eignen Anfangswerth wieder erhält, so dass man sofort den Werth angeben kann, welchen eine dieser Functionen nach einem Umlauf von Z auf einer geschlossenen Curve erhält, wenn die Charakteristik dieser bekannt ist.

Wir wollen z. B. den Werth von u_1 aufsuchen, welcher durch einen Umlauf von Z auf der Curve

$$(\pm A)\,(\pm A')\,(\pm A)\,(\pm A)\,(\pm A)\,(\pm A')$$

herbeigeführt wird, wo die Wahl des Plus- oder Minuszeichens für die Charakteristiken der einzelnen Elementar-Curven, wie in allen Fällen ein- oder zweigliedriger Systeme, gleichgültig ist. Der Anfangswerth 0 von u_1 geht nämlich nach Durchlaufung der Curve $(\pm A)$ in den Anfangswerth $+1$ von u_2 über, welchen die Function nach einem Umlauf über die Curve $(\pm A')$ wieder annimmt; sodann führen die drei Umläufe auf der Curve $(\pm A)$ nach einander die Werthe 0, $+1$, 0 herbei, und endlich bringt der Umlauf von Z auf der Curve $(\pm A')$ den Werth -1 der Function hervor.

33. Wir wollen ferner die Gleichung

$$u^3-(z-a)\,(z-a')^2=0$$

betrachten, deren Wurzeln u_1, u_2, u_3 für $z=a$ und für $z=a'$ zusammenfallen, und für den Anfangspunkt der Coordinaten $z=0$, welcher zugleich als Ausgangsort von Z dienen soll, folgende Anfangswerthe besitzen:

$$g,\; ge^{\frac{2\pi}{3}i},\; ge^{\frac{4\pi}{3}i},$$

wo einer der drei Werthe der Wurzelgrösse $\sqrt[3]{-aa'^2}$ mit g bezeichnet ist. Man erkennt ohne Mühe, dass diese Functionen u_1, u_2, u_3 ein cyklisches System um den Punkt A, und in der Anordnung u_1, u_3, u_2 ein solches um den Punkt A' bilden.

Um nun den Endwerth von u_1 nach einem Umlauf von Z auf einer geschlossenen Curve zu erhalten, deren Charakteristik etwa

$$(-A)\,(+A')\,(+A)\,(+A')\,(-A)\,(-A)\,(-A')$$

sein mag, brauchen wir nur folgende Reihe der im Anfangspunkte herbeigeführten Werthe von u_1, wo Z die durch die Charakteristik bezeichneten Elementar-Curven nach einander zurückgelegt hat, aufzustellen:

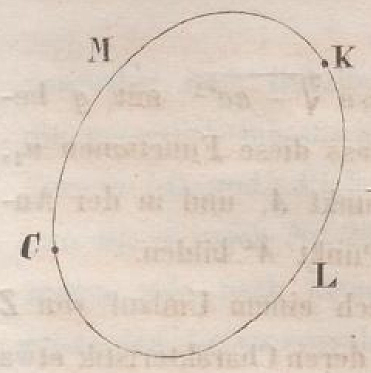
$$ge^{\frac{4\pi}{3}i},\ ge^{\frac{2\pi}{3}i},\ ge^{\frac{4\pi}{3}i},\ ge^{\frac{2\pi}{3}i},\ g,\ ge^{\frac{4\pi}{3}i},\ g.$$

Demnach erlangt die Function u_1 ihren ursprünglichen Werth g wieder.

34. Nachdem wir gezeigt haben, wie sich die Function u_1 verhält, wenn der Punkt Z nach Durchlaufung einer geschlossenen Curve zu seinem anfänglichen Orte zurückkehrt, haben wir noch einen Blick auf diejenigen Werthe jener Function zu werfen, welche beim Uebergange des Punktes Z von C nach einem zweiten Punkte K auf verschiedenen Curven, mit Ausschluss der durch einen der Punkte $A, A', A'', \ldots$ hindurchgehenden herbeigeführt werden.

Bezeichnen wir die Anfangswerthe der Functionen $u_1, u_2, \ldots u_m$ wie immer mit $b_1, b_2, \ldots, b_m$ und die beim Uebergange des Punktes Z von C nach K auf einer bestimmten Curve CMK (Fig. 17) herbeigeführten Werthe derselben mit $h_1, h_2, \ldots, h_m$; so handelt es sich um die Ermittelung derjenigen Werthe, welche jene Functionen beim Uebergange des Punktes Z von C nach K auf irgend einer andern Curve CLK erhalten.

Fig. 17.



