UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

V. Puiseux's Untersuchungen über die algebraischen Functionen

Fischer, Hermann

Halle, 1861

II.

urn:nbn:de:hbz:466:1-61878

Visual Library

II.

Aus der vorstehenden Darlegung geht klar hervor, dass man die zur Vollführung eines Umlaufs von Z dienenden geschlossenen Curven immer so wählen kann, dass die Function u_1 am Ende die Anfangswerthe aller übrigen Functionen erhält, wofern nur die Gleichung

$$f(u,z) = 0,$$

welcher diese Functionen $u_1, u_2, \ldots, u_m$ von z Genüge leisten, irreductibel ist. Wir können somit geradezu aussprechen, dass eine algebraische Function, welche durch eine irreductible Gleichung $m$ten Grades definirt ist, für jeden Werth von z gerade m Werthe annimmt, wobei aber alle diejenigen isolirten Werthe von z, für welche die Gleichung vielfache Wurzeln besitzt, ausgeschlossen bleiben.

Anders muss es sich freilich verhalten, wenn die Gleichung nicht irreductibel ist. Angenommen, das Polynom $f(u,z)$ zerfiele in zwei polynomische Factoren $\varphi(u\,z)$ und $\psi(u,z)$, welche keinen Factor gemeinschaftlich haben, so würden sich die Functionen u_1, $u_2, \ldots, u_m$ in zwei Klassen sondern, von denen eine aus solchen Functionen besteht, die der Gleichung

$$\varphi(u,z) = 0$$

genügen, während die Functionen der andern Klasse in der Gleichung

$$\psi(u,z) = 0$$

enthalten sind; alsdann würden die Functionen jeder Klasse ihre Werthe nur unter sich vertauschen, mithin könnte jede der Functionen $u_1, u_2, \ldots, u_m$ nur eine solche Anzahl von Werthen annehmen, die den Grad eines der Polynome $\varphi(u,z)$, $\psi(u,z)$ in Bezug auf u nicht übersteigt, folglich kleiner als m ist.

Auch die Umkehrung dieser Behauptung findet allgemein statt, dass nämlich eine algebraische Function von z, welche m

Werthe für jeden Werth von z besitzt, einer irreductibeln Gleichung vom Grade m genügen muss; weil anderenfalls, wenn diese Function einer irreductibeln Gleichung von höherem oder niedrigerem Grade n zugehörte, dieselbe n Werthe besitzen würde, während diese Anzahl der Voraussetzung gemäss m sein sollte. Für den besondern Fall, dass die Function stets einwerthig ist, haben wir bereits früher den rationalen Charakter derselben erkannt.

Wir wollen jetzt untersuchen, ob eine algebraische Gleichung zwischen zwei Variabeln:

$$f(u,z) = 0,$$

deren reelle oder imaginäre Coefficienten numerisch gegeben sind, irreductibel ist, oder nicht. *)

Zunächst sondern wir diejenigen Werthe von z ab, für welche die gegebene Gleichung vielfache oder unendlich grosse Wurzeln hat; dieselben werden sich nämlich als die Wurzeln einer Gleichung

$$\varphi(z) = 0$$

in begrenzter Anzahl darstellen lassen, etwa die Werthe a, a', a'',.... besitzen und gewissen Punken A, A', A'',.... entsprechen. Bezeichnen wir nun mit c einen willkürlich angenommenen, jedoch von den Grössen a, a', a'',.... verschiedenen Werth von z und mit C den entsprechenden Punkt, so dass also die Gleichung

$$f(u,c) = 0$$

m durchweg ungleiche Wurzeln b_1, b_2,..... b_m liefern wird, welche wir als die verschiedenen Anfangswerthe der m Functionen u_1, u_2,...., u_m einführen wollen; legen wir dann durch den Punkt C geschlossene Curven der Art, dass jede nur einen der Punkte A, A', A'',.... umgibt, während alle übrigen Punkte ausserhalb der-

