V. Puiseux's Untersuchungen über die algebraischen Functionen

Fischer, Hermann

Halle, 1861

Dritter Theil.

Dritter Theil.

---

42. Wir wenden uns gegenwärtig zu der Anwendung der bisher entwickelten Theorie auf die Untersuchung der vielfachen Werthe von bestimmten Integralen. Betrachten wir die algebraische Gleichung

$$f(u,z) = 0,$$

deren linke Seite eine beliebige ganze Function von u und z vorstellen soll, indem wir wieder wie in Nr. 5 mit u_1 eine dieser Gleichung genügende Function von z bezeichnen, welche einen Werth b_1 erhält, sobald der $z = x + yi$ entsprechende Punkt Z seinen anfänglichen Ort C verlässt. Die Bedeutung des Ausdrucks $\int_c^k u_1 dz$ ist nur dann eine bestimmte, wenn ausser den Grenzen c und k noch der Weg CMK, auf welchem der bewegliche Punkt Z von C bis K fortgehen soll, vollständig gegeben ist. Allerdings erhält das Integral $\int_c^k u_1 dz$ nach Nr. 9 am Ende einen und denselben Werth, so lange die Curve CMK während einer Verschiebung keinen der Punkte $A, A', A'', \ldots.$ erreicht, für welche die Gleichung

$$f(u,z) = 0$$

vielfache oder unendlich grosse Wurzeln liefert; sobald aber die Curve einen dieser Punkte überschreitet, kann das Integral eine solche Aenderung erleiden, dass es eine begrenzte oder unbegrenzte Anzahl verschiedener Werthe annimmt.

Wir wollen zuerst zeigen, wie mit Hilfe der im ersten Theile aufgestellten Principien der Werth des Integrals $\int_c^k u_1 dz$ in Bezug auf eine gegebene Integrations-Curve mit beliebiger Genauigkeit zu berechnen ist; dabei setzen wir wie immer voraus, dass diese

Curve durch keinen der Punkte $A, A', A'', \ldots$ hindurchgeht, da sonst das Intugral unbestimmt sein könnte. Wiederholen wir die in Nr. 16 ausgeführte Construction, durch welche die Curve CMK in eine gewisse Anzahl von Theilen CMC', $C'M'C''$, $C''M''C'''$, ... (Fig. 7) zerlegt wird, so wird die Function u_1 nach Nr. 15 für die Länge des Theils CMC' durch folgende convergente Reihe dargestellt:

$$u_1 = b_1 + F_1(b_1,c).(z-c) + F_2(b_1,c).(z-c)^2 + \ldots;$$

der Werth V des Integrals $\int_c^{c'} u_1 dz$, wo sich die Integration über die Curve CMC' erstreckt, hat demnach eine convergente Reihe zum Ausdruck, welche durch Integration der einzelnen Terme der vorstehenden zwischen den Grenzen $z = c$ und $z = c'$ erhalten wird, nämlich:

$$V = b_1(c'-c) + F_1(b_1,c).\frac{(c'-c)^2}{2} + F_2(b_1,c).\frac{(c'-c)^3}{3} + \ldots$$

Ganz ähnliche Reihen gelten natürlich für die Integrale $\int_{c'}^{c''} u_1 dz$, $\int_{c''}^{c'''} u_1 dz, \ldots$, deren Werthe wir bezüglich mit V', V'', ... bezeichnen wollen, wobei die Integrationen über die Curven $C'M'C''$, $C''M''C'''$, ... auszudehnen sind, und wir erhalten somit die Gleichungen

$$V' = b'_1(c''-c') + F_1(b'_1,c').\frac{(c''-c')^2}{2} + F_2(b'_1,c').\frac{(c''-c')^3}{3} + \ldots,$$

$$V'' = b_1''(c'''-c'') + F_1(b_1'',c'').\frac{(c'''-c'')^2}{2} + F_2(b_1'',c'').\frac{(c'''-c'')^3}{3} + \ldots$$

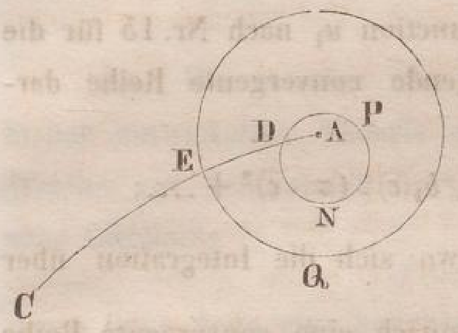
. . . .

Durch Addition dieser Grössen $V, V', V'', \ldots$, deren Anzahl stets eine begrenzte ist, erhält man dann den gesuchten Werth des Integrals $\int_c^k u_1 dz$. Oftmals gewährt eine Aenderung des Weges CMK, die sich jedoch nicht über einen der Punkte $A, A', A'', \ldots$ hinaus erstrecken darf, Bequemlichkeiten für die Rechnung.

Wir können dieselbe Methode auch benutzen, um den Werth des Integrals $\int u_1 dz$ für die ganze Ausdehnung einer beliebigen

Elementar-Curve, z. B. der Curve $(+A)$ zu ermitteln, deren Bestandtheile die Linie CD (Fig. 24), die unendlich kleine Curve $DNPD$ und die Linie DC ausmachen. Man beschreibe nämlich um den Punkt A einen Kreis, dessen Radius um eine endliche Grösse kürzer als die kleinste der Entfernungen AC, AA', AA'', AA''',.... ist, und welcher die Linie CD in E schneiden mag. An Stelle der Elementar-Curve $(+A)$ könnte man unbeschadet des Integrals eine andere, aus der Linie CE, dem Kreise $EQRE$ und der Linie EC zusammengesetzte Curve annehmen, und dann den Werth des Integrals $\int u_1 dz$ für diese Curve, welche von den Punkten $A, A', A'',\ldots$ überall endliche Entfernungen hat, ohne Weiteres nach der soeben angegebenen Methode berechnen.

Fig. 24.



43. Es seien wiederum $u_1, u_2, \ldots, u_m$ die m der Gleichung

$$f(u, z) = 0$$

genügenden Functionen von z; ferner mögen $A_1, A_{-1}, A'_1, A'_{-1},\ldots$ die Werthe des Integrals $\int u_1 dz$ in Bezug auf die Gesammtlängen der Elementar-Curven $(+A), (-A), (+A'), (-A')\ldots$ und ganz entsprechend $A_2, A_{-2}, A'_2, A'_{-2},\ldots$ die Werthe des Integrals $\int u_2 dz$ für dieselben Curven, u. s. f. bezeichnen, so dass überhaupt $A^{(f)}_{\pm n}$ den Werth des Integrals $\int u_n dz$ in Bezug auf die Ausdehnung der Elementar-Curve $(\pm A^{(f)})$ vorstellt. Wir wollen gegenwärtig untersuchen, welchen Werth das Integral $\int u_1 dz$ annehmen wird, wenn man dasselbe vom Punkte C aus über irgend eine geschlossene Curve $CLMC$ (Fig. 4) fortführt, wobei wir die vorhin bezeichneten Grössen, für die wir den Namen *Elementar-Integrale* wählen, als bekannt oder wenigstens nach dem in der vorigen Nummer angegebenen Verfahren berechnet voraussetzen.

Der Deutlichkeit wegen nehmen wir an, dass z. B.

$$(+A)(-A')(+A'')(-A)$$

die Charakteristik der Integrations-Curve $CLMC$ sei, während wir aus Nr. 10 entnehmen, dass das Integral $\int u_1 dz$ ungeändert bleibt, wenn wir an Stelle dieser Curve folgende Reihe von Elementar-Curven einführen: $(+A), (-A'), (+A''), (-A)$. Andererseits lässt sich angeben, nachdem sich die Gruppirungsweise der Functionen $u_1, u_2, \ldots, u_m$ in cyklische Systeme um einzelne Punkte $A, A', A'', \ldots$ herausgestellt hat, welche Function es ist, deren Anfangswerth die Function u_1 nach einem Umlaufe von Z auf der Curve $(+A)$ annimmt; es sei dies die Function u_3. Auf ähnliche Art würde man finden, dass u_3 nach einem Umlaufe von Z über $(-A')$ z. B. den Anfangswerth von u_4, dass endlich u_4 nach einem Umlaufe von Z über $(+A'')$ etwa den Anfangswerth von u_2 erhält. Demnach wären der auf die Curve $(+A)$ bezügliche Theil des verlangten Integrals gleich A_1, der über die Curve $(-A')$ genommene Theil gleich A'_{-3} und die den Curven $(+A'')$ und $(-A)$ entsprechenden Theile resp. A_4'' und A_{-2}, so dass das über die ganze geschlossene Curve $CLMC$ fortgeführte Integral $\int u_1 dz$ den Werth

$$A_1 + A'_{-3} + A_4'' + A_{-2}$$

besitzt. Man sieht überhaupt ein, dass der Werth dieses Integrals, über eine durah den Punkt C gehende geschlossene Curve hin ausgedehnt, immer durch die Summe einer gewissen Anzahl der Elementar-Integrale $A_1, A_{-1}, A'_1, \ldots, A_2, \ldots$ dargestellt wird.

11. Nachdem wir diese erste Frage beantwortet haben, wollen wir die Werthe des Integrals $\int_c^k u_1 dz$ für die nur möglichen Integrations-Curven zwischen C und K aufsuchen. Wenn wir von einer ersten, zwischen den Punkten C und K beliebig gestalteten Curve CMK (Fig. 17.) ausgehen und mit $v_1, v_2, \ldots, v_m$ die Werthe der über diese Curve genommenen Integrale $\int_c^k u_1 dz$, $\int_c^k u_2 dz, \ldots, \int_c^k u_m dz$ bezeichnen, so handelt es sich zunächst um die Ermittelung des Werthes vom Integral $\int_c^k u_1 dz$ in Bezug auf eine beliebige andere Integrations-Curve CLK.

Beispielsweise sei

$$(+A)(-A')(+A'')(-A)+CMK$$

die Charakteristik dieser Curve und ferner mag, mit Beibehaltung der in der vorigen Nummer gemachten Annahmen, die Function u_2 nach einem Umlaufe von Z über $(-A)$ etwa den Anfangswerth von u_5 erhalten. Da man nun nach Nr. 9 an Stelle der Curve CLK die durch die einzelnen Terme der Charakteristik angedeutete Curvenreihe einführen kann, so findet man sofort für das gesuchte Integral folgenden Ausdruck:

$$A_1 + A'_{-3} + A_4'' + A_{-2} + v_5.$$

Hieraus ergibt sich, dass man die übrigen, von v_1 verschiedenen Werthe des Integrals $\int_c^k u_1 dz$ durch Addition einer der Grössen v_1, $v_2, \ldots, v_m$ und eines oder mehrerer der Elementar-Integrale A_1, A_{-1}, $A'_1, \ldots, A_2, \ldots$ gewinnt, wobei zwar ein und dasselbe Elementar-Integral in dieser Summe mehrfach vorkommen kann, obgleich jedoch im Allgemeinen, was ausdrücklich hervorgehoben wird, nicht ein Werth des Integrals $\int_c^k u_1 dz$ entsteht, wenn man eine der Grössen $v_1, v_2, \ldots, v_m$ zu einer gewissen Anzahl der Grössen A_1, A_{-1}, $A_1', \ldots, A_2, \ldots$ addirt, nachdem diese mit irgend welchen ganzen Zahlen multiplicirt worden sind.

45. Die Elementar-Integrale $A_1, A_{-1}, \ldots$ besitzen mehrere bemerkenswerthe Eigenschaften. Da nämlich, wenn u_g diejenige Function bezeichnet, deren Anfangswerth der Function u_f nach einem Umlaufe von Z über die Elementar-Curve $(+A)$ zukommt, umgekehrt u_g den Anfangswerth von u_f erhält, nachdem Z auf der Curve $(-A)$ einen Umlauf vollbracht hat; so sind die Elemente der mit A_f und A_{-g} bezeichneten Integrale paarweise gleich und entgegengesetzt, und man hat folglich:

$$A_{-g} = -A_f.$$

Demnach ist jedes der Integrale A_{-1}, $A_{-2}, \ldots, A_{-m}$ in Bezug auf die Curve $(-A)$ von gleichem und entgegengesetztem Werthe, wie eines der Integrale $A_1, A_2, \ldots, A_m$, über die Curve $(+A)$ ausgedehnt; und umgekehrt.

16. Nehmen wir insbesondere an, dass die Function u_f nach einem Umlauf von Z über die Curve $(+A)$ ihren Anfangswerth wieder erhält, so findet dies auch auf der Curve $(-A)$ statt, und die vorstehende Gleichung geht über in:

$$A_{-f} = -A_f.$$

Für diesen Fall folgt aus Nr. 11, dass die Grösse A_f von dem Ausgangsorte C des beweglichen Punktes Z unabhängig ist, dass dieselbe also ungeändert bleibt, wenn man den Punkt C verlegt und gleichzeitig die Elementar-Curve (A) ohne Ueberschreitung eines der Punkte $A, A', A'' \ldots.$ verschiebt. Man kann somit A_f als den Werth des Integrals $\int u_f dz$, welches sich über eine um den Punkt A beschriebene unendlich kleine Curve erstreckt, betrachten, woraus sich dann ergibt, dass wenn die Function u_f im Punkte A einen endlichen Werth behält, sich das Integral A_f auf Null reducirt.

Wählt man nämlich für die eben genannte unendlich kleine Curve einen um den Punkt A beschriebenen Kreis, dessen Radius eine sehr kleine Grösse ϱ ist, so hat man zunächst für einen Punkt dieses Kreises

$$z = a + \varrho e^{\tau i},$$

wo τ einen reellen Winkel bezeichnet, also

$$dz = i\varrho e^{\tau i} d\tau,$$

folglich

$$A_f = i\varrho \int_0^{2\pi} u_f e^{\tau i} d\tau.$$

Da nun u_f für sehr kleine Werthe von ϱ einen endlichen Werth behält, so gilt dies auch von dem Integral $\int_0^{2\pi} u_f e^{\tau i} d\tau$, so dass sich der Ausdruck von A_f gleichzeitig mit ϱ auf Null reducirt; weil aber das Integral $A_{\prime}$ von ϱ selbst unabhängig ist, so hat man in der That

$$A_{\prime} = 0.$$

47. Es gibt einen merkwürdigen Fall, welcher Relationen zwischen den Elementar-Integralen darbietet, deren wir uns in der Folge mit Vortheil bedienen werden; dieser Fall ist nämlich der, wo sich nach einem Umlauf von Z auf einer durch den Punkt C gehenden Curve $\varDelta$, die alle Punkte $A, A', A'', \ldots.$ umgibt, die Functionen $u_1, u_2, \ldots., u_m$ zum Theil wieder auf ihre Anfangswerthe reduciren.

Es sei $u_{\prime}$ eine der Functionen, welche dieser Bedingung unterworfen sind; die Charakteristik $(\varDelta)$ der in directem Sinne zu durchlaufenden Curve $\varDelta$ wird aus den Termen $(+A)$, $(+A')$, $(+A'')$, ..., die auf gewisse Art und zwar ohne Wiederholungen angeordnet sind, zusammengesetzt sein, so dass wir immer nur die Formel

$$(\varDelta) = (+A)\,(+A')\,(+A'')\ldots.$$

festzuhalten haben; ferner soll die Function $u_{\prime}$, sobald Z auf den geschlossenen Curven, deren Charakteristiken durch $(+A)$, $(+A)$ $(+A')$, $(+A)$ $(+A')$ $(+A'')$, u. s. w. dargestellt sind, herumgeführt ist, bezüglich die Anfangswerthe von $u_{\prime}$, $u_{\prime'}$, $u_{\prime''}, \ldots.$ erhalten, so dass das Integral $\int u_{\prime}dz$, über die Curve $\varDelta$ ausgedehnt, folgenden Werth besitzt:

$$A_{\prime} + A'_{\prime} + A''_{\prime'} + A'''_{\prime''} + \ldots.$$

Wenn wir jetzt um den Anfangspunkt der Coordinaten O einen Kreis Θ beschreiben, dessen Radius R länger als die grösste der Entfernungen OA, OA', OA'',.... ist; so muss sich offenbar die Curve $\varDelta$ ohne Ueberschreitung eines der Punkte $A, A', A'', \ldots.$ der Art verschieben lassen, dass sie mit diesem Kreise zur Coincidenz gebracht werden kann, und folglich ist der auf den Kreis Θ bezügliche Werth des Integrals $\int u_{\prime}dz$ ebenfalls der Summe

$$A_{\prime} + A'_{\prime} + A''_{\prime'} + A'''_{\prime''} + \ldots.$$

gleich.

