V. Puiseux's Untersuchungen über die algebraischen Functionen

Fischer, Hermann

Halle, 1861

I.

I.

Das Integral $\int_c^k u_1 dz$, worin u_1 eine continuirliche Function von z vorstellt, welche der algebraischen Gleichung

$$f(u,z) = 0$$

genügt, besitzt im Allgemeinen unendlich viele Werthe. Diese Werthe entsprechen, wie Cauchy bewiesen hat, allen möglichen Curven, die der zur Darstellung der Variabeln z dienende bewegliche Punkt Z von C bis K durchlaufen kann, während z von c bis k wächst.

Schon bei der frühern Untersuchung wurde auf dem von Cauchy zuerst betretenen Wege gefunden, dass unendlich viele Werthe des Integrals $\int_c^k u_1 dz$ nur um beliebige ganze Vielfache gewisser Constanten verschieden sind, und dass jede dieser Constanten, welche den Namen *Perioden* führen, die Form

$$p = \int u_n dz$$

hat, wo u_n eine aus der Gleichung

$$f(u,z) = 0$$

sich ergebende Function ist, und wo ausserdem das Integral sich über eine geschlossene Curve von der Art erstreckt, dass die Function u_n nach einem Umlauf von Z auf dieser Curve ihren Anfangswerth wieder erhält. Indessen ist es nicht ohne Weiteres klar, 1) dass jede der soeben definirten Grössen p wirklich eine Periode des Integrals $\int_c^k u_1 dz$ ist, und 2) dass eine solche Periode allen Werthen des Integrals zukommt. Es soll jetzt gezeigt werden, dass es sich in der That so verhält, wenn die Gleichung

$$f(u_1 z) = 0$$

irreductibel ist*), dass also immer ein Werth des Integrals $\int_c^k u_1 dz$ entsteht, wenn man beliebige ganze Vielfache von Grössen der Form p zu einem Werthe des Integrals addirt, und hierdurch erhält dann die zweite Frage von Nr. 48 der vorstehenden Abhandlung ihre vollständige Lösung.

Wir gehen von folgendem Satze aus:

„Wenn eine continuirliche algebraische Function von z einwerthig ist, d. h. wenn sie jedesmal denselben Werth erlangt, so oft der bewegliche Punkt Z denselben Ort einnimmt, so muss dieselbe rational sein.“

Nehmen wir nämlich an, dass diese Function, die mit v bezeichnet werden mag, folgender Gleichung Genüge leistet:

$$\mathrm{N}v^m + \mathrm{P}v^{m-1} + \mathrm{Q}v^{m-2} + \ldots + \mathrm{S}v + \mathrm{T} = 0,$$

wo N, P, ..., T ganze Polynome von z sind, so wird es, wenn wir hierin:

$$\mathrm{N}v = u$$

setzen, für jeden Werth von z ebenfalls nur einen Werth von u geben, welcher dann der Gleichung

$$(1) \quad u^m + \mathrm{P}u^{m-1} + \mathrm{NQ}u^{m-2} + \ldots + \mathrm{N}^{m-2}\mathrm{S}u + \mathrm{N}^{m-1}\mathrm{T} = 0$$

genügt, und die Function u wird ausserdem für keinen endlichen Werth von z unendlich gross.

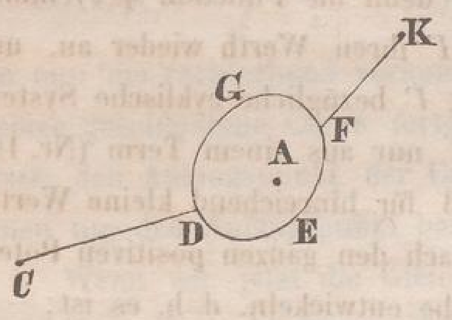
Es ist nun leicht einzusehen, dass das Integral $\int_c^k u_1 dz$ denselben Werth behält, wenn wir die Integrations-Curve CMK zwischen den festen Grenzen C und K verschieben; der Beweis hier-

---

*) Unter *irreductibel* verstehen wir hier, dass die linke Seite der Gleichung durch kein ganzes Polynom von u und z theilbar ist; überdiess mag vorausgesetzt werden, dass auch kein von z allein abhängender ganzer Factor vorkommt.

von wurde in Nr. 9 unter der Voraussetzung geführt, dass sich die Verschiebung der Curve CMK über keinen der Punkte A, A',.... hinaus erstreckt, für welche die Function u mit einer zweiten Wurzel der Gleichung (1) coincidirt. Aber das in Rede stehende Integral bleibt im gegenwärtigen Falle auch dann ungeändert, wenn die Curve CMK durch einen der Punkte A, A'',.... hindurchgeht. Was z. B. die Ueberschreitung des Punktes A betrifft, so sei $DEFG$ (Fig. 26) eine unendlich kleine, denselben umgebende geschlossene Curve, nach welcher die beiden Linien CD und KF geführt sind;

Fig 26.



es wird dann behauptet, dass der Werth des Integrals $\int_c^k udz$, über die Curve $CDEFK$ fortgeführt, dem Werthe für die Ausdehnung $CDGFK$ desselben Integrals gleich ist. Denn jeder von diesen Werthen, und alsdann auch die etwa stattfindende Differenz derselben, ist von dem Umfange der Curve $DEFG$ unabhängig, und zwar reducirt sich diese Differenz, da die Function u für jeden Punkt der Linien CD, FK nur einen Werth besitzt, auf den Werth ε des Integrals $\int udz$, über die Curve $DEFG$ ausgedehnt. Da nun die Function für jeden endlichen Werth von z endlich bleibt, so lässt sich offenbar durch hinlängliche Verengung der Curve $DEFG$ die Norm von ε kleiner machen, als jede gegebene Grösse ist, und weil endlich ε selbst vom Umfange dieser Curve nicht abhängt, so muss geradezu

$$\varepsilon = 0$$

sein, was eben jetzt behauptet wurde.

Lassen wir dann die Punkte C und K zusammenfallen, wodurch die Curve CMK in eine geschlossene übergeht, so ist das Integral $\int udz$ für diese Curve nach Nr. 12 überhaupt von dem Ausgangsorte C des Punktes Z unabhängig. Daraus folgt, dass der Werth desselben keine Aenderung erleidet, man mag die Integrations-Curve irgendwie verschieben, und zwar, da sich diese auf den blossen Punkt reduciren kann, immer Null ist.

Setzen wir jetzt

$$u = \varphi(z)$$

und bezeichnen mit γ den besondern Werth von z, welchem der Punkt Γ entspricht, so theilt die Function

$$\frac{\varphi(z) - \varphi(\gamma)}{z - \gamma}$$

mit $\varphi(z)$ oder u die Eigenschaft, für jeden Werth von z nur einen Werth zu besitzen und immer endlich zu bleiben. Dasselbe gilt auch noch für $z = \gamma$; denn die Function $\varphi(z)$ nimmt nach einem Umlauf von Z um Γ ihren Werth wieder an, und folglich besteht das auf den Punkt Γ bezügliche cyklische System, welchem diese Function angehört, nur aus einem Term (Nr. 18), mithin lässt sich $\varphi(z)$ nach Nr. 23 für hinreichend kleine Werthe von $z - \gamma$ in eine convergente, nach den ganzen positiven Potenzen von $z - \gamma$ fortschreitende Reihe entwickeln, d. h. es ist:

$$\varphi(z) = \varphi(\gamma) + \mathrm{A}(z - \gamma) + \mathrm{B}(z - \gamma)^2 + \ldots,$$

und folglich:

$$\frac{\varphi(z) - \varphi(\gamma)}{z - \gamma} = \mathrm{A} + \mathrm{B}(z - \gamma) + \ldots$$

Wir sehen also, dass die Function

$$\frac{\varphi(z) - \varphi(\gamma)}{z - \gamma}$$

für $z = \gamma$ den endlichen Werth A behält.

Somit lässt sich auf diese Function das in Bezug auf die Function u Gesagte anwenden, und auch das Integral

$$\int \frac{\varphi(z) - \varphi(\gamma)}{z - \gamma} dz,$$

über eine beliebige geschlossene Curve ausgedehnt, ist gleich Null. Hieraus folgt alsdann die Gleichung:

$$\varphi(\gamma) \int \frac{dz}{z - \gamma} = \int \frac{\varphi(z) dz}{z - \gamma},$$

wo sich die auf beiden Seiten vorkommenden Integrationen über irgend eine und dieselbe geschlossene Curve erstrecken. Der Werth des Integrals $\int \frac{dz}{z-\gamma}$ ergibt sich leicht, wenn wir annehmen, dass diese Curve überall vom Anfangspunkte geringere Entfernungen hat, als die Norm von γ ist, was stets erlaubt ist, und wir finden für denselben $2\pi i$. Da andererseits die convergente Reihe

$$\frac{1}{z-\gamma} = \frac{1}{z} + \frac{\gamma}{z^2} + \frac{\gamma^2}{z^3} + \ldots.$$

stattfindet, so können wir die vorstehende Gleichung auch folgendermassen schreiben:

$$2\pi i \,.\, \varphi(\gamma) = \int \frac{\varphi(z)\,dz}{z} + \gamma \int \frac{\varphi(z)\,dz}{z^2} + \gamma^2 \int \frac{\varphi(z)\,dz}{z^3} + \ldots.,$$

wo nun die rechterhand vorkommenden Integrationen über eine beliebige geschlossene Curve fortgeführt werden können, wofern nur diese den Anfangspunkt der Coordinaten einschliesst, etwa über einen um den Anfangspunkt beschriebenen Kreis.

Wenn wir jetzt die Gleichung (1) durch Division mit $(z^{\mu})^m$ in folgende Form bringen:

$$\left(\frac{u}{z^{\mu}}\right)^m + \frac{\mathrm{P}}{z^{\mu}}\left(\frac{u}{z^{\mu}}\right)^{m-1} + \frac{\mathrm{NQ}}{z^{2\mu}}\left(\frac{u}{z^{\mu}}\right)^{m-2} + \ldots.$$
$$+ \frac{\mathrm{N}^{m-2}\mathrm{S}}{z^{(m-1)\mu}} \cdot \frac{u}{z^{\mu}} + \frac{\mathrm{N}^{m-1}\mathrm{T}}{z^{m\mu}} = 0,$$

wo die ganzen Polynome N, P, Q, R,...., S, T in Bezug auf z der Reihe nach die Grade $n, p, q, r, \ldots., s, t$ haben, so ist klar, dass sämmtliche Potenzen von $\frac{u}{z^{\mu}}$ vom zweiten Term aus mit unendlich anwachsendem z zu Null herabsinken, wenn die ganze Zahl μ einen solchen Werth hat, dass alle Nenner von höherem Grade als die zugehörigen Zähler sind, d. h. wenn μ die grösste der Zahlen

$$p,\ \frac{n+q}{2},\ \frac{2n+r}{3}, \ldots.,\ \frac{(m-2)n+s}{m-1},\ \frac{(m-1)n+t}{m}$$

übersteigt. Da dann alle m Werthe von $\frac{u}{z^{\mu}}$ mit unendlich anwachsendem z zu Null herabsinken, so können die m Normen von $\frac{\varphi(z)}{z^{\mu}}$ durch hinlängliche Vergrösserung der Norm von z beliebig klein gemacht werden; ist also M die grösste der Normen von $\frac{\varphi(z)}{z^\mu}$ für den Umfang eines um den Anfangspunkt beschriebenen Kreises, so kann dieselbe dadurch zu beliebiger Kleinheit gebracht werden, dass man den Radius des Kreises hinreichend gross nimmt. Nun ist die Norm des Integrals $\int \frac{\varphi(z)}{z^\mu} \cdot \frac{dz}{z}$, über diesen Kreis ausgedehnt, kleiner als die Summe der Normen der Elemente*), d. h. als $\int_0^{2\pi} M d\tau = 2\pi M$, mithin ist auch die Norm des Coefficienten von γ^μ in der Entwickelung von $\varphi(\gamma)$ selbst kleiner als M, und folglich muss dieser Coefficient, der sonst einen bestimmten, vom Radius unabhängigen Werth hat, gleich Null sein. Somit kann die Entwickelung von $\varphi(\gamma)$ keine Potenzen mehr enthalten, deren Exponenten die grösste der Zahlen

$$p\,,\ \frac{n+q}{2}\,,\ \frac{2n+r}{3}\,,\ldots\ldots,\ \frac{(m-1)n+t}{m}$$

übersteigt, und daher nur eine begrenzte Anzahl von Termen umfassen. Wir sehen also, dass $\varphi(\gamma)$ eine ganze Function des Arguments γ, oder u eine ganze Function von z, dass mithin die Function $v = \frac{u}{N}$ in Bezug auf z rational ist, was zu beweisen war.

Wir kehren nun zu der irreductibeln Gleichung

$$f(u,z) = 0$$

zurück, welcher die m Functionen $u_1, u_2, \ldots, u_m$ Genüge leisten, und führen auch den Beweis dafür, „dass man immer durch den Punkt C eine geschlossene Curve der Art legen kann, dass von zwei nach Belieben gewählten Functionen jenes Systems, etwa u_1 und u_n, die eine u_1 nach einem Umlauf von Z auf dieser Curve den Anfangswerth der andern u_n erhält."

---

*) Die Norm einer Summe von complexen Grössen ist immer kleiner als die Summe der Normen der Summanden.

Verhielte es sich nämlich anders, so würden die Functionen $u_1, u_2, \ldots, u_m$ in zwei Klassen zerfallen, von denen die eine $\mathfrak{K}$ aus der Wurzel u_1 und solchen Wurzeln besteht, deren Anfangswerthe die Function u_1 überhaupt annehmen kann, während die andere Klasse $\mathfrak{K}'$ diejenigen Wurzeln in sich begreift, deren Anfangswerthe die Function u_1 niemals annehmen kann, und unter welchen sich dann u_n findet; keine der Wurzeln der ersten Klasse würde ihren Anfangswerth mit einer Wurzel der zweiten Klasse vertauschen, auf welcher geschlossenen Curve $(\varDelta)$ man auch den Punkt Z von C aus herumführen mag. Denn wollte man z. B. annehmen, dass die Wurzel u_f der Klasse $\mathfrak{K}$ den Anfangswerth einer Wurzel $u_{f'}$ der Klasse $\mathfrak{K}'$ erhielte, so brauchte man nur eine geschlossene Curve $(\varGamma)$ ausfindig zu machen, auf welcher u_1 den Anfangswerth von u_f erhält, um zu dem, unserer Definition der beiden Klassen widersprechenden Resultate zu gelangen, dass u_1 nach einem Umlauf von Z auf der geschlossenen Curve $(\varGamma)(\varDelta)$ den Anfangswerth von $u_{f'}$ annimmt.

Da also die Wurzeln der Klasse $\mathfrak{K}$ ihre Anfangswerthe nur unter sich vertauschen können, so nimmt immer eine symmetrische Function λ dieser Wurzeln denselben Werth wieder an, auf welcher geschlossenen Curve man auch den beweglichen Punkt Z nach C zurückführen mag, woraus sich nun leicht ergibt, dass λ für jeden Werth von z nur einen Werth besitzt. Es sei nämlich

$$F(\lambda,z) = 0$$

eine algebraische Gleichung, welcher λ genügt, und zwar wollen wir zugleich voraussetzen, dass λ im Punkte C eine einfache Wurzel dieser Gleichung ist (im entgegengesetzten Falle würde ein in unmittelbarer Nähe von C liegender Punkt statt dessen anzunehmen sein). Könnte nun λ in einem Punkte K zwei verschiedene Werthe h und h' besitzen, je nachdem Z die Curve CLK, oder die Curve CMK durchläuft, so würde es unter den Functionen λ, λ', λ'', ..., die der Gleichung

$$F(\lambda,z) = 0$$

genügen, eine andere $\lambda^{(k)}$ geben, welche durch Fortbewegung von Z auf der Curve CMK in K den Werth h annimmt, und alsdann würde λ durch Fortbewegung von Z auf der geschlossenen Curve $CLKMC$ offenbar den Anfangswerth von $\lambda^{(k)}$ in C erhalten, was deswegen nicht möglich ist, weil λ im Punkte C beständig denselben Werth wieder annimmt.

Wenn hiernach die Function λ für jeden beliebigen Punkt K, oder für jeden Werth von z nur einen Werth besitzt, so ist dieselbe, dem oben bewiesenen Satze zufolge, nothwendig in Bezug auf z rational, so dass sich dann auch die Summe aller Wurzeln der Klasse $\mathfrak{K}$, so wie die Summe der Producte von je zwei, je drei, u. s. w. auf eine rationale Weise in Bezug auf z ausdrücken lassen. Diese Wurzeln müssen alsdann einer algebraischen Gleichung von niedrigerem Grade, als die Gleichung

$$f(u,z) = 0$$

ist, Genüge leisten, was aber der Voraussetzung widerspricht, dass diese irreductibel ist Somit können wir immer durch den Punkt C eine geschlossene Curve der Art legen, dass u_1 auf derselben den Anfangswerth von u_n erhält.

Mit Hilfe dieser Sätze gelangen wir nun ohne Mühe zur Einsicht der oben ausgesprochenen Behauptung. Es bezeichne nämlich v_1 den Werth des Integrals $\int_c^k u_1 dz$, über eine beliebige Curve CMK ausgedehnt, und p den Werth des Integrals $\int u_n dz$, wo sich die Integration über eine solche geschlossene Curve erstreckt, auf welcher die Function u_n nach einem Umlauf von Z ihren Anfangswerth wieder erhält; diese können wir noch bis zum Punkte C fortschieben, ohne dass der Werth von p, den wir Periode genannt haben, eine Aenderung erleidet. Die Charakteristik der hierdurch eingeführten neuen Curve sei (Φ). Um uns nun davon zu überzeugen, dass durch Addition von p zu v_1 wiederum ein Werth des Integrals $\int_c^k u_1 dz$ entsteht, brauchen wir nur des Satzes zu gedenken, dass man immer durch den Punkt C eine solche geschlossene Curve (Γ) legen kann, auf welcher u_1 nach einem Umlauf von Z den Anfangswerth von u_n erhält, und wo dann u_n den Anfangswerth von u_1 annimmt, wenn die Fortbewegung im entgegengesetzten Sinne, also auf der Curve $(-\Gamma)$ geschieht. Demnach reducirt sich das Integral $\int_c^k u_1 dz$, über die Curve

$$(\Gamma)(\Phi)(-\Gamma) + CMK$$

genommen, weil die auf die Terme (Γ) und $(-\Gamma)$ der Charakteristik bezüglichen Theile desselben gleich und entgegengesetzt sind, auf:

$$p + v_1 .$$

Eben so hat unser Integral, über die Curve

$$(\Gamma)(-\Phi)(-\Gamma) + CMK$$

ausgedehnt, den Werth:

$$-p + v_1 .$$

Hieraus ergibt sich endlich, dass man zu einem beliebigen Werthe v_1 des Integrals $\int_c^k u_1 dz$ eine beliebige Periode p addiren oder subtrahiren kann, mithin eben so auch beliebige ganze Vielfache sämmtlicher Perioden, dass folglich jede Periode allen Werthen des Integrals zukommt, wenn, wie vorausgesetzt wurde, die Gleichung

$$f(u, z) = 0$$

irreductibel ist.