Beachten wir nämlich, dass die beiden Curven CLK und CMK zusammengenommen eine geschlossene Curve $CLMC$ ausmachen, deren Charakteristik (Γ) bekannt ist, sobald jene Curven gegeben sind; ferner dass die Function u_1 im Punkte K beständig denselben Werth erhält, mag nun der Punkt Z den Weg CLK, oder zuerst die geschlossene Curve $CLMC$ und dann die Curve CMK zurücklegen, weil diese Zusammensetzung mit jenem Wege zur Coincidenz gebracht werden kann, ohne dass einer der Punkte $A, A', A'', \ldots$ überschritten wird (denn es darf der Theil $KMCMK$ als eine geschlossene Curve angesehen werden, welche keinen dieser Punkte umgibt, sich folglich auf den blossen Punkt K reduciren lässt); so ist klar, dass eine Function u_i, welche nach einem Umlaufe von Z auf der geschlossenen Curve $CLMC$ den (nach Nr. 31 bestimmbaren) Anfangswerth b_j der Function u_j erhält, nunmehr beim Fortgange des Punktes Z nach K, also nach Durchlaufung der Curve $CLMC + CMK$, oder auch der Curve CLK selbst den Werth h_j annimmt.

Da aus diesem Gesichtspunkte die Bezeichnung $(\Gamma) + CMK$ zur symbolischen Darstellung der Curve CLK hinreichend erscheint, so werden wir uns derselben in der Folge unter dem Namen Charakteristik bedienen. Sind nun die Werthe $h_1, h_2, \ldots, h_m$, welche die Functionen $u_1, u_2, \ldots, u_m$ beim Uebergange des Punktes Z nach K auf der Curve CMK erhalten, durch das Verfahren von Nr. 16 bestimmt, so braucht die Berechnung derselben für eine neue Curve $(\Gamma) + CMK$ nicht wiederholt zu werden; es genügt schon, die Functionen $u_1, u_2, \ldots, u_m$ in cyklische Systeme für jeden der Punkte $A, A', A'', \ldots$ abzutheilen, um dann unmittelbar angeben zu können, welcher der Grössen $h_1, h_2, \ldots, h_m$ die Function u_i am Ende der Bewegung von Z auf der Curve $(\Gamma) + CMK$ gleich wird.

Wählen wir z. B. wieder die Gleichung

$$u^3 - u + z = 0,$$

wo die Functionen u_1, u_2, u_3 wie in Nr. 32 definirt sind, und bezeichnen mit h_1, h_2, h_3 die Werthe, welche dieselben beim Uebergange des Punktes Z von C nach K auf einer bestimmten Curve CMK erhalten, so bedarf es zur Ermittelung derjenigen Werthe, welche unsere drei Functionen beim Uebergange des Punktes Z von C nach K auf der Curve $(\pm A)(\pm A') + CMK$ erhalten, nur der Bemerkung, dass u_1, u_2, u_3 nach einem Umlauf von Z auf der geschlossenen Curve $(\pm A)(\pm A')$ bezüglich die Anfangswerthe von u_2, u_3, u_1 annehmen, dass folglich h_2, h_3, h_1 die verlangten Werthe sind.

35. Der Gang der Function u lässt sich anschaulicher darstellen, wenn wir uns statt dieser einen Punkt U denken, dessen Abscisse und Ordinate bezüglich der reelle Theil und der Coefficient von i in dem Ausdrucke von u sind, so dass U eine vollständig bestimmte Curve beschreibt, während Z continuirlich fortgeht, ohne jedoch einen der Punkte $A, A', A'', \ldots$ zu überschreiten.

Durchläuft nun Z von C bis K mehrere verschiedene Curven, so werden der Function u verschiedene Werthe zukommen, und zwar überhaupt für $z = k$ die Werthe $h_1, h_2, \ldots, h_m$, unter denen sich immer derjenige, welcher durch Fortbewegung von Z herbeigeführt wird, nach Massgabe der durchlaufenen Curve unterscheiden lässt. Es folgt hieraus, dass der Punkt U alsdann auf verschiedenen Curven nach verschiedenen Orten gelangen kann, und zwar überhaupt nach den, den Grössen $h_1, h_2, \ldots, h_m$ entsprechenden Punkten $H_1, H_2, \ldots, H_m$, unter denen sich wieder derjenige, mit welchem U zusammenfällt, angeben lässt, sobald der von Z verfolgte Weg bekannt ist.

Durchläuft z. B. Z eine geschlossene Curve bis zum Ausgangspunkte C zurück, so sind die beiden Fälle möglich, dass die Function u ihren Anfangswerth wieder annimmt, oder nicht; in jenem Falle beschreibt der Punkt U selbst eine geschlossene Curve, während er in diesem nicht wieder zu seinem anfänglichen Orte zurückkehrt.

36. Wir haben bisher den Fall untersucht, dass Z keinen der Punkte durchschreitet, für welche die Function u als eine vielfache Wurzel der Gleichung

$$f(u,z) = 0$$

erscheint, und wollen nun einen Blick auf den Fall thun, wenn Z durch einen Punkt A geht, für den die p Functionen $u_1, u_2, \ldots, u_p$ einen und denselben Werth b besitzen. Wenngleich sich für diese Functionen eben sowol nachdem Z den Punkt A überschritten hat, wie vor dem, aus der Gleichung

$$f(u,z) = 0$$

p ungleiche, der Grösse b sehr nahe liegende Werthe ergeben; so ist kein Grund vorhanden, warum einer dieser Werthe nachher einer der wieder auseinander tretenden Functionen $u_1, u_2, \ldots. u_p$ von z vorzugsweise angehören sollte, und es bleibt daher ganz und gar unentschieden, welche dieser Functionen etwa als die Fortsetzung einer besonderen Function u_1 anzusehen sei.

Um diese Art von Unbestimmtheit deutlicher hervortreten zu lassen, betrachten wir folgendes Beispiel. Wenn wir Z von C aus im directen Sinne über einen durch den Punkt A gehenden Kreis *CLAMC* (Fig. 1ᵃ) fortführen, während die Functionen u_1 und u_2 für jenen Punkt den gemeinschaftlichen Werth b besitzen, ausserdem aber nirgends innerhalb oder auf dem Umfange des Kreises gleich werden, so dass also die Relationen

$$f(u,z) = 0, \quad \frac{\partial f(u,z)}{\partial u} = 0$$

aber nur für $z = a$, $u = b$ gleichzeitig stattfinden, die Ableitungen $\frac{\partial^2 f(u,z)}{\partial u^2}$, $\frac{\partial f(u,z)}{\partial z}$ für jene Werthe von z und u sich etwa auf die von Null verschiedenen Grössen A und B reduciren; wenn wir dann

$$z = a + \varrho e^{\tau i}, \; u_1 = b + \beta_1, \; u_2 = b + \beta_2$$

setzen, wo die Grössen β_1 und β_2 mit ϱ gleichzeitig verschwinden und für kleine Werthe von ϱ mit den beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$\mathrm{A}\beta^2 + \mathrm{B}\varrho e^{\tau i} = 0$$

oder

$$\beta^2 = h\varrho e^{\tau i}$$

für $h = -\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}$ übereinstimmen; so ergibt sich:

$$u_1 = b + (h\varrho)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\tau}{2} i}, \; u_2 = b + (h\varrho)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\tau + 2\pi}{2} i}.$$

Und wenn

$$(h\varrho)^{\frac{1}{2}} = \gamma e^{\delta i},$$

wo γ eine positive Zahl und δ einen reellen Winkel bezeichnet, und dann

$$\delta + \frac{\tau}{2} = v_1, \ \delta + \frac{\tau + 2\pi}{2} = v_2$$

gesetzt wird, so finden wir für die nächste Umgebung des Punktes A näherungsweise

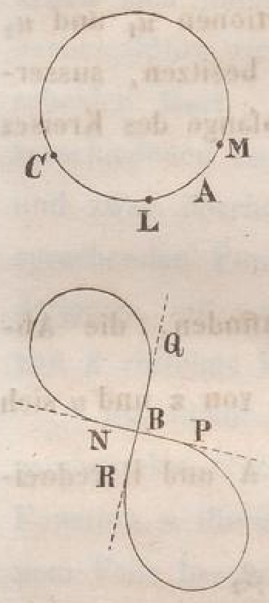
$$u_1 = b + \gamma e^{v_1 i}, \ u_2 = b + \gamma e^{v_2 i}.$$

Es seien nun L und M zwei zu beiden Seiten und in sehr kleinen Entfernungen von A liegende Punkte des Umfangs $CLMC$ und B der Punkt, welcher dem gemeinschaftlichen Werthe b der beiden Functionen u_1, u_2 entspricht, sobald der Punkt Z nach A gelangt ist. Nimmt Z zuerst den Ort L ein, so besitzen diese Functionen ungleiche Werthe, welche den in der Nähe von B liegenden Punkten N und P entsprechen, und zwar bildet jede der geraden Linien BN und BP gewissermassen die Verlängerung der andern, weil ja

$$v_2 = v_1 + \pi$$

ist; und wenn sich hierauf der Punkt Z bis M fortbewegt hat, so entsprechen den Werthen der beiden Functionen wiederum zwei in unmittelbarer Nähe von B liegende Punkte Q und R, welche ebenfalls von der geraden Linie QBR unmerklich abweichen. Da aber bei diesem Uebergange von L nach M die Grösse τ um $\pm \pi$ geändert wird, so dass jeder der Winkel v_1, v_2 eine Aenderung von $\pm \frac{\pi}{2}$ erleidet, so müssen die sehr kleinen Linien BQ und BR auf BN und BP senkrecht stehen.

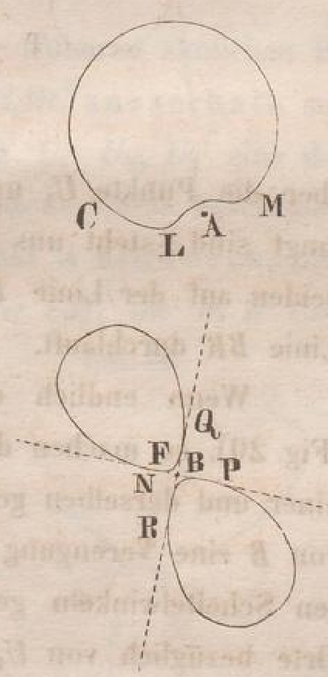
Fig 18.



Nehmen wir jetzt an, dass Z hierbei den Punkt A überschreitet, so findet zwischen den Punkten U_1, U_2, welche den Funktionen u_1, u_2 entsprechen und anfänglieh in N und P lagen, eine gegenseitige Annäherung, sodann, wenn Z den Ort A geradezu einnimmt, in B selbst die Coincidenz und hierauf wieder nach Q und R hin eine Trennung statt. Wählt man nun für die Function u_1 den Punkt N und für die Function u_2 den Punkt P, so ist kein Grund vorhanden, warum einer der Punkte Q, R vorzugsweise der einen oder der andern dieser Functionen entsprechen sollte.

Denn verschiebt man den Weg von Z zwischen L und M unendlich wenig, so dass derselbe den Punkt A nicht mehr berührt, so wird entweder der Punkt U_1 von N nach Q und der Punkt U_2 von P nach R, oder der Punkt U_1 von N nach R und der Punkt U_2 von P nach Q fortgehen, je nachdem der Punkt A sich innerhalb oder ausserhalb der geschlossenen Curve $CLMC$ befindet.

Fig. 19.

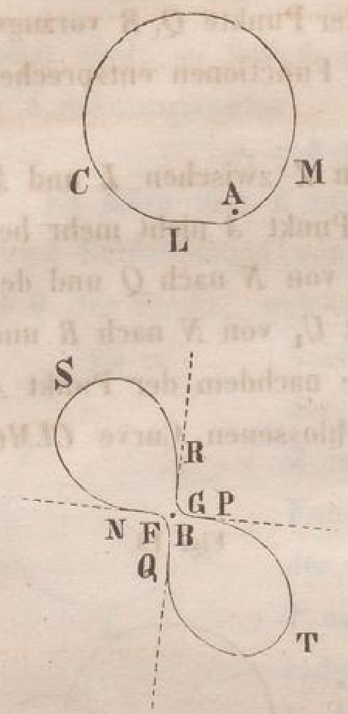


Um dies einzusehen, wollen wir den Punkt A (Fig. 19.) zuerst ausserhalb und zwar in unmittelbarer Nähe der Curve $CLMC$ annehmen; ferner seien L und M zwei dem Punkte A sehr nahe liegende Punkte dieser Curve, und zwar der Art, dass die geraden Linien AL und AM einen Winkel von 180^0 bilden. Sobald nun der Punkt Z von L bis M fortgeht, nimmt τ an der Grenze um π, folglich v_1 und v_2 um $\frac{\pi}{2}$ ab, demnach durchläuft der Punkt U_1 die Curve NFQ und der Punkt U_2 die Curve PGR.

Nehmen wir dagegen den Punkt A (Fig. 20.) innerhalb an, während die Lage der Punkte L und M wie vorhin bleibt, und lassen wir Z von L bis M fortrücken, so wächst der Winkel τ an der Grenze um π, folglich v_1 und v_2 um $\frac{\pi}{2}$ an, alsdann durchläuft U_1 den Weg NFR und U_2 den Weg PGQ.

Aus den Figuren 18, 19 und 20 ist sofort ersichtlich, welche Modificationen die von den Punkten U_1, U_2 beschriebenen Cur-

Fig. 20.



ven erleiden, wenn die Curve *CLMC* bei der Verschiebung den Punkt *A* überschreitet. So lange sie diesen nicht einschliesst, durchlaufen die Punkte U_1, U_2 geschlossene Curven (Fig. 19), nämlich die Wege *SNFQS* und *TPGRT*, welche dem Punkte *B* sehr nahe kommen und in der Nähe desselben allmälig die Schenkel von rechten Scheitelwinkeln ausmachen.

Wenn die Curve *CLMC* den Punkt *A* überschreitet (Fig. 18.), so bilden jene beiden Curven eine einzige, für welche der Punkt *B* sich als ein vielfacher (Doppel-) Punkt darstellt, von dem sich rechtwinkelige Aeste abzweigen; nachdem aber die Punkte U_1 und U_2 auf den Linien *NB*, *PB* nach *B* gelangt sind, steht uns wie gesagt die Annahme frei, welcher von beiden auf der Linie *BQ* fortgehen soll, während der andere die Linie *BR* durchläuft.

Wenn endlich die Curve *CLMC* den Punkt *A* umgibt (Fig. 20), so machen die Wege der Punkte U_1 und U_2 zwei Theile einer und derselben geschlossenen Curve aus, welche in der Nähe von *B* eine Verengung bilden und sich wiederum allmälig zu rechten Scheitelwinkeln gestalten. Sind *S* und *T* die anfänglichen Orte bezüglich von U_1 und U_2, während *Z* auf der Curve *CLMC* einen Umlauf macht, so beschreibt der Punkt U_1 den Bogen *SNFRT* und der Punkt U_2 den Bogen *TPGQS*, und erst nach zwei Umläufen von *Z* nehmen die Punkte U_1, U_2 ihre ursprünglichen Orte *S* und *T* wieder ein.*)

---

*) Sollte die Curve *CLMC* etwa in *A* eine Spitze bilden, wo die beiden Theile derselben den Winkel ϑ einschliessen, so würden die

Was den Fall betrifft, wenn die Curve *CLMC* einen derjenigen Punkte A überschreitet, für welchen drei Functionen u_1, u_2, u_3 einen gemeinsamen Werth b besitzen, so ergibt sich eben so leicht das Verhalten der Punkte U_1, U_2. Unter der Voraussetzung nämlich, dass die Ableitungen $\frac{\partial^3 f(u,z)}{\partial u^3}$ und $\frac{\partial f(u,z)}{\partial z}$ für $z = a$, $u = b$ nicht verschwinden, sind die Näherungswerthe jener Functionen für solche Werthe von z, welche in unmittelbarer Nähe von a liegen, folgende:

$$u_1 = b + (h\varrho)^{\frac{1}{3}} e^{\frac{\tau}{3} i},$$

$$u_2 = b + (h\varrho)^{\frac{1}{3}} e^{\frac{\tau + 2\pi}{3} i},$$

$$u_3 = b + (h\varrho)^{\frac{1}{3}} e^{\frac{\tau + 4\pi}{3} i}.$$

Hieraus entnehmen wir, nach einer der früheren ähnlichen Betrachtung: falls der Punkt A der Curve *CLMC* ausserhalb sehr nahe liegt, wird von jedem der Punkte U_1, U_2, U_3 eine dem Punkte B sehr nahe kommende geschlossene Curve beschrieben (Fig. 21); falls jene Curve durch den Punkt A hindurchgeht, bilden diese drei Curven eine einzige (Fig. 22), die in B einen

Fig 21.

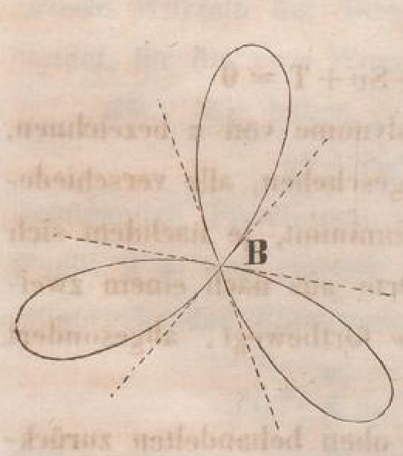
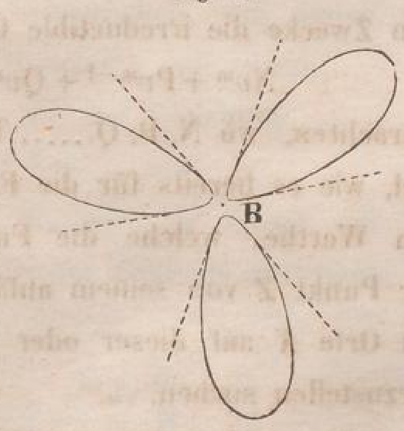


Fig. 22

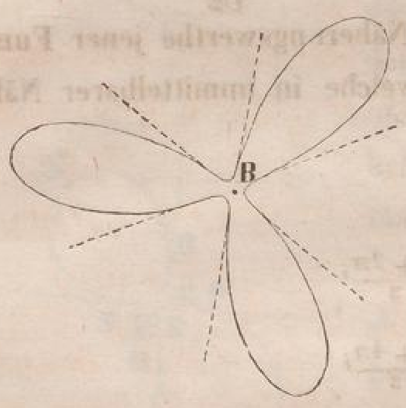


---

von den Punkten U_1, U_2 beschriebenen Curven zwar wiederum in einen vielfachen (Doppel-) Punkt besitzen, während jedoch die Aeste unter dem Winkel $\frac{\vartheta}{2}$ von B auslaufen.

vielfachen (dreifachen) Punkt besitzt, wo sich drei Aeste unter Winkeln von 60 Graden abzweigen; falls endlich der Punkt A innerhalb jener Curve zu liegen kommt, wird der Punkt B von dieser zusammenhängenden Curve nicht mehr berührt, sondern in

Fig. 23.



der Gestalt der Figur 23 eingeschlossen. Während Z auf der Curve $CLMC$ einen Umlauf macht, beschreibt jeder der Punkte U_1, U_2, U_3 für sich einen Theil der betrachteten Curve der Art, dass die drei Theile die ganze Curve zusammensetzen; erst nach drei Umläufen von Z erhalten diese Punkte wieder ihre anfängliche Lage.

37. Wir haben von Nr. 18 ab immer vorausgesetzt, dass der Coefficient der höchsten Potenz von u in dem ganzen Polynom $f(u,z)$ unabhängig von z ist; die oben gegebene Theorie lässt sich eben so leicht auf den Fall ausdehnen, wenn jener Coefficient als eine beliebige ganze Function von z auftritt. Wir wollen zu diesem Zwecke die irreductible Gleichung

$$\mathrm{N}v^m + \mathrm{P}v^{m-1} + \mathrm{Q}v^{m-2} + \ldots + \mathrm{S}v + \mathrm{T} = 0$$

betrachten, wo N, P, Q....., T ganze Polynome von z bezeichnen, und, wie es bereits für die Function u geschehen, alle verschiedenen Werthe, welche die Function v annimmt, je nachdem sich der Punkt Z von seinem anfänglichen Orte aus nach einem zweiten Orte K auf dieser oder jener Curve fortbewegt, abgesondert darzustellen suchen.

Dieser Fall kann sofort auf den oben behandelten zurückgeführt werden, wenn wir

$$v = \frac{u}{\mathrm{N}}$$

setzen, wodurch sich nämlich die gegebene Gleichung in

$$u^m + \mathrm{P}u^{m-1} + \mathrm{NQ}u^{m-2} + \ldots + \mathrm{N}^{m-2}\mathrm{S}u + \mathrm{N}^{m-1}\mathrm{T} = 0$$

verwandelt, wo der Coefficient von u^m gleich Eins ist. Da hier das Polynom N für jeden Werth von z nur einen Werth hat, so entsprechen den verschiedenen Werthen, welche die Function u zulässt, eben so viele Werthe von v, die in der Formel

$$v = \frac{u}{N}$$

begriffen sind.

Demnach reducirt sich alles wie früher auf die Bestimmung der Charakteristiken der verschiedenen von C nach K führenden Wege, und zwar ist hierzu immer nur die Construction der Punkte $A, A', A'', \ldots.$ erforderlich, die denjenigen Werthen von z entsprechen, für welche die Gleichung

$$u^m + Pu^{m-1} + \ldots. + N^{m-1}T = 0$$

vielfache Wurzeln besitzt. Ungeachtet es sich nämlich, obschon diese Werthe von z im Allgemeinen dieselben bleiben, doch mit denen, für welche N verschwindet, anders verhalten kann, indem die Gleichung in u für diese Werthe $m-1$ Wurzeln gleich Null liefert, während die Gleichung in v gewöhnlich eine unendlich grosse Wurzel und $m-1$ endliche und ungleiche Wurzeln gibt; so lassen sich sämmtliche Punkte $A, A', A'', \ldots.$ jederzeit dadurch auffinden, dass man diejenigen Werthe von z, welchen unendlich grosse Wurzeln der Gleichung in v entsprechen, mit denen verbindet, für die zwei Wurzeln dieser Gleichung coincidiren.

38. Wir haben gesehen, dass die der Gleichung

$$u^m + Pu^{m-1} + NQu^{m-2} + \ldots. = 0$$

genügenden Functionen $u_1, u_2, \ldots., u_m$ sich in Bezug auf den Punkt A in eine gewisse Anzahl cyklischer Systeme abtheilen; die entsprechenden Functionen

$$v_1 = \frac{u_1}{N},\ v_2 = \frac{u_2}{N}, \ldots., v^m = \frac{u_m}{N}$$

bilden offenbar gleich viel correspondirende cyklische Systeme. Wenn wir mit ν den Grad derjenigen Potenz von $z-a$ bezeichnen, durch welche das Polynom N theilbar ist, während auch der ganze Exponent ν gleich Null sein kann, und

$$N = (z - a)^\nu \mathfrak{N}$$

setzen, so ist

$$v_n = \frac{u_n}{(z - a)^\nu \mathfrak{N}},$$

also

$$(z - a)^\nu v_n = \frac{1}{\mathfrak{N}} \cdot u_n,$$

wo v_n eine der Functionen $v_1, v_2, \ldots, v_m$ repräsentirt. So lange nun der Punkt Z innerhalb eines um A beschriebenen Kreises bleibt, dessen Radius der kleinsten von den Längen $AA', AA'', \ldots$ gleich ist, lässt sich $\frac{1}{\mathfrak{N}}$ in eine convergente, nach den ganzen positiven Potenzen von $z - a$ fortschreitende Reihe entwickeln; ferner haben wir in Nr. 23 gesehen, dass wenn μ die Anzahl der Terme des cyklischen Systems bezeichnet, zu welchen die Function u_n gehört, diese letztere innerhalb derselben Grenzen nach den ganzen positiven Potenzen von $(z - a)^{\frac{1}{\mu}}$ entwickelt werden kann. Multiplicirt man die beiden so aufgestellten Reihen mit einander, so erhält man für $\frac{1}{\mathfrak{N}} \cdot u_n$ die nach den ganzen positiven Potenzen von $(z - a)^{\frac{1}{\mu}}$ fortschreitende Entwickelung:

$$\frac{1}{\mathfrak{N}} \cdot u_n = (z - a)^\nu u_n = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}(z - a)^{\frac{1}{\mu}} + \mathfrak{C}(z - a)^{\frac{2}{\mu}} + \ldots,$$

wo $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots$ von z unabhängige Coefficienten vorstellen. Somit ist:

$$v_n = \mathfrak{A}(z - a)^{-\nu} + \mathfrak{B}(z - a)^{\frac{1}{\mu} - \nu} + \mathfrak{C}(z - a)^{\frac{2}{\mu} - \nu} + \ldots,$$

die Function v_n lässt sich also wie u_n nach den ganzen Potenzen von $(z - a)^{\frac{1}{\mu}}$ entwickeln; während jedoch die Entwickelung von u_n nur positive Potenzen von $(z - a)^{\frac{1}{\mu}}$ enthält, kann die von v_n mit einer begrenzten Anzahl von negativen Potenzen beginnen.

39. Wir wollen das Gesagte auf die Gleichung

$$(z - a)(z - a')(z - a'') \ldots v^m - 1 = 0$$

anwenden, wo die Grössen $a, a', a'', \ldots$ sämmtlich ungleich sein sollen. Setzen wir

$$v = \frac{u}{(z - a)(-a')(z - a'') \ldots},$$

so ergibt sich

$$u^m - (z-a)^{m-1}(z-a')^{m-1}(z-a'')^{m-1}\ldots = 0;$$

die Punkte $A, A', A'', \ldots$, welche zusammenfallenden Wurzeln dieser Gleichung entsprechen, dienen hier zur Darstellung der Werthe $a, a', a'', \ldots$ von z.

Bezeichnen $u_1, u_2, \ldots, u_m$ die m der Gleichung in u genügenden Functionen, deren Werthe bezüglich gleich

$$g,\ ge^{-\frac{2\pi}{m}i},\ ge^{-\frac{4\pi}{m}i}, \ldots,\ ge^{-\frac{(2m-2)\pi}{m}i}$$

sind, wo g einen Werth der Wurzelgrösse

$$\sqrt{(c-a)^{m-1}(c-a')^{m-1}(c-a'')^{m-1}\ldots}$$

vorstellt, so lässt sich ohne Mühe mit Hilfe der oben dargelegten Principien nachweisen, dass jede dieser Functionen, nachdem Z auf einer der Elementar-Curven $(+A)$, $+(A')$, $(+A''), \ldots$ einen Umlauf vollbracht hat, den Anfangswerth der folgenden annimmt, und dass folglich dasselbe auch von den Functioneu

$$v_1 = \frac{u_1}{(z-a)(z-a')\ldots},\quad v_2 = \frac{u_2}{(z-a)(z-a')\ldots}\ \ldots\ldots$$

gilt.

Fragt man nun nach den Werthen, welche die Functionen $v_1, v_2, \ldots, v_m$ erhalten, sobald der Punkt Z auf dem Wege $(+A)$, $(+A') + CMK$ nach K gelangt, vorausgesetzt, dass beim Fortgange von Z auf der Curve CMK bis zum Punkte K die Werthe h_1, $h_2, \ldots, h_m$ jener Functionen herbeigeführt werden, so finden sich für v_1 der Werth h_3, für v_2 der Werth h_4, u. s. f., für v_{m-1} und v_m die Werthe h_1, h_2. Eben so ergibt sich, wenn Z auf dem Wege $(-A) + CMK$ nach K gelangt, dass $v_1, v_2, \ldots, v_m$ bezüglich die Werthe $h_m, h_1, \ldots, h_{m-1}$ erhalten.

Beiläufig bemerken wir noch, dass die Functionen v_1, $v_2, \ldots, v_m$ in convergente, nach den ganzen Potenzen von $(z-a)^{\frac{1}{\mu}}$ aufsteigende Reihen entwickelt werden können, so lange der Punkt Z innerhalb eines um den Punkt A beschriebenen Kreises bleibt, dessen Radius der kleinsten der Entfernungen AA' $AA'', \ldots$ gleich ist; und ferner, dass die negative Potenz $(z - a)^{-\frac{1}{\mu}}$ in diesen Reihen vorkommt.

40. In allem Vorhergehenden haben wir uns nur auf algebraische Gleichungen beschränkt; eben so wol sind aber die unter der Form

$$f(u,z)=0$$

begriffenen transcendenten Gleichungen den oben aufgestellten Sätzen unterworfen, wofern nur die linke Seite $f(u,z)$, so wie auch deren partielle Ableitungen aller Ordnungen nach u und z stetige Functionen dieser Variabeln sind und für jedes Werthsystem derselben nur einen bestimmten endlichen Werth besitzen; denn unsere Theorie erfordert ausser den oben abgeleiteten Bedingungen nichts weiter, als dass die Werthe von u, welche sich aus einer solchen Gleichung ergeben, continuirlich variiren, wenn dies bei z der Fall ist. Dass sich diese Eigenschaft auch wirklich auf Gleichungen aller Art erstreckt, hat Cauchy in seinen *Nouveaux Exercices de Mathématiques*, *T. II.* *p.* 109 dargethan

41. Die Sache lässt sich indessen noch auf die Weise verallgemeinern, dass man statt

$$z=x+yi$$

zu setzen, sich der Form

$$z=\varphi(x,y)+i\psi(x,y)$$

bedient. Hierin bezeichnen $\varphi(x,y)$ und $\psi(x,y)$ stetige Functionen, welche für jedes Werthsystem von x und y, oder mit andern Worten für jeden Punkt der xy-Ebene nur einen bestimmten endlichen und zwar reellen Werth besitzen. Auch die Gleichung

$$f(u,z)=0$$

liefert für jeden Punkt der Ebene im Allgemeinen ungleiche Werthe von u, und wir können auch hier die Frage erörtern, welchen continuirlichen Veränderungen jede derselben unterliegt, während der zu den Coordinaten x, y gehörende Punkt aus einer Anfangslage C in eine neue K übergeht.

Wir construiren zu diesem Zwecke zunächst diejenigen Punkte, welche den auf unendlich grosse oder vielfache Wurzeln der Gleichung

$$f(u,z) = 0$$

führenden Werthen von z entsprechen; bedeutet $f+gi$ einen solchen Werth, so ergeben sich die Coordinaten der entsprechenden Punkte aus folgendem System von Gleichungen:

$$\varphi(x,y) = f,\ \psi(x,y) = g.$$

Nehmen wir jetzt an, dass der Punkt x,y von C bis K auf einer bestimmten Curve fortgeht, so bleibt der im Punkte K erlangte Werth der Function u ungeändert, wenn die durchlaufene Curve ohne Ueberschreitung eines Punktes, für welchen die Function u unendlich gross oder eine vielfache Wurzel der gegebenen Gleichung ist, verschoben wird. Die Beweisführung ist durchweg dieselbe, wie in dem Falle, dass $z = x + yi$ gesetzt wird.

Wenn ferner aus der Gleichung

$$f(u,z) = 0$$

für einen Punkt A eine gewisse Anzahl gleicher Functionen von z entspringt, so lässt sich wieder wie zuvor beweisen, dass diese Functionen sich in eine gewisse Anzahl cyklischer Systeme abtheilen, d. h. dass wenn man sich die Functionen, welche eines dieser Systeme ausmachen, auf dem Umfange eines Kreises auf entsprechende Weise vertheilt denkt, jede derselben den Anfangswerth der folgenden annimmt, sobald man den Punkt (x,y) um den Punkt A auf einer unendlich kleinen geschlossenen Curve herumgeführt hat. Es gelten daher auch unter der in Rede stehenden allgemeineren Annahme die aus diesen Principien schon oben abgeleiteten Folgerungen.