Um aber hierfür noch einen zweiten Ausdruck zu erhalten, wollen wir die neue Variable z' einführen mit der Bedeutung $z' = \frac{1}{z}$ und uns einen beweglichen Punkt Z' vorstellen, dessen Coordinaten, auf ein neues Axensystem $O'x'$, $O'y'$ bezogen, den reellen Theil und den Coefficienten von i der Grösse z' ausmachen. Dadurch werden die Functionen $u_1, u_2, \ldots, u_m$ in Functionen von z' verwandelt, welche der algebraischen Gleichung

$$f\left(u, \frac{1}{z'}\right) = 0$$

genügen müssen. Da es nun ausserhalb des Kreises Θ in endlichem Abstande vom Anfangspunkte O keine Lage des Punktes Z gibt, für welche die Gleichung

$$f(u,z) = 0$$

vielfache oder unendlich grosse Wurzeln hätte, so ist auch eben so innerhalb des um den Punkt O' construirten Kreises Θ', dessen Radius gleich $\frac{1}{R}$ ist, bis zum Anfangspunkte O' hin keine Lage des Punktes Z' möglich, wofür die Gleichung

$$f\left(u, \frac{1}{z'}\right) = 0$$

vielfache oder unendlich grosse Wurzeln lieferte. Beachten wir nun, dass die Function u_f, der Voraussetzung gemäss, nach einem Umlauf von Z auf dem Kreise Θ ihren Anfangswerth wieder annimmt, und eben deswegen auch nach einem Umlaufe von Z' auf dem Kreise Θ'; dass sie folglich der einzige Term ist, welcher das cyklische System um den Punkt O' ausmacht, und sich alsdann für den inneren Raum des Kreises Θ' in eine convergente, nach den ganzen Potenzen von z' aufsteigende Reihe, welche nach Nr. 38 mit einer begrenzten Anzahl negativer Potenzen beginnen kann, entwickeln lässt: so können wir für eine Norm von z', die kleiner oder höchstens eben so gross als $\frac{1}{R}$ ist, schreiben:

$$u_f = \alpha_f z'^{-p} + \beta_f z'^{-p+1} + \ldots + \varkappa_f + \lambda_f z' + \mu_f z'^2 + \ldots,$$

wo p eine ganze positive Zahl und $\alpha_f, \beta_f, \ldots, \varkappa_f, \lambda_f, \mu_f, \ldots$ von z' unabhängige Coefficienten bezeichnen; und andererseits muss demnach für eine Norm von z, die grösser oder mindestens eben so gross als R ist, folgende Reihe gelten:

$$u_f = \alpha_f z^p + \beta_f z^{p-1} + \ldots + \varkappa_f + \frac{\lambda_f}{z} + \frac{\mu_f}{z^2} + \ldots$$

Um nun das über den Kreis Θ ausgedehnte Integral $\int u_f dz$ zu erhalten, genügt es nur

$$z = Re^{\tau i}$$

zu setzen, woraus folgt

$$dz = iRe^{\tau i}d\tau,$$

mithin ist

$$\int u_f dz = i \left\{ \begin{array}{l} \alpha_f R^{p+1} \int_0^{2\pi} e^{(p+1)\tau i} d\tau \\ \quad + \beta_f R^p \int_0^{2\pi} e^{p\tau i} d\tau + \ldots \\ \quad + \varkappa_f R \int_0^{2\pi} e^{\tau i} d\tau + \lambda_f \int_0^{2\pi} d\tau \\ \quad + \frac{\mu_f}{R} \int_0^{2\pi} e^{-\tau i} d\tau + \ldots \end{array} \right\} = 2\pi i \lambda_f .$$

Somit erhalten wir die Gleichung:

$$A_f + A'_{f'} + A''_{f''} + A'''_{f'''} + \ldots = 2\pi i \lambda_f,$$

wo λ_f den Coefficienten von $\frac{1}{z}$ in der nach den absteigenden Potenzen von z fortschreitenden Entwickelung für u_f bedeutet; eine solche Gleichung findet für jede Function u_f statt, welche nach einem Umlauf von Z auf der alle Punkte $A, A', A'', \ldots$ umgebenden geschlossenen Curve Δ ihren Anfangswerth wieder annimmt.

48. Es wurde schon früher in Nr. 44 bemerkt, dass im Allgemeinen keineswegs ein Werth von $\int_c^k u_1 dz$ entsteht, wenn man irgend welche ganze Vielfache der Elementar-Integrale mit einer von den Grössen $v_1, v_2, \ldots, v_m$ durch Addition verbindet; jedoch gibt es gewisse Klassen unter diesen Integralen, welche die merkwürdige Eigenschaft besitzen, dass wenn die Summe aller zu einer solchen Klasse gehörenden Elementar-Integrale, die stets von c unabhängig ist, beliebig oft mit einem Werthe des Integrals $\int_c^k u_1 dz$

durch Addition oder Subtraction verbunden wird, immer ein Werth desselben wiederkehrt.

Es sei nämlich w der auf die Curve $(\Gamma) + CMK$ bezügliche Werth des Integrals $\int_c^k u_1 dz$, wobei mit (Γ) die Charakteristik einer durch den Punkt C gehenden geschlossenen Curve angedeutet ist; ferner seien (Γ') und (Γ'') zwei Klassen von Termen der Charakteristik (Γ) (von denen auch eine gleich Null sein kann), so dass sich die Charakteristik $(\Gamma) + CMK$ in der Form $(\Gamma')(\Gamma'') + CMK$ darstellt. Bezeichnet man nun mit u_n diejenige Function, in deren Anfangswerth die Function u_1 nach einem Umlauf des Punktes Z auf der geschlossenen Curve (Γ') übergeht, so wird man auf mannigfache Weise eine geschlossene Curve der Art durch den Punkt C legen können, dass die Function u_n nach einem Umlauf von Z auf dieser Curve ihren Anfangswerth wieder erhält. Es mag (Φ) oder $(-\Phi)$ die Charakteristik einer solchen Curve vorstellen, je nachdem Z auf dieser im einen oder andern Sinne herumgeführt wird, und ferner p den auf die Curve (Φ) bezüglichen Werth des Integrals $\int u_n dz$; alsdann ist diese Grösse p **erstens** nach Nr. 43 durch die Summe einer gewissen Anzahl von Elementar-Integralen darstellbar, und **zweitens**, wie sich aus Nr. 12 ergibt, von der Lage des Punktes C unabhängig.

Somit besitzt das Integral $\int_c^k u_1 dz$, wenn sich die Integration über die Curven

$$(\Gamma')(\Phi)(\Gamma'') + CMK,$$
$$(\Gamma')(\Phi)(\Phi)(\Gamma'') + CMK,$$
$$(\Gamma')(\Phi)(\Phi)(\Phi)(\Gamma'') + CMK,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$(\Gamma')(-\Phi)(\Gamma'') + CMK,$$
$$(\Gamma')(-\Phi)(-\Phi)(\Gamma'') + CMK,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

erstreckt, bezüglich die Werthe:

$$p + w,\quad 2p + w,\ 3p + w, \ldots,$$
$$-p + w,\ -2p + w, \ldots.$$

Wir sehen hieraus, dass durch Addition irgend eines Vielfachen von p zu dem Werthe w des Integrals $\int_c^k u_1 dz$ wiederum ein Werth desselben gewonnen wird, und nennen aus diesem Grunde p eine *Periode* des Integrals $\int_c^k u_1 dz$.

Es bieten sich nun in Bezug hierauf folgende Hauptfragen dar:

1) Alle selbstständig auftretenden Perioden anzugeben, welche einem Werthe von $\int_0^k u_1 dz$ zukommen; hierbei können solche nicht als selbstständig betrachtet werden, die sich durch Addition von ganzen Vielfachen der übrigen ergeben, wie z. B. nicht $2p$ als eine von p, oder $p + q$ als eine von p und q wesentlich verschiedene Periode zur Geltung kommt.

2) Es ist zu entscheiden, ob jede Periode p allen oder nur gewissen Werthen des Integrals $\int_c^k u_1 dz$ angehört.

3) Diejenigen Werthe von $\int_c^k u_1 dz$ zu ermitteln, welche einer Reduction nicht fähig sind, wenn man eben von den ganzen Vielfachen der Perioden absieht.

Die Erörterung dieser Fragen für mehrere specielle Fälle soll den Gegenstand der folgenden Nummern ausmachen.

49. Der einfachste Fall, welchen wir zunächst zu betrachten haben, ist der, wenn die Function u rational ist; hier ist nämlich die Gleichung

$$f(u, z) = 0$$

vom ersten Grade und liefert natürlich keine vielfachen Wurzeln, während dagegen der Werth von u für gewisse Werthe von z unendlich gross sein kann. Es seien $a, a', a'', \ldots$ diese Werthe und $A, A', A'', \ldots$ die ihnen entsprechenden Punkte; alsdann lässt sich u jederzeit in die Form:

$$\frac{E}{z-a}+\frac{E_1}{(z-a)^2}+\frac{E_2}{(z-a)^3}+\ldots+\frac{E_{m-1}}{(z-a)^m}$$
$$+\frac{E'}{z-a'}+\frac{E_1'}{(z-a')^2}+\ldots+\frac{E'_{m'-1}}{(z-a')^{m'}}$$
$$+\frac{E''}{z-a''}+\frac{E_1''}{(z-a'')^2}+\ldots+\frac{E''_{m''-1}}{(z-a'')^{m''}}+\ldots+\varepsilon(z)$$

bringen, wo $E, E_1, E_2, \ldots, E_1', E_2', \ldots$ Constanten und $\varepsilon(z)$ eine ganze Function von z vorstellen.

Da hier die über die Curven $(+A)$, $(-A)$, $(+A')$, $(-A')$, $(+A'')$, $(-A'')$, ... ausgedehnten Elementar-Integrale von der Lage des Punktes C unabhängig sind und bezüglich die Werthe:

$$+2\pi iE, \quad -2\pi iE, \quad +2\pi iE',$$
$$-2\pi iE', \quad +2\pi iE'', \quad -2\pi iE'',$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

besitzen, so sind, wenn wir mit v den Werth des Integrals $\int_c^k u\,dz$ für eine bestimmte Integrations-Curve CMK bezeichnen, die Werthe dieses letztern sämmtlich in der Formel

$$v+2\pi i(nE+n'E'+n''E''+\ldots)$$

enthalten, wo $n, n' n''$, ... beliebige positive oder negative ganze Zahlen bedeuten, die auch Null sein können.

Im Allgemeinen sind die Perioden $2\pi iE$, $2\pi iE'$, $2\pi iE''$, ... selbstständig und ausserdem in derselben Anzahl vorhanden, wie die Werthe von z, für welche die Function u unendlich wird; anders verhielte es sich aber, wenn eine oder mehrere der Zahlen E, E', E'', ... durch Addition von ganzen Vielfachen der übrigen gebildet werden könnten. Offenbar gibt es unendlich viele Werthe des Integrals $\int_c^k u_1 dz$, wofern nicht die Zahlen E, E', E'', ... sämmtlich gleich Null sind, in welchem Falle das Integral nur den Werth v haben würde.

Dasselbe, was für die rationale Function u gilt, hat auch Gültigkeit für jede transcendente Function, welche sich in die Form:

$$\frac{E}{z-a} + \frac{E_1}{(z-a)^2} + \ldots + \frac{E_{m-1}}{(z-a)^m} + \frac{E'}{z-a'} + \ldots$$
$$+ \frac{E'_{m'-1}}{(z-a')^{m'}} + \ldots + \varepsilon(z)$$

bringen lässt, wo $\varepsilon(z)$ eine für jeden endlichen Werth von z einwerthige Function ist, die zugleich endlich und stetig bleibt. Für die mit $E, E', \ldots$ bezeichneten Constanten hat Cauchy in seinen über dieselben angestellten Untersuchungen den Namen „*Residuen* der Funtion u in Bezug auf die Werthe $a, a', \ldots$ von z" gewählt; auch andererseits stimmen die für den vorliegenden Fall ermittelten Perioden des Integrals $\int_c^k u_1 dz$ mit den von diesem berühmten Mathematiker angegebenen*) vollkommen überein.

Wir wollen jetzt beispielsweise die Perioden des Integrals $\int_c^k \frac{dz}{1+z^2}$ aufsuchen. Von den Grössen $E, E', \ldots$ sind hier nur zwei vorhanden, welche nämlich gleich $+i$ und $-i$ sind, so dass die beiden Perioden des Integrals die Werthe $+\pi$ und $-\pi$ besitzen; da dieselben aber gleich und entgegengesetzt sind, so fallen sie in eine einzige $+\pi$ zusammen. Bekanntlich werden die Werthe des Integrals $\int_c^k \frac{dz}{1+z^2}$ durch die verschiedenen Bögen v dargestellt, deren trigonometrische Tangente gleich k ist, und es gilt für jeden dieser Bögen die allgemeine Formel $v + n\pi$.

50. Wenn die Gleichung

$$f(u,z) = 0$$

in Bezug auf u vom zweiten Grade ist, so können wir die beiden Werthe von u in der Form:

---

*) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences.* **T. XXIII** (*année* **1846**).

$$u = \frac{P}{Q} \pm \frac{R}{S}\sqrt{\frac{T}{U}}$$

darstellen, wo P, Q, R, S, T, U ganze Polynome sind. Setzen wir voraus, was gestattet ist, dass weder T, noch U gleiche Factoren enthält, dass ferner R und T weder mit S, noch mit U, so wie auch P nicht mit Q Factoren gemeinschaftlich besitzen; so werden diejenigen Werthe von z, für welche eines der Polynome Q, R, S, T, U verschwindet, doppelten oder unendlich grossen Wurzeln der Gleichung

$$f(u,z) = 0$$

entsprechen.

Es mögen nun die Punkte $A, A', A'', \ldots.$ solchen Werthen von z zugehören, für welche T oder U verschwindet, und die Punkte $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \mathfrak{A}'', \ldots.$ solchen Werthen von z, für die eines der Polynome Q, R, S verschwindet, jedoch weder T, noch U; sind alsdann $(\pm A), (\pm A'), \ldots.$ die um die Punkte $A, A' \ldots.$ und $(\pm \mathfrak{A})$, $(\pm \mathfrak{A}'), \ldots.$ die um die Punkte $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \ldots.$ beschriebenen Elementar-Curven, ferner $A_{\pm 1}$, $A_{\pm 2}$, $A'_{\pm 1}$, $A'_{\pm 2}, \ldots.$ die auf die Curven $(\pm A)$, $(\pm A'), \ldots.$ und $\mathfrak{A}_{\pm 1}$, $\mathfrak{A}_{\pm 2}$, $\mathfrak{A}'_{\pm 1}$, $\mathfrak{A}'_{\pm 2}, \ldots.$ die auf die Curven $(\pm \mathfrak{A})$, $(\pm \mathfrak{A}'), \ldots.$ bezüglichen Elementar-Integrale: so sieht man leicht ein, dass die beiden Functionen u_1 und u_2 um jeden der Punkte A, $A'\,A'', \ldots.$ ein cyklisches System bilden, so dass, wenn $A^{(\sigma)}$ irgend einen dieser Punkte bezeichnet, nach Nr. 45:

$$\overset{(\sigma)}{A}_{-1} = -\overset{(\sigma)}{A}_2 \;, \quad \overset{(\sigma)}{A}_{-2} = -\overset{(\sigma)}{A}_1$$

ist.