---

*) Es bleibt hier der Fall ausgeschlossen, wo diese Gleichung vielfache Wurzeln hat, welche Werthe z auch erhalten mag; nach der bekannten Theorie von den gleichen Wurzeln würde dieselbe in solchem Falle eine Zusammensetzung aus mehrern andern Gleichungen sein.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

selben bleiben, und bezeichnen mit (A) die um den Punkt A beschriebene Curve, mit (A') die um den Punkt A' gezogene, u. s. f.: so lässt sich nach den schon früher in Nr. 28—31 angestellten Betrachtungen für jede dieser Elementar-Curven diejenige Function u_f allgemein ermitteln, deren Anfangswerth b_f nach einem Umlauf des Punktes Z einer Function u_f zukommt. Wollte man z. B. untersuchen, welche Functionen es sind, deren Anfangswerthe die Function u_1 überhaupt annehmen kenn, so würde sich ergeben, dass zunächst diese die Anfangswerthe einer gewissen Anzahl anderer Functionen u_n, u_p, ..., u_r annimmt, sobald der Punkt Z auf je einer Elementar-Curve herumgeführt ist; dass dann wieder jede der Functionen u_n, u_p, ..., n_r nach den Umläufen von Z auf je einer Elementar-Curve die Anfangswerthe gewisser Functionen erhalten würde, die nun entweder unter den bis jetzt in Betracht gekommenen schon begriffen sind, oder nicht. Im letztern Falle seien $u_{n'}$, $u_{p'}$, ..., $u_{r'}$ die neu hinzutretenden Functionen, deren jede wiederum nach den Umläufen von Z auf je einer Elementar-Curve entweder die Anfangswerthe bereits gefundener Functionen annehmen würde, oder ausserdem die Anfangswerthe von neuen Functionen $u_{n''}$, $u_{p''}$, ..., $u_{r''}$, u. s. f. Schliesslich würde man nach einer gewissen Reihe derartiger Partial-Untersuchungen nothwendig irgend welchen der bisher ermittelten Functionen wieder begegnen müssen, und somit finden, dass u_1, u_n, u_p, ..., u_r, $u_{n'}$, $u_{p'}$, ..., $u_{r'}$, $u_{n''}$, ... alle verschiedenen Functionen sind, deren Anfangswerthe die Function u_1 überhaupt annehmen kann. Nun sind zwei Fälle möglich, 1) dass die Anzahl dieser Functionen gleich m ist, also ihre Gesammtheit geradezu mit der der Functionen u_1, u_2, ..., u_m übereinstimmt: alsdann gibt es m Werthe der Function u_1, und die Gleichung

$$f(u, z)_m = 0$$

ist gewiss irreductibel; 2) dass die Anzahl μ dieser Functionen kleiner als m ist: alsdann ergeben sich nur μ Werthe der Function u_1, und diese gehört einer irreductibeln Gleichung μten Grades an, d. h. die gegebene Gleichung ist in diesem Falle nicht irreductibel.

Die μ Functionen, deren Anfangswerthe die Function u_1 annimmt, welche hier mit $u_1, u_2, \ldots, u_\mu$ bezeichnet werden mögen, vertauschen nämlich ihre Werthe nur unter sich; ferner wird es eine gewisse Anzahl ν unter den übrig bleibenden Wurzeln der Gleichung

$$f(u,z) = 0$$

geben, deren Anfangswerthe eine nach Belieben gewählte Function unter diesen annimmt, welche wir mit $u_{\mu+1}, u_{\mu+2}, \ldots, u_{\mu+\nu}$ bezeichnen wollen. Sollten noch überdiess Wurzeln zurückbleiben, so würden wir auf ähnliche Weise zu einer neuen Klasse von ϱ Functionen gelangen, die ebenfalls ihre Werthe nur unter sich vertauschen, u. s. f., bis die ganze Reihe der Functionen $u_1, u_2, \ldots, u_m$ erschöpft ist. Hiermit sind dann aus der gegebenen Gleichung

$$f(u,z) = 0$$

so viel irreductible Gleichungen gewonnen, als Klassen gebildet wurden, und zwar geben die Zahlen μ, ν, ϱ die Grade derselben an.