Da andererseits, wenn allgemein mit $\mathfrak{A}^{(\sigma)}$ einer der Punkte $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \mathfrak{A}'', \ldots.$ bezeichnet wird, jede der Functionen u_1, u_2 ihren eignen Anfangswerth wieder erhält, nachdem Z einen unendlichen kleinen Umlauf um den Punkt $\mathfrak{A}^{(\sigma)}$ gemacht hat, so ist nach Nr. 46:

$$\overset{(\sigma)}{\mathfrak{A}}_{-1} = -\overset{(\sigma)}{\mathfrak{A}}_1 \;, \quad \overset{(\sigma)}{\mathfrak{A}}_{-2} = -\overset{(\sigma)}{\mathfrak{A}}_2 \,.$$

Setzt man nun diese Elementar-Integrale, so wie auch die Werthe v_1 und v_2 der über eine bestimmte Curve CMK fortgeführten Integrale $\int_c^k u_1 dz$, $\int_c^k u_2 dz$ als bekannt voraus, so lässt sich der Werth des Integrals $\int_c^k u_1 dz$ für eine beliebige andere Integrations-Curve CLK, deren Charakteristik gegeben ist, berechnen. Wir wollen jetzt allgemeine Ausdrücke aufstellen, welche die Werthe von $\int_c^k u_1 dz$ für alle von C nach K führenden Integrations-Curven CLK umfassen.

Es sei $(\mathcal{A})$ die Charakteristik der Curve CLK und $[\pm \mathfrak{A}^{(\sigma)}]$ ein Term derselben, welchem schon n Terme vorangehen mögen. Sobald der Punkt Z über die durch die n ersten Terme von $(\mathcal{A})$ dargestellten Elementar-Curven herumgeführt ist, wird die Function u_1 entweder ihren eignen Anfangswerth annehmen, oder auch den Anfangswerth von u_2 erhalten; im ersten Falle ist der über die Elementar-Curve $[\pm \mathfrak{A}^{(\sigma)}]$ ausgedehnte Theil des Integrals $\int_c^k u_1 dz$ gleich $\mathfrak{A}^{(\sigma)}_{\pm 1}$, im andern Falle gleich $\mathfrak{A}^{(\sigma)}_{\pm 2}$. Da nun die Function u_1, nachdem Z diese $(n+1)$te Elementar-Curve zurückgelegt, den nach Durchlaufung der n ersten Elementar-Curven eingetretenen Werth wieder annimmt, so darf man in der Charakteristik $(\mathcal{A})$ alle Terme der Form $[\pm \mathfrak{A}^{(\sigma)}]$ unterdrücken; wir beschränken daher unsere Aufmerksamkeit auf den Werth von $\int_c^k u_1 dz$ für die hierdurch vereinfachte Integrations-Curve und fügen nur zu diesem Werthe eine Grösse von folgender Form hinzu:

$$
\begin{aligned}
F = {} & l_1 \mathfrak{A}_1 + l'_1 \mathfrak{A}'_1 + l''_1 \mathfrak{A}''_1 + \ldots \\
& + l_{-1} \mathfrak{A}_{-1} + l'_{-1} \mathfrak{A}'_{-1} + l''_{-1} \mathfrak{A}''_{-1} + \ldots \\
& + l_2 \mathfrak{A}_2 + l_2' \mathfrak{A}_2' + \ldots \\
& + l_{-2} \mathfrak{A}_{-2} + l'_{-2} \mathfrak{A}'_{-2} + \ldots,
\end{aligned}
$$

wo $l_1, l'_1, l''_1, \ldots, l_{-1}, l'_{-1}, \ldots, l_2, l'_2, \ldots$ lauter ganze positive Zahlen vertreten, welche auch gleich Null und selbst negativ sein können, weil

$$\overset{(\sigma)}{l}_{-1} \overset{(\sigma)}{\mathfrak{A}}_{-1} = - \overset{(\sigma)}{l}_{-1} \overset{(\sigma)}{\mathfrak{A}}_1, \quad \overset{(\sigma)}{l}_{-2} \overset{(\sigma)}{\mathfrak{A}}_{-2} = - \overset{(\sigma)}{l}_{-2} \overset{(\sigma)}{\mathfrak{A}}_2$$

ist. Offenbar werden diesen ganzen Zahlen die beabsichtigten Werthe dadurch beigelegt, dass man die Curve CLK auf geeignete Weise gestaltet, wozu es nur der Einführung neuer Terme der Form $[\pm \mathfrak{A}^{(\sigma)}]$ in die Charakteristik $(\mathcal{A})$ bedarf.

Nachdem die Terme der Form $[\pm \mathfrak{A}^{(\sigma)}]$ aus dieser Charakteristik abgeschieden worden, handelt es sich nur noch um solche von der Form $[\pm A^{(\sigma)}]$, abgesehen von dem letzten Term $+ CMK$, und die Charakteristik wird sich nach dieser Modification auf

$$(\mathcal{A}') = [\pm A^{(\alpha)}]\,[\pm A^{(\beta)}]\,[\pm A^{(\gamma)}]\,[\pm A^{(\delta)}] \ldots [\pm A^{(\sigma)}] + CMK$$

reduciren. Alsdann wird die Function u_1 bei den auf einander folgenden Uebergängen des Punktes Z auf alle einzelnen Elementar-Curven derselben abwechselnd entweder den Anfangswerth von u_2, oder ihren eignen Anfangswerth erhalten, so dass das über die Curve $(\mathcal{A}')$ fortgeführte Integral $\int_c^k u_1 dz$, wenn die Anzahl der in $(\mathcal{A}')$ zusammengefassten Elementar-Curven gerade ist, den Werth

$$V_1 = \overset{(\alpha)}{A}_{\pm 1} + \overset{(\beta)}{A}_{\pm 2} + \overset{(\gamma)}{A}_{\pm 1} + \overset{(\delta)}{A}_{\pm 2} + \ldots + \overset{(\sigma)}{A}_{\pm 2} + v_1,$$

wenn aber die genannte Anzahl ungerade ist, den Werth

$$V_2 = \overset{(\alpha)}{A}_{\pm 1} + \overset{(\beta)}{A}_{\pm 2} + \overset{(\gamma)}{A}_{\pm 1} + \overset{(\delta)}{A}_{\pm 2} + \ldots + \overset{(\sigma)}{A}_{\pm 1} + v_2$$

besitzt.

Bezeichnen wir jetzt mit $B, B_1, B_{11}, \ldots$ sämmtliche Resultate der Addition einer der Grössen $A_{\pm 2}, A'_{\pm 2}, A''_{\pm 2}, \ldots$ zu einer der Grössen $A_{\pm 1}, A'_{\pm 1}, A''_{\pm 1}, \ldots$, so erscheint jeder der Ausdrücke V_1 und V_2 als eine gewisse aus den Grössen $B, B_1, B_{11}, \ldots$ gebildete Summe, in welcher auch eine und dieselbe mehrfach wiederholt vorkommen kann, während jedoch das erste Mal nur der letzte und das zweite Mal die beiden letzten Terme als solche wieder auftreten. Wir erhalten somit:

$$V_1 = mB + m_1 B_1 + m_{11} B_{11} + \ldots + v_1,$$

$$V_2 = mB + m_1 B_1 + m_{11} B_{11} + \ldots + \overset{(\sigma)}{A}_{\pm 1} + v_2,$$

wo $m, m_1, m_{11}, \ldots$ beliebige ganze Zahlen vorstellen, die positiv, Null, oder auch negativ sein können, da die Grössen $B, B_1, B_{11}, \ldots.$ an sich paarweise, gleich und mit entgegengesetzten Vorzeichen behaftet sind. Da ausserdem folgende Gleichung gilt:

$$A_1 + A_{-2} = 0$$

oder überhaupt

$$\overset{(\sigma)}{A}_{\pm 1} = \overset{(\sigma)}{A}_{\pm 1} + A_{-2} + A_1,$$

wo die Summe $\overset{(\sigma)}{A}_{\pm 1} + A_{-2}$ durch eine der Grössen $B, B_1, B_{11}, \ldots.$ vorgestellt wird, so können wir in Betreff des Integrals V_2 auch schreiben:

$$V_2 = mB + m_1 B_1 + m_{11} B_{11} + \ldots. + A_1 + v_2.$$

Als Summen aus der Grösse F und einer der Grössen V_1, V_2 lassen sich also sämmtliche Werthe des bestimmten Integrals $\int_c^k u_1 dz$ in Bezug auf beliebige Integrations-Curven CLK durch die beiden Formeln

$$G + v_1 \text{ und } G + A_1 + v_2$$

darstellen, wo zur Abkürzung unter G die Grösse

$$\begin{aligned} G = l_1\mathfrak{A}_1 + l'_1\mathfrak{A}'_1 + l''_1\mathfrak{A}''_1 + \ldots. \\ + l_{-1}\mathfrak{A}_{-1} + l'_{-1}\mathfrak{A}'_{-1} + \ldots. \\ + l_2\mathfrak{A}_2 + l'_2\mathfrak{A}'_2 + \ldots. \\ + l_{-2}\mathfrak{A}_{-2} + l'_{-2}\mathfrak{A}'_{-2} + \ldots. \end{aligned}$$

und unter $l_1, l'_1, \ldots., l_{-1}, l'_{-1}, \ldots., l_2, \ldots., l_{-2}, \ldots., m, m_1, m_{11} \ldots.$ durchaus beliebige ganze positive, oder negative Zahlen, die auch gleich Null sein können, zu verstehen sind. Sämmtliche Werthe des Integrals $\int_c^k u_1 dz$ ergeben sich demnach, wenn man ein Mal zu dem Werthe v und das andere Mal zu $A_1 + v_2$ beliebige ganze Vielfache der Grössen

$$\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}'_1, \mathfrak{A}''_1, \ldots., \mathfrak{A}_{-1}, \mathfrak{A}'_{-1}, \mathfrak{A}''_{-1}, \ldots.,$$
$$\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}'_2, \ldots., \mathfrak{A}_{-2}, \mathfrak{A}'_{-2}, \ldots.,$$
$$B, B_1, B_{11}, \ldots.$$

addirt.

Hieraus erkennt man ohne Weiteres, dass eben diese Grössen lauter Perioden des Integrals $\int_c^k u_1 dz$ darstellen, dass jede andere Periode desselben unter ihnen mit begriffen ist; dass sie aber nicht selbstständig sein werden, und zwar wegen der oben aufgestellten Gleichungen:

$$\overset{(\sigma)}{\mathfrak{A}}_1 = -\overset{(\sigma)}{\mathfrak{A}}_1\,,\quad \overset{(\sigma)}{\mathfrak{A}}_{-2} = -\overset{(\sigma)}{\mathfrak{A}}_2\,,$$

$$\overset{(\sigma)}{A}_{-1} = -\overset{(\sigma)}{A}_2\,,\quad \overset{(\sigma)}{A}_{-2} = -\overset{(\sigma)}{A}_1$$

sich auf die folgenden, im Allgemeinen selbstständigen Perioden zurückführen lassen:

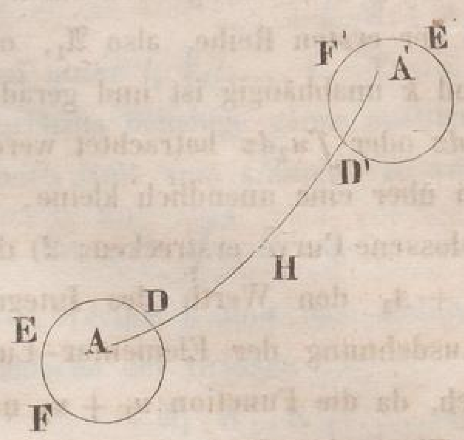
$$\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}'_1, \mathfrak{A}''_1, \ldots,\quad \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}'_2, \mathfrak{A}''_2, \ldots,$$
$$A_1 + A_2,\; A_1 + A'_2,\; A_1 + A''_2,\; A_1 + A'''_2, \ldots,$$
$$A_2 + A'_1,\; A_2 + A''_1,\; A_2 + A'''_1, \ldots,$$
$$A'_1 + A'_2,\; A'_1 + A''_2,\; A'_1 + A'''_2, \ldots,$$
$$A'_2 + A''_1,\; A'_2 + A'''_1, \ldots,$$
$$A''_1 + A''_2,\; A''_1 + A'''_2, \ldots,$$
$$A''_2 + A'''_1, \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

welche sich in besondern Fällen auf eine noch geringere Anzahl reduciren können.

Aus der in Nr. 46 eingeschalteten Bemerkung entnehmen wir zuvörderst 1) dass eine Periode der ersten Reihe, also $\mathfrak{A}_1$, oder $\mathfrak{A}_2, \ldots$, von den Grenzen c und k unabhängig ist und geradezu als der Werth des Integrals $\int u_1 dz$ oder $\int u_2 dz$ betrachtet werden muss, wo sich die Integrationen über eine unendlich kleine, um den Punkt $\mathfrak{A}$ beschriebene geschlossene Curve erstrecken; 2) dass eine Periode von der Art $A_1 + A_2$ den Werth des Integrals $\int (u_1 + u_2)\, dz$ für die ganze Ausdehnung der Elementar-Curve $(+ A)$ darstellt, während zugleich, da die Function $u_1 + u_2$ nach einem Umlauf von Z auf dieser Elementar-Curve ihren Anfangswerth wieder annimmt, das in Rede stehende Integral nach Nr. 11 on der Lage des Punktes C unabhängig ist, und daher eine unendlich kleine, den Punkt A umgebende Integrations-Curve zu Grunde gelegt werden kann; 3) dass endlich eine Periode von der Art $A_1 + A'_2$ dem Werthe des Integrals $\int u_1 dz$, dessen Integrations-Curve die Charakteristik $(+A)(+A')$ besitzt, gleich ist, während, da der Anfangswerth der Function u_1 nach einem Umlauf von Z auch auf dieser Curve wiederkehrt, abermals das Integral oder die ihm gleichgeltende Periode $A_1 + A'_2$ von der Lage des Punktes C unabhängig ist, und demnach jede die Punkte A und A' umgebende geschlossene Curve, welche sich jedoch ohne Ueberschreitung eines der Punkte $A, A', A'', \ldots, \mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \mathfrak{A}'', \ldots$ mit der Curve $(+A)(+A')$ zur Coincidenz bringen lässt, als Integrations-Curve dienen kann. Somit ist klar, dass überhaupt sämmtliche Perioden des vorhin aufgestellten Systems von den Grenzen c und k des Integrals $\int_c^k u_1 dz$ unabhängig sind.

Wir wollen nun die bereits ausgesprochene Behauptung beweisen, dass die Periode $A_1 + A'_2$ dem Werthe des Integrals $\int u_1 dz$ für eine um die beiden Punkte A und A' beschriebene geschlossene Curve gleich ist. Es sei $ADHD'A'$ (Fig. 25.) eine zwischen diesen Punkten ausgedehnte Curve, mit welcher die in Rede stehende allmälig zur Coincidenz gebracht werden kann, ohne Ueberschreitung eines der Punkte $A, A', A'', \ldots$, so dass wir diese durch diejenige Curve ersetzen können, deren Bestandtheile die Curve DHD', die unendlich kleine geschlossene Curve $D'E'F'D'$, die Curve $D'HD$ und endlich die unendlic kleine Curve $DEFD$ sind. Es gibt einen sehr allgemeinen Fall, wo die auf die unendlich kleinen Curven $DEFD$ und $D'E'F'D'$ bezüglichen Theile des Integrals $\int u_1 dz$ zu Null herab-

Fig. 25



sinken, während die räumlichen Ausdehnungen dieser Curven ihrerseits bis zum blossen Punkte abnehmen; dieser Fall ist offenbar der, wo die Grenze des Products $(z-a)u_1$ für $z=a$ und die Grenze des Products $(z-a')u_1$ für $z=a'$ beide verschwinden. Da sich nämlich die Function u_1 für sehr kleine Werthe der Norm von $z-a$ nach den ganzen negativen und positiven Potenzen von $(z-a)^{\frac{1}{2}}$ entwickeln lässt, so muss sich, wenn das Product $(z-a)u_1$ für $z=a$ verschwinden soll, die Function u_1 durch folgende Reihe darstellen lassen:

$$u_1 = \mathrm{A}(z-a)^{-\frac{1}{2}} + \mathrm{B} + \mathrm{C}(z-a)^{\frac{1}{2}} + \mathrm{D}(z-a) + \mathrm{E}(z-a)^{\frac{3}{2}} + \ldots.$$

Es ist erlaubt, sich statt der Curve $DEFD$ eines um den Punkt A mit dem sehr kleinen Radius ϱ beschriebenen Kreises zu bedienen, für dessen Umfang

$$z = a + \varrho e^{\tau i}$$

ist, woraus folgt

$$dz = i\varrho e^{\tau i}\, d\tau;$$

und für den über die Curve $DEFD$ ausgedehnten Theil des Integrals $\int u_1 dz$ ergibt sich alsdann folgender Ausdruck:

$$i\left\{\begin{array}{l} \mathrm{A}\varrho^{\frac{1}{2}}\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{\frac{\tau}{2}i}\, d\tau + \mathrm{B}\varrho\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{\tau i}\, d\tau \\ + \mathrm{C}\varrho^{\frac{3}{2}}\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{\frac{3\tau}{2}i}\, d\tau + \ldots \end{array}\right\}$$

$$= -4\,(\mathrm{A}\varrho^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{3}\mathrm{C}\varrho^{\frac{3}{2}} + \tfrac{1}{5}\mathrm{E}\varrho^{\frac{5}{2}} + \ldots),$$

welcher eben beweist, dass dieses Integral verschwinden muss, sobald die Grösse ϱ zu Null herabsinkt. Auf ähnliche Weise liesse sich darthun, dass der auf die Curve $D'E'F'D'$ bezügliche Theil des Integrals mit der räumlichen Ausdehnung dieser Curve gleichzeitig verschwindet und es folgt hieraus für unsern Fall, dass die Periode $A_1 + A'_2$ die Grenze von der Summe derjenigen Integraltheile ist, welche sich über die beiden Curven DHD' und $D'HD$ erstrecken, sobald nämlich die Punkte D und D' bezüglich mit A und A' zusammenfallen. Da aber die Function u_1 bei der Fortbewegung des Punktes Z auf der Curve DHD', um den Punkt A' herum und wieder über $D'HD$ zurück diejenigen Werthe, welche sie zuerst durchlief, das zweite Mal nicht wieder annimmt, sondern die in umgekehrter Ordnung, vom Punkte D aus folgenden Werthe der Function u_2 durchläuft; so ist die Summe der auf die Curven DHD' und $D'HD$ bezüglichen Theile des Integrals dem Integrale $\int(u_1 - u_2)dz$ gleich, wo die Integration über die Curve DHD' fortzuführen ist. Geht man nun zur Grenze über, so findet man, dass die Periode $A_1 + A'_2$ dem auf die Curve AHA' bezüglichen Werthe des Integrals $\int(u_1 - u_2)dz$ gleich ist.

In dem soeben behandelten Falle reducirt sich die Summe $A_1 + A_2$ auf Null, weil sie den Werth des über die Curve $DEFD$ ausgedehnten Integrals $\int(u_1 + u_2)dz$ darstellt. Wählt man nämlich für diese Curve den Kreis vom Radius ϱ, so hat man

$$u_1 + u_2 = 2\mathrm{B} + 2\mathrm{D}(z-a) + 2\mathrm{F}(z-a^2) + \ldots,$$

und folglich:

$$\int(u_1 + u_2)\,dz = 2i \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{B}\varrho \int_0^{2\pi} e^{\tau i}\,d\tau \\ + \mathrm{D}\varrho^2 \int_0^{2\pi} e^{2\tau i}d\tau \\ + \mathrm{F}\varrho^3 \int_0^{2\pi} e^{3\tau i}\,d\tau + \ldots \end{array} \right\} = 0.$$

Ganz in ähnlicher Weise ergibt sich, dass die Summe $A'_1 + A'_2$ ebenfalls gleich Null ist, so dass also die Perioden $A_1 + A_2$ und $A'_1 + A'_2$ verschwinden, während dagegen die Perioden $A_1 + A'_2$ und $A_2 + A'_1$, die einander gleich und mit entgegengesetzten Vorzeichen behaftet sind, nur noch eine einzige ausmachen.

So oft die Anzahl der Punkte $A, A' A'', \ldots$ gerade, $2n$ ist, kommt die in Nr. 47 gemachte Bemerkung zur Anwendung. Beachten wir nämlich, dass für diesen Fall die Functionen u_1, u_2 beide nach einem Umlauf des Punktes Z auf der durch den Punkt C gehenden Curve $\varDelta$, welche zugleich die Punkte $A, A', A'', \ldots,$ sämmtlich umgibt, wieder ihre Anfangswerthe erhalten, während die Charakteristik $(\mathcal{A})$ dieser Curve aus zweierlei beliebig vermischten Termen, einerseits der Form $[+A^{(\sigma)}]$, andererseits der Form $[+\mathfrak{A}^{(\sigma)}]$ zusammengesetzt ist; lassen wir ausserdem die Elementar-Curven $(+A)$, $(+A')$, $(+A'')$,...., $[+A^{(2n-2)}]$, $[+A^{(2n-1)}]$, ganz abgesehen von den etwa dazwischen vorkommenden Termen der Form $[+\mathfrak{A}^{(\sigma)}]$, wieder in dieser Ordnung folgen, was stets erlaubt ist; und bezeichnen wir mit $[+\mathfrak{A}^{(\mu)}]$, $[+\mathfrak{A}^{(\mu')}]$, $[+\mathfrak{A}^{(\mu'')}]$, ... diejenigen Terme dieser Art, denen in der Charakteristik eine gerade Anzahl von Termen der Form $[+A^{(\sigma)}]$ vorangehen, und andererseits mit $[+\mathfrak{A}^{(\nu)}]$, $[+\mathfrak{A}^{(\nu')}]$, $[+\mathfrak{A}^{(\nu'')}]$,.... die Terme, welchen eine ungerade Anzahl der Form $[+A^{(\sigma)}]$ vorausgehen: so ergeben sich durch Anwendung der in Nr. 47 gewonnenen Gleichung auf jede der beiden Functionen u_1 und u_2 folgende Gleichungen:

$$\mathfrak{A}^{(\mu)}{}_1 + \mathfrak{A}^{(\mu')}{}_1 + \mathfrak{A}^{(\mu'')}{}_1 + \ldots + \mathfrak{A}^{(\nu)}{}_2 + \mathfrak{A}^{(\nu')}{}_2 + \mathfrak{A}^{(\nu'')}{}_2 + \ldots$$
$$+ A_1 + A'_2 + A''_1 + A'''_2 + \ldots + A^{(2n-2)}{}_1 + A^{(2n-1)}{}_2 = 2\pi i \lambda_1,$$
$$\mathfrak{A}^{(\mu)}{}_2 + \mathfrak{A}^{(\mu')}{}_2 + \mathfrak{A}^{(\mu'')}{}_2 + \ldots + \mathfrak{A}^{(\nu)}{}_1 + \mathfrak{A}^{(\nu')}{}_1 + \mathfrak{A}^{(\nu'')}{}_1 + \ldots$$
$$+ A_2 + A'_1 + A''_2 + A'''_1 + \ldots + A^{(2n-2)}{}_2 + A^{(2n-1)}{}_1 = 2\pi i \lambda_2,$$

wo λ_1 und λ_2 die Coefficienten von $\frac{1}{z}$ in den nach den absteigenden Potenzen von z fortschreitenden Entwickelungen von u_1 und u_2 bedeuten.

Diese Gleichungen, deren linke Seiten Summen von Perioden des oben aufgestellten vollständigen Systems sind, liefern nun, wenn λ_1 und λ_2 gleich Null gesetzt werden, die Werthe zweier von diesen Perioden, welche sich als die Summen mehrerer anderer, mit entgegengesetzten Vorzeichen versehener Perioden darstellen; hiermit ist aber die Anzahl der selbstständigen Perioden um zwei vermindert worden.

51. Wir wollen nun, um die bisher entwickelte Theorie wirklich auszuführen, einige specielle Fälle der nähern Betrachtung unterwerfen. Es sei zuerst folgende Gleichung zwischen u und z gegeben:

$$(z \quad a)u^2 = h^2,$$

wo h einen constanten Werth hat. Sofort lässt sich erkennen, dass die Functionen u_1, u_2 um den $z = a$ entsprechenden Punkt A ein cyklisches System bilden, und dass nur eine Periode des Integrals $\int_c^k u_1 dz$, nämlich von der Grösse $A_1 + A_2$ existiren kann, die geradezu den Werth des Integrals $\int (u_1 + u_2) dz$ für die Elementar-Curve $(+A)$ darstellt. Da nun der gegebenen Gleichung gemäss die Relation

$$u_1 + u_2 = 0$$

stattfindet, so gilt die Gleichung

$$A_1 + A_2 = 0,$$

d. h. die Periode selbst ist gleich Null, so dass dem Integral $\int_c^k u_1 dz$ bloss die beiden Werthe v_1 und $A_1 + v_2$ zukommen.

Zu denselben Folgerungen führt die Behandlung der Gleichung

$$u^2 = h^2 (z - a).$$

52. Wählen wir die Gleichung

$$(z-a)(z-a')u^2 = h^2,$$

so sind die beiden $z = a$ und $z = a'$ entsprechenden Punkte A und A' vorhanden, um welche jederseits die Functionen u_1 und u_2 eine cyklische Vertauschung eingehen. Die in Nr. 50 gegebenen allgemeinen Ausdrücke für die Perioden reduciren sich hier auf die vier Grössen:

$$A_1 + A_2, \ A_1 + A'_2, \ A_2 + A'_1, \ A'_1 + A'_2;$$

da aber zufolge der Relation

$$u_1 + u_2 = 0$$

die beiden Gleichungen gelten:

$$A_1 + A_2 = 0, \ A'_1 + A'_2 = 0,$$

so ist

$$A_2 + A'_1 = -(A_1 + A'_2),$$

d. h. es sind die vier Perioden der einen selbstständigen Periode $A_1 + A'_2$ äquivalent. Da das Product $(z-a)u_1$ für $z = a$, wie auch das Product $(z-a')u_1$ für $z = a'$ verschwindet, so kann die Periode $A_1 + A'_2$, nach einer in Nr. 50 gemachten Bemerkung, geradezu als der Werth des Integrals

$$\int_a^{a'} (u_1 - u_2)\, dz = 2\int_a^{a'} u_1\, dz = 2h \int_a^{a'} \frac{dz}{\sqrt{(z-a)(z-a')}},$$

wo die Integrationen über die gerade Linie AA' auszudehnen sind, betrachtet werden. Setzen wir jetzt, um den Werth desselben zu erhalten,

$$z = \frac{a+a'}{2} + \frac{a-a'}{2} z'$$

ein, wo z' eine neue, etwa einem beweglichen Punkte Z' entsprechende Variable bezeichnet, und beachten wir, dass während die Integrationsgrenzen von z die Grössen a und a' sind, die von z' die Werthe -1 und $+1$ haben, und wenn der Punkt Z die Linie AA' durchläuft, der Punkt Z' den von den beiden Punkten $z' = -1$ und $z' = +1$ begrenzten Theil der x-Axe durchschreitet; so ergibt sich:

$$2h \int_a^{a'} \frac{dz}{\sqrt{(z-a)(z-a')}} = 2h \int_{-1}^{+1} \frac{dz'}{\sqrt{z'^2 - 1}} = \frac{2h}{i} \int_{-1}^{+1} \frac{dz'}{\sqrt{1-z'^2}},$$

wo die Integrationen nach z' durch eine von -1 bis $+1$ aufsteigende Reihe reeller Werthe fortzuführen sind. Nun ist unter dieser Bedingung

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \pi,$$

folglich hat die einzige Periode des Integrals $\int_c^k u_1\, dz$ den Werth $\frac{2\pi h}{i}$ oder $-\frac{2\pi h}{i} = 2\pi i h$, weil die Aenderung des Vorzeichens einer Periode nichts ausmacht.

Man kann diese Periode auch dadurch erhalten, dass man die zum Schlusse der Nr. 50 ausgesprochene Bemerkung auf unsern Fall enwendet, wo die Anzahl der Perioden A, A' eine gerade ist. Da die Coefficienten von $\frac{1}{z}$ in den nach den absteigenden Potenzen von z fortschreitenden Entwickelungen von u_1 und

u_2 bezüglich $\pm h$ und $\mp h$ sind, so gehen die am angeführten Orte aufgestellten Gleichungen über in:

$$A_1 + A'_2 = \pm 2\pi i h, \quad A_2 + A'_1 = \mp 2\pi i h;$$

man findet also denselben Werth $\pm 2\pi i h$ für die Periode $A_1 + A'_2$ wieder.

Nimmt man z. B. an:

$$a = +1, \quad a' = -1, \quad h = +i,$$

also

$$u^2 = \frac{1}{1-z^2}$$

und setzt dann

$$\int_0^z u_1 dz = v,$$

wo u_1 diejenige der beiden Functionen vorstellt, deren Anfangswerth gleich $+1$ für $z = 0$ ist; so erscheinen die verschiedenen Werthe von v als die unendlich vielen Bögen, deren Sinus gleich z ist, d. h. man hat

$$z = \sin v.$$

Für diesen Fall reducirt sich die Periode $\pm 2\pi i h$ auf 2π, in vollkommener Uebereinstimmung mit der bekannten Gleichung

$$\sin(v + 2l\pi) = \sin v,$$

wo l jede ganze Zahl vertritt.

Hätten wir statt der Gleichung

$$(z-a)(z-a')u^2 = h^2$$

die Gleichung

$$u^2 = h^2(z-a)(z-a')$$

gewählt, so wäre auf entsprechende Weise für die einzige Periode des Integrals $\int_c^k u_1 dz$ der Ausdruck

$$\frac{\pi h (a'-a)^2}{4} i$$

gefunden worden.

52. Wir gehen ferner zu der Gleichung

$$(z-a)(z-a')(z-a'')u^2 = h^2$$

über. Die allgemeine Methode führt zu folgenden neun als Perioden des Integrals $\int_c^k u_1 dz$ auftretenden Grössen:

$$A_1 + A_2,\ A_1 + A'_2,\ A_1 + A''_2,\ A_2 + A'_1,\ A_2 + A''_1,\ A'_1 + A'_2,$$
$$A'_1 + A''_2,\ A'_2 + A''_1,\ A''_1 + A''_2;$$

da aber, der Relation

$$u_1 + u_2 = 0$$

gemäss, folgende Gleichungen gelten:

$$A_1 + A_2 = 0,\ A'_1 + A'_2 = 0,\ A''_1 + A''_2 = 0,$$

so ist

$$A_1 + A'_2 = A_1 - A'_1,\ A_1 + A''_2 = -(A''_1 - A_1),\ A_2 + A'_1 = -(A_1 - A'_1),$$
$$A_2 + A''_1 = A''_1 - A_1,\ A'_1 + A''_2 = A'_1 - A''_1,\ A'_2 + A''_1 = -(A'_1 - A''_1),$$

so dass sich die oben genannten Perioden auf folgende drei reduciren:

$$A_1 - A'_1,\ A'_1 - A''_1,\ A''_1 - A_1.$$

Da nun ferner die Summe dieser letztern gleich Null ist, so erhalten wir an Stelle derselben nur zwei selbstständige Perioden, wofür wir

$$A_1 - A'_1,\ A_1 - A''_1$$

oder auch nach Nr. 45:

$$A_1 + A'_2,\ A_1 + A''_2$$

wählen können.

Diese beiden Perioden sind nach Nr. 50 geradezu als die Werthe der Integrale $\int_a^{a'} (u_1 - u_2)dz$, $\int_a^{a''} (u_1 - u_2)dz$ in Bezug auf gewisse vom Punkte A nach den Punkten A' und A'' gehende Curven $AH'A'$, $AH''A''$ zu betrachten, wofür auch die geraden Linien AA', AA'' selbst genommen werden können, da man über die Curven CDA, $CD'A'$, $CD''A''$ (Fig. 12) derartige Bestimmungen zu treffen vermag, dass sich die Curven (A), (A'), (A'') mit ihnen allmälig zur Coincidenz bringen lassen. Will man nun diese Perioden durch andere Integrale ausdrücken, wo die Variable von der untern Grenze zur obern eine aufsteigende Reihe reeller Werthe durchläuft, so braucht man nur in dem ersteren Integrale

$$z = \frac{a + a'}{2} + \frac{a' - a}{2} z'$$

und in dem andern

$$z = \frac{a + a''}{2} + \frac{a'' - a}{2} z''$$

einzusetzen, wo z' und z'' zwei neue Variabeln bezeichnen. Wenn wir dann unter dem Integralzeichen die Accente dieser letztern fortlassen, so erhalten wir für die beiden Perioden:

$$2h \int_{-1}^{+1} \frac{dz}{\sqrt{(z^2-1)\left(\frac{a+a'}{2} - a'' + \frac{a'-a}{2} z\right)}},$$

$$2h \int_{-1}^{+1} \frac{dz}{\sqrt{(z^2-1)\left(\frac{a+a''}{2} - a' + \frac{a''-a}{2} z\right)}}.$$

Wäre hierin z. B.

$$a = \frac{a' + a''}{2},$$

so würde eine dieser Perioden das Product aus der andern und i sein.

54. Ist die Funktion u durch folgende Gleichung definirt:

$$(z-a)(z-a')(z-a'')(z-a''')u^2 = h^2,$$

so finden wir zunächst durch Anwendung des allgemeinen Verfahrens folgende sechszehn Perioden:

$$\begin{gathered}
A_1 + A_2,\ A_1 + A'_2,\ A_1 + A''_2,\ A_1 + A'''_2, \\
A_2 + A'_1,\ A_2 + A''_1,\ A_2 + A'''_1,\ A'_1 + A'_2, \\
A'_1 + A''_2,\ A'_1 + A'''_2,\ A'_2 + A''_1,\ A'_2 + A'''_1, \\
A''_1 + A''_2,\ A''_1 + A'''_2,\ A''_2 + A'''_1,\ A'''_1 + A'''_2,
\end{gathered}$$

welche sich jedoch wegen der Relation

$$u_1 + u_2 = 0$$

oder der hieraus entspringenden Gleichungen

$$A_1 + A_2 = 0,\ A'_1 + A'_2 = 0,\ A''_1 + A''_2 = 0,\ A'''_1 + A'''_2 = 0$$

auf folgende sechs Perioden reduciren:

$$\begin{gathered}
A_1 - A'_1,\ A_1 - A''_1,\ A_1 - A'''_1, \\
A'_1 - A''_1,\ A'_1 = A'''_1,\ A''_1 - A'''_1.
\end{gathered}$$

Man sieht zwar, dass die vierte die Differenz der beiden ersten, die fünfte die Differenz der ersten und dritten, und die sechste die Differenz der zweiten und dritten ist, und könnte sich gleich hierdurch veranlasst sehen, von diesen Perioden nur die drei ersten:

$$A_1 - A'_1\,,\quad A_1 - A''_1\,,\quad A_1 - A'''_1$$

beizubehalten. Da indessen die Anzahl der Punkte A, A', A'', A''' eine gerade ist, so wollen wir hier die in Nr. 47 gemachte Bemerkung benutzen. Es seien diese Punkte in solcher Anordnung aufgeführt, dass die geschlossene Curve $(+A)(+A')(+A'')(+A''')$ ohne Ueberschreitung jener Punkte in einen Kreis verwandelt werden kann, dessen Centrum zum Anfangspunkte der Coordinaten dient, und welcher alle vier Punkte umgibt. Beachten wir nun, dass in den nach den absteigenden Potenzen von z fortschreitenden Entwickelungen von u_1 und u_2 der Term mit dem Argument $\frac{1}{z}$ nicht vorkommt, so gelten folgende Gleichungen:

$$A_1 + A'_2 + A''_1 + A'''_2 = 0\,,\quad A_2 + A'_1 + A''_2 + A'''_1 = 0\,,$$

welche sich wegen der Gleichungen

$$A_1 + A_2 = 0\,,\quad A'_1 + A'_2 = 0\,,\quad A''_1 + A''_2 = 0\,,\quad A'''_1 + A'''_2 = 0$$

zu der einen Gleichung

$$A_1 - A'_1 + A''_1 - A'''_1 = 0$$

oder

$$A_1 - A'''_1 = A_1 - A''_1 - (A_1 - A'_1)$$

gestalten, und es ist somit klar, dass von allen jenen Perioden entschieden nur zwei als selbstständige auftreten, nämlich:

$$A_1 - A'_1\,,\quad A_1 - A''_1$$

oder auch

$$A_1 + A'_2\,,\quad A_1 + A''_2\,.$$

Nun sind diese beiden Grössen wieder, wie in der vorigen Nummer, als die Werthe der Integrale $\int_a^{a'}(u_1 - u_2)dz$, $\int_a^{a''}(u_1 - u_2)dz$ oder, was dasselbe ist, $2\int_a^{a'} u_1 dz$, $2\int_a^{a''} u_1 dz$, wo sich die Integrationen bezüglich über die geraden Linien AA', AA'' erstrecken, zu betrachten.

Es wird zweckmässig sein, an die bisher gewonnenen Resultate die Betrachtung einiger bestimmten Beispiele zu knüpfen, wozu sich die ersten aus der Theorie der elliptischen Functionen bekannten Eigenschaften darbieten. Nehmen wir z. B. an:

$$(1-z^2)(1-k^2z^2)u^2 = 1,$$

wo k eine unter der Einheit liegende Zahl vorstellt; wählen wir dann den Anfangspunkt der Coordinaten zum Ausgangsorte von Z, nennen u_1 diejenige der beiden Functionen, welche den Anfangswerth $+1$ besitzt, und bezeichnen endlich mit A, A', A'', A''' die den Werthen $+1, +\frac{1}{k}, -1, -\frac{1}{k}$ von z der Reihe nach entsprechenden Punkte: so können wir den Perioden des Integrals $\int_0^z u_1 dz$ die beiden Summen $A_1 + A'_2$, $A_1 + A''_2$, d. h.

$$2\int_{+1}^{+\frac{1}{k}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}, \quad 2\int_{+1}^{-1} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

gleich setzen, wo sich die Integrationen bezüglich über die geraden Linien AA', AA'' erstrecken.

Von diesen zwei Perioden hat die erste folgenden reellen Werth:

$$4\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

und die zweite den imaginären Werth:

$$-2i\int_{+1}^{+\frac{1}{k}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

welcher sich durch Substitution von

$$1-k^2 = k'^2, \quad z = \frac{1}{k}\sqrt{1-k'^2z'^2}$$

verwandelt in:

$$-2i\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}.$$

Setzen wir nach dem Beispiele Jacobi's *)

$$\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}=\mathrm{K},\quad \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k'^2z^2)}}=\mathrm{K}',$$

wo z eine von Null bis Eins aufsteigende Reihe reeller Werthe durchlaufen soll, so erhalten wir für die beiden Perioden des Integrals $\int_0^z u_1 dz$ die Werthe 4K und $2i\mathrm{K}'$.

Umgekehrt ergibt sich hieraus, wenn wir

$$\int_0^z u_1 dz = v$$

nehmen, wo also z als eine Function von v erscheint, die Jacobi mit sin am v bezeichnet hat, dass ohne eine Veränderung des Werthes von z beliebige ganze Vielfache von 4K und $2i\mathrm{K}'$ zu v addirt werden können; d. h. es ist, wie bekannt:

$$\sin\,\mathrm{am}\,(v+4l\mathrm{K}+2il'\mathrm{K}')=\sin\,\mathrm{am}\,v,$$

wo l und l' beliebige ganze Zahlen vertreten.

Führen wir durch Substitution von

$$1-z^2=x^2$$

eine andere neue Variable x ein, welche hier als die gewöhnlich mit cos am v bezeichnete Function von v auftritt, so nimmt die Differentialgleichung

$$dv^2=u_1{}^2dz^2=\frac{dz^2}{(1-z^2)(1-k^2z^2)}$$

folgende Gestalt an:

$$dv^2=\frac{dx^2}{(1-x^2)(k'^2+k^2x^2)},$$

mithin ist

$$v=\int_1^x u'_1 dz,$$

*) *Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum. Regiom.* 1829.

wo u'_1 eine Function von z vorstellt, welche der Gleichung

$$(1-z^2)(k'^2+k^2z^2)u'^2=1$$

genügt. Beziehen wir nun, um unsere Theorie auf dieses Integral anzuwenden, die Punkte A, A', A'', A''' resp. auf die Werthe $+1$, $+\frac{k'}{k}i$, -1, $-\frac{k'}{k}i$ von z, so stellen $A_1+A'_2$ und $A_1+A''_2$ die beiden Perioden dar. Die erste ist dem Integral $2\int_1^{\frac{k'}{k}i} u'_1 dz$ für die Ausdehnung der geraden Linie AA' gleich, oder mit andern Worten, der Summe aus dem über die Linie AO fortgeführten Integrale $2\int_1^0 u'_1 dz$ und dem über die Linie OA' ausgedehnten Integrale $2\int_0^{\frac{k'}{k}i} u'_1 dz$, indem O zum Anfangspunkte der Coordinaten dient; es ist somit:

$$A_1+A'_2=2\int_1^0 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(k'^2+k^2z^2)}}+2\int_0^{+\frac{k'}{k}i} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(k'^2+k^2z^2)}}.$$

Die hierin vorkommenden Integrale haben von Cauchy den Namen *geradlinige Integrale* erhalten. Wenn wir in dem ersten derselben

$$z=\sqrt{1-z'^2}$$

einsetzen und dann den Accent unterdrücken, so finden wir:

$$\int_1^0 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(k'^2+k^2z^2)}}=-\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}=-\mathrm{K};$$

und nehmen wir in dem zweiten

$$z=\frac{k'i}{k}\sqrt{1-z'^2},$$

so ergibt sich:

$$\int_0^{\frac{k'}{k}i} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(k'^2+k^2z^2)}}=i\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k'^2z^2)}}=i\mathrm{K}'.$$

Demnach ist:

$$A_1 + A'_2 = \quad 2(\mathrm{K} - i\mathrm{K}').$$

Nun besitzt die zweite Periode $A_1 + A''_2$ den Werth des Integrals $2\int_{+1}^{-1} u'_1 dz$, über die gerade Linie AA'' ausgedehnt, folglich ist:

$$A_1 + A''_1 = 2\int_{+1}^{-1} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(k'^2+k^2z^2)}} = 4\int_{+1}^{0} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(k'^2+k^2z^2)}}$$
$$= -4\mathrm{K},$$

so dass die beiden Perioden des Integrals $\int_1^x u'_1 dz$ durch die Grössen

$$4\mathrm{K},\ 2(\mathrm{K} - i\mathrm{K}')$$

dargestellt werden; somit gelangen wir zu der Fundamental-Eigenschaft der Function $\cos \operatorname{am} v$, welche sich in der Gleichung

$$\cos \operatorname{am} [v + 4l\mathrm{K} + 2l'(\mathrm{K} - i\mathrm{K}')] = \cos \operatorname{am} v$$

ausspricht.

Nehmen wir endlich an:

$$1 - k^2z^2 = y^2,$$

wo wiederum y eine neue Function von v bedeutet, die man mit $\Delta \operatorname{am} v$ zu bezeichnen pflegt; so geht die Differentialgleichung

$$dv^2 = \frac{dz^2}{(1-z^2)(1-k^2z^2)}$$

über in:

$$dv^2 = \frac{dy^2}{(1-y^2)(y^2-k'^2)},$$

mithin ist

$$v = \int_1^y u''_1 dz,$$

wo u''_1 eine Function von z vorstellt, welche der Gleichung:

$$(1-z^2)(z^2-k'^2)u''^2 = 1$$

Genüge leistet. Wenn wir jetzt die vier Punkte A, A', A'', A'' bezüglich den vier Werthen $+k'$, $+1$, $-k'$, -1 von z zuordnen, so stellen sich die Werthe der Perioden $A_1 + A'_2$, $A_1 + A''_2$ als folgende geradlinige Integrale dar:

$$2\int_{k'}^{1}\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(z^2-k'^2)}},$$

$$2\int_{k'}^{-k'}\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(z^2-k'^2)}}=-4\int_{0}^{k'}\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(z^2-k'^2)}},$$

von denen jenes bei Substitution von

$$z=\sqrt{1-k^2z'^2}$$

folgende reelle erste Periode liefert:

$$2\int_{0}^{1}\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}=2\mathrm{K},$$

und dieses bei Substitution von

$$z=k'z'$$

die imaginäre zweite Periode in der Gestalt:

$$4i\int_{0}^{1}\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k'^2z^2)}}=4i\mathrm{K}'.$$

Da also das Integral $\int_{1}^{y}u''_1dz$ die beiden Perioden

$$2\mathrm{K},\ 4i\mathrm{K}'$$

besitzt, so gilt folgende aus der Theorie der elliptischen Functionen bekannte Formel:

$$\varDelta \text{ am } (v+2l\mathrm{K}+4il'\mathrm{K}')=\varDelta \text{ am } v.$$

Man sieht, dass die beiden Perioden

$$4\mathrm{K},\ 4i\mathrm{K}'$$

den drei Functionen sin am v, cos am v und $\varDelta$ am v gemeinschaftlich sind; dass $4i\mathrm{K}'$ eine Periode von cos am v ist, zeigt die Gleichung

$$4\mathrm{K}-2(2\mathrm{K}-2i\mathrm{K}')=4i\mathrm{K}'$$

an, und man hat überhaupt, wenn unter $\varphi(v)$ eine dieser Functionen oder eine aus ihnen zusammengesetzte rationale Function verstanden wird:

$$\varphi(v+4l\mathrm{K}+4il'\mathrm{K}')=\varphi(v).$$

55. Die drei Perioden

$$A_1 - A'_1,\ A_1 - A''_1,\ A_1 - A'''_1$$

sind in der vorstehenden Nummer mit Hilfe der Gleichung

$$A_1 - A'_1 + A''_1 - A'''_1 = 0$$

auf zwei reducirt worden; allein diese Reduction ist in dem Falle, wenn die Function u_1 durch die Gleichung

$$(z-a)(z-a')(z-a'')(z-a''')u^2 - \mathrm{H}^2 = 0$$

definirt ist, wo H ein ganzes, durch keinen der vier Factoren $z-a$, $z-a'$, $z-a''$, $z-a'''$ theilbares Polynom von z bezeichnet, im Allgemeinen nicht ausführbar. Bei der Berechnung der Perioden des Integrals $\int_c^k u_1 dz$ kommen zwar die Punkte $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \mathfrak{A}'', \ldots$, welche solchen Werthen von z entsprechen, für die das Polynom H verschwindet, gar nicht in Betracht, weil jede der Functionen u_1 und u_2 nach einem Umlauf von Z auf irgend einer der Elementar-Curven $(\mathfrak{A}), (\mathfrak{A}'), (\mathfrak{A}''), \ldots$ ihren Anfangswerth wieder annimmt und die entsprechenden Elementar-Integrale sämmtlich Null sind; man findet also wie früher, dass das Integral $\int_c^k u_1 dz$ die drei Perioden

$$A_1 - A'_1 = p',\ A_1 - A''_1 = p'',\ A_1 - A'''_1 = p'''$$

besitzt, während A, A', A'', A''' die Punkte bezeichnen, für welche z bezüglich die Werthe a, a', a'', a''' hat. Wenn man sich aber des um den Anfangspunkt der Coordinaten beschriebenen, die Punkte $A, A', A'', A''', \mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \mathfrak{A}'', \ldots$ sämmtlich umgebenden Kreises bedient, so gelangt man zu der Gleichung

$$A_1 - A'_1 + A''_1 - A'''_1 = 2\pi i\lambda$$

oder

$$p' - p'' + p''' = 2\pi i\lambda,$$

wo λ den Coefficienten von $\frac{1}{z}$ in der nach den absteigenden Potenzen von z fortschreitenden Entwickelung des Bruchs

$$\frac{\mathrm{H}}{\sqrt{(z-a)\,(z-a')\,(z-a'')\,(z-a''')}}$$

bezeichnet. So lange sich das Polynom H nicht auf einen constanten Werth reducirt, ist der Coefficient λ, wenigstens im Allgemeinen, nicht gleich Null, und daher müssen die Perioden p', p'', p''' selbstständige sein, können jedoch in besondern Fällen eine Verminderung auf zwei erleiden.

56. Wir wollen gegenwärtig den allgemeinern Fall untersuchen, wenn die Function u durch die Gleichung

$$(z-a)(z-a')(z-a'')\dots[z-a^{(n-1)}]u^2-h^2=0$$

definirt ist, wo h einen constanten Werth besitzt und unter a, a', $a'', \dots, a^{(n-1)}$ durchweg verschiedene Grössen verstanden werden sollen. Es lässt sich hier ohne Mühe erkennen, dass das Integral $\int_c^k u_1 dz$ folgende $n-1$ selbstständige Perioden hat:

$$A_1-A'_1=p',\ A_1-A''_1=p'',\dots,\ A_1-A_1^{(n-1)}=p^{(n-1)},$$

welche für einen ungeraden Zahlenwerth von n einer Reduction überhaupt nicht fähig sind, während, wenn die Zahl n gerade ist, mit Hilfe des um alle Punkte $A, A', A'', \dots$ beschriebenen Kreises ausserdem die Gleichung

$$A_1-A'_1+A''_1-A'''_1+\dots+A^{(n-2)}{}_1-A^{(n-1)}{}_1=0$$

oder

$$p'-p''+p'''-\dots+p^{n-1}=0$$

gewonnen wird, so dass in diesem Falle nur $n-2$ selbstständige Perioden

$$p', p'', p''', \dots, p^{(n-2)}$$

zur Geltung kommen. Wir können daher auch sagen, es sind, wenn die Anzahl der Grössen $a, a', a'', \dots$ gleich $2n+1$ oder $2n+2$ ist, $2n$ selbstständige Perioden vorhanden, wovon jedoch der Fall eine Ausnahme bildet, wo jene Anzahl 2 ist, weil alsdann nur eine Periode existirt.

Was nun die Werthe dieser Perioden $p', p'', p''', \dots$ selbst betrifft, so stellen sich dieselben geradezu als die Werthe des Integrals

$$\int(u_1-u_2)dz=2\int u_1 dz$$

dar, wo sich die Integration über jede der geraden Linien AA', AA'', AA''', ... erstreckt.

57. Wir wollen einen Augenblick bei dem Falle verweilen, wenn in der Gleichung

$$(z-a)\,z-a')\,(z-a'')\ldots.[z-a^{(n-1)}]u^2-\mathrm{H}^2=0$$

die Zahl n gerade ist und H ein ganzes, durch keinen der Factoren $z-a$, $z-a'$, $z-a''$,.... theilbares Polynom von z bezeichnet. Auch hier kommen aus dem in Nr. 55 angeführten Grunde bei der Berechnung der Perioden des Integrals $\int_c^k u_1\,dz$ die Werthe von z, für welche das Polynom H verschwindet, nicht in Betracht, und man hat wie am genannten Orte für dieselben folgende $n-1$ Werthe:

$$A_1-A'_1=p',\ A_1-A''_1=p'',\ldots.,\ A_1-A^{(n-1)}{}_1=p^{(n-1)}.$$

Während sich jedoch früher die Verminderung der Zahl der selbstständigen Perioden auf die Gleichung

$$p'-p''+p'''-\ldots.+p^{(n-1)}=0$$

gründete, tritt nach Nr. 50 in unserm Falle die Gleichung

$$p'-p''+p'''-\ldots.+p^{(n-1)}=2\pi i\lambda$$

dafür ein, wo λ den Coefficienten von $\frac{1}{z}$ in der nach den absteigenden Potenzen von z fortschreitenden Reihenentwickelung des Bruchs

$$\frac{\mathrm{H}}{\sqrt{(z-a)\,(z-a')\ldots.[z-a^{(n-1)}]}}$$

bedeutet, so dass die $n-1$ Perioden überhaupt, so lange λ von Null verschieden ist, den Charakter der Selbstständigkeit besitzen.

Die Fälle, in welchen der Coefficient λ gleich Null ist, sind folgende:

1) wo der Grad des Polynoms H kleiner als $\frac{n}{2}-1$ ist; hierhin gehört z. B. das nur vierfach-periodische Integral

$$\int_c^k \frac{(\alpha+\beta z)\,dz}{\sqrt{\mathrm{P}}}$$

worin P ein Polynom sechsten Grades von z vorstellt;

2) wo die Polynome H und $(z-a)(z-a')\dots[z-a^{(n-1)}]$ beide gerade Functionen von z sind und überdiess der Grad des zweiten einem Vielfachen von 4 gleich ist.

58. In den vorstehenden Entwickelungen ist auch die Darstellung der Perioden derjenigen Functionen von mehrern Variabeln enthalten, welche Jacobi in die Theorie der Abel'schen Transcendenten eingeführt hat. Sind z. B. u und u' zwei Functionen von z, die bezüglich den Gleichungen zweiten Grades:

$$(z-a)(z-a')(z-a'')(z-a''')(z-a^{IV})u^2-(\alpha+\beta z)^2=0,$$
$$(z-a)(z-a')(z-a'')(z-a''')(z-a^{IV})u'^2-(\alpha+\beta' z)^2=0$$

Genüge leisten, so besitzt das Integral $\int_c^k u_1 dz$, wie wir früher gesehen haben, vier Perioden, und wir können ohne Veränderung der Grenzen durch geeignete Wahl der von Z zu durchlaufenden Integrations-Curve einen Werth dieses Integrals hervorbringen, welcher einer beliebig gegebenen Grösse so nahe kommt, als es verlangt wird; es kann daher in der Gleichung

$$\int_c^z u_1 dz = v,$$

wo nämlich v durch beliebig kleine Stufen fortgehen kann, während z unverändert bleibt, z nicht als eine Function von v betrachtet werden. Setzen wir hingegen:

$$\int_c^z udz+\int_{c'}^{z'} udz = v,\quad \int_c^z u'dz+\int_{c'}^{z'} u'dz = v',$$

wo sich einerseits die Integrale $\int_c^z udz$, $\int_c^z u'dz$ über eine und dieselbe Curve CMZ und andererseits die Integrale $\int_{c'}^{z'} udz$, $\int_{c'}^{z'} u'dz$ über eine und dieselbe Curve $C'M'Z'$ erstrecken; so sind z und z' bestimmte Functionen von v und v', weil man hier nach dem Abel'schen Satze*) die beiden Integrale jeder von beiden Summen

---

*) Der schwedische Mathematiker Abel hat im Jahre 1828 (Crelle's Journal für die Mathematik, Bd. III., S. 313: *Remarques sur*

zu einem einzigen Integrale derselben Gattung vereinigen kann, zu welchem im Allgemeinen noch eine algebraische und logarithmische Grösse hinzutritt. Alsdann ist also

$$z = \varphi(v, v'), \quad z' = \varphi'(v, v')$$

zu nehmen.

Wenn wir nun die Curve *CMZ* zwischen den festen Endpunkten *C* und *Z* verschieben, während das Integral $\int_c^z u dz$ die bereits früher gefundenen Perioden p, q, r, s und das Integral $\int_c^z u' dz$ die Perioden p', q', r', s' besitzt, so erleiden diese Integrale $\int_c^z u dz$, $\int_c^z u' dz$ bezüglich Veränderungen um die Grössen

$$gp + hq + kr + ls, \quad gp' + hq' + kr' + ls',$$

wo g, h, k, l vier beliebige ganze Zahlen vorstellen, welche in beiden Formeln dieselben sind, weil nämlich die Punkte A, A', A'', A''', A^{IV} für beide Functionen u und u' die nämlichen sind und folglich auch jeder geschlossenen Curve beiderseits dieselbe Charakteristik zugehört.

Dasselbe gilt für die Verschiebung der Curve *C'M'Z'* zwischen den festen Endpunkten C', Z', und die beiden Integrale $\int_{c'}^{z'} u\, dz$, $\int_{c'}^{z'} u' dz$ erleiden daher ebenfalls Veränderungen, welche bezüglich

---

quelques propriétés générales d'une certaine sorte de fonctions transcendantes) die grosse Entdeckung gemacht, dass man eine Summe von Functionen der Form

$$\psi(x) = \int \frac{f(x)dx}{\sqrt{N + N_1 x + N_2 x^2 + \ldots + N_m x^m}},$$

wo $f(x)$ eine beliebige rationale Function von x bezeichnet und m eine beliebige ganze Zahl ist, auf die Summe einer bestimmten Anzahl anderer Functionen derselben Form, vermehrt um einen gewissen algebraischen und logarithmischen Ausdruck, zurückführen kann.

durch Grössen von der Form

$$gp + hq + kr + ls, \quad gp' + hq' + kr' + ls'$$

dargestellt werden. Da hier also die Werthe der Grössen z und z' oder, was eben so viel ist, der Functionen $\varphi(v, v')$, $\varphi'(v, v')$ ungeändert bleiben, so können wir zu der Variabeln v die Grösse

$$gp + hq + kr + ls$$

hinzufügen, wofern gleichzeitig die Variable v' den Zuwachs

$$gp' + hq' + kr' + ls'$$

erleidet. Demnach finden folgende zwei Gleichungen statt:

$$\varphi(v+gp+hq+kr+ls,\ v'+gp'+hq'+kr'+ls') = \varphi(v,v'),$$
$$\varphi'(v+gp+hq+kr+ls,\ v'+gp'+hq'+kr'+ls') = \varphi'(v,v').$$

Somit erblicken wir in den Functionen φ und φ' den Charakter der vierfachen Periodicität wieder, dessen Entdeckung schon Jacobi*) im Jahre 1835 gemacht hat. Zur Kenntniss der Perioden $p, q, r, s, p', q', r', s'$ selber gelangen wir auf folgende Weise. Bezeichnen A, A', A'', A''', A^{IV} die auf die Elementar-Curven $(+A)$, $(+A')$, $(+A'')$, $(+A''')$ $(+A^{IV})$ bezüglichen Werthe des Integrals $\int udz$ und A_1, A'_1, A''_1, A'''_1, A^{IV}_1 die Werthe des Integrals $\int u'dz$ für dieselben Curven, so erhalten jene Perioden folgende Werthe:

$$p = A - A',\ q = A - A'',\ r = A - A''',\ s = A - A^{IV},$$
$$p' = A_1 - A'_1,\ q' = A_1 - A''_1,\ r' = A_1 - A'''_1,\ s' = A_1 - A^{IV}_1,$$

so dass wir auch hier wieder sagen können, die Perioden, p, q, r, s sind den Werthen des Integrals $2\int udz$ in Bezug auf die geraden Verbindungslinien AA', AA'', AA''' AA^{IV} und andererseits, die Perioden p', q', r', s' sind den Werthen des Integrals $2\int u'dz$, auf dieselben Linien bezogen, gleich.

Die vorstehende Betrachtung lässt sich sogleich auf den Fall erweitern, wenn mehrere Functionen gleichzeitig gegeben sind. Es

---

*) Crelle's Journal, Bd 13, S. 55: *De functionibus duarum variabilium quadrupliciter periodicis, quibus theoria transcendentium Abelianarum innititur.*

seien nämlich a, a', a'',.... beliebige ungleiche Grössen, deren Anzahl $2m$ oder $2m-1$ sein mag; ferner bezeichnen $u, u', \ldots,$ $u^{(m-2)}$ Functionen von z, welche beziehungsweise folgenden Gleichungen zweiten Grades Genüge leisten:

$$(z-a)(z-a')(z-a'')\ldots u^2-(\alpha+\beta z+\ldots+\varepsilon z^{m-2})^2=0,$$
$$(z-a)(z-a')(z-a'')\ldots u'^2-(\alpha'+\beta' z+\ldots+\varepsilon' z^{m-2})^2=0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(z-a)(z-a')(z-a'')\ldots u^{(m-2)2}-[\alpha^{(m-2)}+\beta^{(m-2)}z+\ldots + \varepsilon^{(m-2)}z^{m-2}]^2=0.$$

Setzen wir nun:

$$\int_c^z udz+\int_{c'}^{z'} udz+\ldots+\int_{c^{(m-2)}}^{z^{(m-2)}} udz=v,$$
$$\int_c^z u'dz+\int_{c'}^{z'} u'dz+\ldots+\int_{c^{(m-2)}}^{z^{(m-2)}} u'dz=v',$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\int_c^z u^{(m-2)}dz+\int_{c'}^{z'} u^{(m-2)}dz+\ldots+\int_{c^{(m-2)}}^{z^{(m-2)}} u^{(m-2)}dz=v^{(m-2)},$$

wo sich die Integrationen zwischen den Grenzen c und z sämmtlich über eine und dieselbe Curve CMZ, die zwischen den Grenzen c' und z' genommenen auch sämmtlich über eine und dieselbe Curve $C'M'Z'$, u. s. f. erstrecken; so können wir $z, z', \ldots, z^{(m-2)}$ als Functionen von $v, v', \ldots, v^{(m-2)}$ ansehen, also schreiben:

$$z=\varphi[v, v', \ldots, v^{(m-2)}],\; z'=\varphi'[v, v', \ldots, v^{(m-2)}], \ldots,$$
$$z^{(m-2)}=\varphi^{(m-2)}[v, v', \ldots, v^{(m-2)}].$$

Stellen dann $p, q, \ldots, t$ die $2m-2$ Perioden des Integrals $\int_c^z udz$ vor, ferner $p', q', \ldots, t'$ die des Integrals $\int_c^z u'dz$, u. s. f., so lässt sich wie vorhin darthun, dass für jede der Functionen φ, $\varphi', \ldots, \varphi^{(m-2)}$ folgende Gleichung stattfindet:

$$\varphi^{(k)}\begin{bmatrix} v+gp+hq+\ldots+lt, \\ v'+gp'+hq'+\ldots+it', \\ \ldots\ldots\ldots \\ v^{(m-2)}+gp^{(m-2)}+hq^{(m-2)}+\ldots+lt^{(m-2)} \end{bmatrix}=\varphi^{(k)}[v, v', \ldots, v^{(m-2)}],$$

wo g, h,.... l beliebige ganze Zahlen bedeuten. Was nun die Perioden p, q,...., t, p', q',...., t' betrifft, so gelangen wir auf dieselbe Art zur Kenntniss derselben, wie früher. Sind nämlich, der obigen Bezeichnungsweise entsprechend, A, A', A'',.... die über die Elementar-Curven $(+A)$, $(+A')$, $(+A'')$,.... genommenen Werthe des Integrals $\int u dz$, ferner A_1, A'_1, A''_1,.... die Werthe des Integrals $\int u' dz$, auf dieselben Curven bezogen, dann A_{11}, A'_{11}, A''_{11},.... die des Integrals $\int u'' dz$, u. s. f.; so dienen zur Darstellung der Perioden folgende Grössen:

$$p = A - A',\ q = A - A'',\ldots,\ t = A - A^{(2m-2)},$$
$$p' = A_1 - A'_1,\ q' = A_1 - A''_1,\ldots,\ t' = A_1 - A_1^{(2m-2)},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$p^{(2m-2)} = A_{(2m-2)} - A'_{(2m-2)},\ q^{(2m-2)} = A_{(2m-2)} - A''_{(2m-2)},\ldots,$$
$$t^{(2m-2)} = A_{(2m-2)} - A^{(2m-2)}_{(2m-2)},$$

und folglich erscheinen die Perioden p, q,.... t als die Werthe des Integrals $2\int u dz$ in Bezug auf die geraden Verbindungslinien AA', AA'',...., $AA^{(2m-2)}$, die Perioden p', q',...., t' als die Werthe des Integrals $2\int u' dz$, über dieselben Linien ausgedehnt, u. s. f.

59. Wir verlassen jetzt das Gebiet der Gleichungen zweiten Grades und wenden uns zu der Ermittelung der Anzahl und Werthe der Perioden des Integrals $\int_c^k u dz$ für den Fall, dass die Function u durch eine Gleichung von höherem Grade definirt ist. Als Beispiel wählen wir die binomische Gleichung:

$$(z-a)(z-a')\ldots.[z-a^{(n-1)}]\,u^m - \mathrm{H}^m = 0,$$

wo $a, a',\ldots, a^{(n-1)}$ lauter ungleiche Grössen und H ein ganzes, durch keinen der Factoren $z-a$, $z-a'$,...., $z-a^{(n-1)}$ theilbares Polynom von z bezeichnen. Bei der Berechnung der einzelnen Werthe des Integrals $\int_c^k u_1 dz$ können wir die Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$,...., welche solchen Werthen von z entsprechen, für die das Polynom H verschwindet, ganz ausser Acht lassen, weil jede der Functionen

u_1, u_2, ... ihren Anfangswerth wieder annimmt, sobald der Punkt Z auf der um einen jener Punkte gezogenen Elementar-Curve einen Umlauf gemacht hat, und alsdann die Elementar-Integrale für eine solche Curve sämmtlich Null sind. Es seien nun $A, A', \ldots, A^{(n-1)}$ die den Werthen $a, a', \ldots, a^{(n-1)}$ von z bezüglich entsprechenden Punkte, welche wir der Art angeordnet voraussetzen wollen, was uns gestattet ist, dass sich jede geschlossene Curve, deren Charakteristik

$$(+A)(+A')\ldots[+A^{(n-1)}]$$

ist, ohne Ueberschreitung eines der genannten Punkte mit einem solchen Kreise zur Coincidenz bringen lässt, dessen Centrum im Anfangspunkte der Coordinaten liegt, und welcher dieselben Punkte sämmtlich umgibt.

Der Kürze wegen setzen wir

$$A_1 - A'_1 = p'_1,\ A_2 - A'_2 = p'_2, \ldots, A_m - A'_m = p'_m,$$
$$A_1 - A''_1 = p''_1,\ A_2 - A''_2 = p''_2, \ldots, A_m - A''_m = p''_m,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_1 - A_1^{(n-1)} = p_1^{(n-1)},\ A_2 - A_2^{(n-1)} = p_2^{(n-1)}, \ldots,$$
$$A_m - A_m^{(n-1)} = p_m^{(n-1)},$$

überhaupt also, wenn unter q, r, s ganze Zahlen verstanden werden:

$$\overset{(q)}{A_s} - \overset{(r)}{A_s} = \overset{(r)}{p_s} - \overset{(q)}{p_s};$$

ferner nehmen wir gleich eine solche Anordnung der Functionen $u_1, u_2, \ldots, u_m$ an, dass jede derselben nach vollbrachtem Umlauf von Z auf irgend einer der Curven $(+A)$, $(+A')$, ..., $[+A^{(n-1)}]$ den Anfangswerth der folgenden erhält, d. h. wir nehmen

$$u_2 = e^{-\frac{2\pi}{m}i} u_1,\ u_3 = e^{-\frac{4\pi}{m}i} u_1, \ldots, u_m = e^{-\frac{(m-1).2\pi}{m}i} u_1,$$

wo auch jede dieser Functionen den Anfangswerth der vorhergehenden erhält, sobald der Punkt Z auf einer der Curven $(-A)$, $(-A')$ ..... $[-A^{(n-1)}]$ einmal herumgeführt ist, d. h. es gelten die Gleichungen:

$$\overset{(\sigma)}{A}_{-1} = -\overset{(\sigma)}{A}_m\,,\quad \overset{(\sigma)}{A}_{-2} = -\overset{(\sigma)}{A}_1\,,\quad \overset{(\sigma)}{A}_{-3} = -\overset{(\sigma)}{A}_2\,,\ldots,$$
$$\overset{(\sigma)}{A}_{-m} = -\overset{(\sigma)}{A}_{m-1};$$

endlich seien v_1, $v_2,\ldots,$ v_m die Werthe der Integrale $\int_c^k u_1 dz$, $\int_c^k u_2 dz,\ldots,$ $\int_c^k u_m dz$, welche einer bestimmten Curve *CMK* entsprechen.

Die gegenwärtig zu behandelnde Aufgabe besteht nun darin, alle möglichen Werthe des Integrals $\int_c^k u_1 dz$ durch allgemeine Ausdrücke darzustellen, wenn sich die Integration über Curven jeder Art erstreckt.

Sobald die Charakteristik einer Integrations-Curve *CLK* gegeben ist, unterliegt es keinen Schwierigkeiten, den entsprechenden Werth des Integrals zu ermitteln; denn jeder Term $[+A^{(q)}]$ der Charakteristik hat in dem Ausdrucke des Integrals seinen correspondirenden Term von der Form $+\underset{f}{A}^{(q)}$, jeder Term $[-A^{(q)}]$ der Charakteristik seinen correspondirenden Term von der Form $-\underset{f}{A}^{(q)}$, und überdiess ist dem letzten Term *CMK* der Charakteristik ein Term des Integrals, etwa v_g, zugeordnet, wo dann die Indices f und g als ganze positive Zahlen folgendermassen bestimmt sind: 1) je nachdem der erste Term des Integrals mit dem Plus- oder Minuszeichen versehen ist, besitzt derselbe den Index 1 oder m; 2) gehört zwei auf einander folgenden Termen das Pluszeichen an, so übersteigt der Index des zweiten Terms den des ersten um Eins; 3) dahingegen übersteigt der Index des ersten Terms den des zweiten um Eins, falls beide Terme mit dem Minuszeichen erscheinen*); 4) endlich sind die Indices beider Terme einander gleich, wenn die Vorzeichen derselben entgegengesetzt sind.

*) Es versteht sich hier von selbst, dass man statt den Index m um Eins zu vergrössern, dafür 1 selbst nehmen muss, während statt einer Verkleinerung des Index 1 um Eins dafür m eintritt.

Wir wollen der Deutlichkeit wegen von der Annahme ausgehen, dass die Anzahl der positiven Terme der Charakteristik für die Curve CLK grösser sei, als die der negativen, alsdann gilt dasselbe auch für den Ausdruck des Integrals $\int_c^k u_1 dz$ selbst. Zerlegen wir nun diesen Ausdruck von links nach rechts der Art, dass in jedem der abgesonderten Theile die Anzahl der positiven Terme die der negativen um m Einheiten übersteigt, nur den letzten Theil ausgenommen, wo der Unterschied dieser beiden Zahlen kleiner sein kann, als m ist; so hat irgend einer jener Theile mit Ausnahme des letzten einen Werth, welcher durch Addition der Summe

$$A_1 + A_2 + \ldots . + A_m$$

zu einer gewissen Anzahl von Differenzen der Form $\overset{(s)}{A_q} - \overset{(s)}{A_r}$ erhalten wird. Weil nun aber die Gleichung

$$u_1 + u_2 + \ldots . + u_m = 0$$

folgende nach sich zieht:

$$A_1 + A_2 + \ldots . + A_m = 0,$$

so reducirt sich der betrachtete Theil auf eine Summe von solchen Differenzen $\overset{(s)}{A_q} - \overset{(s)}{A_r}$ und kann mithin durch die Formel

$$\begin{aligned} w = {} & l'_1 p'_1 + l''_1 p''_1 + \ldots . + l_1^{(n-1)} p_1^{(n-1)} \\ & + l'_2 p'_2 + l''_2 p''_2 + \ldots . + l_2^{(n-1)} p_2^{(n-1)} \\ & + \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ & + l'_m p'_m + l''_m p''_m + \ldots . + \overset{(n-1)}{l_m} \overset{(n-1)}{p_m} \end{aligned}$$

dargestellt werden, wo die Buchstaben $l'_1, l''_1, \ldots ., l_1^{(n-1)}, l'_2, \ldots$ lauter ganze positive oder negative Zahlen von ganz beliebigem Werthe, selbst Null nicht ausgeschlossen, bezeichnen. Ganz entsprechende Ausdrücke gelten natürlich für die übrigen Theile des Integrals $\int_c^k u_1 dz$ mit Ausschluss des letzten, welcher, wie sich ohne Weiteres ergibt, bis auf eine Grösse der Form von w, immer einen der folgenden Werthe besitzt:

$$
\begin{aligned}
&v_1\,,\\
&A_1+v_2\,,\\
&A_1+A_2+v_3\,,\\
&A_1+A_2+A_3+v_4\,,\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&A_1+A_2+\ldots+A_{m-1}+v_m.
\end{aligned}
$$

Somit sind alle möglichen Werthe des Integrals $\int_c^k u_1 dz$ für alle Arten von Integrations-Curven zwischen C und K in folgenden m Formeln enthalten:

$$
\begin{aligned}
&w+v_1\,,\\
&w+A_1+v_2\,,\\
&w+A_1+A_2+v_3\,,\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&w+A_1+A_2+\ldots+A_{m-1}+v_m.
\end{aligned}
$$

Wir gingen zwar von der Annahme aus, dass die Zahl der positiven Terme in dem Ausdrucke des Integrals, welches sich über die Curve CLK erstreckte, grösser als die der negativen sei; es lässt sich indessen der entgegengesetzte Fall auf jenen zurückführen, wenn man bedenkt, dass zu dem in Rede stehenden Ausdrucke die Grösse $A_1+A_2+\ldots+A_m$, die gleich Null ist, beliebig vielmal hinzugefügt werden kann, und so gelangt man auch hier wieder zu den nämlichen Resultaten.

Die vorstehende Untersuchung lässt also deutlich erkennen, dass die Grössen p'_1, p''_1, ..., $p_1^{(n-1)}$, p'_2, ..., $p_2^{(n-1)}$, ..., p'_m, ..., $p_m^{(n-1)}$ lauter Perioden des Integrals $\int_c^k u_1 dz$ sind, und zugleich noch, dass jede andere Periode desselben aus jenen zusammengesetzt ist; man wird daher durch Addition beliebiger ganzen Vielfachen dieser Perioden zu m passend gewählten Werthen des Integrals $\int_c^k u_1 dz$ jeden der unendlich vielen Werthe desselben erlangen.

Wir wollen, um den Werth einer Periode zu erhalten, die bestimmte Periode $p'_f = A_f - A'_f = A_f + A'_{-(f+1)}$ ins Auge fassen. Zunächst ist dieselbe offenbar gleich dem Werthe des Integrals $\int u_f dz$, über die geschlossene Curve $(+A)(-A')$ ausgedehnt, und ausserdem, weil die Function u_f nach einem Umlauf von Z auf dieser Curve ihren Anfangswerth wieder annimmt, von der Lage des Punktes C unabhängig (Nr. 11). Da wir aber die Curve $(+A)(-A')$ mit einer Zusammensetzung aus der Curve $D'HD$ (Fig. 25), der unendlich kleinen geschlossenen Curve $DFED$ (im directen Sinne genommen), der Curve DHD' (im umgekehrten Sinne genommen) und schliesslich der unendlich kleinen geschlossenen Curve $D'F'E'D'$ ohne Ueberschreitung eines der Punkte $A, A', A'', \ldots.$ zur Coincidenz bringen können, so wird unsere Periode p'_f auch den Werth des Integrals $\int u_f dz$ mit Zugrundelegung dieser zusammengesetzten Integrations-Curve besitzen. Beachten wir nun, dass das Product $(z-a)u_f$ für $z=a$ und das Product $(z-a')u_f$ für $z=a'$ verschwinden, so haben die über die unendlich kleinen Curven $DEFD$ und $D'F'E'D'$ ausgedehnten Theile des Integrals, wie es uns schon in Nr. 50 begegnete, beide Null zur Grenze, und somit erscheint p'_f als die Grenze von der Summe der über die Curven $D'HD$, DHD' fortgeführten Theile des Integrals, so dass wir auch sagen können, die Periode p'_f hat den Werth des Integrals $\int(u_f - u_{f+1})dz$ in Bezug auf die Curve $A'HA$.

Dasselbe, was hier die Periode p'_f betraf, gilt eben so auch für jede andere, und es ergibt sich daher, dass die Werthe der Integrale $\int(u_1-n_2)dz$, $\int(u_2-u_3)dz, \ldots.,$ $\int(u_m-u_1)dz$ die Perioden selbst sind, indem sich die Integrationen über die geraden Verbindungslinien AA', $AA'', \ldots.,$ $AA^{(n-1)}$ erstrecken.

Zwischen den $m(n-1)$ Grössen $p'_1, p''_1, \ldots.,$ $\overset{(n-1)}{p_m}$, finden eine Anzahl direct aufzuweisende Beziehungen statt. Da nämlich, wie bereits erwähnt ist,

$$u_1 + u_2 + \ldots. + u_m = 0$$

ist, so hat man die Gleichungen:

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_m = 0,$$
$$A'_1 + A'_2 + \ldots + A'_m = 0,$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$A_1^{(n-1)} + A_2^{(n-1)} + \ldots + A_m^{(n-1)} = 0,$$

oder:

$$p'_1 + p'_2 + \ldots + p'_m = 0,$$
$$p''_1 + p''_2 + \ldots + p''_m = 0,$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$p_1^{(n-1)} + p_2^{(n-1)} + \ldots + p_m^{(n-1)} = 0,$$

woraus eben hervorgeht, dass sich jede der $n-1$ Perioden p'_m, $p''_m, \ldots, p_m^{(n-1)}$ durch die mit entgegengesetztem Vorzeichen genommene Summe von $m-1$ andern ausdrücken lässt, dass also die Anzahl der selbstständigen Perioden eine Reduction auf $(m-1)(n-1)$ erleidet.

Berücksichtigen wir nun, dass die Perioden

$$p'_1, p'_2, \ldots, p'_m$$

dem Werthe nach bezüglich mit den Integralen

$$\int (u_1 - u_2)\,dz,\ \int (u_2 - u_3)\,dz, \ldots, \int (u_m - u_1)\,dz$$

übereinstimmen, wo die Integrationen über eine und dieselbe vom Punkte A' nach dem Punkte A gehende gerade Linie fortzuführen sind, und dass überdiess folgende Gleichungen stattfinden:

$$u_2 = e^{-\frac{2\pi}{m}i} u_1,\quad u_3 = e^{-\frac{4\pi}{m}i} u_1, \ldots, u_m = e^{-\frac{(m-1)\cdot 2\pi}{m}i} u_1;$$

so ergeben sich für die Perioden

$$p'_1, p'_2, \ldots, p'_m$$

folgende Werthe:

$$(1 - e^{-\frac{2\pi}{m}i}) \int u_1 dz,\quad e^{-\frac{2\pi}{m}i} (1 - e^{-\frac{2\pi}{m}i}) \int u_1 dz,$$

$$e^{-\frac{4\pi}{m}i} (1 - e^{-\frac{2\pi}{m}i}) \int u_1 dz, \ldots,\ e^{-\frac{(m-1)\cdot 2\pi}{m}i} (1 - e^{-\frac{2\pi}{m}i} \int u_1 dz,$$

wo sich die Integrale über eine und dieselbe grade Linie $A'A$ erstrecken, und somit ist:

$$p'_2 = e^{-\frac{2\pi}{m}i} p'_1,\; p'_3 = e^{-\frac{4\pi}{m}i} p'_1, \ldots,\; p'_m = e^{-\frac{(m-1).2\pi}{m}i} p'_1.$$

Für die übrigen Perioden finden wir ganz ähnlich die Relationen:

$$p''_2 = e^{-\frac{2\pi}{m}i} p''_3,\; p''_2 = e^{-\frac{4\pi}{m}i} p''_1, \ldots,\; p''_m = e^{-\frac{(m-1).2\pi}{m}i} p''_1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$p_2^{(n-1)} = e^{-\frac{2\pi}{m}i} p_1^{(n-1)},\; p_3^{(n-1)} = e^{-\frac{4\pi}{m}i} p_1^{(n-1)}, \ldots,$$

$$p_m^{(n-1)} = e^{-\frac{(m-1).2\pi}{m}i} p_1^{(n-1)},$$

aus welchen wiederum nur die vorhin aufgestellten Gleichungen

$$p'_1 + p'_2 + \ldots + p'_m = 0,$$

$$p''_1 + p''_2 + \ldots + p''_m = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

und keine neuen zu entnehmen sind, in denen sich eine fernere Verminderung der Anzahl selbstständiger Perioden ausspräche. Nehmen wir den speciellen Fall an, dass die Anzahl n der Grössen $a, a', a'', \ldots$ einem Vielfachen von m gleich ist, so erhält jede der Functionen $u_1, u_2, \ldots, u_m$ nach einem Umlauf von Z auf einer die Punkte $A, A', A'', \ldots$ sämmtlich umgebenden geschlossenen Curve wieder ihren Anfangswerth, und es bietet sich dann die in Nr. 47 gemachte Bemerkung für jede der Functionen dar. Bezeichnet nämlich λ den Coefficienten von $\frac{1}{z}$ in der nach den absteigenden Potenzen von z fortschreitenden Entwickelung des Bruchs

$$\frac{\mathrm{H}}{\sqrt[m]{(z-a)(z-a')\ldots[z-a^{(n-1)}]}},$$

so ergeben sich die Gleichungen:

$$A_1 + A'_2 + A''_3 + \ldots + A_m^{(n-1)} = 2\pi i\lambda,$$

$$A_2 + A'_3 + A''_4 + \ldots + A_1^{(n-1)} = 2\pi i\lambda e^{-\frac{2\pi}{m}i},$$

$$A_3 + A'_4 + A''_5 + \ldots + A_2^{(n-1)} = 2\pi i\lambda e^{-\frac{4\pi}{m}i},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A_m + A'_1 + A''_2 + \ldots + A_{m-1}^{(n-1)} = 2\pi i\lambda e^{-\frac{(m-1).2\pi}{m}i},$$

und demnach ist

$$p'_2+p''_3+p'''_4+\ldots+p^{(n-1)}_m=-2\pi i\lambda,$$

$$p'_3+p''_4+p'''_5+\ldots+p^{(n-1)}_1=-2\pi i\lambda e^{-\frac{2\pi_i}{m}},$$

$$p'_4+p''_5+p'''_6+\ldots+p^{(n-1)}_2=-2\pi i\lambda e^{-\frac{4\pi_i}{m}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$p'_1+p''_2+p'''_3+\ldots+p^{(n-1)}_{m-1}=-2\pi i\lambda e^{-\frac{(m-1).2\pi_i}{m}}.$$

Die Anzahl m dieser Gleichungen wird nun vermöge der schon früher aufgestellten Relationen zwischen den Perioden auf $m-1$ wesentlich verschiedene reducirt, und wir finden auch in der That, dass das Resultat der Addition aller Gleichungen $0=0$ ist. Wenn ausserdem der Coefficient λ gleich Null ist, so lassen sich $m-1$ Perioden durch eben so viele mit entgegengesetzten Vorzeichen genommene Summen mehrerer anderer ausdrücken, also die $(m-1)(n-1)$ selbstständigen Perioden auf $(m-1)(n-2)$ reduciren, ein Umstand, welcher in dem speciellen Falle eintritt, wenn der Grad des Polynoms H kleiner als die ganze Zahl $\frac{n}{m}-1$ ist.

Wir können leicht ermitteln, welche Perioden in diesen verschiedenen Fällen als selbstständige auftreten. Wenn sich nämlich n durch m theilen lässt, oder wenn λ, falls n einem Vielfachen von m gleich ist, einen beliebigen Werth besitzt, so fallen die Perioden p'_m, p''_1, p'''_2, ... fort, da die Gleichungen:

$$p'_m=-p'_1-p'_2-p'_3-\ldots,$$
$$p''_1=-p''_2-p''_3-p''_4-\ldots,$$
$$p'''_2=-p'''_3-p'''_4-p'''_5-\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

zur Geltung kommen, während die $(m-1)(n-1)$ zurückbleibenden überhaupt selbstständig sind. Nehmen wir hingegen an, dass n durch m theilbar und zugleich λ Null ist, so finden zwischen diesen zurückgebliebenen Perioden folgende $m-1$ Gleichungen statt:

$$p'_1+p''_2+p'''_3+\ldots\ldots+p^{(n-1)}_{m-1}=0,$$
$$p'_2+p''_3+p'''_4+\ldots\ldots+p^{(n-1)}_{m}=0,$$
$$p'_3+p''_4+p'''_5+\ldots\ldots+p^{(n-1)}_{1}=0,$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$p'_{m-1}+p''_m+p'''_1+\ldots\ldots+p^{(n-1)}_{m-3}=0,$$

woraus folgt:

$$p'_1=-p''_2-p'''_3-\ldots\ldots-p^{(n-1)}_{m-1},$$
$$p'_2=-p''_3-p'''_4-\ldots\ldots-p^{(n-1)}_{m},$$
$$p'_3=-p''_4-p'''_5-\ldots\ldots-p^{(n-1)}_{1},$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$p'_{m-1}=-p''_m-p'''_1-\ldots\ldots-p^{(n-1)}_{m-3},$$

und mithin fallen noch die Perioden $p'_1, p'_2, \ldots, p'_{m-1}$ fort. Im allgemeinen Falle, wo $(m-1)(n-1)$ die Anzahl der selbstständigen Perioden ist, werden diese also folgendes System bilden:

$$\begin{array}{l}
p'_1,\ p'_2,\ p'_3,\ldots,\ p''_{m-3},\ p''_{m-2},\ p'_{m-1},\\
p''_2,\ p''_3,\ p''_4,\ldots,\ p''_{m-2},\ p''_{m-1},\ p''_m,\\
p'''_1,\ p'''_3,\ p'''_4,\ldots,\ p'''_{m-2},\ p'''_{m-1},\ p'''_m,\\
p^{IV}_1,\ p^{IV}_2,\ p^{IV}_3,\ldots,\ p^{IV}_{m-2},\ p^{IV}_{m-1},\ p^{IV}_m,
\end{array}$$

oder, wenn wir mit ω die Exponentialgrösse $e^{-\frac{2\pi}{m}i}$ bezeichnen:

$$\begin{array}{l}
p'_1,\ \omega p'_1,\ \omega^2 p'_1,\ldots,\ \omega^{m-4}p'_1,\ \omega^{m-3}p'_1,\ \omega^{m-2}p'_1,\\
\omega p''_1,\ \omega^2 p''_1,\ \omega^3 p''_1,\ldots,\ \omega^{m-3}p''_1,\ \omega^{m-2}p''_1,\ \omega^{m-1}p''_1,\\
p'''_1,\ \omega^2 p'''_1,\ \omega^3 p'''_1,\ldots,\ \omega^{m-3}p'''_1,\ \omega^{m-2}p'''_1,\ \omega^{m-1}p'''_1,\\
p^{IV}_1,\ \omega p^{IV}_1,\ \omega^3 p^{IV}_1,\ldots,\ \omega^{m-3}p^{IV}_1,\ \omega^{m-2}p^{IV}_1,\ \omega^{m-1}p^{IV}_1,\\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot
\end{array}$$

Um nun für den Fall, dass die Zahl n durch m theilbar und zugleich der Coefficient λ Null ist, die $(m-1)(n-2)$ selbstständigen Perioden zu erhalten, brauchen wir nur die erste Horizontalreihe des einen oder andern der beiden vorstehenden Systeme zu streichen, und es bleiben dann folgende Perioden zurück:

$$\begin{array}{l}
\omega p''_1,\ \omega^2 p''_1,\ \omega^3 p''_1,\ldots,\ \omega^{m-3}p''_1,\ \omega^{m-2}p''_1,\ \omega^{m-1}p''_1,\\
p'''_1,\ \omega^2 p'''_1,\ \omega^3 p'''_1,\ldots,\ \omega^{m-3}p'''_1,\ \omega^{m-2}p'''_1,\ \omega^{m-1}p'''_1,
\end{array}$$

$p^{IV}{}_1,\ \omega p^{IV}{}_1,\ \omega^3 p^{IV}{}_1, \ldots, \omega^{m-3} p^{IV}{}_1,\ \omega^{m-2} p^{IV}{}_1,\ \omega^{m-1} p^{IV}{}_1,$

$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$

$p_1^{(n-1)},\ \omega p_1^{(n-1)},\ \omega^2 p_1^{(n-1)}, \ldots, \omega^{m-4} p_1^{(n-1)},\ \omega^{m-2} p_1^{(n-1)},$
$\ldots \omega^{m-1} p_1^{(n-1)}.$

60. Zum Schlusse mag noch die Untersuchung der Gleichung dritten Grades:

$$u^3 - u + z = 0$$

Platz finden. Bezeichnen u_1, u_2, u_3 die drei dieser Gleichung genügenden Functionen, deren Anfangswerthe für $z = 0$ bezüglich 0, $+1$ und -1 sind, so werden, wie wir in Nr. 32 gesehen haben, die erste und zweite derselben gleiche Werthe annehmen, sobald der Punkt Z vom Anfangspunkte O aus nach dem $z = +\frac{2}{3\sqrt{3}}$ entsprechenden Punkte A gelangt, und zwar auf dem geradlinigen Wege OA; ferner erhalten die erste und dritte Function gleiche Werthe, wenn der Punkt Z vom Anfangspunkte aus über die gerade Linie OA' bis zu dem $z = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$ entsprechenden Punkte A' fortgegangen ist. Ausser den Punkten A und A' gibt es jedoch keinen, welcher vielfachen Wurzeln der gegebenen Gleichung entspräche. Wir wollen nun, was einer frühern Auseinandersetzung zufolge erlaubt ist, die Elementar-Curven (A) und (A') mit den geraden Linien OA, OA' allmälig zur Coincidenz bringen und dann mit v_1, v_2, v_3 die Werthe der Integrale $\int_0^k u_1 dz$, $\int_0^k u_2 dz$, $\int_0^k u_3 dz$ für eine bestimmte Integrations-Curve OMK bezeichnen. Zunächst ist die Frage zu beantworten, welche Werthe das Integral $\int_0^k u_1 dz$ überhaupt annehmen kann, wenn die Bewegung des Punktes Z von C bis K auf Curven jeder Art geschieht.

In Nr. 32 wurde gezeigt, dass die Wurzeln u_1 und u_2 nach einem Umlauf von Z auf der Curve (A) ihre Anfangswerthe austauschen, während gleichzeitig u_3 den eignen Anfangswerth wieder annimmt; demnach erhält auch die Function $u_1 + u_2$ ihren Anfangswerth wieder, so dass die Integrale $\int u_3 dz$ und $\int (u_1 + u_2) dz$, über die Curve $(+A)$ ausgedehnt, keine Veränderung erleiden, wenn nämlich vorausgesetzt wird, dass sich diese Curve auf eine unendlich kleine geschlossene Curve um den Punkt A reduciren lässt. Da nun die Functionen u_3 und $u_1 + u_2$ in diesem Punkte endliche Werthe behalten, so ist nach Nr. 46:

$$A_3 = 0\,,\ A_1 + A_2 = 0\,;$$

und weil die Integrale A_3, A_{-3} aus paarweise gleichen, aber entgegengesetzten Elementen bestehen, eben so auch die beiden Integrale A_1, A_{-2} und desgleichen die Integrale A_2, A_{-1}, so ist ferner:

$$A_3 = A_{-3} = 0\,,\ A_1 = -A_2 = A_{-1} = -A_{-2}\,.$$

Andererseits gelten die Gleichungen:

$$A'_2 = A'_{-2} = 0\,,\ A'_1 = -A'_3 = A'_{-1} = -A'_{-3}\,.$$

Da wir demnach das Vorzeichen eines beliebigen Terms der Charakteristik ändern können, ohne eine Veränderung des Werths des gesuchten Integrals dadurch hervorzurufen, so brauchen wir dieses Vorzeichen nicht besonders zu setzen. Beachten wir ferner, dass jede der Functionen u_1, u_2, u_3 nach einem Umlauf von Z auf der Curve $(A)(A)$ ihren Anfangswerth wieder annimmt, und dass die Integrale $\int u_1 dz$, $\int u_2 dz$, $\int u_3 dz$, über diese Curve fortgeführt, den vorstehenden Relationen gemäss gleich Null sind; so ist es erlaubt, falls in der Charakteristik einer von Z zu durchlaufenden Curve die beiden Terme $(A)(A)$ auf einander folgend vorkommen sollten, diese zu unterdrücken. Dieselbe Betrachtung gilt auch für die beiden etwa auf einander folgenden Terme $(A')(A')$, und wir sind daher berechtigt, gleich im Voraus anzunehmen, dass in je zwei auf einander folgenden Termen der Charakteristik der Curve OLK die Buchstaben A und A' beide vorkommen.

So werden die drei ersten Terme eine der beiden folgenden Zusammensetzungen bilden müssen:

$$(A)(A')(A)\,,\ (A')(A)(A')\,.$$

Was nun zum Beispiel die Function u_1 betrifft, so nimmt dieselbe nach einem Umlauf des Punktes Z auf einer geschlossenen Curve, welche durch eine dieser Zusammensetzungen repräsentirt ist, ihren Anfangswerth wieder an, und andererseits ist das Integral $\int u_1 dz$ für diese Curve gleich Null. Es folgt hieraus, dass wir zunächst die drei ersten Terme der Charakteristik der Curve OLK unbeschadet des Integrals $\int_0^k u_1 dz$ streichen dürfen; aus denselben Gründen ist dies auch mit den drei folgenden Termen gestattet, u. s. f., so dass schliesslich die Charakteristik auf eine der folgenden Formen zurückgeführt wird:

$$+OMK,\ (A)+OMK,\ (A')+OMK,\ (A)(A')+OMK,\ (A')(A)+OMK,$$

und dann das Integral in Bezug hierauf folgende Werthe erhält:

$$v_1,\ A_1+v_2,\ A'_1+v_3,\ A_1+v_2,\ A'_1+v_3.$$

Weil aber die gegebeue Gleichung dadurch, dass wir u in $-u$ und zugleich z in $-z$ verwandeln, keine Aenderung erleidet, so ergibt sich ohne Weiteres $A'_1=A_1$, demnach besitzt das in Rede stehende Integral, welche Gestalt übrigens die Curve OLK auch erhalten mag, nur drei wesentlich verschiedene Werthe, die sich folgendermassen darstellen lassen:

$$v_1,\ A_1+v_2,\ A_1+v_3.$$

Da also die Anzahl der Werthe des Integrals $\int_0^k u_1 dz$ eine begrenzte ist, so schwindet für das eben behandelte Beispiel eine Untersuchung der Perioden von selbst.

Ueberhaupt ist das Integral $\int_c^k u dz$ immer nur auf eine begrenzte Anzahl von Werthen beschränkt und deshalb nicht periodisch, sobald die zwischen u und z stattfindende Gleichung die Form

$$f(u)=z$$

hat, worin $f(u)$ ein ganzes Polynom von u bezeichnet, welches nicht unmittelbar von z abhängt. Setzt man nämlich

$$\int_0^z u dz = v,$$

so hat man:

$$dv = u dz = u f'(u) du,$$

mithin:

$$v = \int u f'(u) du = F(u),$$

woraus folgt, dass das ganze Polynom $v=F(u)$ für jeden Werth von z eben so viel Werthe besitzt als u, während andererseits die Anzahl der Werthe von u nach Massgabe der algebraischen Gleichung

$$f(u)=z$$

eine begrenzte ist.