Wir haben also ein Verfahren erzielt, mittelst dessen sich sowol erkennen lässt, ob eine Gleichung zwischen zwei Variabeln irreductibel ist, als auch, wenn diese Eigenschaft nicht vorgefunden wird, die Grade der abgesonderten irreductibeln Gleichungen ergeben. Auch können leicht diejenigen ganzen Functionen von z aufgestellt werden, welche den verschiedenen Potenzen von u in diesen Gleichungen als Coefficienten dienen; wir wollen indessen hierauf nicht näher eingehen.

Es verdient bemerkt zu werden, dass die Kenntniss der genauen Werthe der Wurzeln $a, a', a'', \ldots$ der Gleichung

$$\varphi(z) = 0$$

für die Anwendung keineswegs erforderlich ist, vielmehr genügt es, nur um jeden der entsprechenden Punkte $A, A', A'', \ldots$ eine Curve zu beschreiben, die alle übrigen Punkte ausschliesst; diese

Trennung lässt sich aber mit Hilfe des schönen Satzes von **Cauchy** über die Anzahl der von einer Curve eingeschlossenen imaginären Wurzeln immer bewerkstelligen.*)

Beispielsweise betrachten wir folgende Gleichung:

$$u^3 - u + z = 0,$$

welche beiläufig in die Gleichung für die Dreitheilung des Winkels

---

*) Der Satz kann leicht folgendermassen hergeleitet werden. Wenn $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$ die m Wurzeln der Gleichung

$$\varphi(z) = 0$$

bezeichnen, welchen die Punkte $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_m$ entsprechen, so lässt sich diese in der Form:

$$\varphi(z) = c(z - \gamma_1)^p (z - \gamma_2)^q \ldots (z - \gamma_m)^s = 0$$

darstellen, woraus wir direct erhalten:

$$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \frac{p}{z - \gamma_1} + \frac{q}{z - \gamma_2} + \ldots + \frac{s}{z - \gamma_m},$$

und alsdann den Werth des Integrals

$$\int \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} dz$$

für eine gewisse geschlossene Grenzcurve ohne Doppelpunkte, auf der wir den z entsprechenden Punkt Z um die etwa eingeschlossenen Punkte Γ herumführen, in der Gestalt:

$$(p + q + \ldots + s)\, 2\pi i.$$

Gleichzeitig durchläuft der $u = \varphi(z)$ zugehörige Punkt U eine andere geschlossene Curve, über welche das Integral

$$\int \frac{du}{u}$$

ausgedehnt den Werth $2n\pi i$ erhält, wo n die Anzahl der Umläufe um den Anfangspunkt der Coordinaten bedeutet; folglich ist:

$$p + q + \ldots + s = n,$$

d. h. die Anzahl der vielfachen und einfachen Wurzeln der Gleichuug $\varphi(z) = 0$, welche innerhalb einer Grenzcurve von Z liegen, ist gleich der Anzahl der Umläufe des Punktes U um den Anfangspunkt der Coordinaten, während der Punkt Z die geschlossene Grenzcurve durchläuft.

übergeht, wenn man darin z durch $-\frac{2x}{3\sqrt{3}}$ und u durch $\frac{2y}{\sqrt{3}}$ ersetzt. Die beiden Werthe von z; für welche dieselbe gleiche Wurzeln liefert, sind:

$$z = +\frac{2}{3\sqrt{3}},\ z = -\frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

Bezeichnen wir mit A, A' die beiden ihnen entsprechenden Punkte und mit u_1, u_2, u_3, die drei der gegebenen Gleichung genügenden Functionen, deren Anfangswerthe für $z = 0$ bezüglich 0, $+1$ und -1 sind, so finden wir nach Nr. 32 ohne Mühe, dass die Function u_1 nach einem Umlauf von Z auf der Curve (A) den Anfangswerth von u_2 und nach einem Umlauf von Z auf der Curve (A') den Anfangswerth von u_3 erhält, mithin drei Werthe annimmt, und dass folglich die Gleichung

$$u^3 - u + z = 0$$

irreductibel ist, was sich übrigens sofort ergibt, wenn man hierin z als eine Function von u betrachtet.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN