Der Rathgeber bei mathematischen Beschäftigungen

Stöpel, August

Stendal, 1819

Erste Abtheilung.

Erste Abtheilung.

I. Buchstabenrechnung.

§. 1. Die Buchstabenrechnung ist eine, jedem Freunde der Mathematik unentbehrliche, Wissenschaft, ohne welche es ihm unmöglich ist, Formeln oder Vorschriften zur Auflösung mathematischer Aufgaben zu lesen, anzuwenden, oder selbst zu erfinden, und die dahin gehörigen Schriften zu verstehen. Es ist daher nothwendig, daß sich jeder, der es zu einiger Vollkommenheit bringen will, mit derselben bekannt mache, wozu wir in dem Folgenden Anleitung geben wollen. Die Kenntniß der gemeinen Zahlenrechnung, wie sie in jeder nicht gar zu schlechten Schule gelehrt wird, können wir bei den Freunden mathematischer Beschäftigungen voraussetzen.

§. 2. Gemeiniglich stellen sich Unkundige die Rechnung mit Buchstaben weit schwerer vor, als sie in der That ist, woran unter andern auch der Umstand Schuld seyn mag, daß sie sich bei den Buchstaben, die in Rechnungen vorkommen, durchaus bestimmte Größen oder Zahlenwerthe vorstellen wollen, und von dem damit bezweckten Nutzen oder Vortheile keinen deutlichen Begriff machen können. Ein guter mündlicher Vortrag ist freilich der leichteste und kürzeste Weg, bald zu einiger Fertigkeit in der Buchstabenrechnung zu gelangen; allein nicht Alle können sich dieses Glücks erfreuen! Eigenes Studium muß Vielen ersetzen, was sie früher entbehrten oder versäumten. Wer sich ernstlich vornimmt, eine Wissenschaft zu erlernen, beginne sein Werk nur mit **Liebe** und **Ausdauer**, ermatte nicht, wenn ihm dieselbe zu mühevoll, zu schwer vorkommt. So wie jede hohe Gabe nach dem unabänderlichen Naturgesetze errungen werden muß, so kann man auch die Lustgefilde, welche die Mathematik dem Geiste darbietet, nur dann erreichen, wenn man Muth genug hat, durch die freilich etwas rauhen Pfade, die ihnen vorangehen, zu wandeln. —

§. 3. Zahlen sind Zeichen, durch die wir entweder den Mangel (0), oder die Einheit (1) oder die Mehrheit (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) einer Sache dem Auge vorstellig machen. Aus diesen Zeichen ersehen wir aber nicht, welche Sache gemeint sey, sondern nur, wie oft sie als Einheit genommen werden solle.

Das Rechnen mit den Zahlzeichen besteht in einer auf feststehende Regeln sich gründenden Versetzung und Veränderung, die mit ihnen vorgenommen wird. Will man eine Größe, ein Ding, eine Person, Linie oder einen Winkel durch ein einziges Zeichen ausdrücken, und arithmetische Veränderungen damit machen, so sind dazu die Zahlzeichen nicht so brauchbar, als die Buchstaben, weshalb die Rechnung mit letzteren entstanden ist.

Die Buchstaben in den Rechnungen sollen allgemeine Größen vorstellen, unter welchen man sich allerley denken kann. Die Antwort, welche eine Buchstabenrechnung giebt, ist daher eben so allgemein, d. h. auf alles passend; und man rechnet mit Buchstaben hauptsächlich deshalb, um leichte und einfache Regeln zur Lösung einer Aufgabe zu finden. Soll nun die Antwort in Zahlen erfolgen, so setzt man statt der Buchstaben diejenigen Zahlen, die ihnen in der Rechnung zukommen. Es sey z. B. der Flächeninhalt eines Gartens aus seiner Länge und Breite zu bestimmen, so giebt die Geometrie folgende Regel:

$$l.\ b = F$$

d. h. Länge multiplicirt mit der Breite ist gleich der Fläche. Wenn nun die Länge oder l 8 Ruthen, die Breite oder b 5 Ruthen ist, so beträgt die Fläche F

$$8 \text{ mal } 5 = 40 \text{ Quadratruthen.}$$

Die Zahlen 8 und 5 geben nur den Flächenraum dieses Gartens, aber die Buchstaben l und b gelten bei allen ähnlichen Gärten und Rechtecken, folglich allgemein.

§. 4. Bei mathematischen Rechnungen sind die negativen und positiven Größen vorzüglich merkwürwürdig. Sie sind einander stets entgegengesetzt, und etwa als Schulden und Vermögen, Rückwärtsgehen und Vorwärtsgehen, Ausgabe und Einnahme anzusehen. Die negativen Größen werden mit dem Subtractions- oder Minuszeichen (—), und die positiven mit dem Additions- oder Pluszeichen (+) versehen. Größen, vor welchen keins dieser beiden Zeichen steht, sind allemal als positive, oder Plusgrößen, zu betrachten, und müßten das Zeichen + erhalten; welches man der Kürze wegen ausläßt. Wie wichtig der Einfluß dieser Zeichen in den Rechnungen ist, wird man im Folgenden sehen.

Addition.

§. 5. Größen, die zu einander addirt werden sollen, erhalten das Pluszeichen. So heißt z. B. $8+6$, oder $a+b$ so viel: die Größen 8 und 6, oder a und b sind zu addiren.

Das Zeichen der Gleichheit ist ein doppelter Strich ($=$); und $8+6=14$ heißt: 8 und 6 ist gleich, oder macht 14.

Nur Dinge von einerley Art lassen sich addiren. 6 Äpfel, 5 Birnen und 9 Pflaumen können unter dieser Benennung nicht summirt werden; daher ordne man alle zu summirende Größen nach ihrer Art und schreibe sie unter einander; dann zähle man das Gleichartige zusammen, und schreibe die Summe darunter.

Eine Zahl vor einer Größe heißt Coëfficient; steht keine davor, so ist der Coëfficient $=1$.

$$\begin{array}{rrr} & 6a+ & 7b+8c \\ & 3a+ & 4b+\ \ c \\ \hline \text{Summe}= & 9a+ & 11b+9c \end{array} \qquad \begin{array}{rrr} & g+ & m+\ n \\ & 2g+ & 6m+3n \\ & 7g+ & 5m+2n \\ \hline \text{Summe}= & 10g+ & 12m+6n \end{array}$$

Unter den Buchstaben a, b, c, g rc. denke man sich, was man will, als Äpfel, Birnen, Castanien, Gurken u. d. gl., so wird man einsehen, daß $6a$ und $3a=9a$; $7b$ und $4b=11b$ u. s. w. machen.

§. 6. Wenn entgegengesetzte Größen z. B. $+3$ und -3 zu addiren sind, so gleicht man sie mit einander aus, d. h. man zieht die kleinere von der größern ab, und giebt dem Rest das Zeichen der größeren. Z. B.

$$\begin{array}{r} +3 \\ -3 \\ \hline =0 \end{array} \quad \begin{array}{r} +4 \\ -2 \\ \hline =+2 \end{array} \quad \begin{array}{r} -4 \\ +2 \\ \hline =-2 \end{array} \quad \begin{array}{r} +5 \\ -7 \\ \hline =-2 \end{array} \quad \begin{array}{r} +7a \\ +3a \\ -4a \\ -11a \\ +6a \\ \hline =+16a-15a=+a \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 6a - 4b - 2c + d \\ -a - 7b + 3c + d \\ 5a - 9b - 7c \\ \hline 10a - 20b - 6c + 2d \end{array}$$

Sind mehrere Größen Einer Art mit verschiedenen Zeichen, wie in den beiden letzten Beispielen, so addirt man die Plusgrößen besonders, und zieht davon die Summe der Minusgrößen ab, oder gleicht sie aus. Z. B. $6a + 5a$ sind $+ 11a$; davon $-a$, bleibt $+ 10a$.

§. 7. Sollen Größen addirt werden, die nicht von einerlei Art sind, so setzt man sie mit ihren Zeichen neben einander. Z. B.

$$\begin{array}{l} \quad 4a \\ \; -6b \\ \; +2c \\ \; -d \\ \; -g \\ \hline =4a-6b+2c-d-g. \end{array}$$

§. 8. Daß eine Größe mehr, oder größer sey, als eine andere, wird durch das Zeichen $<$ angezeigt; an der Öffnung steht die größere, an der Spitze die kleinere Größe. Z. B. $9>5$ heißt: 9 ist größer, als 5; und $5<8$ heißt: 5 ist kleiner, als 8.

Jede Größe ist sich selbst gleich, also $c=c$; $a=a$. Wenn nun $a>b$, so muß auch $a+c>b+c$; folglich $b+c<a+c$.

Subtraction.

§. 9. Da das Subtrahiren oder Abziehen das Entgegengesetzte vom Addiren oder Hinzuthun ist, so gilt auch hier, was schon §. 5. gesagt ist, nämlich: nur Gleichartiges läßt sich wirklich von einander abziehen.

Allge-

Allgemeine Regeln beim Subtrahiren:

Verwandle das Zeichen des Subtrahenden oder der abzuziehenden Größe in das entgegengesetzte, und addire dann oder gleiche aus, so wird das Kommende der Rest oder Unterschied seyn.

Z. B. Von $12a$ ist gleich $12a$		Von -16 ist gleich -16	
ab $5a$ dazu $-5a$		ab -10 dazu $+10$	
Rest $7a$	$7a$	Rest -6	-6

Von $3b + x - 2z$
ab $b - x + z$
$- \quad + \quad -$
Rest $2b + 2x - 3z$

Von $a + b + 5c + 3d$
ab $-6a - 2b + 2d$
$+ \quad + \quad -$
Rest $7a + 3b + 5c + d$

Von $-2z - x + 17g$
ab $-5z - 8g$
$+ \quad +$
Rest $+3z - x + 25g$

Von $3m + n$
ab $4m + 2n + 6z - 8x$
$- \quad - \quad - \quad +$
Rest $-m - n - 6z + 8x$

In den Beispielen sind in der untersten Reihe die Zeichen verwechselt, und dann beide Reihen addirt. Die Größen, zu denen sich keine gleichnamigen finden, werden, wenn sie in der obern Reihe oder in dem Minuenden stehen, mit demselben Zeichen unter den Strich, wenn sie aber im Subtrahenden stehen, mit entgegengesetztem Zeichen herabgesetzt.

§. 10. Sind die Größen nicht gleichnamig, aber zusammengesetzt, d. h. aus mehrern durch + und — verbundenen Theilen oder Gliedern bestehend, so wird das, was zu jeder Größe gehört, in Klammern eingeschlossen, und zwischen beide das Minuszeichen gesetzt. Z. B.

Von $4a - 3b + 2c$
ab $-7g + x - z$
Rest $(4a - 3b + 2c) - (-7g + x - z)$

In solchen Fällen wird also die Subtraction bloß angezeigt.

Wenn die Werthe der einzelnen Glieder bekannt sind, so verwandelt man sie in einen Zahlwerth, und verrichtet dann die Subtraction. Z. B.

Von

Von 6 + 5 + 4 das ist = 15
ab − 7 − 8 + 9 − = −6
+

Rest = +21

§. 11. So wie Gleichviel zu Gleichvielem addirt Gleichviel in den Summen giebt, so muß Gleiches von Gleichem subtrahirt auch gleichgroße Reste übrig lassen.

Es sey $a = m$, so ist $a + z = m + z$
und $a - z = m - z$

Das Minuszeichen erhält jede abzuziehende Größe; als 60 — 30 heißt: von 60 soll 30 subtrahirt werden; deßgleichen $a - b$ heißt: von der Größe a soll die Größe b abgezogen werden.

Multiplication.

§. 12. Größen, die mit einander multiplicirt werden, erhalten das Multiplicationszeichen, welches ein Punct, oder ein schiefliegendes Kreuz ist. Z. B. 8 . 6 oder 8 X 6 heißt: 8 mal 6; a . b heißt: a mal b. Indessen braucht man die Buchstaben, welche mit einander zu multipliciren sind, nur neben einander ohne Zeichen zu setzen, wenn nicht anderer Ursachen wegen eine Zweideutigkeit zu besorgen ist. So ist ab eben so viel, als a . b oder a X b.

§. 13. Die zu multiplicirenden Größen heißen Factoren oder Efficienten; was aus beiden entsteht heißt Product.

§. 14. Oft sind mehrere Factoren mit einander zu multipliciren, dann ist es einerlei, in welcher Reihenfolge sie stehen. Denn

2 . 4 . 6 = 48 desgleichen a . b . c . d = abcd
und 4 . 6 . 2 = 48 und c . d . b . a = abcd

Man ordnet sie aber gern nach ihrer alphabetischen Ordnung, wenn nicht andere Umstände dies verbieten.

§. 15. Zusammengesetzte Größen werden in Klammern geschlossen, und das Multiplicationszeichen wird zwischen die Factoren gesetzt. Z. B.

$(5 + 4 - 3 - 2) . (3 + 9 + 1 - 4 - 2)$

Verwandelt man jeden Factor in Eine Größe, welches hier

wohl

wohl angeht, so wird aus $(5 + 4 - 3 - 2) = + 4$, und aus $(3 + 9 + 1 - 4 - 2) = + 7$. Die beiden Factoren sind dann 4 und 7, und ihr Product 28.

Überhaupt muß man suchen, zusammengesetzte Größen auf die einfachste Form zu bringen. So wäre es z. B. vortheilhafter, anstatt $(mn) . (rp)$ lieber $mnrp$ zu schreiben.

§. 16. Haben die Factoren Zahlzeichen zu Coëfficienten bei sich, so kann man die Multiplication auch bloß durch das Zusammensetzen (jedoch nicht ohne Puncte) verrichten. Z. B.

$$4a . 5b . 6d$$

das ist $= 4 . 5 . 6 . abd$, oder noch besser $120abd$. Und $4pq . 3x$ ist auch $3 . 4pqx$ oder $12pqx$ zu schreiben, denn die Coëfficienten sind Factoren, von denen gilt, was §. 14. gesagt wurde. Wenn die Coëfficienten aber große Zahlen sind, so läßt man sie oft auch stehen; als

$$720c . 84ab = (720 . 84) abc.$$

§. 17. Sind entgegengesetzte Größen mit einander zu multipliciren, so gilt folgende Regel:

Einerlei Zeichen mit einander multiplicirt geben im Product eine Plusgröße; verschiedene Zeichen geben im Product eine Minusgröße.

Z. B.	$+a . +b = +ab$	oder	$+3 . +9 = +27$
	$-a . -b = +ab$		$-3 . -9 = +27$
	$+a . -b = -ab$		$+3 . -9 = -27$
	$-a . +b = -ab$		$-3 . +9 = -27$

§. 18. Sind mehr, als zwei Factoren mit verschiedenen Zeichen da, so multiplicire man erst zwei mit einander, und gebe dem Producte das ihm gehörige Zeichen; dann multiplicire man den dritten Factor mit dem Producte der beiden erstern, und fahre so fort, so wird es sich ausweisen, welches Zeichen das letzte Product erhalten muß. Z. B.

$$a . -b . +c . +d . -g$$

hier ist

$a . -b = -ab$, weil die Zeichen verschieden sind;
und $-ab . +c = -abc$ — — — — —
und $-abc . +d = -abcd$ — — — — —
und $-abcd . -g = +abcdg$, weil die Zeichen gleich sind.

§. 19. Die Multiplication mit zusammengesetzten Größen geschieht beinahe eben so, als mit Zahlen. Nämlich man multiplicirt mit jedem Gliede des einen Factors alle Glieder des andern Factors, schreibt sie mit ihren Zeichen hin, und addirt sie endlich zusammen.

Z. B. 9—2 multiplicirt mit 5—3, ist also anzufangen:

$$\begin{array}{r} 9-2 \\ 5-3 \\ \hline -27+6 \\ 45-10 \\ \hline \text{Product } 45-37+6 \end{array}$$

Und $(a+2b+c)$ mal $a = \begin{array}{r} a+2b+c \\ a \\ \hline \text{Product } aa+2ab+ac \end{array}$

$$(a+2b+c) \,.\, (a-b) = \begin{array}{r} a+2b+c \\ a-b \\ \hline -ab-2bb-bc \\ aa+2ab+ac \\ \hline \text{Product } aa+ab-2bb+ac-bc \end{array}$$

Mit 3 Factoren: $\begin{array}{r} a+2b+c \\ a-2b-c \\ \hline -ac-2bc-cc \\ -2ab-4bb-2bc \\ aa+2ab+ac \\ \hline aa-4bb-4bc-cc \end{array} = \text{Product.}$

§. 20. Man pflegt die Producte gern kürzer zu schreiben, wenn es angeht und vortheilhaft ist. Ein Abkürzen ist z. B. dann möglich, wenn in allen, oder einigen Gliedern einerlei Buchstaben oder Factoren vorkommen. Diese sind dann als allgemeine Factoren anzusehen, und die durch sie multiplicirten Größen in eine Klammer zu schließen. Z. B.

$aa - 3ab$ kann auch heißen: $(a-3b) \,.\, a$, weil a ein gemeinschaftlicher Factor in beiden Gliedern ist.

Anstatt $aabd + 2aab - 5abd$ steht kürzer $(ad + 2a - 5d) . ab$., weil ab in allen Gliedern als gemeinschaftlicher Factor ist.

Anstatt $3aac - 9abd + 18a$ schreibt man lieber $(ac - 3bd + 6) . 3a$, weil $3a$ in allen Gliedern ist.

Anstatt $5pqx - 30qx + 25px$, lieber
$(pq - 6q + 5p) . 5x$.

Man kann die erste Schreibart wieder herstellen, wenn man die Größe in der Klammer mit der hinter derselben multiplicirt; als

$$\begin{array}{r} pq - 6q + 5p \\ 5x \\ \hline 5pqx - 30qx + 25px \end{array}$$

Dies Abkürzen und Verändern einer Größe ist sehr nützlich, und wird durch Übung und Nachdenken bald geläufig.

§. 21. Wenn eine Größe mehrere Male mit sich multiplicirt wird, so schreibt man sie entweder eben so oft neben einander hin, oder man bemerkt rechts neben der Größe durch eine kleine Zahl, wie oft sie neben einander stehen sollte. Z. B.

$a = a^1$
$aa = a^2$
$aaa = a^3$
$aaaa = a^4$
a unbestimmte oder gewisse Male $= a^n$

Diese Schreibart ist sehr bequem. Man bemerke aber folgende dabei vorkommende Kunstausdrücke.

Das einfache a, woraus durch die Multiplication alle andere entstehen, heißt **Wurzel**;

die Größen a^2, a^3, a^4, a^n heißen **Dignitäten** oder **Potenzen** von a;

die kleinen Zahlen $1, 2, 3, 4, 5 \ldots\ldots n$ heißen **Exponenten** des a.

Steht keine Zahl am Kopfe einer Größe, so ist die Größe selbst noch in der ersten Potenz, und also ihr Exponent $= 1$.

Die Wurzel oder die radix wird durch das Zeichen $\sqrt{\ }$ angezeigt. So ist $\sqrt{aa}$ oder $\sqrt{a^2} = a$; d. h. die Wurzel aus a^2 ist a.

Die Wurzel erhält verschiedene Namen; so heißt sie z. B. Quadratwurzel ($\sqrt{}$), wenn die Größe, deren Wurzel sie ist, in der zweiten Potenz; Kubikwurzel ($\sqrt[3]{}$), wenn die Größe in der 3ten Potenz steht u. s. w.; und so ist

a von a^2 die Quadratwurzel $= \sqrt{}$
von a^3 die Kubikwurzel $= \sqrt[3]{}$
von a^4 die vierte Wurzel $= \sqrt[4]{}$
von a^5 die fünfte Wurzel $= \sqrt[5]{}$ rc.

§. 22. Die Potenzen können addirt und subtrahirt werden. Z. B. $2a^2$ und noch $4a^2$ sind $= 6a^2$;

$$2b^2\,x^3 + 5b^2\,x^3 = 7b^2\,x^3$$

Und wenn die Zeichen verschieden sind:

$$\begin{array}{rl} & +4x^3\,z^2 \\ \text{und} & -2x^3\,z^2 \\ \hline \text{Summe} & +2x^3\,z^2 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{oder von} & +4x^3\,z^2 \\ \text{ab} & -2x^3\,z^2 \\ & + \\ \hline \text{Rest} & +6x^3\,z^2 \end{array}$$

§. 23. Diese Addition und Subtraction ist nur bei einerlei Buchstaben und gleichen Potenzen möglich, und wird unter den Coëfficienten abgemacht.

Sind die Exponenten nicht gleich, so wird die Addition oder Subtraction bloß angezeigt. Z. B. zu $4x^3$ sollen $3x^2$ addirt werden, so ist die Summe $= 4x^3 + 3x^2$.

Größen, die durch die Multiplication verbunden sind, gelten nur für eine Größe (oder ein Glied).

§. 24. Die Multiplication der Potenzen geschieht dadurch, daß man die Exponenten gleichartiger Größen addirt. Z. B.

$$a^2 \cdot a^3 = a^{2+3} = a^5; \text{ denn } \begin{array}{rl} & a^2 = aa \\ \text{und} & a^3 = aaa \\ \hline & aaaaa \text{ oder } a^5 \end{array}$$

$$-x^3 \cdot x^4 = x^7; \text{ und } x^n \cdot x^m = x^{n+m}$$

$$x^2\,y^2 \cdot x^3\,y^4 = x^{2+3}\;y^{2+4} = x^5 \cdot y^6$$

§. 25. Ungleichnamige Potenzen setzt man bloß neben einander, und das Multiplicationszeichen etwa zwischen sie. Z. B. $x^5 \cdot z^2$.

Auch bei größeren Exempeln kommt die Multiplication mit Potenzen vor. Z. B.

$$\begin{array}{r} px + ax^2 - a^2 \\ x^2 + a^2 \\ \hline a^2px + a^3x^2 - a^4 \\ px^3 + ax^4 - a^2x^2 \qquad\qquad \\ \hline \end{array}$$

Product $px^3 + a^2px + ax^4 + a^3x^2 - a^2x^2 - a^4$.

§. 26. Gegebene Potenzen werden zu höheren erhoben, wenn man ihre Exponenten mit der Größe multiplicirt, zu welcher Potenz sie erhoben werden sollen. Z. B.

a^2 in die dritte Potenz erhoben, ist $= a^{2 \cdot 3} = a^6$

z^4 in die zweite Potenz erhoben, ist $= z^{4 \cdot 2} = z^8$

b^m in die nte Potenz erhoben, ist $= b^{m \cdot n} = b^{mn}$

§. 27. Wenn Größen, die durch die Multiplication mit einander verbunden sind, zu Potenzen erhoben werden sollen, so wird jede Größe mit dem gegebenen Exponenten bezeichnet. Z. B.

$(ax)^2$ heißt: a mit x multiplicirt, und das Product wieder mit sich selbst multiplicirt, oder ins Quadrat erhoben. Dies ist gleich a^2x^2.

Es sey $a = 2$, $x = 3$; so ist $(ax)^2 = (2.3)^2 = 6^2 = 36$ und $a^2.x^2 = 2^2.3^2 = 2.2.3.3 = 4.9 = 36$.

Eben so wird $(axy)^3 = a^3x^3y^3$.

§. 28. Jede zusammengesetzte Größe, die zu irgend einer Potenz erhoben werden soll, muß in eine Klammer geschlossen seyn. Z. B. $9 + 3$ in der 3ten Potenz, ist $(9+3)^3$; $(a+b)^2$.

Löst man die Aufgabe, so fällt die Klammer weg.

So ist $(9+3)^3 = 12^3 = 12 . 12 . 12 = 1728$.

Oder $(a+b)^2 = $
$$\begin{array}{r} a+b \\ a+b \\ \hline ab+b^2 \\ a^2+ab \qquad \\ \hline \end{array}$$

Product $a^2 + 2ab + b^2 =$ der 2ten Potenz, oder $(a+b)^2$.

Oder $(a-b)^2 = $
$$\begin{array}{r} a-b \\ a-b \\ \hline -ab+b^2 \\ a^2-ab \qquad \\ \hline \end{array}$$

$a^2 - 2ab + b^2 =$ der 2ten Potenz von $a-b$.

Schriebe

Schriebe man anstatt $(a+b)^2$ nur $a+b^2$, so sollte nur b ins Quadrat erhoben werden, und die Antwort würde seyn $a+bb$.

Division.

§. 29. Das Divisionszeichen besteht in einem Querstrich zwischen den Größen, oder in zwei über einander stehenden Puncten. So heißt $\frac{a}{b}$ oder $a : b$ so viel, als: die Größe a soll durch b getheilt werden. Die erstere Schreibart ist mit Recht die gewöhnlichste. Divisor und Dividendus stehen allemal in einem Bruch, in welchem der erstere der Nenner ist. Soll 48 durch 6 getheilt werden, so zeigt dies der Mathematiker durch den Bruch $\frac{48}{6}$ an. Und $a^2 + 2ab + b^2$ dividirt durch $a + b$ steht so:

$$\frac{a^2 + 2ab + b^2}{a + b}$$

§. 30. Sind gleichnamige Größen im Divisor und Dividendus, so geschieht die Division durch Wegnahme der gleichnamigen Größen. Z. B.

$\frac{abc}{c} = ab$, weil c im Divisor sich gegen c im Dividendus hebt. Der Quotient ist ab.

$\frac{abc}{bc} = a$, weil bc sich heben läßt.

$\frac{6 . 7 . 8}{8} = 6 . 7$, weil 8 sich heben läßt.

§. 31. Da die Division eine entgegengesetzte Multiplication ist, so gilt auch hier die Regel:

Einerlei Zeichen geben +; verschiedene Zeichen geben − im Quotienten.

Z. B. $\frac{bc}{c} = +b$; $\frac{-bc}{-c} = +b$; $\frac{+bc}{-c} = -b$; $\frac{-bc}{+c} = -b$.

§. 32. Wenn Divisor und Dividendus gleich groß sind, so ist der Quotient $= 1$.

$$\frac{a}{a} = 1;\quad \frac{+a}{-a} = -1;\quad \frac{-a}{-a} = 1;\quad \frac{-5}{+5} = -1.$$

Wenn gleich 1 nicht dividirt, so hat doch ihr Zeichen auf den Quotienten den gewöhnlichen Einfluß.

$$\frac{+4}{-1} = -4;\quad \frac{-5a^2b}{-1} = +5a^2b;\quad \frac{+3ab}{+1} = +3ab.$$

§. 33. Zusammengesetzte Größen werden fast eben so dividirt, als gemeine Zahlen.

Es sey $4abc - 16cda$ durch $2a$ zu theilen. Man stelle die Größen folgendermaßen:

Divisor. Dividend. Quotient.

$2a)\ 4abc - 16cda \,||\, 2bc - 8cd$, od. auch $(b - 4d) . 2c$
ab $4abc$ siehe §. 20.

Rest $-16cda$
ab $-16cda$

Rest 0

Man dividirt mit $2a$ in $4abc$; a hebt sich gegen a, und 2 in $4bc = 2bc$, welches das erste Glied im Quotienten ist. Multiplicire $2bc$ mit $2a$, schreibe das Product $4abc$ unter den gleichnamigen Theil des Dividendus, und ziehe ab. Den Rest, hier $= -16cda$, setze herunter; dividire mit $2a$ in $-16cda$; a fällt gegen a weg, und 2 in $16cd = -8cd$, welches das zweite Glied des Quotienten ist. Hiermit den Divisor multiplicirt, giebt $-16cda$, und alles geht auf.

Ferner: Divis. Dividend. Quotient.

$-4cg)\ -16gcd + 4c^2g^2 - 8cg \,||\, +4d - cg + 2$
ab $-16gcd$

Rest $+4c^2g^2 - 8cg$
ab $+4c^2g^2$

Rest $-8cg$
ab $-8cg$

Rest 0.

Man hätte denselben Quotienten bekommen, wenn man die gleichnamigen Buchstaben oder Größen des Divisors

und

und Dividenden ausgestrichen oder aufgehoben hätte. Denn die Glieder des Quotienten bleiben dann allein stehen. Z. B.

$$\frac{-\overset{4}{\cancel{16}}\,\cancel{g}\cancel{c}d + \cancel{4}\,\cancel{c}cg\cancel{g} - \overset{2}{\cancel{8}}\,\cancel{c}\cancel{g}}{-\cancel{4}\cancel{c}\cancel{g}} = +4d - cg + 2$$

wobei man aber immer auf die Zeichen zu achten hat.

§. 34. Wenn der Dividend eine einfache, der Divisor eine zusammengesetzte Größe ist, als 1 dividirt durch $1+a$, so wird die Division bloß angezeigt.

$$\frac{1}{1+a}$$

§. 35. Eben so wird die Division nur angezeigt, wenn sich im Divisor und Dividenden keine gleichnamigen Größen finden. Denn alsdann kann gar nicht wirklich dividirt werden. Z. B.

$$\frac{5a+d}{2g-m}$$

läßt sich nur dann theilen, wenn den Buchstaben Zahlenwerthe untergelegt sind.

§. 36. Folgende Regeln können bei der Division mit zusammengesetzten Größen gute Dienste leisten.

1) Man ordne die Glieder im Divisor, wie im Dividendus, nach einem am häufigsten vorkommenden Buchstaben, und zwar die größten Potenzen voran. Es wäre z. B.

Dividendus $= bbbb + 4abbb + 4aaab + 6aabb + aaaa$,

Divisor $= bb + aa + 2ab$,

so würden sie folgendermaßen zu ordnen seyn:

Dividendus $= aaaa + 4aaab + 6aabb + 4abbb + bbbb$.

Divisor $= aa + 2ab + bb$.

Und mit Potenzzeichen noch kürzer:

$$\frac{a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4}{a^2 + 2ab + b^2}$$

2) Man theile nun das erste Glied des Dividendus durch das erste des Divisors, so erhält man einen Di-

Theil des Quotienten, mit dem man alle Glieder des Divisors multiplicirt und die Producte unter solche Glieder des Dividendus setzt, von denen sie sich abziehen lassen. Mit dem herabgesetzten Reste verfährt man eben so, wodurch man das zweite Glied des Quotienten bekommt. Geht am Ende nicht alles auf, so ist der Rest der Zähler und der Divisor ist der Nenner eines Bruchs, wie bei der Zahlendivision.

3) Wenn wegen der vorkommenden ungleichartigen Glieder zuweilen die Subtraction nicht angeht, so setzt man die ungleichartigen Glieder des Subtrahenden mit verändertem Zeichen als Rest herunter, weil es dann eben so gut ist, als wenn abgezogen wäre.

Zur Übung einige Beispiele:

Divisor. Dividend. Quotient.

$$\begin{array}{ll}
1)\ a+b) & aa+2ab+bb \;||\; a+b \\
 & aa+\ ab \\ \hline
 & +\ ab+bb \\
 & +\ ab+bb \\ \hline
 & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
2)\ a-b-d) & a^2-2ad-b^2+d^2 \;||\; a-d+b \\
 & a^2-\ ad-ab \\
 & \quad + \\ \hline
 & -\ ad-b^2+ab+d^2 \\
 & -\ ad+db \qquad +d^2 \\
 & \quad - \\ \hline
 & \quad -b^2-db+ab \\
 & (\text{besser } ab-db-b^2) \\
 & \quad ab-db-b^2 \\ \hline
 & \quad 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
3)\ 5a+3d) & 15a^2-10ab+9ad-6bd \;||\; 3a-2b \\
 & 15a^2 \qquad +9ad \\ \hline
 & -10ab \qquad -6bd \\
 & -10ab \qquad -6bd \\ \hline
 & \quad 0
\end{array}$$

§. 37. Wenn man mehrere Größen einzeln durch eine dividirt, so kommt eben so viel heraus, als wenn man diese Größen erst addirt, und dann dividirt. Z. B.

$\frac{6}{2}+$

$$\frac{6}{2}+\frac{8}{2}+\frac{10}{2}+\frac{12}{2}=3+4+5+6=18$$

und $\frac{6+8+10+12}{2}=\frac{36}{2}=18.$

also $\frac{a-b}{n}=\frac{a}{n}-\frac{b}{n}$

Größen, welche durch die Addition oder Subtraction mit einander verbunden, und durch eine andere Größe zu dividiren sind, müssen daher einzeln dividirt werden, wenn man ihre Summe nicht theilen kann.

§. 38. Potenzen von einerlei Wurzeln werden durch einander dividirt, indem man ihre Exponenten von einander abzieht. Z. B.

$\frac{a^3}{a^2}=a$; denn $\frac{a^3}{a^2}=\frac{aaa}{aa}=a$. Und $\frac{d^5}{d}=d^4$

$\frac{a^3x^4}{a^2x^2}=ax^2$; $\frac{a^mx^n}{a^nx^r}=a^{m-n}x^{n-r}$

$\frac{a^5}{a^7}=a^{5-7}=a^{-2}$, wobei der Exponent negativ wird, weil der Nenner eine höhere Potenz hat, als der Zähler.

§. 39. Weil es negative Exponenten giebt, so kann folgende Reihe der Potenzen statt finden:

$a^n \ldots\ldots a^4, a^3, a^2, a, a^0, a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, a^{-4} \ldots\ldots a^{-n}$

Eine Größe in der Potenz 0 ist allemal $=1$, also $a^0=1$. Von a^{-1} an soll a noch a mal kleiner werden, welches geschieht, wenn der Divisor a mal größer wird; daher kann auch die Reihe

$a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, a^{-n}$

also aussehen $\frac{1}{a}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a^3}, \frac{1}{a^n}$, was wohl zu merken ist.

Dividirt man $\frac{a^4x^ry^5}{a^4x^ry}$, so ist der Quotient $a^{4-4}x^{r-r}y^{5-1}$ $=a^0x^0y^4=1 \cdot 1 \cdot y^4=y^4$.

§. 40.

§. 40. Potenzen werden erniedrigt, wenn man ihre Exponenten dividirt. — Gesetzt man wollte aus a^{12} die dreifache oder $\sqrt[3]{}$ ziehen, so wäre dies

$$a^{\frac{12}{3}} = a^4$$

$\sqrt[6]{x^{12}} = x^{\frac{12}{6}} = x^2$; $\sqrt[2]{b^4} = b^{\frac{4}{2}} = b^2$; $\sqrt[3]{g^2} = g^{\frac{2}{3}}$;

$\sqrt[m]{z} = z^{\frac{1}{m}}$, und das Wurzelzeichen kann also wegbleiben, wenn man den Exponenten der Wurzel unter den Exponenten der Potenz als Nenner desselben setzt. Und eine Größe $a^{\frac{n}{m}}$ kann auch $\sqrt[m]{a^n}$ geschrieben werden, welches der umgekehrte Fall vom vorigen ist. $a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$; $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$.

§. 41. Aus Größen, welche durch die Multiplication verbunden sind, zieht man die Wurzel, indem man die Wurzel aus jeder besonders zieht. Z. B.

$$\sqrt[3]{a^2 x^4 z} = a^{\frac{2}{3}} x^{\frac{4}{3}} z^{\frac{1}{3}}$$

$$\sqrt[3]{a^6 x^9 y^{12}} = a^{\frac{6}{3}} x^{\frac{9}{3}} y^{\frac{12}{3}} = a^2 x^3 y^4$$

Nun wird man auch folgendes Exempel dividiren können.

$$\begin{array}{lll}
\text{Divisor.} & \text{Dividendus.} & \text{Quotient.} \\
a^2+b^2) & a^6+b^6 & \| \; a^4 - a^2 b^2 + b^4 \\
 & a^6 + a^4 b^2 & \\
 & - & \\
\hline
 & \text{Rest} \; -a^4 b^2 + b^6 & \\
 & -a^4 b^2 - a^2 b^4 & \\
 & + & \\
\hline
 & \text{Rest} \; +a^2 b^4 + b^6 & \\
 & +a^2 b^4 + b^6 & \\
\hline
 & 0 &
\end{array}$$

wobei man sich erinnern muß, daß Potenzen durch die Addition ihrer Exponenten multiplicirt, und durch die Subtraction ihrer Exponenten dividirt werden.

II. Decimalbruchrechnung.

§. 42. Unter Decimalbrüchen versteht man solche Brüche, deren Nenner 10, 100, 1000, 10000 ꝛc., also Potenzen der 10 sind.

Nach unserm Zahlensystem gilt eine Zahl 10 mal weniger, wenn sie um eine Stelle (Klasse) weiter rechts gerückt wird. Schreibt man nun rechts neben der Klasse der Einer noch eine Zahl, so muß sie Zehntel der Einer gelten; eine zweite Zahl wird wieder Zehntel der vorigen, oder Hundertel der Einer gelten ꝛc. Da, wo die Einer aufhören, wird ein Komma gemacht. So heißt 2,5 so viel als 2 Ganze und $\frac{5}{10}$; 2,57 heißt: 2 Ganze 5 Zehntel 7 Einhundertel oder 2 Ganze $\frac{57}{100}$; 2,579 heißt: $2\frac{579}{1000}$; $25{,}79 = 25\frac{79}{100}$; $257{,}9 = 257\frac{9}{10}$; $0{,}2579 = \frac{2579}{10000}$, und die Null an dem Komma links zeigt an, daß hier keine Ganze vorhanden.

§. 43. Der Nenner eines Decimalbruchs wird nicht hingeschrieben, weil er allemal aus einer 1 mit so vielen Nullen, als der Decimalbruch Ziffern hat, besteht. Z. B. in dem Bruche 0,57 sind zwei Decimalbruchziffern (57), folglich ist ihr Nenner eine 1 mit 2 Nullen, also 100; und 3,14159 heißt $3\frac{14159}{100000}$.

§. 44. Die Decimalbrüche sind ihrer großen Bequemlichkeit wegen in allen mathematischen Schriften und Rechnungen gebräuchlich, und ihre Kenntniß daher jedem, der nur einigermaßen etwas darin leisten will, unentbehrlich. Welche wichtige Vortheile sie gewähren, wird man aus dem Folgenden ersehen.

§. 45. Man kann jeden Bruch in einen Decimalbruch verwandeln, indem man mit dem Nenner in den Zähler dividirt, und, um dies zu können, letzterem so oft eine Null anhängt, als noch ein Rest bleibt, oder (weil dieser bei manchen Brüchen immerfort bleibt), so lange, als man will.

1) Es sey z. B. $\frac{3}{4}$ in einen Decimalbruch zu verwandeln.

4) in 3 || 0,75 d. h. $\frac{3}{4} = 0{,}75 = \frac{75}{100}$

Rest 30
28

Rest 20
20

2) Wie

2) Wie steht der Bruch $\frac{4}{5}$ im Decimalbruch?

5) 4 || 0,8 d. h. $\frac{4}{5} = 0{,}8 = \frac{8}{10}$

Rest 40
40

3) Wie lautet der Bruch $\frac{7}{4}$ im Decimalbruch?

4) 7 || 1,75 = $\frac{7}{4}$ oder $1\frac{3}{4} = 1\frac{75}{100}$

4
Rest 30
28
20
20

§. 46. Aus den wenigen Beispielen wird man bemerken, daß bei jedem echten Bruch, der in einen Decimalbruch verwandelt wird, die erste Ziffer im Quotienten eine Null ist, ein Zeichen, daß kein Ganzes darinnen steckt; bei einem unechten Bruch ist die erste Ziffer im Quotienten wenigstens eine 1, weil er größer als 1 ist.

§. 47. Selbst wenn jede andere ganze Zahl in eine ganze Zahl zu dividiren ist, und endlich ein Rest bleibt, so hängt man demselben eine oder mehrere Nullen nach und nach an, macht im Quotienten ein Komma, und dividirt fort. Die alsdann noch kommenden Ziffern im Quotienten sind Decimalbrüche. Z. B. $\frac{46507}{8}$

8) 46507 || 5813,375 = $5813\frac{375}{1000}$

40
65
64
10
8
27
24
3|0 mit angehängten Nullen,
24
60
56
40
40

§. 48. Oft geht die Division nie auf, wenn auch noch so viele Nullen angehängt würden. Dann ist der kommende Decimalbruch nur eine Annäherung, die mit jeder folgenden Decimalstelle 10 mal genauer wird. Z. B. 7 in 40, oder $\frac{40}{7}$ giebt 5,71428...., wobei das Fehlende noch kein $\frac{1}{100000}$ beträgt. Je mehr Decimalstellen, je genauer, und es hängt von dem Grade der geforderten Genauigkeit ab, ob man mit einigen oder mehrern zufrieden seyn kann. Fünf bis sieben Decimalstellen werden höchstens gebraucht, oft nur einige.

§. 49. Bei der **Addition** und **Subtraction** gilt als Regel:

> **Schreibe Ganze unter Ganze, Zehntel unter Zehntel u. s. w. so, daß das Komma stets unter dem Komma zu stehen kommt, und addire oder subtrahire, wie bei gemeinen Zahlen, von der Rechten zur Linken.** Z. B. 32,5 + 6,97 + 120 + 0,75 steht also

	32,5	ferner	3,361
	6,97		27,0001
	120,		142,3
	0,75		0,01
Summe	160,22	Summe	172,6711

In der Summe oder dem Rest steht das Komma unter den übrigen Komma's in einer senkrechten Reihe.

§. 50. Kommen entgegengesetzte Größen zu addiren vor, so werden sie, wie bei der Buchstabenrechnung behandelt, d. h. addirt, wenn sie gleiche Zeichen, oder mit einander ausgeglichen, wenn sie verschiedene Zeichen haben.

+ 4,5	− 3,29	+ 3,29	− 3,29	+ 52
+ 7,9	− 7,01	− 7,01	+ 7,01	− 6,42
+ 12,4	− 10,3	− 3,72	+ 3,72	+ 45,58

§. 51. Die **Subtraction der Decimalbrüche** geschieht wie bei der gemeinen Subtraction ganzer Zahlen. Nur vergesse man die §. 49 gegebene Regel nicht.

Von 78,31	Von 10,0001	Von 1230
ab 60,42	ab 5,5	ab 0,2
Rest 17,89	Rest 4,5001	Rest 1229,8

Wenn

Wenn, wie im 3ten Exempel, über einer Decimalstelle des Subtrahenden keine Decimalstelle des Minuenden ist, so denkt man sich eine Null hin und borgt linker Hand eine 1, wie gewöhnlich.

§. 52. Mit entgegengesetzten Größen wird hier eben so, wie in andern Rechnungen, subtrahirt.

Von $-$ 5,0321	Von $+$ 27,03	Von $-$ 27,03
ab $+$ 2,1432	ab $+$ 6,978	ab $+$ 6,978
$-$	$-$	$-$
Rest $-$ 7,1753	Rest $+$ 20,052	Rest $-$ 34,008

§. 53. Beim Multipliciren der Decimalbrüche gilt die allgemeine Regel:

Multiplicire beide Factoren, ohne dich um das Komma zu bekümmern, als wenn es gemeine Zahlen wären; vom Product streiche rechts so viel Zahlzeichen ab, als Decimalstellen in beiden Factoren, zusammen genommen, sind.

Z. B. 4,6 mal 6 ist = 4,6
6

Product 27,6, denn beide Factoren haben nur 1 Decimalstelle.

32,54 . 8 = 32,54
8

Product 260,32, denn beide haben 2 Decimalstellen.

7,124 . 0,2 = 7,124
2

Product 1,4248, denn beide zusammen haben 4 Decimalziffern.

12,34 . 0,123 = 12,34
123

3702
2468
1234

Product 1,51782, beide zusammen haben 5 Decimalstellen.

4,231

$$
\begin{array}{r}
4{,}231 \cdot 2{,}001 = 4{,}231 \\
2{,}001 \\
\hline
4\,231 \\
8\,462 \\
\hline
\end{array}
$$

Product 8,466 231, beide zusammen haben 6 Decimalzeichen.

§. 54. Hat das Product nicht so viel Ziffern, als nach der Regel abgestrichen werden sollten, so fülle man die fehlenden Stellen mit Nullen aus, und an die Stelle der Einer oder Ganzen setze man auch eine Null, und hinter letztere das Komma. Z. B.

$$
\begin{array}{r}
0{,}008 \cdot 0{,}23 = 0{,}0\,08 \\
0{,}23 \\
\hline
24 \\
1\,6 \\
\hline
0{,}001\,84
\end{array}
$$

Das Product 184 kann nicht Ganze seyn, indem beide Factoren zusammen 5 Decimalstellen enthalten, folglich müssen auch 5 Zahlzeichen zu Decimalstellen vom Product durch das Komma abgestrichen werden, und darum sind die drei Nullen nothwendig.

§. 55. Kommen entgegengesetzte Größen zu multipliciren vor, so gilt auch hier die Regel:

Einerlei Zeichen geben dem Producte +; verschiedene geben ihm —.

$$
\begin{array}{rl}
& +2{,}8 \cdot +4{,}7 = +13{,}16 \\
\text{und} & +2{,}8 \cdot -4{,}7 = -13{,}16 \\
& -2{,}8 \cdot -4{,}7 = +13{,}16 \\
& -2{,}8 \cdot +4{,}7 = -13{,}16.
\end{array}
$$

§. 56. Die verschiedenen Regeln beim Dividiren der Decimalbrüche lassen sich in eine einzige zusammen fassen:

Mache den Divisor und Dividendus gleichnamig, d. h. gieb jedem gleichviel Decimalstellen (welches durch Anhängen von Nullen geschieht) und dividire dann, wie mit gemeinen Zahlen; der aus beiden folgende Quotient besteht aus Ganzen.

Es sey 65,19 durch 1,23 zu dividiren. Hier haben beide Größen schon gleichviel Decimalstellen, folglich enthält der Quotient Ganze, und die Aufgabe ist folgende:

```
123) 6519 || 53 Ganze
     615
     ---
      369
      369
      ---
        0
```

Wenn $\frac{12,236}{2,3}$, so hänge man dem Divisor (2,3) noch zwei Nullen an, damit er dem Dividendus in der Zahl der Decimalziffern gleich sey, und im Quotienten Ganze kommen. Dann ist die Aufgabe:

```
12236
----- = 2300) 12236 || 5,32
 2300         11500
             ------
         Rest  7360
               6900
               ----
                4600
                4600
                ----
```

Nachdem hier mit 2300 in 12236 dividirt worden ist, und der Quotient 5 Ganze enthielt, blieb Rest 736, dem man nach §. 47 nach und nach noch mehrere Nullen anhängt, um den Quotienten genauer in Decimalbrüchen zu bekommen, welcher = 5,32 ist.

Es sey 504,3 durch 1,23 zu dividiren. Hier muß der Dividendus eine Null bekommen, damit er gleichnamig werde, und dann ist die Aufgabe eigentlich:

$$\frac{50430}{123} = 410 \text{ Ganze.}$$

Wenn 492 durch 1,23 zu dividiren ist, so heißt dies

$$\frac{49200}{123} = 400 \text{ Ganze.}$$

§. 57. Wenn der Divisor eine ganze Zahl ohne Bruch ist, so ist das Gleichnamigmachen unnöthig, weil man leicht übersieht, wo die Ganzen im Quotienten aufhören.

hören. Z. B. $\frac{21{,}468}{4} = 5{,}367$; denn wenn man 4 in 21 dividirt, so können nur 5 Ganze kommen.

§. 58. Einerlei Zeichen, durch einander dividirt, geben +; verschiedene, — im Quotienten.

$\frac{+3{,}2}{+1{,}6} = +2$; $\frac{+3{,}2}{-1{,}6} = -2$; $\frac{-3{,}2}{+1{,}6} = -2$; $\frac{-3{,}2}{-1{,}6} = +2$.

Die Division der Decimalbrüche ist von der mit gemeinen Zahlen nur dadurch unterschieden, daß man durch die §. 56. gegebene Regel zu bestimmen sucht, wo die Ganzen aufhören, also, wohin das Komma im Quotienten zu sezzen ist.

§. 59. Decimalbrüche, die nicht ins Unendliche fortgehen, können in gemeine Brüche verwandelt werden, wenn man Zähler und Nenner mit einerlei Zahl dividirt, Z. B. $3{,}75 = 3\frac{75}{100}$, und hebt man den Bruch durch 25, so erhält man $3\frac{3}{4}$. Gehen die Decimalbrüche aber in's Unendliche fort, so mögte dies Verfahren nicht immer zuverlässig genug seyn.

III. Von den Verhältnissen und Proportionen.

§. 60. Zwei Größen einerlei Art stehen zu einander in einem Verhältniß. Sieht man dabei auf den Umstand, wie viel kleiner oder größer die eine sey, so heißt ihr Verhältniß arithmetisch; untersucht man aber, wie viel mal die eine Größe in der andern enthalten sey, so heißt das Verhältniß geometrisch. Das Zeichen des arithmetischen Verhältnisses ist sehr passend das Subtractionszeichen (—), weil die Differenz beider Größen oder Glieder hier die Hauptsache ist; das Zeichen eines geometrischen Verhältnisses ist das Divisionszeichen (:); die Zahl, welche bestimmt, wie oft das eine Glied in dem andern enthalten ist, heißt Exponent oder Quotient. So sind

Arithmetische Verhältnisse.		Geometrische Verhältnisse.	
6 — 3, Differenz	= 3	6 : 3, Exponent	= 2
3 — 6, —	= — 3	12 : 6, —	= 2
15 — 10, —	= 5	15 : 10, —	= 1,5
10 — 15, —	= — 5	10 : 15 —	$= \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$

Der Unterschied der arithmetischen und geometrischen Verhältnisse wird aus diesen wenigen Beispielen leicht erkannt werden.

§. 61. Bei dem arithmetischen Verhältnisse kommen 3 Größen vor:

1. die große Zahl. Sie besteht aus der kleinen + der Differenz.
2. die kleinere Zahl. Sie ist = der großen — der Differenz.
3. die Differenz. Sie ist gleich der großen — der kleinen.

Denn a sey die große, b die kleine, d die Differenz, so ist

$a = b + d$ in Zahlen $15 = 10 + 5$
$b = a - d$ $\qquad 10 = 15 - 5$
$d = a - b$ $\qquad 5 = 15 - 10$

§. 62. Ein geometrisches Verhältniß ist als ein Bruch anzusehen, dessen Werth der Exponent ist. Denn

$$12 : 6 = \frac{12}{6} = 2 = \text{Werth oder Exponenten.}$$

Wenn man Zähler und Nenner eines Bruchs mit einerlei Zahl multiplicirt oder dividirt, so wird das Verhältniß nicht geändert, und der Exponent derselbe bleiben. Denn

$$\frac{12}{6} = 2 \text{ und } \frac{12 \cdot 3}{6 \cdot 3} = \frac{36}{18} = 2. \text{ Oder } \frac{12 : 3}{6 : 3} = \frac{4}{2} = 2.$$

Weil kleine Zahlen faßlicher sind, als große, so pflegt man gern die durch große Zahlen ausgedrückten Verhältnisse durch die Division mit einerlei Zahl auf kleinere Zahlen zu bringen. Z. B. $\frac{96}{144}$ ist nicht so faßlich, als $\frac{2}{3}$, obgleich beide Verhältnisse gleich sind.

§. 63. Im geometrischen Verhältniß sind auch 3 Größen zu merken:

der Zähler a; der Nenner b; der Exponent m,

$$a = bm \quad \text{in Zahlen} \quad 144 = 48 \,.\, 3$$
$$b = \frac{a}{m} \qquad 48 = \frac{144}{3}$$
$$m = \frac{a}{b} \qquad 3 = \frac{144}{48}$$

a = dem Product aus dem Nenner und Exponenten;
b = dem Zähler dividirt durch den Exponenten;
m = dem Zähler dividirt durch den Nenner.

§. 64. Zwei gleiche arithmetische Verhältnisse bilden eine arithmetische Proportion. Z. B.

$$\left.\begin{array}{l} 5 - 7 = 9 - 11 \\ 7 - 5 = 11 - 9 \end{array}\right\} \text{bei allen ist die Differenz} = 2;$$

folglich ist $5 - 7 = 9 - 11$ eine arithmetische Proportion, so wie auch $a - b = c - g$, wenn beide Verhältnisse einerlei Differenz haben.

Kann das zweite Glied vom ersten abgezogen werden, so ist es kleiner, und das Verhältniß

$$7 - 5 = 7 - (7 - 2) \text{ oder } a - b = a - (a - d).$$

Ist das erste Glied das kleinere, so wird das Verhältniß

$$5 - 7 = 5 - (5 + 2) \text{ oder } a - b = a - (a + d).$$

Da das auch im 2ten Verhältniß, dessen erstes Glied b seyn soll, der Fall ist, so kann eine arithmetische Proportion allgemein auch so ausgedrückt werden:

Erstes Glied. Zweites. Drittes. Viertes.

$$a - (a - d) = b - (b - d)$$
$$\text{oder } a - (a + d) = b - (b + d).$$

§. 65. Jede Proportion besteht demnach aus 4 Gliedern. Wenn das 3te Glied dem 2ten nicht gleich ist, so heißt die Proportion discret; ist es aber ihm gleich, so heißt sie stetig.

$$\left.\begin{array}{l} \text{So ist } 3 - 4 = 9 - 10 \text{ eine discrete} \\ \text{und } 3 - 4 = 4 - 5 \text{ eine stetige} \end{array}\right\} \text{Proportion.}$$

Für die stetige arithmetische Proportion paßt der allgemeine Ausdruck

$$a - (a + d) = (a + d) - (a + 2d)$$
$$\text{oder } a - (a - d) = (a - d) - (a - 2d).$$

§. 66. In jeder arithmetischen Proportion ist die Summe der beiden äußersten Glieder gleich der Summe

der

der beiden mittelsten. Dieses Gleichseyn ist ein untriegliches Kennzeichen einer arithmetischen Proportion. In den Proportionen

$8 - 11 = 12 - 15$ ist $8 + 15 = 11 + 12 = 23$
$a - a + d = b - (b + d)$ ist $a + b + d = a + d + b$.

§. 67. Die Glieder einer arithmetischen Proportion sind mancherlei Versetzungen fähig. Z. B.

$8 - 10 = 16 - 18$
$10 - 8 = 18 - 16$
$16 - 18 = 8 - 10$
$18 - 16 = 10 - 8.$

Daher kann jedes Glied zum letzten gemacht und leicht gefunden werden. Denn zieht man das 1ste Glied von der Summe der beiden mittelsten ab, so bleibt im Rest das letzte Glied. Die 4 Glieder mögen allgemein a, b, c, g heißen, so ist

das letzte $g = (b + c) - a$
das erste $a = (b + c) - g$
das dritte $c = (a + g) - b$
das zweite $b = (a + g) - c$.

§. 68. Weil in der stetigen Proportion das 3te Glied dem zweiten gleich ist, so ist es die Hälfte von der Summe der beiden äußern.

$a - b = b - c$; dann ist $a + c = 2b$; also $\frac{a + c}{2} = b$.

Man nennt das 2te Glied einer solchen Proportion auch das arithmetische Mittel, und bedient sich dessen oft, wenn vom mittlern Werthe oder Durchschnitt die Rede ist. Z. B. In einem Jahre kostete der Scheffel Korn 2 Rthlr. bis 3 Rthlr., so wird der mittlere Preis also gefunden:

$\frac{3 + 2}{2} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$ Rthlr.

§. 69. Mehrere zusammengesetzte arithmetische stetige Proportionen bilden eine arithmetische Progression. Z. B. $2 - 4 = 4 - 6$; $4 - 6 = 6 - 8$; $6 - 8 = 8 - 10$; $8 - 10 = 10 - 12$. Die Glieder derselben sind 2, 4, 6, 8, 10, 12.

In allgemeinen Zeichen a, a + d, a + 2d, a + a + 4d, a + 5d, wobei leicht bemerkt wird, daß die D ferenz d stets um eins geringer ist, als die Anzahl vorhergehenden Glieder. Z. B. das 3te Glied ist = a + das 6ste ist = a + 5d.

§. 70. Wenn das erste Glied a einer arithmetisch Progression und die Differenz d bekannt sind, so k daraus jedes verlangte Glied n gefunden werden. zeichnet n ein gewisses Glied, so besteht dieses Glied n §. 69. aus a + (n − 1) d; nun kann dasselbe immer das letzte angesehen werden, welches wir z nennen woll also ist

$$z = a + (n - 1)\,d$$

worin n die Anzahl der Glieder bedeutet.

§. 71. In der arithmetischen Progression sind de nach 4 Größen zu merken; wenn 3 von ihnen bek sind, so findet man jedesmal die 4te durch Rechnung.

a, das erste Glied ist $= z - (n - 1)\,d$

z das letzte $= a + (n - 1)\,d$

d die Differenz $= \dfrac{z - a}{n - 1}$

n die Anzahl der Glieder $= \dfrac{z - a + d}{d}$

§. 72. Wenn man zwei von den Enden gleich w abstehende Glieder addirt, so bekommt man aus je Paar einerlei Summe. Z. B.

$$3, 5, 7, 9, 11, 13. \quad \text{Hierin ist} \left.\begin{array}{l} 3 + 13 \\ 5 + 11 \\ 7 + 9 \end{array}\right\} = 16$$

In $a,\ a + d,\ a + 2d,\ a + 3d,\ a + 4d,\ a + 5d$

$$\text{ist ebenfalls} \left.\begin{array}{l} a + a + 5d \\ a + d + a + 4d \\ a + 2d + a + 3d \end{array}\right\} = 2a + 5d.$$

§. 73. Hierauf gründet sich eine vortheilhafte Su mirung einer arithmetischen Progression:

D

Dividire die Anzahl der Glieder n durch 2, so erhält man Paare $= \frac{n}{2}$; addire das erste und letzte Glied $a+z$, so erhält man den Werth eines Paars; dieser Werth, multiplicirt mit der Anzahl der Paare $\frac{n}{2}$, giebt im Product die Summe S, und also ist

$$S = \frac{n}{2} \cdot (a+z) \text{ oder } \frac{n \cdot (a+z)}{2}$$

Diese Formel gilt auch, wenn die Zahl der Glieder ungerade ist.

Weiß man das letzte Glied z nicht, so setze man seinen Werth §. 71. dafür; dann ist

$$S = \frac{n}{2} \cdot 2a + \Big((n-1)\,d\Big)$$

$$\text{oder } an + \frac{(n-1)\,dn}{2}$$

§. 74. Über die Summirung der arithmetischen Progressionen, welche am meisten vorkommen, einige Aufgaben.

1. Wie groß ist die Summe der Zahlen von 1 bis 50?
Hier ist $a = 1$; $n = 50 = z$; $d = 1$.

Und $\frac{n \cdot (a+z}{2} = \frac{50\,(1+50)}{2} = \frac{50 \cdot 51}{2} = 1275$
$=$ Summe.

oder auch $an + \frac{(n-1)\,dn}{2} = 1 \cdot 50 + \frac{(50-1) \cdot 1 \cdot 50}{2}$
$= 50 + \frac{49 \cdot 50}{2} = 50 + \frac{2450}{2} = 50 + 1225$
$= 1275 =$ Summe.

2. Wie viel Schläge thut eine Uhr, die nur voll schlägt, in 24 Stunden?

Da die Uhr nur bis 12 schlägt, so sind in 24 Stunden 2 völlig gleiche Progressionen von 1 bis 12.

Auch hier ist $a = 1$; $n = 12 = z$; $d = 1$.

Die

Die Summe $= \frac{n.(a+z)}{2} = \frac{12.(1+12)}{2} = \frac{12.13}{2}$ $= \frac{156}{2} = 78$ Schläge. Diese 2 Mal genommen $= 156$ Schläge in 24 Stunden. Sollen die Viertelschläge, deren in jeder Stunde 10 sind, mitgezählt werden, so giebt es noch $10.24 = 240$ Schläge, in allem also 396 Schläge.

3. Jemand verkauft 48 Bäume. Für den ersten bekommt er 3 Gr., für den 2ten 5 Gr. und für jeden folgenden 2 Gr. mehr, als für den vorhergehenden. Wie viel löst er für die 48 Bäume?

Hier ist $a = 3$; $n = 48$; $d = 2$, und die Reihe ist $= 3, 5, 7, 9, 11 \ldots\ldots z$, also z unbekannt.

$$S = an + \frac{(n-1)dn}{2} = 3.48 + \frac{(48-1).2.48}{2}$$

$= 144 + 47.48 = 144 + 2256 = 2400$ Gr. $= 100$ Rthlr.

Der letzte Baum $z = a + (n-1)d = 3 + (48-1).2$ $= 3 + 47.2 = 3 + 94 = 97$ Gr.

4. In der obern Reihe Ziegel eines Dachgiebels liegen 2, in der zweiten 5, in jeder folgenden 3 mehr, und in der letzten Reihe 59 Dachziegeln. Wie viel Reihen und wie viel Dachsteine erfordert der Giebel?

Hier ist $a = 2$; $d = 3$; $z = 59$; man sucht n und S.

$$n = \frac{z - a + d}{d} = \frac{59 - 2 + 3}{3} = \frac{60}{3} = 20$$

$$S = \frac{n}{2}.(a+z) = \frac{20}{2}.(2+59) = 10.61.$$

$= 610$ Dachziegeln.

Überhaupt, wenn von den 5 Größen a, d, n, z, s drei gegeben sind, so lassen sich jedesmal die beiden übrigen mittelst folgender Tafel finden.

For-

Formeltafel für die arithmetischen Progressionen.

Z. ?	Gegeben.	Gesucht	Formeln.	
1	a, d, n	z	$z = a + (n-1)d$	Wobei
2	a, d, s	z	$z = -\frac{1}{2}d + \sqrt{(2ds + (a - \frac{1}{2}d)^2)}$	a = erstes } Glied z = letztes } Glied
3	a, n, s	z	$z = \frac{2s}{n} - a$	n = Anz. d. Glied. d = Differenz
4	d, n, s	z	$z = \frac{s}{n} + \frac{(n-1)d}{2}$	s = Summe.
5	a, d, n	s	$s = \frac{1}{2}n(2a + (n-1)d)$	
6	a, d, z	s	$s = \frac{a+z}{2} + \frac{(z+a).(z-a)}{2d}$	
7	a, n, z	s	$s = \frac{1}{2}n(a+z)$	
8	d, n, z	s	$s = \frac{1}{2}n(2z - (n-1)d$	
9	a, n, z	d	$d = \frac{z-a}{n-1}$ Vergleiche §. 71.	
10	a, n, s	d	$d = \frac{2s - 2an}{n(n-1)}$	
11	a, z, s	d	$d = \frac{(z+a).(z-a)}{2s - z - a}$	
12	n, z, s	d	$d = \frac{2nz - 2s}{n(n-1)}$	
13	a, d, z	n	$n = 1 + \frac{z-a}{d}$	
14	a, d, s	n	$n = \frac{d-2a}{2d} + \sqrt{\left(\frac{2s}{d} + \left(\frac{2a-d}{2d}\right)^2\right)}$	
15	a, z, s	n	$n = \frac{2s}{a+z}$	
16	d, z, s	n	$n = \frac{2z+d}{2d} - \sqrt{\left(\left(\frac{2z+d}{2d}\right)^2 - \frac{2s}{d}\right)}$	

No.	Gegeben.	Gesucht	Formeln.
17	d, n, z		$a = z - (n - 1)d$
18	d, n, s		$a = \frac{s}{n} - \frac{(n - 1)d}{2}$
19	d, z, s	a	$a = \frac{1}{2}d + \sqrt{\left((z + \frac{1}{2}d)^2 - 2ds\right)}$
20	n, z, s		$a = \frac{2s}{n} - z.$

Die Formeln No. 2, 14, 16 und 19 werden nur demjenigen völlig verständlich seyn, der sich mit der Ausziehung der Quadratwurzel (wovon weiter unten) bekannt gemacht hat.

§. 75. Von der geometrischen Proportion. Zwei gleiche geometrische Verhältnisse bilden eine geometrische Proportion. Als $2 : 8 = 3 : 12$ sind zwei solche Verhältnisse, die gleiche Exponenten, nämlich 4, haben. Der Exponent kann auch ein Bruch seyn, als $8 : 2 = 12 : 3$, wobei wir uns das erste und 3te Glied als Divisoren denken können, denn es ändert in dem Wesen der Proportion nichts ab, ob man das erste und dritte, oder das zweite und vierte Glied zu Divisoren nimmt; die Exponenten ändern sich gleichmäßig.

Und $\frac{8}{2} = \frac{12}{3}$, Exponenten $= 4$
oder $\frac{2}{8} = \frac{3}{12}$, Exponenten $= \frac{1}{4}$.

Es ist gebräuchlicher, die Divisoren ins 1ste und 3te Glied zu setzen.

§. 76. Die geometrische Proportion ist in allen mathematischen Rechnungen recht wichtig und im gemeinen Rechnungswesen unter dem Namen Regel de tri bekannt, weil aus 3 Gliedern derselben sich jedesmal das 4te durch Rechnung finden läßt.

§. 77. Die 4 Glieder einer geometrischen Proportion haben folgende Einrichtung:

das erste besteht für sich;

das zweite aus dem ersten, multiplicirt mit dem Exponenten;

das dritte wieder für sich;
das vierte aus dem 3ten, multiplicirt mit dem Exponenten.

Folglich kann die Proportion $2 : 8 = 3 : 12$ auch so ausgedrückt werden: $2 : 2 . 4 = 3 : 3 . 4$. Heißt nun das erste Glied a, das 3te b, und der Exponent m, so ist jede geometrische Proportion in allgemeinen Ausdrücken $= a : am = b : bm$.

Wenn das 3te Glied dem 2ten nicht gleich ist, so heißt die Proportion diskret; wenn aber das 2te Glied dem 3ten gleich ist, so heißt die Proportion continuirlich.

Diskrete Proportionen sind z. B. $2 : 8 = 3 : 12$
$a : am = b : bm$
und continuirliche Proportionen sind z. B. $2 : 8 = 8 : 32$
und allgemein ausgedrückt $= a : am = am : amm$
oder am^2
denn $2 : 2 . 4 = 2 . 4 : 2 . 4 . 4$.

§. 78. Bei jeder geometrischen Proportion gilt die Generalregel:

das Product der beiden äußern Glieder ist gleich dem Product der beiden innern oder mittlern Glieder.

In $2 : 8 = 3 : 12$ ist $2 . 12 = 8 . 3 = 24$
In $2 : 8 = 8 : 32$ ist $2 . 32 = 8 . 8 = 64$
In $a : am = b : bm$ ist $abm = amb = abm$
In $a : am = am : amm$ ist $aamm = amam = a^2 m^2$
Ähnliche Glieder sind das 1ste und 3te; das 2te und 4te.

§. 79. Da man $2 : 8 = 3 : 12$ auch schreiben kann $\frac{8}{2} = \frac{12}{3}$, so folgt, daß eine Proportion aus zwei gleichen Brüchen besteht, und also aus zwei gleichgroßen Brüchen auch eine Proportion geformt werden kann. Z. B. $\frac{3}{6} = \frac{7}{14}$ kann stehen $6 : 3 = 14 : 7$, wobei nur dahin zu sehen ist, daß ähnliche Glieder zu Divisoren gemacht werden; z. B. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ kann stehen $a : b = c : d$ und auch $b : a = d : c$; es bleibt immer eine richtige Proportion.

§. 80. Mit jeder Proportion können vielerlei Veränderungen vorgenommen werden.

1) Durch Versetzung der Glieder.

$$2 : 8 = 3 : 12$$
$$8 : 2 = 12 : 3$$
$$12 : 3 = 8 : 2$$
$$3 : 12 = 2 : 8$$

und jedes Glied kann also letztes seyn.

2) Durch Versetzung der mittelsten Glieder.

$$2 : 3 = 8 : 12.$$

3) Durch Addition bei ähnlichen Gliedern.

$am : a + ma = bm : b + mb$, wo beim 2ten und 4ten Glied ma und mb addirt sind.

4) Durch Subtraction bei ähnlichen Gliedern.

$$a - am : am = b - mb : bm.$$

5) Durch Multiplication einer Größe in alle 4 Glieder, oder in 2 Glieder.

$$a : am = b : bm$$
$$ac : acm = bc : bcm$$
$$\left.\begin{array}{l} a : acm = b : bcm \\ ac : acm = b : bm \\ a : am = bc : bcm \\ ac : am = bc : bm \end{array}\right\}$$

wo stets das Product der beiden äußern Glieder dem der beiden innern gleich ist, nämlich abmc.

6) Durch die Division einer Größe in alle 4 Glieder, oder nur in zwei.

$$a : am = b : bm$$
$$\frac{a}{c} : \frac{am}{c} = \frac{b}{c} : \frac{bm}{c}$$
$$\frac{a}{c} : am = \frac{b}{c} : bm$$
$$a : \frac{am}{c} = b : \frac{bm}{c}$$
$$\frac{a}{c} : \frac{am}{c} = b : bm$$
$$a : am = \frac{b}{c} : \frac{bm}{c}$$

7) Durch

7) Durch Erhebung der Glieder zu Potenzen, oder Ausziehung der Wurzeln.

$$a : am = b : bm$$
$$a^2 : a^2m^2 = b^2 : b^2m^2$$
$$\sqrt{a} : \sqrt{am} = \sqrt{b} : \sqrt{bm}$$
$$a : am = b^2 : b^2m \text{ ꝛc.}$$

wobei einerlei Exponenten der Potenzen und der Wurzeln vorausgesetzt werden.

Als Hauptregel für alle Veränderungen von 3 bis 7 bei geometrischen Proportionen merke man, daß die zu machende Veränderung niemals allein an solchen Gliedern vorgenommen werden kann, die einander multipliciren, als am 1sten und 4ten; am 2ten und 3ten. Denn alsdann würde die Hauptbedingung, daß das Product der äußern Glieder dem der innern gleich sey, nicht erfüllt. So würde es z. B. keine Proportion mehr bleiben, wenn man das 2te und 3te Glied mit einerlei Größe multiplicirte, als $a : acm = bc : bm$, wie die Probe beweist.

§. 81. Aus drei Gliedern einer geometrischen Proportion läßt sich allezeit das 4te finden, denn jedes Glied kann zum letzten gemacht werden, und das letzte ist gleich dem Product der mittlern dividirt durch das vordere.

$$a : am = b : bm, \text{ also ist } bm = \frac{amb}{a}$$
$$2 : 8 = 3 : 12, \quad - - \quad 12 = \frac{8 \cdot 3}{2}$$
$$8 : 2 = 12 : 3, \quad - - \quad 3 = \frac{2 \cdot 12}{8}$$
$$12 : 3 = 8 : 2, \quad - - \quad 2 = \frac{3 \cdot 8}{12}$$
$$3 : 12 = 2 : 8, \quad - - \quad 8 = \frac{12 \cdot 2}{3}$$

Bei der continuirlichen Proportion, worin das 2te Glied dem 3ten gleich ist, ist das 4te Glied eben so zu finden, denn

$$2 : 8 = 8 : 32, \text{ und } 32 = \frac{8 \cdot 8}{2}$$

Allgemein $a : b = b : c$, und $c = \frac{bb}{a}$

das Product der äußersten $ac = bb = b^2$, und $b = \sqrt{ac}$; woraus folgt, daß man beide mittlere finden kann, wenn die äußeren gegeben sind; denn die $\sqrt{ac}$ ist dem zweiten Gliede, folglich auch dem 3ten gleich.

§. 82. Aus der Vergleichung zweier oder mehrerer Proportionen entstehen oft ganz neue. Denn

1) Wenn in 2 verschiedenen Proportionen entweder die beiden vordern oder die beiden letzten Glieder gleich sind, so stehen die andern auch in Proportion. Z. B.

wenn $a : am = b : bm$
und $a : am = c : cm$

so ist $b : bm = c : cm$

wenn $a : am = b : bm$
und $c : cm = b : bm$

so ist $a : am = c : cm$

denn 2 Dinge, die einem 3ten gleich sind, sind einander selbst gleich.

2) Wenn ähnliche Glieder in zweien Proportionen einander gleich sind (als das 1ste und 3te; das 2te und 4te), so stehen die andern auch in Proportion.

$a : am = b : bm$
$a : an = b : bn$

also $am : an = bm : bn$

$a : am = b : bm$
$na : am = nb : bm$

also $a : na = b : nb$

3) Wenn das 2te Glied der einen Proportion dem 1sten in der andern, und das 4te der einen dem 3ten in der andern gleich ist, so stehen die übrigen in Proportion.

$a : am = b : bm$
$am : an = bm : bn$

folgl. $a : an = b : bn$

$a : am = b : bm$
$am : amn = \frac{b}{n} : b$

also $a : amn = \frac{b}{n} : bm$

Oder wenn
$a : am = b : bm$
und $amn : am = b : \frac{b}{n}$

so ist $a : amn = \frac{b}{n} : bm$

Oder wenn
$a : am = b : bm$
und $a : amn = \frac{b}{n} : bm$

so ist $am : amn = \frac{b}{n} : b$

4) Durch die Multiplication der gleichnamigen Glieder in zweien Proportionen entstehen neue.

$$\begin{array}{rcl} a : am & = & b : bm \\ c : cn & = & d : dn \\ \hline ac : amcn & = & bd : bmdn \end{array}$$

5) desgleichen durch die Division gleichnamiger Glieder:

$$\begin{array}{rcl} a : am & = & b : bm \\ c : cn & = & d : dn \\ \hline \frac{a}{c} : \frac{am}{cn} & = & \frac{b}{d} : \frac{bm}{dn} \end{array}$$

Es ist ein wichtiges, und für die bessere Einsicht in mathematische Lehrsätze und Beweise höchst nothwendiges Geschäft, sich mit den geometrischen Proportionen und ihren Verwandlungen recht bekannt zu machen.

§. 83. Eine Reihe Zahlen, die immer gleich vielmal größer oder kleiner werden, heißt eine geometrische Progression. Z. B. 1, 2, 4, 8, 16, 32
oder $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$
oder $81, 27, 9, 3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}$ ꝛc.

Solche Reihen entstehen aus lauter continuirlichen Proportionen, als:

$$\begin{array}{lll} 1 : 2 = 2 : 4 & \text{oder} & a : am = am : am^2 \\ 2 : 4 = 4 : 8 & & am : am^2 = am^2 : am^3 \text{ ꝛc.} \\ 4 : 8 = 8 : 16 \text{ ꝛc.} & & \end{array}$$

Die neuen Glieder sind: $a, am, am^2, am^3, am^4, am^5$ und man entdeckt leicht, daß der Exponent m um eine Potenz niedriger ist, als die Zahl des Gliedes. Z. B. im 6ten Glied ist m^5; im 3ten Gliede m^2 ꝛc.

Heißt nun die Zahl eines Gliedes allgemein n, so ist die Potenz von m allemal um 1 geringer, als n, also $= n - 1$ und das letzte Glied $= am^{n-1}$.

§. 84. Zwei von den Enden einer geometrischen Progression gleichweit abstehende Glieder geben einerlei Product.

1, 2, 4, 8, 16, 32 und $1 . 32 = 2 . 16 = 4 . 8 = 32$

$a, am, am^2, am^3, am^4, am^5, am^6$

und

und jedes Paar Glieder giebt $a^2 m^6$; weil n oder die Anzahl der Glieder ungerade ist, so bleibt am^3 allein, und wird es mit sich selbst multiplicirt, so kommt auch $a^2 m^6$.

§. 85. Bei der geometrischen Progression sind zu merken:

das erste Glied $= a$
der Exponent $= m$
das letzte Glied $= z$
die Anzahl der Glieder $= n$.

Jedes Glied in einer Progression kann als letztes angesehen und geschrieben werden $am^{n-1} = z$.

Das erste $a = \frac{z}{m^{n-1}}$

Der Exponent $m = \frac{am}{a}$ d. i. dem 2ten Gliede dividirt durchs erste; in der Reihe 3, 6, 12, 24, 48 ist $a = 3$; am oder das zweite Glied $= 6$, und $\frac{6}{3} = 2 = m$; überhaupt bekommt man den Exponenten, wenn man das kleinere Glied in das nächst größere dividirt, als $\frac{48}{24} = 2$.

Die Anzahl der Glieder n findet man am leichtesten, wenn man die Reihe wirklich hinschreibt. Z. B. wenn $a = 2$, $m = 3$, $z = 162$, so muß die Reihe seyn:

$$2,\ 2.3,\ 2.3.3,\ 2.3.3.3,\ 2.3.3.3.3$$
$$= 2,\ 6,\ 18,\ 54,\ 162$$

also sind 5 Glieder, und $n = 5$

Das Auffinden des Exponenten m und der Anzahl der Glieder n aus gegebenen Datis erfordert indessen Kenntniß der Wurzel- und Logarithmenrechnung (wovon weiter unten). Für Kundige sind daher folgende Formeln brauchbar

$$m = \sqrt[n-1]{\frac{z}{a}},\ \text{und}\ n = 1 + \frac{\log.z - \log.a}{\log.m}$$

§. 86. Zwischen zwei gegebenen Zahlen a und b eine mittlere Proportionalzahl zu finden, sage man:

$$a : x = x : b,\ \text{und}\ xx = ab$$
$$= x^2 = ab$$
$$x = \sqrt{ab}$$

wobei x die gesuchte Zahl ist.

Mehrere Proportionalzahlen z. B. 3 zu finden:

Die Reihe ist a, x, x^2, x^3, b.

Nun ist $ab = x \cdot x^3$ (siehe §. 84); und $x \cdot x^3 = x^4$; folglich ist $ab = x^4$, und $\sqrt[4]{ab} = x =$ dem 2ten Gliede. Wird dies durch das 1ste Glied dividirt, so ergiebt sich der Exponent, mit dem alle folgende Glieder leicht zu finden sind.

§. 87. Die Summe aller Glieder einer geometrischen Progression giebt die Formel

$$\frac{am^n - a}{m - 1} = S = \text{Summe.}$$

Z. B. In der Progression 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256 ist $a = 1$; $m = 2$, $n = 9$, folglich

$$S = \frac{1 \cdot 2^9 - 1}{2 - 1} = \frac{2^9 - 1}{1} = 2^9 - 1 = 512 - 1 = 511$$

indessen pflegt man oft durch die bloße Addition der Glieder die Summe zu finden, wenn die Reihe bekannt oder gegeben und nicht zu lang ist.

§. 88. Die Summe einer bis in's Unendliche fortgehenden Progression kann nur dann gefunden werden, wenn die Reihe eine fallende, und der Exponent kleiner, als 1 ist.

Wenn das erste Glied $= a$; der Exponent $= \frac{b}{c}$, so ist, wenn jedes Glied das Pluszeichen hat, die Summe

$$S = \frac{ac}{c - b}$$

Z. B. in der Reihe $3, 2, 1\frac{1}{3}, \frac{8}{9}, \frac{16}{27}$ u. s. f. ist $a = 3$; der Exponent $= \frac{2}{3} = \frac{b}{c}$, und

$$\frac{ac}{c - b} = \frac{3 \cdot 3}{3 - 2} = \frac{9}{1} = 9$$

§. 89. Wenn in einer unendlichen Reihe die Zeichen wechseln, so ist die Summe $S = \frac{ac}{c + b}$

In der Reihe $\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{3}, -\frac{2}{9}, +\frac{4}{27}$, u. s. w. ist $a = \frac{3}{4}$, $m = \frac{3}{4}$ in $-\frac{1}{2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} = \frac{b}{c}$; und

ac

$$\frac{ac}{c+b} = \frac{\frac{3}{4} \cdot 3}{3+2} = \frac{\frac{9}{4}}{5} = \frac{9}{20} = s$$

Wenn von den 5 Größen a, m, z, n, s drei bekannt sind, so lassen sich mittelst folgender Tafel die übrigen finden.

Formeltafel für die geometrische Progression.

No.	Gegeben.	Gesucht	Formeln.	
1	a, m, n	z	$z = am^{n-1}$	Wobei
2	a, m, s		$z = \frac{a + (m-1)\,s}{m}$	a = erstes } Glied z = letztes } Glied
3	a, n, s		$z.(s-z)^{n-1} - a.(s-a)^{n-1} = 0$	m = Exponent. n = Anz. d. Glied.
4	m, n, s		$z = \frac{(m-1)sm^{n-1}}{m^n - 1}$.	s = Summe.
5	a, m, n	s	$s = \frac{a\,(m^n - 1)}{m - 1}$.	
6	a, m, z		$s = \frac{mz - a}{m - 1}$.	
7	a, n, z		$s = \frac{z^{\frac{n}{n-1}} - a^{\frac{n}{n-1}}}{z^{\frac{1}{n-1}} - a^{\frac{1}{n-1}}}$	
8	m, n, z		$s = \frac{z\,(m^n - 1)}{(m-1)m^{n-1}}$.	
9	m, n, z	a	$a = \frac{z}{m^{n-1}}$	
10	m, n, s		$a = \frac{(m-1)\,s}{m^n - 1}$	
11	m, z, s		$a = mz - (m - 1)\,s$	
12	n, z, s		$a.(s-a)^{n-1} - z\,(s-z)^{n-1} = 0$	

No.	Gegeben.	Gesucht	Formeln.
13	a, n, z	m	$m = \sqrt[n-1]{\frac{z}{a}}$
14	a, n, s		$m^n - \frac{s}{a} m + \frac{s-a}{a} = 0$
15	a, z, s		$m = \frac{s-a}{s-z}$
16	n, z, s		$m^n - \frac{s}{s-z} m^{n-1} + \frac{z}{s-z} = 0$
17	a, m, z	n	$n = 1 + \frac{\log. z - \log. a}{\log. m}$
18	a, m, s		$n = \frac{\log. (a + (m-1)s) - \log. a}{\log. m}$
19	a, z, s		$n = \frac{\log. z - \log. a}{\log. (s-a) - \log. (s-1)} + 1$
20	m, z, s		$n = \frac{\log. z - \log. (mz - (m-1)s)}{\log\ m} + 1$

Die Formeln No. 3, 12, 14, 16 sind auf 0 gebrachte Gleichungen von höheren Graden, deren Auflösung schwierig und mühsam ist; indessen kann man durch Versuche oft bald das Gesuchte finden. Z. B. es sey No. 14 $a = 2$, $n = 5$, $s = 242$, man sucht m; dann soll $m^n - \frac{s}{a} m + \frac{s-a}{a} = 0$ seyn. Man lege die Werthe unter, so ist $m^5 - \frac{242}{2} m$

$$+ \frac{242-2}{2} = m^5 - 121\,m + 120 = 0.$$

Die Zahl 120 ist durch 2, 3, 4, 5, 6 ꝛc. theilbar; daher versuche man, statt m die 2, 3 ꝛc. zu setzen; bei welcher Zahl die Gleichung Null wird, dieselbe ist die richtige. Wir wollen annehmen $m = 2$, so ist

$m^5 - 121\,m + 120 = 2^5 - 121 \cdot 2 + 120 = 32 - 242$
$+ 120 = 152 - 242 = -90$, also nicht Null.

Nehmen wir $m = 3$, so ist
$m^5 - 121\,m + 120 = 3^5 - 121 \cdot 3 + 120 = 243 - 363$
$+ 120 = 363 - 363 = 0$, also ist $m = 3$.

Das 7te Formular kann auch also geschrieben und mit Logarithmen leicht berechnet werden.

$$\frac{z^{\frac{n}{n-1}} - a^{\frac{n}{n-1}}}{z^{\frac{1}{n-1}} - a^{\frac{1}{n-1}}} = \frac{\sqrt[n-1]{z^n} - \sqrt[n-1]{a^n}}{\sqrt[n-1]{z} - \sqrt[n-1]{a}}$$

Die Auflösung dieser Formulare setzt Kenntniß der Wurzel- und Logarithmenrechnung voraus. Der Vollständigkeit wegen stehen sie mit hier an einem Platze, wo man sie mit Recht suchen kann. Der Zweck dieser Schrift erlaubt uns keine genauere Auseinandersetzung der Lehre von den Progressionen, die man in Häseler's, Burja's und anderer Autoren Schriften vollständig abgehandelt findet. Wer das Vorhergehende begriffen hat, und die folgenden 3 Abschnitte mit Aufmerksamkeit liest, wird die Formulare mit Leichtigkeit lösen und anwenden können.

IV. Ausziehung der Wurzeln.

§. 90. Ohne die Kunst, aus einer gegebenen Zahl die verlangte Wurzel zu ziehen oder zu finden, kann man in der Mathematik nicht weit kommen, weshalb dieser Abschnitt eine besondere Aufmerksamkeit verdient.

§. 91. Diejenige Zahl, welche Ein- oder mehrere Male mit sich multiplicirt wird, heißt die **Wurzel** der auf diese Weise entstandenen Größe (**Potenz**). Siehe §. 21. So ist z. B. 4 die Wurzel von 16, denn $4 \cdot 4 = 16$; man schreibt es $\sqrt{16} = 4$, d. h. die Quadratwurzel aus 16 ist 4. Der Kubus von $4 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$; und $\sqrt[3]{64} = 4$.

§. 92. Ganze Zahlen geben ganze Zahlen zum Quadrat, zum Kubus ꝛc.; Brüche geben Brüche.

So giebt

1 im Quadrat		1,	im Kubus		1	
2 —	—	4	—	—	8
3 —	—	9	—	—	27
4 —	—	16	—	—	64
5 —	—	25	—	—	125
6 —	—	36	—	—	216
7 —	—	49	—	—	343
8 —	—	64	—	—	512
9 —	—	81	—	—	729

§. 93. Diese kleine Tafel kann uns auf wichtige Bemerkungen leiten.

1) Kein Quadrat der einfachen Zahlzeichen von 1 bis 9 hat über 2 Zahlen, ist also jedesmal unter 100.
2) Kein Kubus der einfachen Zahlzeichen von 1 bis 9 hat über 3 Zahlen, ist also jedesmal unter 1000.
3) Der wahren Quadratzahlen und Kubikzahlen sind im Grunde nur wenige, denn zwischen 4 und 9 fehlen 5, 6, 7, 8, welche keine reine Wurzel haben, weil ihre Wurzel zwischen 2 und 3 fällt. Zwischen 9 und 16 fehlen: 10, 11, 12, 13, 14, 15, deren Wurzel zwischen 3 und 4 liegen muß. Nun geben aber Brüche mit Brüchen multiplicirt niemals Ganze zum Product, folglich kann man auch aus den Zahlen, die nicht Quadratzahlen sind, keine reine Wurzel finden. Noch seltener sind die Kubikzahlen, wie aus der kleinen Tafel zu ersehen ist. Man nennt solche Zahlen, deren Wurzeln sich genau angeben lassen, Rationalzahlen; alle übrige heißen Irrationalzahlen.

§. 94. Man hat eine Rechnungsart, vermittelst welcher man aus jeder Zahl eine verlangte Wurzel ziehen, d. h. angeben kann, was das für eine Zahl ist, aus deren Multiplication die gegebene Zahl entstanden seyn muß. Die Wurzel aus Irrationalzahlen wird freilich nicht völlig genau gefunden, allein man kann sich ihr doch so weit nähern, als man will. Diese Rechnungsart heißt das Ausziehen der Wurzeln, und gründet sich auf folgende Betrachtung.

§. 95. Da man jede Größe, z. B. 7, so ansehen kann, als sey sie aus zweien andern, etwa aus $5 + 2$, oder $8 - 1$, entstanden, so mag $a + b$ irgend eine solche Größe seyn, und zur Potenz erhoben, d. h. mit sich selbst multiplicirt werden. Wir wollen beobachten, was mit ihr vorgeht, und versuchen, wie es anzufangen sey, aus der Potenz die Wurzel zu ziehen. Daß es durch eine Art von Division geschehen müsse, folgt schon daraus, daß jede quadratische oder kubische Größe durch die Multiplication ihrer Wurzel entstanden ist. Man multiplicirt $a + b$ mit sich selbst, so bekommt man $a^2 + 2ab + b^2$ als Quadrat von der Wurzel $a + b$.

§. 96. Das Quadrat $a^2 + 2ab + b^2$, dessen Wurzel $a+b$ wir kennen, besteht aus 3 Gliedern a^2; $2ab$, und b^2.

1) Den ersten Theil der Wurzel findet man leicht, denn man dividire nur a^2 durch a, so erhält man a.
2) Nun bleibt noch $2ab + b^2$, welches bequemer ausgedrückt wird durch $(2a+b) . b$.
3) Dividirt man mit $2a + b$ in $(2a+b) b$, so erhält man den zweiten Theil der Wurzel, nämlich b.
4) Den Divisor $2a+b$ bekommt man, wenn man den ersten Theil der Wurzel, a, doppelt nimmt (er ist dann $= 2a$) und damit $2a + b$ dividirt, wodurch man b bekommt. Wird nun b auch zu $2a$ gesetzt, so erhält man $2a+b$.

Das Exempel sieht also aus:

$$
\begin{array}{ll}
 & a^2 + 2ab + b^2 \;||\; a + b = \text{Quadratwurzel.} \\
\text{Divisor } a) & a^2 \\
 & \overline{\text{Rest} = 2ab + b^2} \\
\text{neuer Divis. } 2a+b) & \\
\text{(siehe 4.)} & \underline{2ab + b^2}
\end{array}
$$

Was dem Anfänger etwa noch dunkel und schwer vorkommt, wird ihm aus dem Folgenden und aus eigenen Versuchen bald klar werden.

§. 97. Aus dem, was von §. 90. an bisher gesagt worden ist, ergeben sich folgende Regeln zur Ausziehung der Quadratwurzeln:

1) Man

1) Man theile die Zahl, aus welcher die Wurzel gezogen werden soll, von der Rechten zur Linken in Klassen, jede von 2 Ziffern (denn kein Quadrat einer einfachen Zahl ist über 81, siehe §. 92.). Es schadet nichts, wenn vorn nur 1 Ziffer bleibt. Z. B.

$\sqrt{1764}$ wird abgetheilt 17|64||
oder $\sqrt{15625}$ — — 1|56|25||

2) Man suche für die erste Klasse linker Hand (hier für 17) die Wurzel, und wenn sie nicht genau paßt, die nächst kleinere (hier die 4; denn $4 \cdot 4 = 16$, welche der 17 am nächsten kommt).

3) Die so gefundene Wurzel (4) setze in den Quotienten, als den ersten Wurzeltheil $= a$, multiplicire ihn mit sich selbst, und ziehe das Product (16) von der ersten Klasse ab. Zum etwaigen Rest (1) setze die 2te Klasse (64) herunter.

$$\begin{array}{r|l|l} & & a \\ 17 & 64 & 4 \\ 16 & & \\ \hline \end{array}$$

Rest und 2te Klasse 1 64

4) Den neuen Divisor bekommt man, indem man den 1sten Wurzeltheil a (hier $= 4$) doppelt nimmt, also $2a$ ($= 8$). Den Divisor setzt man so unter die zweite Klasse, daß die Ziffer rechts (hier die 4) nichts unter sich bekommt.

$$\begin{array}{r|l|l} & & a \\ 17 & 64 & 4 \\ 16 & & \\ \hline 1 & 64 & \end{array}$$

neuer Divisor $= 8$)

5) Dividire mit dem neuen Divisor (8) in die über ihm stehende Zahl (16). Der Quotient ist der zweite Theil der Wurzel $= b$ (hier $= 2$). Er muß auch rechts neben den Divisor (8) gesetzt werden, wodurch dieser $= 2a + b$ (82) wird, und die leere Stelle der 2ten Klasse einnimmt. Multiplicire nun $2a + b$ mit dem zweiten Wurzeltheil b, und ziehe das Product von der 2ten Klasse und dem Reste der ersten ab.

$$
\begin{array}{rl|l}
 & & a+b \\
 & 17|64| & 4 \quad 2 = \text{Wurzel} \\
a^2 = & 16 & \\
\end{array}
$$

Rest und 2te Klasse 1 6 4
neuer Divisor $= 2a = (8,2)$
und $b = 2$ dazu gesetzt
endlich $(2a+b) \cdot b = 1\,6\,4$
Rest $= \quad 0$

6) Wenn nun alles aufgeht, so ist $a+b$ (42) die reine Wurzel. Hat aber die Zahl mehr, als 2 Klassen, so setzt man die 3te Klasse herunter, sieht die beiden schon erhaltenen Wurzeltheile als Einen an, nimmt ihn doppelt, so hat man abermals einen neuen Divisor, mit dem man wie vorher bei 5 verfährt, und so den 3ten Wurzeltheil bekömmt.

Man wiederholt dies so lange, als man Klassen hat, und erhält auch eben so viel Wurzeltheile, als Klassen. Ist die gegebene Zahl ein wirkliches Quadrat, so geht am Ende alles auf.

§. 98. Zur Übung einige Beispiele.

Die $\sqrt{15625}$. Da diese Zahl drei Klassen, nämlich $1|56|25||$ hat, so muß auch die Wurzel aus 3 Ziffern bestehen.

$$
\begin{array}{rl|l}
 & & a+b \\
 & 1|56|25| & 1 \quad 2 \quad 5 \ \text{Wurzel} = 125. \\
a^2 = & 1 & a+b \\
\end{array}
$$

zweite Klasse 56
neuer Divisor $2a = 2 = (2,2)$
$(2a+b) \cdot b = \quad 44$
Rest und 3te Klasse $= 1225$
Divisor $= 2 \cdot 12 = (24,5)$
(nun ist $a = 12$
$b = 5$) u. $2a+b = 122\,5$
Rest $= 0$

Die $\sqrt{582169}$ wird 3 Ziffern haben, weil die Zahl drei Klassen hat

$a+b$

a + b
58|21|69||7 6 3, Wurzel = 763.
$a^2 = 7 \cdot 7 = 49$
a + b

Rest und 2te Kl. = 9 21
neuer Divisor 2.7 = (1 4,6)
(2a + b) . b = 8 7 6

Rest und 3te Kl. = 4 569
neuer Divis. = 2.76 = (1 52,3)
(2a + b) . b = 4 56 9

Rest = 0

§. 99. Wenn die Zahl, woraus die Wurzel gezogen werden soll, kein Quadrat ist, und man also die Wurzel durch Näherung suchen muß, so hänge man an die Zahl so viel Klassen von Nullen, als man will, und ziehe die Wurzel, wie gewöhnlich, aus. Im Quotienten streiche man aber so viel Decimalstellen ab, als man Klassen von Nullen angehängt hat. Es wird niemals aufgehen; doch erhält man die Wurzel immer genauer, je mehr Klassen Nullen angehängt werden.

Man soll z. B. die Wurzel aus 5 bis auf drei Decimalstellen finden, so hänge man der 5 drei Klassen Nullen an.

Also $\sqrt{5} = \sqrt{5|00|00|00}$ || 2,236... = Wurzel
4
1 00
(4,2)
8 4
1600
(44,3)
1 3 2 9
2 7 1 0 0
(446,6)
2 6 7 9 6
Rest 304

§. 100. Wenn die Wurzel aus einer ganzen Zahl mit einem Decimalbruche gezogen werden soll, so theilt man nur die Ganzen ab, und zieht die Decimalstellen so her=

herunter, als man im vorigen §. die Nullen heruntersetzte. Z. B. $\sqrt{7,651}$ zu finden.

```
7|65|10||2,76.... = Wurzel
4|   : :
---------
3 65 : :
 (4,7): :
3 2 9 : :
------------
  3 6 10
   (5 4,6
   3 2 7 6
------------
Rest 3 3 4
```

Man kann nun dem Rest 334 abermals eine oder mehrere Klassen Nullen geben, und mit der Rechnung fortfahren, wodurch man die Wurzel immer genauer bekommt. Im obigen Beispiel geben die 3 Decimalstellen 651 nicht zwei volle Klassen; deshalb mußte noch eine Null angehängt werden. Daß die Wurzel unvollständig ist, zeigt man durch Puncte (2,76....) an.

§. 101. Auch aus Decimalbrüchen, ohne Ganze, kann die Wurzel eben so, wie vorhin, gefunden werden. Dann vertritt die Null die Stelle der Ganzen, folglich kann die Wurzel auch keine Ganze enthalten.

Z. B. $\sqrt{0,056}$ zu finden auf 4 Decimalstellen. Man hänge so viel Nullen an, daß aus 056 vier Klassen werden, also $\sqrt{0,}$|05|60|00|00||0,2366 = Wurzel.

```
      0|
-----------
        5
  a² = 4
-----------
      1 6 0
      (4,3)
      1 2 9
-----------
      3 1 0 0
      (4 6,6)
      2 7 9 6
-----------
      3 0 4 0 0
      (4 7 2,6)
      2 8 3 5 6
-----------
Rest = 2 0 4 4
```

§. 102. Soll die Wurzel aus einem Bruch gezogen werden, so ziehe man sowol aus dem Zähler, als aus dem Nenner die Wurzel, und setze beide Wurzeln in einen Bruch.

Z. B. $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$, denn $\sqrt{1} = 1$; und $\sqrt{4} = 2$.

$\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \frac{3}{4}$, denn $\sqrt{9} = 4$; und $\sqrt{16} = 4$.

Oder man verwandelt den gemeinen Bruch in einen Decimalbruch, und zieht daraus die Wurzel.

Z. B: $\sqrt{\frac{1}{4}} = \sqrt{0{,}25}$; und $\sqrt{0{,}25} = 0{,}5$ = Wurzel.

$\sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt{0{,}75}$; und nach §. 101 wird $\sqrt{0{,}75} = 0{,}866\ldots$ = Wurzel.

§. 103. Weil einerlei Zeichen beim Multipliciren stets Plus geben, so muß jede quadratische Größe + haben. Die Wurzel kann daher sowol + als — haben, und wird auch oft mit beiderlei Zeichen geschrieben, als $\sqrt{16} = \pm 4$. Für negative Größen giebt es also keine Wurzeln.

Ausziehung der Kubikwurzel.

§. 104. Wenn wir eine zweitheilige (binomische) Größe a + b in die 3te Potenz erheben, und auf das genau achten, was mit ihr vorgeht, so können wir allgemeine Regeln zur Ausziehung der kubischen Wurzel entdecken.

$$
\begin{array}{l}
(a+b) \cdot (a+b) \cdot (a+b) = a + b \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\; a + b \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad\; ab + b^2 \\
\qquad\qquad\quad a^2 + ab \\
\hline
\qquad\qquad\quad a^2 + 2ab + b^2 = \text{zweite Potenz} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\; a + b \\
\hline
\qquad\qquad\quad a^2b + 2ab^2 + b^3 \\
\qquad a^3 + 2a^2b + ab^2 \\
\hline
\qquad a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = \text{dritte Potenz.}
\end{array}
$$

Aus dieser kubischen Größe müssen wir die Wurzel a + b durch eine Art von Division wieder zu bekommen suchen.

Das erste der 4 Glieder ist a^3; wird der erste Wurzeltheil a in die 3te Potenz erhoben, so geht er darin auf.

Um die übrigen 3 Glieder $3a^2b + 3ab^2 + b^3$ dahin zu bringen, ist ein neuer Divisor $= 3a^2$ nöthig; damit in $3a^2b$ dividirt, giebt den zweiten Wurzeltheil b, welcher mit $3a^2$ multiplicirt, $3a^2b$ giebt, und also geht auch dieses Glied auf.

Das Glied $3ab^2$ wird aufgehen, wenn wir b quadriren und mit 3a multipliciren.

Das letzte Glied b^3 ist das kubirte zweite Glied b in der Wurzel.

Auf diese Weise lehrt uns die kubische Größe $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, wie wir das Werk beginnen sollen, um die Wurzel $a + b$ wieder zu bekommen. Die Glieder $3a^2b + 3ab^2 + b^3$ heißen Partialproducte, und müssen bei Zahlenausdrücken auf eine gewisse Art addirt, und von der kubischen Größe abgezogen werden.

§. 105. Aus der Betrachtung dieser allgemeinen Rechnung und aus dem Umstande, daß kein Kubus einer einfachen Zahl mehr als 3 Zahlzeichen, wol aber weniger haben kann, ergeben sich folgende Regeln zur

Ausziehung der Kubikwurzeln aus Zahlengrößen.

1. Ist die gegebene Zahl ein wirklicher Kubus und aus nicht mehr als 3 Zahlzeichen bestehend, so ist die Wurzel eine von den Ziffern 1 bis 9 (siehe §. 92.), und ohne weitere Rechnung aus jener Tafel zu finden. Hat sie aber mehr als 3 Ziffern, so theile man sie von der Rechten zur Linken in Klassen, jede zu 3 Ziffern. In der letzten Klasse links können weniger, zwei oder eine seyn.
2. Suche für die erste Klasse linker Hand die Kubikwurzel nach §. 92., und, findet sich die Zahl nicht genau, die nächst kleinere, und schreibe sie in den Quotienten. Diese erste Ziffer heiße a.
3. Kubire diesen ersten Wurzeltheil a, setze den Kubus unter die erste Klasse, ziehe ihn davon ab, und setze den etwanigen Rest unter den Strich. Zu dem Reste setze die 2te Klasse.

4. Nun ist ein Divisor nöthig, welchen man bekommt, wenn man den ersten Wurzeltheil a quadrirt und mit 3 multiplicirt. Dann ist er $= 3a^2$.

5. Dividire mit $3a^2$ in den heruntergesetzten Rest, und die erste Ziffer links in der zweiten Klasse. Der Quotient ist der zweite Wurzeltheil b, den man nicht zu groß nehmen muß, weil noch mehrere Partialproducte von der zweiten Klasse abgezogen werden.

6. Der zweite Wurzeltheil b mit dem Divisor $3a^2$ multiplicirt, giebt das erste Partialproduct $= 3a^2 b$, welches so hingeschrieben wird, daß zwei Ziffern in der zweiten Klasse rechts nichts unter sich bekommen.

7. Der zweite Wurzeltheil b quadrirt und mit 3a multiplicirt, giebt $3ab^2$ oder das zweite Partialproduct, welches so hingeschrieben wird, daß seine Einer unter der mittlern Zahl der zweiten Klasse stehen.

8. Das dritte Partialproduct ist b^3, dessen niedrigste Ziffer unter der niedrigsten Ziffer der zweiten Klasse (also Einer unter Einer) stehen muß.

9. Man addire alle 3 Partialproducte in dieser Stellung zusammen, und ziehe ihre Summe von der Zahl, welche durch den Rest der ersten Klasse und durch die 3 Ziffern der zweiten Klasse entstanden ist, ab.

10. Ist nun die Zahl ein reiner oder wirklicher Kubus, und hat sie nur 2 Klassen gehabt, so muß alles aufgehen. Sind aber mehr, als zwei Klassen, so wird die 3te Klasse zum Reste der 2ten heruntergesetzt.

11. Die beiden gefundenen Wurzeltheile $a + b$ sehe man als Einen an, und nenne ihn a. Darauf beginne die ganze Verrichtung, wie sie von 3 an gelehrt, von neuem. Das gefundene dritte Wurzelglied behandle wie b.

Hat die Zahl 4 Klassen, die Wurzel also 4 Ziffern, so nenne man die 3 ersten Ziffern der Wurzel a, und die 4te wieder b. Auf diese Weise wird das Buchstabenformular stets brauchbar seyn.

§. 106. Beispiele erläutern die Regeln am besten.

1. Aus der Zahl 79507 die Kubikwurzel zu finden.

$$\begin{array}{lr}
 & \qquad\qquad a+b \\
\text{Theile 79507 in Klassen, also} = 79|507|| & 4 \quad 3 = \text{Wurzel.} \\
\text{Suche aus 79 die } \sqrt[3]{\ }\text{, welche} & \\
\qquad 4 = a\text{, und } a^3 = & 64 \\
\hline
\text{Zum Rest 15 die 2te Kl. gesetzt} = & 15\,507 \\
\text{Divisor} = 3a^2 = 3 \cdot 4 \cdot 4 = & (48)\!:: \\
\text{1. Partialpr.} = 3a^2b = 3.4.4.3 = & \left\{\begin{array}{r} 144\ :: \\ 10\,8\ : \\ 27 \end{array}\right. \\
\text{2. Partialpr.} = 3ab^2 = 3.4.3.3 = & \\
\text{3. Partialpr.} = b^3 = 3.3.3 = & \\
\hline
\text{Summe der 3 Partialpr.} = & 15507 \\
\text{und abgezogen von} & 15507 \\
\hline
\text{bleibt} = & 0
\end{array}$$

Die $\sqrt[3]{\ }$ aus 79507 ist also $= 43$, und $43 \cdot 43 \cdot 43$ wird jene Zahl wiedergeben. Der Anfänger wird wohlthun, so lange bei diesem Beispiele zu verweilen, und alle Regeln zu wiederholen, bis sie ihm ganz geläufig sind.

2. Die $\sqrt[3]{\ }$ 884736 zu finden.

$$\begin{array}{rr}
 & \qquad\quad a+b \\
884| & 736||9 \quad 6 = \text{Wurzel.} \\
a^3 = 729| & \\
\hline
\text{Rest und 2te Klasse} = & 155\,736 \\
\text{Divisor} = 3a^2 = & (24\,3) \\
\text{Partialproducte} \left\{\begin{array}{r} 3a^2b = \\ 3ab^2 = \\ b^3 = \end{array}\right. & \begin{array}{r} 145\,8 \\ 9\,72 \\ 216 \end{array} \\
\hline
\text{Summe} = & 155\,736
\end{array}$$

abgezogen von obigem Rest geht auf.

3. Die $\sqrt[3]{\ }$ 34965783 zu finden.

Die Wurzel wird 3 Ziffern haben, weil die Zahl 3 Klassen hat.

$$\begin{array}{rl} & \qquad\qquad\quad a+b \\ & 34|965|783||\underline{3\quad 2}\quad 7 = \text{Wurzel} \\ a^3 = & \underline{27|}\qquad\qquad a+b \end{array}$$

Rest und 2te Klasse $= 7\,965$

Divisor $3a^2 = (2\,7)$

Partialpr. $\begin{cases} 3a^2b = 5\,4 \\ 3ab^2 = \quad 36 \\ b^3 = \qquad 8 \end{cases}$

Summe $= 5\,768$

Rest und 3te Klasse $2\,197\,783$

Divis. $= 3a^2 = 3 . 32^2 = (307\,2)$ denn $a = 32$

$3a^2b = 2150\,4$

$3ab^2 = 47\,04$

$b^3 = 343$

Summe $= 2\,197\,783$

abgezogen vom Rest der 2ten und 3ten Klasse $= 0$.

§. 107. Wenn die Zahl keine wirkliche Kubikzahl ist, so bleibt endlich ein Rest, an den man so viele Klassen von Nullen hängt, als man Decimalstellen in der Wurzel haben will.

Z. B. $\sqrt[3]{636059}$ zu finden. Die Wurzel kann nur zwei ganze Zahlen haben.

$$\begin{array}{rl} & \qquad\qquad a+b \\ & 636|059||8\quad 6 \\ a^3 = & \underline{512|} \end{array}$$

$124\,059$

Divisor $= 3a^2 = (19\,2)$

$\begin{cases} 3a^2b = 115\,2 \\ 3ab^2 = \quad 8\,64 \\ b^3 = \qquad 216 \end{cases}$

Summe $124\,056$

Rest $= 3$

Weil hier der Rest sehr gering ist, so könnte man sich mit der gefundenen Wurzel 86 begnügen, denn $86 . 86 . 86 = 636056$. Allein verlangt man mehr Schärfe, so müssen dem Reste 3 mehrere Klassen Nullen angehängt werden. Wir wollen 4 Klassen anhängen, um noch 4 Decimalmalstellen zu bekommen. Die Fortsetzung des Exempels sieht also aus:

.... || 86,0001 = Wurzel.

Rest u. neue Kl. = 3000

$a = 86,\ 3a^2 = (22188)$ Da die Division nicht angeht, so wird o in den Quotienten gesetzt, und eine neue Klasse Nullen angehängt.

3000000

$a = 860,\ 3a^2 = (2218800)$ Die Division geht noch nicht, daher o in den Quotienten und 3 Nullen zum Rest.

30000 00000

$a = 8600,\ 3a^2 = (221880\ 000)$ wie vorher verfahren.

30000 000 00000

$a = 86000,\ 3a^2 = 22188\ 000\ 000)$:: hier geht die Division an.

$b = 1,\ \begin{cases} 3a^2b = 22188\ 000\ 000 :: \\ 3ab^2 = 25\ 8000: \\ b^3 = 1 \end{cases}$

Summe = 22188 025 80001

Rest = 7811 974 19999

Hängt man noch eine Klasse Nullen an, und führe fort, so wäre $a = 860001$, und $b = 3$; dann ist die Wurzel $= 86,00013 \ldots$

§. 108. Soll die $\sqrt[3]{}$ aus einer Zahl mit einem Decimalbruche gezogen werden, so theilt man nur die Ganze in Klassen, und zieht die Decimalbrüche anstatt der Nullenklassen herunter. Die Wurzel erhält natürlich nur so viel Ganze, als Wurzeltheile sich aus den Ganzen ergeben, oder als die Ganzen Klassen haben; sobald die Decimalbrüche heruntergezogen werden, fangen in der Wurzel auch die Decimalstellen an.

Z. B. $\sqrt[3]{126{,}52} = 126{,}520|\,|5{,}02$ = Wurzel.

$a^3 = 125$

1.520

$3a^2 = (75)$ Die Division geht nicht an.

1 520000

Nun ist $a = 50$, u. $3a^2 =$ (7500)::

$b = 2$, $3a^2b =$ 15000 ::

$3ab^2 =$ 600:

$b^3 =$ 8

Summe = 1506008

Rest = 13992

§. 109. Soll aus einem Decimalbruche die $\sqrt[3]{}$ gezogen werden, so setzt man in dem Quotienten an die Stelle der Ganzen eine Null. Z. B. $\sqrt[3]{0{,}004096}$.

0|004|096| |0,16 = Wurzel.

suche $\sqrt[3]{}$ aus 4; $a^3 =$ 1

Rest = 3.096

$3a^2 =$ (3)

$3a^2b =$ 18

$3ab^2 =$ 108

$b^3 =$ 216

Summe = 3096

0

§. 110. Die $\sqrt[3]{}$ aus Brüchen ziehen heißt: sie sowol aus dem Zähler als aus dem Nenner ziehen. Z. B. $\sqrt[3]{\frac{3}{8}} = \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{8}}$.

Soll aber aus dem Zähler oder aus dem Nenner allein die Wurzel gezogen werden, so muß es so angezeigt stehen:

$$\frac{\sqrt[3]{8}}{17} \text{ und } \frac{8}{\sqrt[3]{17}}.$$

§. 111. Wenn Buchstabengrößen wirkliche Quadrate oder Kubi sind, so läßt sich auch aus ihnen die Wurzel ziehen. Z. B. $\sqrt[3]{(m^3 + 12m^2 + 48m + 64)}$.

$$\begin{array}{lll} & & a+b \\ & m^3+12m^2+48m+64 & \mid m+4 = \text{Wurz.} \\ \text{hier ist } a=m,\ \text{u. } a^3 = m^3 & & \\ \hline & 12m^2+48m+64 & \\ \text{Divisor } 3a^2 & = (3m^2) & \\ \left\{\begin{array}{l} 3a^2b \\ 3ab^2 \\ b^3 \end{array}\right. & \begin{array}{l} = 12m^2 \\ = \quad +48m \\ = \quad\quad +64 \end{array} & \\ \hline \text{Summe} & 12m^2+48m+64 & \\ \hline \text{Rest} & = \quad 0 & \end{array}$$

§. 112. Die Kubikwurzel aus einer Größe kann sowol Plus als Minus haben, denn der Kubus von einer Plusgröße = +, von einer Minusgröße = —.

Auch aus einer Minusgröße muß sich daher die $\sqrt[3]{}$ ziehen lassen. $\sqrt[3]{64} = +4$; und $\sqrt[3]{-64} = -4$; denn $-4 \cdot -4 \cdot -4 = +16 \cdot -4 = -64$.

§. 113. Die Wurzeln aus der 4ten, 5ten, 6ten Potenz zu ziehen, ist zwar auch möglich, aber sehr weitläufig. Wir werden in den Logarithmen bequeme Mittel finden, aus einer Größe jede verlangte Wurzel zu ziehen.

V. Gebrauch der Logarithmen.

§. 114. Unter eine geometrische Progression, deren erstes Glied sich mit 1 anfängt, setze eine arithmetische Progression, deren 1stes Glied sich mit Null anfängt, so heißt jedes Glied der letztern der Logarithme des über ihm stehenden Gliedes in der geometrischen Reihe. Z. B.

Geometr. Progr. 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256 u. s. w.
Arithmet. Progr. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 u. s. w.

Die Glieder der untern Reihe sind also eigentlich die Exponenten der geometrischen Reihe, deren erstes Glied 1, deren Exponent = 2 ist. So ist z. B. 6 der Logarithme von 64, und auch die sechste Potenz des Exponenten 2;

die

die 64 ist daher das 6te Verhältniß in der geometrischen Reihe.

Anmerk. Man kann die Logarithmen Verhältnißzähler nennen. Ihre Erfindung fällt in die Zeit 1614 bis 1624, wo Nepper und Brigg sich dadurch unsterblich machten, daß sie die höchst mühevolle Berechnung der Logarithmen unternahmen und logarithmische Tafeln in den Druck gaben

§. 115. An den im vorigen §. angeführten beiden Reihen können wir vieles entdecken, was uns über den Gebrauch der Logarithmen Aufschluß geben kann.

1. Wenn z. B. zwei Zahlen der obern Reihe, 4 und 32 mit einander multiplicirt werden sollen, so braucht man nur ihre darunter stehenden Logarithmen 2 und 5 zu addiren: die Summe 7 ist der Logarithme der Zahl 128, welche die Antwort ist; und $4 \cdot 32 = 128$.
2. Ist 4 in 32 zu dividiren, so findet man die Antwort dadurch, daß man den Logarithmen der Zahl 4 vom Logarithmen der 32 abzieht, hier $5 - 2 = 3$. Die 3 ist der Logarithme der Antwort, und steht unter der 8. Aber $\frac{32}{4}$ ist auch $= 8$.
3. Soll die 4 in die 3te Potenz erhoben werden, so multiplicire man den Logarithmen der Zahl 4, welcher 2 ist, mit 3; das Product 6 ist der Logarithme von 64, welches auch der Kubus von 4 ist.
4. Das Ausziehen der Wurzel geschieht dadurch, daß man den Logarithmen durch den Wurzelexponenten dividirt. Z. B. $\sqrt{256}$ wird gefunden, indem wir 8 durch 2 dividiren. Der Quotient 4 ist der Logarithme der Wurzel, und gehört der 16, welches auch die Wurzel ist. Die $\sqrt[4]{256}$ wäre $\frac{8}{4} = 2$, welche Zahl der Logarithme von 4 ist; und $\sqrt[4]{256}$ ist auch $= 4$.

Die Multiplication zweier Zahlen geschieht also durch die Addition ihrer Logarithmen;

die Division durch die Subtraction der Logarithmen;

die Erhebung zu Potenzen geschieht durch die Multiplication der Logarithmen mit dem Exponenten;

die Ausziehung der Wurzel geschieht durch die Division durch denExponenten.

Die

Die erhaltene Zahl ist dann der Logarithme der Antwort.

Dies alles hat seinen Grund darin, daß man die Logarithmen als Exponenten der obern Reihe betrachten kann.

§. 116. Man kann übrigens mit jeder geometrischen und arithmetischen Reihe alle vorige Aufgaben lösen, wie Versuche beweisen werden. Wir bedienen uns gegenwärtig der sogenannten Briggischen oder gemeinen Logarithmen, deren 2 Reihen folgende sind:

Geometr.	1,	10,	100,	1000,	10000,	100000,	1000000.
Arithmet. od. Logarith.	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6.

Es sind unzählig viele Logarithmensysteme möglich, aber in jedem ist 0 der Logarithme der Einheit, und diejenige Zahl, deren Logarithme 1 ist, heißt die Grundzahl dieses Systems.

§. 117. Wie fand man aber die Logarithmen für die Zahlen zwischen 1 und 10; zwischen 10 und 100 u. s. w.? Sollen die Logarithmen ganz brauchbar werden, so muß man für jede Zahl einen Logarithmen haben. Nun sieht man bald, daß die Logarithmen der Zahlen zwischen 1 und 10, zwar größer als 0, aber doch kleiner als 1, also echte Brüche; die Logarithmen der Zahlen 11 bis 99 zwar größer als 1, aber doch kleiner, als 2; die Logarithmen der Zahlen von 101 bis 999 zwar größer, als 2, aber doch kleiner, als 3, folglich Ganze und Brüche seyn müssen. Die Logarithmen der 10 und ihrer Potenzen sind daher nur ganze Zahlen; die Logarithmen aller übrigen Zahlen bestehen aus Brüchen, die man auf eine mühsame Weise berechnet, und in Büchern, die den Titel: logarithmische Tafeln, führen, hat abdrucken lassen.

§. 118. Um einen kleinen Überblick zu geben, wie logarithmische Tafeln aussehen, setze ich die Reihe der natürlichen Zahlen von 1 bis 16 nebst ihren Logarithmen her.

Natürliche Zahl = N.	Logarithmen = Log.
1	0,0000000
2	0,3010300
3	0,4771213
4	0,6020600
5	0,6989700
6	0,7781513
7	0,8450980
8	0,9030900
9	0,9542425
10	1,0000000
11	1,0413927
12	1,0791812
13	1,1139434
14	1,1461280
15	1,1760913
16	1,2041200
u. s. w.	

Anmerk.

Die Ganze in den Logarithmen nennt man die Kennziffer, Charakteristik; der angehängte Decimalbruch heißt Mantisse.

Die natürlichen Zahlen
von 1 — 9 haben 0 zur Kennziffer
von 10 — 99 — 1 —
von 100 — 999 — 2 —
von 1000 — 9999 — 3 —
u. s. w.

folglich ist die Kennziffer stets um eine 1 geringer, als die ihr zugehörige natürliche Zahl Ziffern hat. Daher läßt man auch in größeren Tafeln die Kennziffer ganz weg.

Der Deutlichkeit wegen wollen wir einige Aufgaben mit Hülfe vorstehender 16 Logarithmen lösen.

1. Es soll 3 mit 4 multiplicirt werden. Dies geschieht logarithmisch also Log. 3 + log. 4

$$\left.\begin{array}{r}\text{log. } 3 = 0{,}4771213 \\ +\text{ log. } 4 = 0{,}6020600\end{array}\right\}\text{ addirt.}$$

$$\text{log. } (3 \cdot 4) = 1{,}0791813,\ \text{gehört zu } 12.$$

2. Man dividirt z. B. 3 in 15 logarithmisch also:

$$\text{log. } \tfrac{15}{3} = \text{log. } 15 - \text{log. } 3;$$

$$\begin{array}{r}\text{log. } 15 = 1{,}1760913 \\ -\text{ log. } 3 = 0{,}4771213\end{array}\ \text{subtrahirt.}$$

$$\text{log. } \tfrac{15}{3} = 0{,}6989700,\ \text{gehört zur } 5.$$

3. Die 2 in die 4te Potenz zu erheben, heißt 4 log. 2.

$$\text{log. } 2 = 0{,}3010300 \quad (4 \text{ multiplic.}$$

$$\text{log. } 2^4 = 1{,}2041200$$

wozu die Zahl 16 gehört.

4. Aus

4. Aus 16 die $\sqrt[4]{}$ zu finden, heißt $\frac{\log. 16}{4}$

$$\log. 16 = 1{,}2041200$$
$$\text{dividirt durch } 4)\overline{\quad 0{,}3010300}$$

welcher Logarithme zur 2 gehört, also $\sqrt[4]{16} = 2$.

Die Rechnung mit größern Zahlen ist eben nicht weitläufiger, daher sind die Logarithmen ein recht bequemes Mittel, weitläufige Rechnungen kurz und leicht zu vollenden, die auf gewöhnlichem Wege sehr mühsam, oft unmöglich auszuführen sind.

§. 119. Ohne Zweifel werden sich Liebhaber mathematischer Beschäftigungen solche logarithmische Tafeln anschaffen wollen. Daher empfehlen wir ihnen folgende brauchbare Werke, in denen zugleich noch andere zur Mathematik gehörige Tafeln vorkommen, von denen wir in der Folge reden werden.

1. Adrian Vlaeqs Tabellen der Sinus, Tangenten ꝛc., nebst ihren Logarithmen, und der Logarithmen der Zahlen von 1 bis 10000. Preis 1 Rthlr. (Für Anfänger brauchbar und beliebt.)
2. Joh. Carl Schulze Neue und erweiterte Sammlung logarithmischer trigonometrischer, und anderer, zum Gebrauch der Mathematik unentbehrlicher Tafeln. Berlin, 1778. Zwei Bände. Preis 4 Rthlr.
3. Georg Vega Logarith. trigonometr. und andere zum Gebrauch der Mathematik eingerichtete Tafeln und Formeln. Wien, 1783. Preis 1 Rthlr 4 Gr.

Außer diesen recht brauchbaren Werken verdient aber folgendes vorzügliche Empfehlung:

4. Georg Vega Logarith. trigonometr. Tafeln nebst andern zum Gebrauch der Mathematik eingerichteten Tafeln und Formeln. 2 Bände. 3te verbesserte und vermehrte Aufl. Leipz. 1814. Preis 5 Rthlr.

(Der erste Band enthält die Logarithmen der natürlichen Zahlen von 1 bis 101000; die Logarithmen der trigonometrischen Linien; die Linien selbst, und viele

viele andere Tafeln und Formeln in höchster Schärfe. Der zweite Band enthält die sogenannten natürlichen Logarithmen, viele astronomische Tafeln, Formeln aus der Analysis, Differenzial- und Integralrechnung ꝛc., alles in höchster Schärfe, und daher für Kenner sehr brauchbar).

Jedem dieser Werke ist eine Anweisung beigefügt, die die Einrichtung und den Gebrauch erklärt.

§. 120. Jede Zahl, die mit der 10, 100, 1000 u. s. w. multiplicirt oder dividirt wird, ist im Logarithmus nur durch ihre Kennziffer unterschieden. So ist z. B.

log. 3450 = 3,5389506
und log. 34590 = 4,5389506
log. 345900 = 5,5389506
log. 34,59 = 1,5389506
log. 3,459 = 0,5389506

Da die Kennziffer sich nach der Anzahl Ziffern richtet, woraus die Ganzen einer Zahl bestehen, so kann man umgekehrt aus der Kennziffer eines Logarithmen auf die ihm gehörige Zahl schließen. Ist die Kennziffer 0, so ist die natürliche Zahl unter 10; ist sie 1, zwischen 10 und 100 ꝛc.

§. 121. Über den Gebrauch der Logarithmen müssen wir noch einige Aufgaben hinzufügen, und dem Anfänger rathen, seine Tafeln zur Hand zu nehmen, jeden Logarithmen selbst aufzusuchen, und die §. 115 gegebenen Regeln wohl zu beachten.

§. 122. Durch die Benutzung der Logarithmen wird, besonders wenn man mit großen Zahlen zu rechnen hat, viel Kürze und Bequemlichkeit erreicht. Auch bei der gemeinen Regeldetri kann man Logarithmen brauchen. Z. B.

3457 ℔ : 1000 Rthlr. = 864,25 ℔?

log. 864,25 = 2,9366394 } addirt.
log. 1000 = 3,0000000 }
5,9366394
log. 3457 = 3,5386994 subtrahirt.
log. 2,3979400 gehört zu 250,

folglich ist die Antwort ein Logarithme 2,3979400, den man in den Tafeln aufschlägt, und neben der Zahl 250 findet, welche = 250 Rthlr. sind.

§. 123.

§. 123. Unter der sogenannten **decadischen Ergänzung** versteht man das, was übrig bleibt, wenn man jede der Ziffern eines Logarithmen von 9 subtrahirt. Addirt man die decadische Ergänzung eines zu subtrahirenden Logarithmen, so ist es eben so gut, als hätte man ihn subtrahirt. Von der Kennziffer der Summe wirft man dann die Zehner weg.

So hätte z. B. voriges Exempel auch so ausgerechnet werden können:

$$\left.\begin{array}{rl} \log.\ 864{,}25 & = 2{,}9366394 \\ \log.\ 1000 & = 3{,}0000000 \\ \text{decadische Ergänzung des } \log.\ 3457 & = 6{,}4613006 \end{array}\right\} \text{addirt}$$

$$\cancel{1}2{,}3979400 = 250$$

von der Kennziffer 12 wird die 1 weggeworfen.

Die decadische Ergänzung ist aber da besonders bequem, wenn mehrere Divisoren in der Rechnung sind.

Z. B. $\frac{72648}{94.36}$ wird logarithmisch also stehen:

$$\begin{array}{rl} \log.\ 72648 & = 4{,}8612237 \\ \text{decadische Ergänzung des } \log.\ 94 & = 8{,}0268720 \\ \text{decadische Ergänzung des } \log.\ 36 & = 8{,}4436975 \\ \hline & \cancel{2}1{,}3317932 \end{array}$$

Der gefundene Logarithme 1,3317932 gehört zur Zahl 21468. Da nun aber aus der Kennziffer 1 hervorgeht, daß der Quotient nur 2 ganze Ziffern haben kann, so ist derselbe = 21,468.

§. 124. Den Logarithmen eines echten Bruchs mittelst der Tafeln zu finden.

1ste Auflösung. Weil der Nenner größer ist, als der Zähler, so subtrahire man den log. des Zählers vom log. des Nenners, und setze dem Unterschiede das Minuszeichen vor.

$$\text{Z. B. } \log.\ \tfrac{5}{8} = \log.\ 8 = 0{,}9030900$$
$$\log\ 5 = 0{,}6989700$$
$$\log.\ \tfrac{5}{8} = -\ 0{,}2041200$$

2te Auflösung. Vermehre die Kennziffer des Zählers so, daß der log. des Nenners abgezogen werden kann. Wie viel diese Vermehrung betragen habe, bemerke man hinter dem Logarithmen. Z. B. log. $\frac{5}{8}$

$$\begin{array}{rl} & \quad +1 \\ \text{log. } 5 = & 0{,}6989700 - 1 \\ \text{log. } 8 = & \underline{0{,}9030900} \\ \text{log. } \frac{5}{8} = & 0{,}7958700 - 1. \end{array}$$

3te Auflösung. Zum log. des Zählers addire die decadische Ergänzung des Nenners und schreibe — 10 hinter den log.

$$\begin{array}{rl} \text{Als log. } \frac{5}{8} = \text{log. } 5 = & 0{,}6989700 \\ \text{decadische Ergänzung log. } 8 = & \underline{9{,}0969099} \\ \text{log. } \frac{5}{8} = & 9{,}7958799 - 10 \\ \text{oder } = & 0{,}7958800 - 1. \end{array}$$

§. 125. Gebrauch eines Bruchlogarithmen, z. B. log. $\frac{5}{8}$. Es sey $\frac{5}{8}$ mit 80 zu multipliciren.

$$\begin{array}{rl} \text{log. } 80 = & 1{,}9030900 \\ \text{Nach 1r Aufl. d. §. 124 ist log. } \frac{5}{8} = & \underline{-0{,}2041200} \\ \text{log. } \frac{5}{8} \cdot 80 = & 1{,}6989700 \text{ geh. zu } 50. \end{array}$$

(Hier wurden die zu addirenden Logarithmen, weil sie verschiedene Zeichen hatten, mit einander ausgeglichen, wie dies §. 6 gelehrt.)

$$\begin{array}{rl} \text{oder log. } 80 = & 1{,}9030900 \\ \text{Nach 2r Aufl. d. §. 124 ist log. } \frac{5}{8} = & \underline{0{,}7958800 - 1} \\ \text{log. } \frac{5}{8} \cdot 80 = & 2{,}6989700 - 1 \\ \text{oder } = & 1{,}6989700 \text{ geh. zu } 50. \end{array}$$

Oder endlich, da $\frac{5}{8} \cdot 80 = \frac{5 \cdot 80}{8}$, ist auch folgende Rechnung zu empfehlen:

$$\begin{array}{rl} \text{log. } 80 = & 1{,}9030900 \\ \text{log. } 5 = & 0{,}6989700 \\ \text{decadische Ergänzung d. log. } 8 = & \underline{9{,}0969100} \\ \text{log. } \frac{5 \cdot 80}{8} = & \cancel{1}1{,}6989700 \text{ geh. zu } 50. \end{array}$$

§. 126. Man hätte auch den Bruch $\frac{5}{8}$ in einen Decimalbruch verwandeln und dazu den Logarithmen aufsuchen können.

$\frac{5}{8} = 0,625$, dessen log. $= 0,7958800 - 1$.
wobei zu merken, daß die Kennziffer einer Zahl, welche kleiner, als 1, ist, kleiner als Null, d. h. negativ werden muß.

So ist log $625 = 2,7958800$
$- \quad 6,25 = 0,7958800$
$- \quad 0,625 = 0,7958800 - 1$
$- \quad 0,0625 = 0,7958800 - 2$
u. s. w.

Die Kennziffer des Logarithmen eines Decimalbruchs ist allemal Null; und hinter dem Logarithmen stehen so viel Einheiten mit dem Minuszeichen, als der Decimalbruch überhaupt linker Hand Nullen hat. Der log. von 0,000625 $= 0,7958800 - 4$.

Bekommt aber ein Bruch durch die Verwandlung in einen Decimalbruch zu viele Decimalstellen, oder bleibt er unvollständig, so ist es genauer und sicherer, den gemeinen Bruch beizubehalten, und log. $\frac{a}{b}$ zu schreiben: log. a — log. b, wie §. 124. gewiesen worden ist.

§. 127. Hat ein Decimalbruch Ganze bei sich, so richtet sich die Kennziffer bloß nach den Ganzen. So ist log. $62,5 = 1,7958800$, und wenn man daher zu einer Zahl mit einem Decimalbruch, oder zum bloßen Decimalbruch den Logarithmen sucht, so bekümmert man sich um das Komma nicht, nimmt die Zahl für Ganze, und ordnet endlich die Kennziffer nach den wirklichen Ganzen.

§. 128. Die Erhebung einer Zahl zur verlangten Potenz. Z. B. log. $275^3 = 3$ log. 275.

$$\begin{array}{ll} \log. 275 & = \underline{2,4393327} \\ \log. 275^3 & = 7,3179981 \end{array} \text{(3 mal}$$

wozu die Zahl 20796875 gehört, welche der Kubus ist.

§. 129. Die Wurzel aus einer gegebenen Zahl z. B. $\sqrt[5]{2000}$ findet man

$$\begin{array}{l} \log. 2000 = 3,3010300 \\ \text{dividirt durch 5)} \overline{\qquad\qquad} \\ \log. \sqrt[5]{2000} = 0,6602060 \end{array}$$

wozu die Zahl 457305 gehört. Da aber aus der Kennziffer

ziffer o hervorgeht, daß die Wurzel zwischen 1 und 10 liegt, so ist sie nur $= 4,57305$.

§. 130. Die Wurzel aus einer Zahl, deren Logarithmus zum Theil positiv, zum Theil negativ ist, zu ziehen, richte man seine Kennziffer so ein, daß der Divisor in dem negativen Theil aufgeht.

$$\text{Z. B. } \log. \sqrt[5]{\frac{3475}{8946}} = \log. \frac{0,5893258 - 1}{5}$$

$$= \log. \frac{4,5893258 - 5}{5} = 0,9178651 - 1.$$

Die Wurzel wird zwischen 0 und 1 liegen, also ein Bruch seyn. In den Tafeln findet man dazu die Zahl 827685, welche $= 0,827685$ zu lesen, und $\sqrt[5]{\frac{3475}{8946}}$ ist.

§. 131. Den Exponenten einer gegebenen Potenz findet man, wenn man den Logarithmen der Potenz durch den Logarithmen der Wurzel dividirt, wobei man die 2 oder 3 niedrigsten Stellen der Mantisse weglassen kann. Z. B. die Zahl 61 sey in eine gewisse Potenz erhoben, welche $= 2476099$ ist. Welches ist ihr Exponent?

$$\frac{\log. 2476099}{\log. 19} = \frac{6,39376}{1,27875} = 5 = \text{Exponenten, also ist}$$
$$19^5 = 2476099.$$

§. 132. Zu einem gegebenen ganz negativen Logarithmen die zugehörige Zahl zu finden.

1ste Aufl. Suche zur decadischen Ergänzung des Logarithmen die Zahl.

Z. B. zum log. $- 0,2041200$ gehört die
decadische Erg. $= 9,7958800 - 10$
$= 0,7958800 - 1$, wozu 0,625 geh.

2te Aufl. Sieh den gegebenen log. als positiv an, und suche dazu die Zahl, welche der Nenner eines Bruchs ist, dessen Zähler $= 1$. Z. B. log. $- 0,2041200$ gehört, positiv genommen, zu 1,6; folglich ist die

$$\text{Zahl} = \frac{1}{1,6} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8} = 0,625.$$

§. 133. Die nähere Anweisung zum Gebrauch logarithmischer Tafeln ist solchen Werken immer beigefügt; daher beschließen wir diesen Abschnitt.

VI. Von den Gleichungen.

§. 134. Eine Gleichung ist ein doppelter Ausdruck für eine und dieselbe Größe. Zwischen beiden Ausdrücken steht das Gleichheitszeichen. Z. B.

$$3 + 2 = 5$$
$$10 - 8 = 2$$
$$12 = 2 . 6$$
$$3 . 9 = 24 + 3$$
$$\frac{15}{5} = \frac{6 . 2}{4} \text{ u. s. w.}$$

sind 5 Gleichungen, in denen das Wesentlichste darin besteht, daß auf jeder Seite gleiche Größen stehen. Denn $\frac{15}{5} = 3$, und $\frac{6 . 2}{4}$ auch $= 3$.

Ein solcher doppelter Ausdruck einerlei Größe bleibt daher immer eine Gleichung, wenn man auf jeder Seite gleichviel zulegt oder wegnimmt, mit einerlei Zahl multiplicirt oder dividirt, sie zu gleichen Potenzen erhebt, oder beiderseits einerlei Wurzel auszieht.

Wenn $3 + 2 = 5$ eine Gleichung ist, so ist es auch
$3 + 2 + 1 = 5 + 1$, denn auf jeder Seite ist $= 6$.

§. 135. Die Mathematiker unterscheiden Gleichungen vom ersten, zweiten, dritten, vierten Grade, je nachdem die darin vorkommende unbekannte Größe in der ersten, 2ten, 3ten oder 4ten Potenz erscheint.

§. 136. Das Verfahren, die unbekannte Größe in einer Gleichung so abzusondern, daß sie auf der einen Seite allein ist, und auf der andern lauter bekannte Größen, die ihr gleich sind, zu stehen kommen, gründet sich auf die allereinfachsten Regeln der Vernunft, und ist unter

ter dem Namen: **Auflösung der Gleichungen** bekannt.

Man muß bei diesem Geschäft stets dahin sehen, auf jeder Seite gleich große Werthe zu erhalten, weil es sonst keine Gleichung mehr bleiben würde.

Von der Seite, wo sich die unbekannte Größe befindet, schaffe man nach und nach alle bekannten Größen weg, und bringe sie auf die andere Seite, welches dadurch geschieht, daß man sie auf der einen Seite auslöscht und sie mit **entgegengesetztem** Zeichen auf die andere Seite setzt.

So oft man eine Veränderung der Art damit vorgenommen hat, mache man unter die ganze Gleichung einen Strich, wodurch die Übersicht erleichtert wird.

Kömmt die unbekannte Größe auf beiden Seiten vor, so bringe man sie (die gewöhnlich x; y oder z genannt wird) auf einerlei Seite, und sondere sie gehörig ab.

§. 137. Diese vorläufigen Regeln sind einstweilen hinlänglich. An Beispielen wollen wir sie und manche andere näher entwickeln.

1. Es sey $x + 3 = 5$ eine Gleichung,

so ist $x = 5 - 3$, wo die 3 mit entgegengesetztem Zeichen auf die andere Seite gebracht ist

und $x = 2$; denn $5 - 3 = 2$.

2. Es sey $x - 2 = 8$ eine Gleichung;

so ist $x = 8 + 2$, wo die 2 auf der andern Seite $+ 2$ wird.

also $x = 10$, denn $8 + 2$ macht 10.

3. Es sey $48 = x \,.\, 2 + 24$

$48 - 24 = x \,.\, 2$, wo $+ 24$ auf der andern Seite $- 24$ geworden ist.

$24 = x \,.\, 2$, denn $48 - 24$ ist 24

$\frac{24}{2} = x$, wo die multiplicirende 2 auf der andern Seite zum Divisor geworden ist.

$12 = x$, denn $\frac{24}{2} = 12$.

 4. Es

4. Es sey $\frac{x}{5} = 12 + 3$

$x = (12+3) . 5$, wo der Divisor 5 auf der andern Seite multiplicirt,

$x = 15 . 5$, wo die Größe (12 + 3) in Eine verwandelt ist,

$x = 75$, denn 15 mal $5 = 75$.

§. 138. Auf diese Weise haben wir den Werth von x in Zahlen gefunden, welches der Zweck der Rechnung ist. Mit Buchstabenausdrücken werden wir eben so verfahren, und die bekannten Größen a, b, c, d von den unbekannten absondern müssen.

1. Es sey $a + x - c = b$

$a + x = b + c$, wo c herübergebracht ist,

$x = b + c - a$, wo a herübergebracht ist.

2. Es sey $a . x + b = c$

$ax = c - b$

$x = \frac{c - b}{a}$

3. Es sey $\frac{b}{x} + d = a$

$\frac{b}{x} = a - d$

$b = (a - d) . x$, wo x herübergebr. ist.

$\frac{b}{a - d} = x$, wo a — d fortgeschafft ist.

Die Nenner der Brüche, die in den Gleichungen vorkommen, schafft man dadurch weg, daß man alle Glieder der ganzen Gleichung mit denselben multiplicirt. (Glieder heißen alle Größen, die das Additions- oder Subtractionszeichen haben. Größen, welche durch die Multiplication oder Division mit einander verbunden sind, gelten nur für 1 Glied; daher ist jede Größe ax oder $\frac{x}{c}$,

deßdesgleichen jede in eine Klammer eingeschlossene Größe nur als 1 Glied anzusehen. Z. B. $\frac{3x-7}{8}$ oder $(a-b).c$ wird nur für 1 Glied gelten können).

Es sey
$$\begin{array}{rcll}
\frac{5x+3}{x-1} & = & 7 & \\
 & & (.\,x-1) & \text{multiplicirt.} \\
5x+3 & = & 7x-7 & \text{die bekannten Größen auf die eine, und die unbek. auf die andere Seite gebr.} \\
+3+7 & = & 7x-5x & \\
10 & = & 2x & \\
\frac{10}{2} & = & x & \\
5 & = & x &
\end{array}$$

Es sey $\frac{x}{3}+\frac{a}{3}-\frac{bd}{4}=c.$ Die Nenner nach einander weggeschafft.
$$\begin{array}{rcll}
 & & (.3 & \\
x+a-\frac{3bd}{4} & = & 3c & \\
 & & (.4 & \\
4x+4a-3bd & = & 12c & \\
4x+4a & = & 12c+3bd & \\
4x & = & 12c+3bd-4a & \\
x & = & \frac{12c+3bd-4a}{4} & \text{wenn wirkl.} \\
x & = & 3c+\frac{3}{4}bd-a & \text{mit 4 dividirt wird.}
\end{array}$$

§. 139. Wenn eine Größe in mehrern Gliedern auf einer Seite als ein gemeinschaftlicher Factor erscheint, so setzt man die durch ihn multiplicirten Größen in eine Klammer, und hinter diese den gemeinschaftlichen Factor. Umgekehrt schafft man die Klammer dadurch wieder weg, daß man jedes Glied in derselben mit dem gemeinschaftlichen Factor multiplicirt.

Es sey $\frac{-ax+b}{x-c} = gd - f$

$$\overline{\qquad\qquad} (.\ x - c$$

$$-ax + b = gdx - fx - gdc + cf$$

$$b = gdx + ax - fx - gdc + cf$$ Die ax herüber gebracht.

$$b + gdc - cf = gdx + ax - fx$$

$$b + gdc - cf = (gd + a - f).x$$

$$\frac{b + gdc - cf}{gd + a - f} = x$$

Hier ist x gemeinschaftlicher Factor von 3 Grössen, die in die Klammer gesetzt werden. Und nun die bekannten Größen in der () weggebracht.

welcher Ausdruck sich auch so schreiben ließe: $\frac{b + (gd - f)c}{gd + a - f}$

denn c ist in 2 Gliedern gemeinschaftlicher Factor.

§. 140. Jede Proportion ist eine Gleichung. Nach den Regeln der Gleichungen behandelt, findet sich jedes der 4 Glieder sehr leicht.

Es sey $a : b = c : d$ eine Proportion, so ist nach §. 78.
$ad = bc$ eine Gleichung, in der sich jedes Glied durch Absonderung finden läßt.

denn $a = \frac{bc}{d}$ deßgleichen $\frac{ad}{c} = b$

und $d = \frac{bc}{a}$ und $\frac{ad}{b} = c$

§. 141. Jedes Formular für irgend eine Größe ist eine Gleichung, welche auf der einen Seite das Formular, auf der andern die Größe enthält. Durch Absonderung läßt sich ein neuer Ausdruck für jede im Formular vorkommende Größe finden. Daher ist die Auflösung der Gleichungen eine dem Mathematiker unentbehrliche Rechnungsart.

§. 142. Oft kommen in einer Gleichung zwei oder mehrere unbekannte Größen vor. Dann muß man aus

der

der Aufgabe eben so viel Gleichungen zu ziehen wissen, als unbekannte Größen darinnen sind, wenn eine bestimmte Antwort möglich seyn soll.

Z. B. Die Summe zweier Zahlen x und y beträgt 40; ihr Unterschied 8. Welches sind die Zahlen?

Die beiden Gleichungen sind: $x + y = 40$
ihr Unterschied $x - y = 8$

Eine von den mancherlei Auflösungen, die man kennt, ist folgende überall anwendbare:

Suche aus jeder Gleichung einen Werth für x. Die beiden Werthe von x müssen sich nothwendig selbst gleich seyn, weil $x = x$, und eine neue Gleichung geben, in der nur Eine unbekannte Größe, nämlich y, ist, die sich dann leicht bestimmen läßt.

1ste Gleich. $x + y = 40$ 2te Gleich. $x - y = 8$

Also $x = 40 - y$ Also $x = 8 + y$

neue Gleichung ist $40 - y = 8 + y$

$$40 - 8 = y + y = 2y$$

$$32 = 2y$$

$$16 = y$$

Setzt man den Werth von $y = 16$ in die 1ste Gleichung, so ist

$$x + y = 40$$

$$= x + 16 = 40$$

$$x = 40 - 16$$

$$x = 24$$

Folglich sind die beiden Zahlen $y = 16$, und $x = 24$ gefunden.

Eine bequeme Auflösungsweise, wenn die unbekannten Größen verschiedene Coëfficienten haben, ist auch folgende:

Multiplicire die erste Gleichung mit dem Coëfficienten, den x in der zweiten Gleichung hat, und die zweite Gleichung mit dem Coëfficienten, den x in der ersten hat. Hernach addire oder subtrahire beide Gleichungen, so verschwindet x, und es bleibt nur Eine

Eine unbekannte Größe darin, nämlich y, deren Werth man dann findet. Z. B. Man sucht 2 Zahlen von folgender Beschaffenheit: das Vierfache der ersten zum Fünffachen der zweiten addirt, macht 23; das Siebenfache der ersten mit dem Zweifachen der andern macht 20. In Zeichen ist dies

$$\left.\begin{array}{l} 4x + 5y = 23 \\ 7x + 2y = 20 \end{array}\right\} \text{Hauptgleichungen.}$$

Multiplicirt man die erste mit 7, die zweite mit 4, so kommt

$$\begin{array}{l} 28x + 35y = 161 \\ \underline{28 \quad + \ 8y = \ 80} \text{ subtrahirt} \\ \text{Rest} = 27y = 81 \text{ neue Gleichung.} \\ \qquad y = \tfrac{81}{27} = 3. \end{array}$$

Setzt man nun den Werth von $y = 3$ anstatt y in eine der Hauptgleichungen, so ergiebt sich x.

$$\begin{array}{l} \underline{4x + 5 \cdot 3 = 23} \\ \underline{4x + \ 15 = 23} \\ \underline{4x \qquad = 23 - 15} \\ x \qquad = \tfrac{8}{4} = 2. \end{array}$$

Hätte man mit den Coëfficienten von y in den Hauptgleichungen dieselben multiplicirt, so wäre y daraus verschwunden, und x in der neuen Gleichung gefunden worden.

§. 143. Wenn 3 unbekannte Größen x, y, z in einer Gleichung vorkommen, so suche man den allgemeinen Werth der einen z. B. x aus der ersten Hauptgleichung, und versetze ihn in die zweite, worin x vorkommt. Dadurch wird x verschwinden. Mit den beiden Größen y und z, die jetzt nur noch da sind, verfahre man, wie im vorigen §. 142.

Z. B. Drei Zahlen sind so beschaffen, daß die Summe der ersten und zweiten, also $x + y = 23$; der ersten und dritten $x + z = 24$; und der zweiten und dritten, $y + z = 25$ macht.

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 23 \\ x + z = 24 \\ y + z = 25 \end{array}\right\} \text{Hauptgleichungen.}$$

Aus der ersten ist $x = 23 - y$. Durch Versetzung dieses Werthes in die zweite Hauptgleichung wird

$$23 - y + z = 24; \quad \text{es ist aber } y + z = 25$$

$$z - y = 24 - 23 \quad\quad \text{und} \quad z = 25 - y$$

$$z \quad = 1 + y$$

Die beiden Werthe von z müssen sich gleich seyn, daher

$$1 + y = 25 - y$$

$$y + y = 25 - 1$$

$$2y = 24$$

$$\text{Also} \quad y = 12$$

Nun ist in d. ersten Hauptgleich. $x + y = 23$

$$\text{also} \quad x + 12 = 23$$

$$x \quad = 23 - 12 = 11$$

Und in der 2ten Hauptgleichung war $x + z = 24$

$$\text{also} \quad 11 + z = 24$$

$$z = 24 - 11$$

$$z = 13$$

folglich sind die Werthe von x, y und z gefunden worden, nämlich $x = 11$; $y = 12$; $z = 13$.

§. 144. Können aus einer Aufgabe nicht so viel Hauptgleichungen gezogen werden, als unbekannte Grössen darin vorkommen, so bleibt die Auflösung zum Theil unbestimmt oder willkührlich. Z. B.

Das Sechsfache einer Zahl soll dem Quadrat einer andern gleich seyn. Wenn x und y diese Zahlen sind, so soll $6x = y^2 = yy$

$$\text{und} \quad x = \frac{y^2}{6}$$

Man setze nun anstatt y welche Zahl man will, so wird immer die Frage beantwortet. Es sey $y = 4$, so ist

$\frac{y^2}{6} = \frac{16}{6} = 2\frac{2}{3} = x$. Wenn $y = 5$; so ist $\frac{y^2}{6} = \frac{25}{6} = 4\frac{1}{6} = x$. In jedem Falle wird nur das Verhältniß $x : y$ gefunden.

§. 145. Zur Übung im Anordnen und Auflösen der Gleichungen wollen wir einige Aufgaben lösen. (Siehe M. Hirsch Sammlung von Beispielen und Aufgaben ...... S. 139.)

1) Jemand hat 2640 Rthlr. und darunter $4\frac{1}{2}$ mal so viel Münze als Courant. Wie viel hatte er von jeder Sorte?

Aufl. Nenne das Courant x
dann ist die Münze $= 4\frac{1}{2}x$

und die Summe $= 5\frac{1}{2}x = \frac{11x}{2} = 2640$ rthl.

$$11x = 5280 \quad (2$$

$$x = \frac{5280}{11}$$

Courant $= x = 480$ rthl.
und die Münze $= 4\frac{1}{2} \cdot 480 = 2160$ rthl.

2) Ich multiplicire eine gewisse Zahl (x) mit 4, und dividire das Product durch 3; da erhielt ich 24. Welche Zahl ist es?

$$\frac{4x}{3} = 24$$

$$4x = 72 \quad (3$$

$x = 18$ war die Zahl.

3) Zu einem bevorstehenden Kriege sollen drei Städte A, B, C ihr Contingent von 594 Mann stellen; die Vertheilung soll nach Verhältniß ihrer Volksmenge geschehen. Wenn nun die Volksmenge von A sich zu der von B, wie $3 : 5$; die Volksmenge von B zu der von C sich wie $8 : 7$ verhält, wie viel Mann muß jede Stadt stellen?

Aufl. Reducire das Verhältniß B : C auf das von A : B und sprich

$$A : B = 3 : 5$$
ferner $B : C = 8 : 7$
d. i. $5 : C = 8 : 7$

Also ist $5 \cdot 7 = 8 C = \frac{35}{8} = 4\frac{3}{8} = C.$

Nun hat A $3x$
B $5x$
C $4\frac{3}{8}x$

Summe $12\frac{3}{8}x$ oder $\frac{99x}{8} = 594$ Mann

$$99x = 4752 \quad (8$$

$$x = \frac{4752}{99} = 48 \text{ Mann.}$$

Aber A giebt $3x$, oder $3 \cdot 48 = 144$ Mann
B — $5x$ — $5 \cdot 48 = 240$ —
C — $4\frac{3}{8}x$ — $4\frac{3}{8} \cdot 48 = 210$ —

Summa 594 Mann.

4) Unter 3 Personen A, B, C sollen 1170 Rthlr. nach Verhältniß ihres Alters vertheilt werden. Nun ist B um den dritten Theil älter, C aber doppelt so alt, als A. Wie viel erhält jede Person?

Aufl. Das Alter von A $= x$
dann ist B $= x + \frac{1}{3}x$
und C $= 2x$

Summe $= 4\frac{1}{3}x$

$$4\frac{1}{3}x = 1170 \text{ Rthlr.}$$

$$\frac{13x}{3} = 1170$$

$$13x = 3510 \quad (3$$

$$x = \frac{3510}{13} = 270 \text{ Rthlr.} = A.$$

und $270 + \frac{270}{3} = 270 + 90 = 360 = B.$
und $2 \cdot 270 = 540 = C.$

Summe $= 1170$ Rthlr.

5) Die Garnison einer Stadt besteht aus 1250 Mann, theils Cavallerie, theils Infanterie. Jeder Cavallerist bekommt monatlich 5, und jeder Infanterist 3 Rthlr. Wenn nun der monatliche Sold 4150 Rthlr. beträgt, wie viel Cavalleristen und Infanteristen befinden sich darunter?

Aufl. Es sey die Infanterie $= x$; also ihr Sold $= 3x$
und die Cavallerie $= y$; und ihr Sold $= 5y$

Nach der Aufg. ist $x + y = 1250$; u. $3x + 5y = 4150$ rthl.

der Werth von $x = 1250 - y$; so wie $x = \frac{4150 - 5y}{3}$

Folglich ist auch $1250 - y = \frac{4150 - 5y}{3}$ $\cdot 3$

$$3750 - 3y = 4150 - 5y$$

$$5y - 3y = 4150 - 3750$$

$$2y = 400$$

$y = 200$ Mann Cavall.

Und $x + y = 1250$ Mann

d. h. $x + 200 = 1250$

$x = 1250 - 200 = 1050$ Mann Infanterie.

(Vergl. §. 142.)

6) Es sollen 3 Zahlen von solcher Beschaffenheit gefunden werden, daß die zweite, durch die erste dividirt, 2 zum Quotienten und 1 für den Rest; hingegen die dritte durch die zweite dividirt 3 zum Quotienten und 3 für den Rest gebe; die Summe dieser 3 Zahlen soll 70 seyn. Welche Zahlen sind es?

Aufl. Wenn die 3 Zahlen x, y, z heißen, so soll

$$\left.\begin{array}{l} \frac{y - 1}{x} = 2 \\ \text{und } \frac{z - 3}{y} = 3 \\ \text{und } x + y + z = 70 \end{array}\right\} \text{Hauptgleichung.}$$

Aus der ersten ist $y = 2x + 1$

Diesen Werth in die zweite Gleichung gebracht, giebt

$$\frac{z - 3}{2x + 1} = 3$$

$$\overline{}\,(2x + 1$$

$$z - 3 = 6x + 3$$

$$z \quad = 6x + 6$$

Jetzt sind die Werthe von y und z in lauter x gefunden; da nun $x + y + z = 70$, so muß $x = x$

$$y = 2x + 1$$

$$z = 6x + 6$$

$$\text{Also } 70 = 9x + 7$$

$$70 - 7 = 9x$$

$$\tfrac{63}{9} = x$$

$$7 = x$$

folglich $2x + 1 = 2 \cdot 7 + 1 = 15 = y$
und $6x + 6 = 6 \cdot 7 + 6 = 48 = z.$

7) Ich bin jetzt 30, mein Bruder 20 Jahre alt, und folglich ist $3 : 2$ das Verhältniß unsers Alters. Nach wie vielen Jahren wird das Verhältniß $5 : 4$ seyn?

Aufl. Nenne die gesuchten Jahre x, so soll sich verhalten

$x + 30 : x + 20 = 5 : 4$; nach den Regeln der Proportion

ist $(x + 30) \cdot 4 = (x + 20) \cdot 5$

$$4x + 120 \quad = 5x + 100$$

$$120 - 100 \quad = 5x - 4x$$

$20 \quad = x$, also nach 20 Jahren.

8) In einer zahlreichen Gesellschaft befanden sich anfangs dreimal so viel Herren als Frauen; später aber, als 8 Männer mit ihren Frauen weggingen, wurde das Verhältniß der beiden Geschlechter noch ungleicher; es blieben nämlich gar noch 5 mal so viel Herren als Frauen. Aus wie viel Personen bestand die Gesellschaft im Anfange?

Aufl.

Aufl. Nenne die Zahl der Frauen x, so sind vor der Entfernung der 16 Personen x . 3 die Herren; nach ihrer Entfernung aber ist das Verhältniß

$$3x - 8 : x - 8 = 5 : 1$$

und $3x - 8 = (x - 8) . 5$

$$3x - 8 = 5x - 40$$

$40 - 8 = 5x - 3x$, d. h. $32 = 2x$, und $16 = x$ = Frauen, und $3 . 16 = 48$ Herren, in allem 64 Personen.

9) An einem vollen Weinfasse befinden sich 3 Spundlöcher von verschiedener Größe; durch das erste könnte der Wein in 2, durch das zweite in 3, und durch das dritte in 4 Stunden abgezapft werden. Wie viel Zeit wird zur Ausleerung erfordert, wenn alle 3 Spundlöcher zugleich geöffnet werden?

Aufl. Es heiße diese Zeit x Stunden, so läuft

		12 Generalnenner.
das 1ste Spundloch	$\frac{x}{2}$	6x
2te —	$\frac{x}{3}$	4x
3te —	$\frac{x}{4}$	3x

Summe = 13x in 12 Stunden

$x = \frac{12}{13}$ St. $= 55\frac{5}{13}$ Minuten.

Anmerk. Man schließe: Wenn das erste Spundloch allein läuft, so leert es das Faß in 12 Stunden 6 mal; das zweite aber nur 4 mal, und das dritte 3 mal; also 13 mal in 12 Stunden (wenn alle Löcher laufen), wie lange Zeit ist zu einem einmaligen Leeren erforderlich?

Allgemein heiße die Zeit des ersten Spundlochs a; des 2ten = b; des 3ten = c, so findet man die Zeit, in welcher alle 3 Löcher das Faß leeren, in allgemeinen Ausdrücken:

1

abc

$abc =$ Generalnenner.

$$\begin{array}{c|l} \frac{x}{a} & bcx \\ \frac{x}{b} & acx \\ \frac{x}{c} & abx \end{array}$$

Summe $(bc + ac + ab)\,x$

Gleichung.

$$(bc + ac + ab)\,x = abc$$

$$x = \frac{abc}{bc+ac+ab}$$

§. 146. Aus diesen 9 Beispielen geht hervor, daß es zum Anordnen der Gleichung öfters mancherlei Vorbereitungen bedarf, die in jedem besondern Falle der Beurtheilung und dem Scharfblick des Rechners überlassen bleiben; aber man wird auch mit Vergnügen bemerken, daß die Gleichungen ein weiteres Feld, als jede andere Rechnungsart, und eigentlich alle Rechnungsarten mit umfassen. Nach einigen Schriftstellern ist die Algebra eine Wissenschaft, eine unbekannte Größe durch Gleichungen zu finden.

§. 147. Gleichungen vom zweiten Grade, oder quadratische Gleichungen heißen solche, in denen x oder die unbekannte Größe in der 2ten Potenz, x^2, ein oder etliche Mal vorkömmt. Man theilt sie in reine, und unreine quadratische Gleichungen.

Reine quadratische Gleichungen sind es, wenn x^2 nur allein auf einer Seite abgesondert bleibt. Z. B.

$$ax^2 = b$$

$$x^2 = \frac{b}{a}$$

beiderseits $\sqrt{\ }$ ausgezogen.

$$x = \sqrt{\frac{b}{a}}$$

wobei also die unbekannte Größe x abgesondert, und beiderseits die $\sqrt{\ }$ ausgezogen wird, um den Werth von x zu haben.

Unreine quadratische Gleichungen sind die-

diejenigen, worin außer x^2 auch noch x mit einem bekannten Coëfficienten vorkommt; als $x^2 + 6x = 27$.

§. 148. Die Gleichung mag beschaffen seyn, wie sie will, so lassen sich ihre Glieder so ordnen, daß x^2 und x bekannte Coëfficienten bekommen, und die ganze Gleichung auf Null gebracht werden kann.

Z. B. $3x^2 + 6cx - x = x^2 + 5ax - c + dn$

Hier können alle Glieder auf eine Seite gebracht werden; auf die leere Seite schreibt man Null. Dann wird obige Gleichung

$$3x^2 - x^2 + 6cx - 5ax - x + c - dn = 0$$

einfacher geordnet: $2x^2 + (6c - 5a - 1) . x + c - dn = 0$

Die bekannte Größe bei x^2 (die 2) wollen wir allgemein a; die bei x $(6c - 5a - 1)$, welche sich allemal in Eine Zahl verwandeln läßt, wollen wir $= b$; und endlich die bekannte Größe $(c - dn)$ hinter x wollen wir $= q$ nennen. Dann haben wir eine Gleichung, welche alle unreine quadratische Gleichungen allgemein vorstellt, a, b und q mögen Größen seyn, wie sie wollen.

$$ax^2 + bx + q = 0, \text{ oder } ax^2 - bx - q = 0.$$

ax^2 muß stets das Pluszeichen haben, weil sonst $\sqrt{}$ unmöglich wäre; hat es im Verfolg der Rechnung etwa Minus bekommen, so bringe man es auf die andere Seite, wo es dann + erhält. — Die Wurzel kann bekanntlich beide Zeichen haben.

§. 149. Ehe wir zur Auflösung der unreinen quadratischen Gleichungen schreiten, wollen wir noch einige Exempel von reinen quadratischen Gleichungen geben.

1) Man sucht eine Zahl, deren Hälfte mit ihrem vierten Theil multiplicirt, und alsdann von diesem Product 10 abgezogen, 152 zum letzten Facit giebt.

Aufl. Die Zahl sey x, so ist ihre Hälfte $= \frac{x}{2}$, und ihr Viertel $= \frac{x}{4}$, und nach der Bedingung

soll

$$\left(\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{4}\right)-10=152$$

$$\frac{x^2}{8}-10=152$$

$$\frac{x^2}{8}=152+10=162$$

(8

$$x^2=1296$$

auf beid. Seit. $\sqrt{\ }$ ausgez. $=x=\sqrt{1296}$

$x = 36 =$ der gesuchten Zahl.

2) Es wird eine Zahl x von der Beschaffenheit gesucht, daß, wenn man dieselbe erst zu 94 addirt $(x+94)$, hernach auch von 94 subtrahirt $(94-x)$, und diesen Rest mit jener Summe multiplicirt $(x+94)\cdot(94-x)$, das Product 8512 sey. Welche Zahl ist es?

$$\begin{array}{l} x+94 \\ 94-x \end{array}\Big\}\ \text{multiplicirt}$$

$$-x^2-94x$$

$$8836+94x$$

Product $=-x^2+8836$, welches $=8512$ seyn soll.

$-x^2$ auf die and. Seite gebr., dam. es $+x^2$ werde $8836-8512=x^2$

$$324=x^2$$

$$\sqrt{324}=x$$

gesuchte Zahl $=18=x$

3) Ein gewisses Capital (x) steht zu 4 Procent auf Zinsen; multiplicirt man das Capital mit den 5monatlichen Zinsen desselben, so erhält man $117041\frac{2}{3}$ rhl. Was für ein Capital ist es?

Aufl. Schließe: 100 Rthlr. : 4 Rtlr. $=$ x Rtlr. : $\frac{4x}{100}$ jährliche Zinsen;

und 12 Monat : $\frac{4x}{100}=5$ Monat : $\frac{20x}{1200}$ Rthlr. 5 monatliche Zinsen.; damit das Capital x multipliplicirt giebt $\frac{20xx}{1200}$ oder einfacher $= \frac{x^2}{60}$, welches $= 117041\frac{2}{3}$ seyn soll.

$$\text{Gleichung } \frac{x^2}{60} = 117041\tfrac{2}{3}$$
$$x^2 = 7022500 \quad (60$$
$$x = \sqrt{7022500}$$
$$x = 2650 \text{ Rthlr. Capital.}$$

4) Ein Cylinder ist 20 Zoll lang und faßt 1004,8 Kubikzoll; wie groß ist der Halbmesser ($= r$) seiner Grundfläche?

In der Körpermessung findet man für den Inhalt eines Cylinders das Formular: $r^2 p . h = J$, wobei r Radius, p die beständige Zahl 3,14; und h die Höhe oder Länge bedeutet. Folglich wird

$$r^2 p . h = J = \text{Inhalt}$$
$$= r^2 . 3{,}14 . 20 = 1004{,}8 \quad \text{nun } r^2 \text{ abgesond.}$$
$$r^2 = \frac{1004{,}8}{3{,}14 . 20} = \frac{1004{,}8}{62{,}8}$$
$$r^2 = 16$$
$$r \text{ oder Halbmesser} = \sqrt{16} = 4 \text{ Zoll.}$$

§. 150. Jede unreine quadratische Gleichung muß sich so ordnen lassen, daß sie endlich folgende Gestalt hat:

$$x^2 + px = c, \text{ oder } x^2 - px = c$$

wobei p und c bekannte Größen sind. Siehe §. 148.

Die Größe $x^2 + px$ ist aber kein vollständiges Quadrat, denn wenn man $a + b$ ins Quadrat erhebt, so bekommt man $a^2 + 2ab + b^2$; also fehlt auch an dem Quadrat in der Gleichung der dritte Theil, nämlich b^2, den man aus $a^2 + 2ab$ dadurch gefunden hätte, daß man das, was sich im zweiten Giede außer a befindet ($2b$), halbirte (b) und quadrirte (b^2) und hinzufügte, wodurch erst ein wirkliches Quadrat wird, nämlich

$$a^2 + 2ab + b^2$$
$$\text{oder } a^2 + 2ba + b^2$$

Die

die $2b$ ist Coëfficient von a, und dasjenige, was in unserer Gleichung p ist. Daher können wir nun das unvollständige Quadrat $x^2 + px$ dadurch vollständig machen, daß wir den Coëfficienten von x, nämlich p, halbiren, quadriren und zu $x^2 + px$ addiren. Die Wurzel muß dann seyn $x + \frac{p}{2}$. Der halbirte und quadrirte Coëfficient p wird in der Gleichung auch auf der andern Seite, wo die bekannte Größe c steht, addirt werden müssen, wenn es eine Gleichung bleiben soll. Das Quadrat von $\frac{p}{2}$ ist $= \frac{p}{2} \cdot \frac{p}{2} = \frac{p^2}{4}$ oder $\frac{1}{4}p^2$, und die Gleichung sieht nun also aus:

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} = c + \frac{p^2}{4}$$

Die Wurzel auf der Seite, wo sich x^2 befindet, wissen wir, sie ist $= x + \frac{1}{2}p$, und da auf der andern lauter bekannte Größen sind, die sich in eine einzige bringen lassen, so wird man auch da die $\sqrt{\ }$ ausziehen können. Dann ist

$$x + \tfrac{1}{2}p = \sqrt{\left(c + \frac{p^2}{4}\right)}$$

$$\text{folglich } x = \sqrt{\left(c + \frac{p^2}{4}\right)} - \tfrac{1}{2}p$$

§. 151. Die Auflösung der unreinen quadratischen Gleichungen ist daher in folgenden Regeln enthalten:

1. Ordne die Gleichung zur Form $x^2 + px = c$
   oder $x^2 - px = c$.

2. Halbire p und quadrire es, so wird es $\frac{p^2}{4}$.

3. Addire dies $\frac{p^2}{4}$ auf beiden Seiten der Gleichung:

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} = c + \frac{p^2}{4}.$$

4. Ziehe auf beiden Seiten die Wurzel aus. Sie ist

$$x + \tfrac{1}{2}p = \sqrt{\left(c + \frac{p^2}{4}\right)}.$$

4. Bringe die $\tfrac{1}{2}p$ mit verändertem Zeichen auf die andere Seite, so ist x abgesondert, und

$$x = \sqrt{\left(c + \frac{p^2}{4}\right)} - \tfrac{1}{2}p$$

Wenn die Gleichung folgende Gestalt hat

$$x^2 - px = c, \text{ so ist } \frac{p}{2} = -\frac{p}{2}, \text{ u. } -\frac{p}{2} \cdot -\frac{p}{2} = +\frac{p^2}{4}$$

$$\text{folgl. } x^2 - px + \frac{p^2}{4} = c + \frac{p^2}{4}$$

die $\sqrt{}$ ausgezogen

$$\text{und } x - \frac{p}{2} = \sqrt{\left(c + \frac{p^2}{4}\right)}$$

$$\text{endlich } x = \sqrt{\left(c + \frac{p^2}{4}\right)} + \frac{p}{2}$$

§. 152. Wir wollen nicht vergessen, daß jede Quadratwurzel sowol positiv als negativ genommen werden kann. Daher schreibt man auch beide Zeichen vor die Wurzel, und die Umstände bestimmen, welches Zeichen gelten soll.

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(c + \frac{p^2}{4}\right)}$$

$$\text{oder } x = \frac{p}{2} \mp \sqrt{\left(c + \frac{p^2}{4}\right)}$$

§. 153. Zur Übung wollen wir einige Aufgaben lösen.

1. Von zwei Zahlen ist die eine um 6 größer, als die andere; mit einander multiplicirt geben sie 27. Welche Zahlen sind es?

Aufl. Es sey x die kleinere, und x + 6 die größere.

Nach

Nach der Bedingung soll $x \cdot (x + 6) = 27$

d. Coëfficienten halbirt, gibt 3, u. $3^2 = 9$ auf beid. Seit. addirt $\left\{ \begin{array}{l} x^2 + 6x = 27 \\ x^2 + 6x + 9 = 27 + 9 = 36 \end{array} \right.$

Wurzel ausgezogen $x + 3 = \sqrt{36} = 6$

$x = 6 - 3$

Da x zwei Werthe haben kann $x = +6 - 3 = +3$

und $x = -6 - 3 = -9$

die beiden Zahlen sind also 3 und 9, welche die verlangten Eigenschaften haben.

2. Wie groß ist x in folgender auf Null gebrachten Gleichung?

$$x^2 - 7x + 3\tfrac{1}{4} = 0$$

$$x^2 - 7x = -3\tfrac{1}{4}$$

$$x^2 - 7x = -\tfrac{13}{4}$$

$$x^2 - 7x = -3{,}25$$

$\frac{7}{2} = 3{,}5$, dessen Quadrat $= 12{,}25$ $\Big\}$ $x^2 - 7x + 12{,}25 = 12{,}25 - 3{,}25 = 9$

daraus die $\sqrt{\ } = x - 3{,}5 = \pm\sqrt{9} = \pm 3$

$x = +3 + 3{,}5 = 6{,}5$

und $-3 + 3{,}5 = 0{,}5$

3. Ein Kaufmann hat zweierlei Thee von verschiedenem Gewicht und Preise. Das Gewicht der erstern Sorte verhält sich zum Gewicht der zweiten Sorte, wie 4 : 3. Das Pfund der erstern kostet halb so viel Groschen, als sie an Pfunden wiegt; das Pfund der zweiten kostet 6 Gr. weniger. Der Betrag des Thee's überhaupt ist 218 Rthlr. 8 Gr. Wie viel wiegt jede Sorte?

Aufl. Es sey die erste Sorte x ℔; die zweite = y ℔; so ist x ℔ : y ℔ = 4 : 3

und $x = \frac{4y}{3}$; oder $y = \frac{3x}{4}$ (Siehe §. 140.)

der Preis der ersten Sorte $= \frac{x}{2}$, ihr ganzer

Werth

Werth $= x \cdot \frac{x}{2} = \frac{x^2}{2}$. Der Preis der zweiten Sorte $= \frac{x}{2} - 6$, ihr ganzer Werth $\left(\frac{x}{2}-6\right) \cdot y$ oder $= \left(\frac{x}{2}-6\right) \cdot \frac{3x}{4} = \frac{3x^2}{8} - \frac{18x}{4}$.

Die Summe beid. Werthe $= \frac{x^2}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{18x}{4} = 5240$ Gr.

$$\text{(.2)}$$

$$x^2 + \frac{3x^2}{4} - 9x = 10480 \text{ Gr.}$$

$$\text{(4)}$$

$$4x^2 + 3x^2 - 36x = 41920$$

$$7x^2 - 36x = 41920 \quad \text{(:7)}$$

$$x^2 - 5{,}143x = 5988{,}57$$

D. Qudr. v. $\frac{5{,}143}{2}$ add. $= x^2 - 5{,}143x + 6{,}612 = 5988{,}57$

$$+ 6{,}612$$

$$= 5995{,}182$$

aus beiden Seiten die $\sqrt{}$ gez. $x - 2{,}571 = 77{,}429$

$$x = 77{,}429 + 2{,}571$$

$$80{,}000 = 80 \text{ ₰.}$$

Da $x = 80$ ₰, so muß, wenn man den oben gefundnen Werth unterlegt, $y = \frac{3x}{4} = 60$ ₰ seyn.

4. Die Summe zweier Zahlen soll 41, und die Summe ihrer Quadrate soll 901 seyn. Was für Zahlen sind es?

Aufl. Die beiden Zahlen mögen x und y seyn, so ist

$$x + y = 41, \text{ also } x = 41 - y$$

und $x^2 + y^2 = 901$, also $x^2 = 901 - y^2$.

Um

Um für x gleiche Werthe zu bekommen, erhebe man $x = 41 - y$ ins Quadrat. $(41 - y) \cdot (41 - y) = y^2 - 82y + 1681 = x^2$.

Nun ist $y^2 - 82y + 1681 = 901 - y^2$

$2y^2 - 82y = 901 - 1681$ besser geordnet.

$2y^2 - 82y = - 780$ (:2

gehör. Form $y^2 - 41y = - 390$

$\frac{41^2}{4}$ addirt $y^2 - 41y + 420{,}25 = - 390 + 420{,}25$

$\sqrt{\ }$ ausgez. $y - 20{,}5 = \sqrt{30{,}25}$

$y - 20{,}5 = 5{,}5$

$y = 5{,}5 + 20{,}5 = 26$, der einen Zahl.

Aber $x + y = 41$

und $x + 26 = 41$

$x = 41 - 26 = 15$, der and. gesucht. Zahl.

Z. 154. Am meisten macht die Anordnung der Gleichung dem Anfänger zu schaffen; indessen erlangt er durch eigene Versuche und Nachdenken bald eine Fertigkeit, die ihm das größte Vergnügen gewährt. Dem Wißbegierigen empfehlen wir

M. Hirsch Sammlung von Beispielen, Formeln und Aufgaben aus der Buchstabenrechnung und Algebra.

Dieses treffliche Werkchen enthält fast nur Aufgaben und Antworten, ohne Ausrechnung. Viele der hier mitgetheilten Aufgaben sind daraus entlehnt, und nur die Ausrechnungen, worauf es hier hauptsächlich ankam, von mir hinzugefügt.

§. 155. Eine Gleichung, worin die gesuchte Größe endlich in der dritten Potenz erscheint, als x^3, heißt eine kubische Gleichung. Z. B.

$$x^3 + ax^2 + bx = c; \text{ oder } \frac{x^3 p}{6} = c.$$

Wenn

Wenn die x^3 nur allein darin vorkommt, so heißt die Gleichung eine reine kubische Gleichung, als $\frac{x^3 p}{6} = c$; unrein oder vollständig heißt sie, wenn x auch noch in der zweiten und ersten Potenz mit einer bekannten Größe darin vorkommt, als $x^3 + ax^2 + bx - c = 0$.

§. 156. Die Auflösung der reinen kubischen Gleichung besteht darin: Sondere x^3 auf einer Seite ab, bringe alle bekannte Größen auf die andere Seite, verwandle sie in Eine, und ziehe auf beiden Seiten die $\sqrt[3]{}$ aus, so erhält man x und seinen Werth. Die Wurzel kann eine Plus- oder Minusgröße seyn, aber niemals beide Zeichen zugleich haben, wie die quadratische Wurzel.

1. Es sey $\frac{x^3 p}{6} = c$

$$\begin{array}{rcll}
\frac{x^3 p}{6} & = & c & (.6 \\
\hline
x^3 p & = & 6c & \\
\hline
x^3 & = & \frac{6c}{p} & \\
\hline
x & = & \sqrt[3]{\frac{6c}{p}} & (\sqrt[3]{}
\end{array}$$

2. Einer sprach: ich multiplicirte eine Zahl (x) mit dem halben Quadrate derselben $\left(\frac{x^2}{2}\right)$ und erhielt die Zahl 256. Welche Zahl war es?

Aufl. Nach der Aufgabe ist $x \cdot \frac{x^2}{2} = 256$.

$$\begin{array}{rcll}
\text{Gleichung } x \cdot \frac{x^2}{2} & = & 256 & \\
\hline
\frac{x^3}{2} & = & 256 & (2 \\
\hline
x^3 & = & 512 & (\sqrt[3]{} \\
\hline
x & = & \sqrt[3]{512} & \\
\hline
x & = & 8 &
\end{array}$$

3. Aus dem Inhalt einer Kugel ihren Durchmesser zu finden.

Es sey der Inhalt = J = 1000; der Durchmesser = D.

Die Geometrie giebt für den Inhalt der Kugel das Formular:

$\frac{D^3 p}{6} = J$, worin $p = 3{,}14$ bedeutet.

$\quad (.6$

$D^3 p = 6J$

$D^3 = \frac{6J}{p}$

$\sqrt[3]{}$

$D = \sqrt[3]{\frac{6J}{p}}$ das ist $\sqrt[3]{\left(\frac{6.1000}{3{,}14}\right)} = \sqrt[3]{\frac{6000}{3{,}14}}$

$= 12{,}41.$

§. 157. Mehr Schwierigkeiten hat die Auflösung der vollständigen kubischen Gleichungen, worin x^3, x^2 und x vorkommt.

Man ordne die Gleichung so einfach wie möglich, schaffe alle Glieder auf die eine Seite, und setze auf die andere Null.

Jede vollständige kubische Gleichung hat 3 Wurzeln, die zum Theil positiv, zum Theil negativ seyn können. Alle drei Wurzeln heißen x, folglich hat x einen dreifachen Werth.

Ob die Wurzeln positiv, oder negativ sind, sieht man vorläufig an den 4 Gliedern einer auf Null gebrachten kubischen Gleichung durch folgende Kennzeichen:

1. Wenn alle Glieder der auf Null gebrachten Gleichung positiv sind, so sind alle Wurzeln negativ.
2. Wenn die Zeichen wechseln, so sind alle Wurzeln positiv.
3. Wenn mehrere gleiche Zeichen der Glieder auf einander folgen, so sind auch mehrere negative Wurzeln darin.

§. 158. Das 4te oder letzte Glied einer auf Null gebrachten Gleichung ist das Product aus allen 3 Wurzeln. Auf diesen Umstand gründet sich die Auflösung der kubischen Gleichungen.

Man zerfälle nämlich das letzte Glied in seine Factoren, setze sie positiv oder negativ, je nachdem es aus den Zeichen ersichtlich ist, und einen nach dem andern anstatt x in die Gleichung. Wenn sie dadurch Null wird, so ist der für x gesetzte Factor eine Wurzel. Geschieht es bei keinem, so ist keine rationale Wurzel darin. Wenn man aber erst eine Wurzel hat, so lassen sich die andern dadurch finden, daß man die Gleichung mit der Wurzel dividirt. Man erhält im Quotienten eine quadratische Gleichung, durch deren Auflösung man die andern beiden Wurzeln findet. Aus der Natur der Aufgabe ergiebt sich, ob eine, oder alle drei Wurzeln möglich sind.

§. 159. Das Gesagte wollen wir an 2 Beispielen erläutern.

1. Ein Kapitalist giebt 10000 Rthlr. auf Zinsen, und schlägt die Zinsen jährlich zum Kapital. Am Ende des dritten Jahres findet er sein Kapital $11576\frac{1}{4}$ Rthlr. angewachsen. Wie viel Procent Zinsen nahm er jährlich?

Auflösung. Nenne die Zinsen x, so findet man dieselben fürs 1ste Jahr durch die Proportion:

$$100 \text{ Rhlr.} : x \text{ Rhlr.} = 10000 \text{ Rhlr.} : \frac{10000x}{100} = 100x \text{ Zinsen.}$$

Kapital und Zinsen betragen nach 1 Jahr $= 100x + 10000$ Rthlr.

Ferner $100 \text{ Rthlr.} : x \text{ Rthlr.} = 100x + 10000 \text{ Rthlr.}$

$$: \frac{100x^2 + 10000x}{100} = x^2 + 100x \text{ Zinsen des 2ten}$$

Jahres.

Kapital und Zinsen am Ende des 1sten Jahres waren $= 100x + 10000$ Rthlr.

Zinsen des 2ten Jahres $= x^2 + 100x$

Kapit. u. Zins. n. 2 Jahren $= x^2 + 200x + 10000$ Rthlr.

Ferner

$$100 \text{ lr.} : x \text{ rl.} = x^2 + 200x + 10000 \text{ rl.} : \frac{x^3 + 200x^2 + 10000x}{100}$$

$$= \frac{x^3}{100} + 2x^2 + 100x \text{ Zinsen des 3ten Jahres.}$$

$x^2 + 200x + 10000$ rl. Kapital dazu

$$\frac{x^3}{100} + 3x^2 + 300x + 10000 \text{ rl. ganzes Kapital, wel-}$$

ches nach der Aufgabe $= 11576\frac{1}{4}$ Rthlr. werth seyn soll. Das giebt die Gleichung

$$\frac{x^3}{100} + 3x^2 + 300x + 10000\,\text{rl.} = 11576\tfrac{1}{4}\,\text{rl.} \quad (.100$$

$$x^3 + 300x^2 + 30000x + 1000000 = 1157625$$

$$x^3 + 300x^2 + 30000x = 1157625 - 1000000 = 157625$$

$$x^3 + 300x^2 + 30000x - 157625 = 0$$

Die Zahl 157625 ist nur durch 5 theilbar, daher muß 5 eine Wurzel seyn. Setzt man nun 5 anstatt x, so ist

$$\begin{aligned} x^3 &= 125 \\ 300x^2 &= 7500 \\ 30000x &= 150000 \\ \hline \text{Summe} &= 157625 \\ \text{davon ab}\ & 157625 \end{aligned}$$

die Gleichung wird $= 0$, also ist $x = 5$, und das Kapital zu 5 Procent ausgeliehen worden. —

2. Es sey die Gleichung aus folgenden Angaben zu ordnen: zum Kubus einer Zahl wurde das vierfache Quadrat derselben addirt und die vierfache Zahl selbst subtrahirt; der Rest betrug 16. Welche Zahl war es:

Aufl. Nenne die Zahl x, so ist der Kubus $= x^3$; das vierfache Quadrat $= 4x^2$; die vierfache Zahl $= 4x$. Die Gleichung

$$x^3 + 4x^2 - 4x = 16$$

$$x^3 + 4x^2 - 4x - 16 = 0.$$

Da hier eine Folge gleicher Zeichen und eine Abwechselung statt findet, so werden die meisten Wurzeln negativ, und eine positiv seyn. Nun läßt sich 16 zerlegen in . . . . $\left\{\begin{matrix}2\\4\\8\\16\\1\end{matrix}\right.$

Wir wollen, da 2 negative Wurzeln sind, die 2 negativ, also -2 anstatt x setzen.

$$\begin{aligned} \text{Dann ist}\ x^3 &= -2^3 = -8 \\ 4x^2 &= 4 \cdot 2^2 = +16 \\ -4x &= -4 \cdot -2 = +8 \\ -16 &= -16 \\ \hline \text{Summe} &= 0. \end{aligned}$$

Die -2 ist also eine Wurzel.

Nimmt

Nimmt man $x = -4$, so wird die Gleichung ebenfalls Null; allein nimmt man $x = 8$, so bleibt endlich -240. Daher wollen wir die ganze Gleichung mit der auf Null gebrachten Wurzel dividiren. Wenn $x = -2$, so ist $x + 2 = 0$.

Quotient.

$$
\begin{array}{l}
x + 2 : x^3 + 4x^2 - 4x - 16 \,\|\, x^2 + 2x - 8 = 0 \\
\quad\quad\;\; \underline{x^3 + 2x^2} \\
\quad\quad\quad\quad 2x^2 - 4x - 16 \\
\quad\quad\quad\quad \underline{2x^2 + 4x} \\
\quad\quad\quad\quad\quad\;\; -8x - 16 \\
\quad\quad\quad\quad\quad\;\; \underline{-8x - 16}
\end{array}
$$

In dem Quotienten, welcher eine quadratische Gleichung ist, hat x die andern beiden Wurzelwerthe. Wir lösen sie auf.

$$
\begin{array}{rll}
 & x^2 + 2x - 8 = 0 & \\
 & x^2 + 2x \quad = 8 & \\
\left(\frac{2}{2}\right)^2 = 1 \text{ quadrirt.} & x^2 + 2x + 1 = 8 + 1 = 9 & \\
\sqrt{} \text{ ausgezogen} & x + 1 \quad = \sqrt{9} = 3 & \\
 & x \quad = \pm 3 - 1 \text{ d. h.} = +2 & \\
 & \quad\quad \text{und } -4. &
\end{array}
$$

Die 3 Wurzeln sind demnach -2, $+2$ und -4.

§. 160. Wir übergehen die mannichfachen Kunstgriffe, deren man sich bedient, die vollständigen kubischen Gleichungen zu lösen, wenn die Wurzeln irrational sind, und durch Näherung gefunden werden müssen, da sie in diesem Buche nicht vorkommen, und verweisen den Wißbegierigen auf

Burja's selbstlernenden Algebraisten 2c. und

Häseler's Anfangsgründe der Arithmetik und Algebra, welche schätzbare Werke dieses Thema sehr faßlich abhandeln.

VII. Beschreibung und Erklärung geometrischer Linien, Figuren und Lehrsätze.

§. 161. Jedes Ding, das eine Ausdehnung nach Länge, Breite und Höhe hat, heißt ein Körper. Der Körper wird von seiner ganzen Oberfläche eingeschlossen, welche mithin die Grenze des Raums ist, den der Körper ausfüllt. Die Grenze einer Fläche ist eine Linie, welche, wie jene, gerade oder krumm seyn kann, jenachdem sie einerlei Richtung behält, oder nicht. Das Ende einer Linie ist ein Punct. Folglich kann der Punct weder breit, noch lang, noch dick seyn. Eine Linie kann lang, aber weder breit noch dick; und eine Fläche zwar lang und breit, aber nicht dick seyn.

Anmerk. In der Ausübung begnügt man sich, Puncte und Linien so zart und fein als möglich zu machen; und auf die höchste mathematische Genauigkeit Verzicht zu leisten, weil sie alsdann nicht sinnliche Darstellungen seyn würden, welche man durch Zeichnungen doch bezweckt.

§. 162. Wenn zwei gerade Linien ab und fd Fig. 1. einander durchschneiden, so geschieht dies nur in einem einzigen Puncte c, denn Linien haben keine Breite.

Die Neigung der sich durchschneidenden Linien heißt der Winkel, und die Linien selbst, in sofern sie den Winkel bestimmen, werden Schenkel genannt, bei denen es nicht auf die Länge, sondern nur auf die Neigung, die bei gleicher Länge sehr verschieden seyn kann, ankommt. So ist z. B. n ein Winkel, dessen Schenkel cb und cd sind; m ist ein eben so großer Winkel mit kürzern Schenkeln ac und fc. Der Kürze wegen schreibt man oft Winkel mit dem Zeichen <, und nennt den Winkel entweder mit 3 Buchstaben, die an seinen Schenkeln und seinem Scheitel stehen, als < bcd, wobei der Buchstabe am Scheitel allemal der mittlere seyn muß, oder mit einem einzigen Buchstaben, der am Scheitel oder zwischen den Schenkeln steht. Hier ist < n = < bcd, und < m = < fca genannt.

Die Linie df könnte auch eine andere Neigung zu ab haben, wobei die Winkel n und m größer, oder kleiner wür=

würden. Man denke sich fd um den Punct c beweglich, so könnte sie z. B. auch in die Richtung der punctirten Linie hi, und in alle mögliche andere Richtungen gebracht werden. In der Lage hi würde < ach eben so groß seyn, als < hcb, und die Linie hi die ab senkrecht durchschneiden.

§. 163. Wenn zwei gerade Linien ab und df Fig. 2. einander senkrecht durchschneiden, so bilden sie an dem Durchschnittspuncte c vier gleichgroße Winkel, wo von jeder ein rechter Winkel heißt. So sind g, h, i, k rechte Winkel. Alle rechte Winkel sind gleich groß.

Man bringe die df in die Lage hl Fig. 3., so sind die Winkel h und i um eben so viel größer geworden, als die Winkel g und k abgenommen haben. Was h und i gewinnen, verlieren die andern g und k.

Die Winkel h, i sind einander gleich, eben so g und k, und heißen Scheitelwinkel.

Die Winkel g und h heißen Nebenwinkel, haben einen gemeinschaftlichen Schenkel und machen zusammen so viel, als zwei rechte Winkel. So ist auch i Nebenwinkel von k; k Nebenwinkel von h, denn $h + k = 2$ rechten u. s. w. Weil nun $g + h = h + k$ (die punctirte Linie weggedacht), so ist $g = k$; und da $h + k = k + i$, so ist $h = i$.

§. 164. Alle Winkel, die nicht rechte sind, heißen schiefe. Zu den schiefen Winkeln gehören:

a. der spitze Winkel (z. B. < g), der kleiner, als ein rechter;

b. der stumpfe Winkel (z. B. < h), der größer, als ein rechter;

c. der hohle Winkel, der größer als 2 rechte, und nicht so gebräuchlich ist; oft wird er ein negativer Winkel genannt.

§. 165. Auf einer geraden Linie ab Fig. 4. können in dem Punct c die Scheitel mehrerer Winkel liegen; aber alle Winkel zusammengenommen sind nicht größer oder kleiner, als 2 rechte. Man nehme dc als senkrecht, so sind < bcd und < acd zwei rechte Winkel; im erstern

liegen

liegen die spitzen Winkel m, n, und im letzteren o und p; folglich sind $m + n + o + p = 2$ rechten Winkeln.

Da nun dasselbe auch für alle Winkel unterhalb der ab um den Punct c gilt, so folgt, daß alle Winkel um einen Punct c zusammengenommen gerade so viel, als 4 rechte Winkel betragen.

§. 166. Eine Fläche läßt sich durch nicht weniger, als 3 gerade Linien einschließen, wovon aber eine nicht länger, oder eben so lang seyn darf, als die Summe der beiden übrigen, weil sonst die längste Linie in die beiden andern fallen, und sie decken würde.

Eine von 3 Seiten eingeschlossene Figur heißt Triangel oder Dreieck, und wird oft durch △ bezeichnet.

Im Dreieck sind 3 Winkel und 3 Seiten zu merken. Auch ohne vieles Nachdenken entdeckt man bald, daß der größte Winkel im △ der größten Seite, und der kleinste Winkel der kleinsten Seite gegenüber steht, daß eine jede Seite, bei übrigens gleichen Verhältnissen, mit ihrem gegenüberstehenden Winkel wächst und abnimmt. Denn wollte man den Schenkel eines Winkels im △ eine andere Lage geben, also ihre Neigung verändern, so würde die 3te Seite nothwendig auch länger oder kürzer werden müssen, wenn der △ geschlossen bleiben soll.

§. 167. Ein Dreieck heißt rechtwinklicht, wenn ein rechter Winkel darin ist. Die beiden Seiten, welche den rechten Winkel einschließen, Catheten, und die, dem rechten Winkel gegenüberstehende heißt Hypotenuse. In der Fig. 5. ist bei a der rechte Winkel; ab und ac sind also Catheten, und bc Hypotenuse.

In keinem Dreieck kann es 2 rechte Winkel geben. Denn wäre z. B. $< c$ auch ein rechter, so läge bc da, wo die punctirte Linie cd hintrifft, ab und cd würden nie zusammen kommen, und der Figur die Eigenschaften eines Dreiecks fehlen.

§. 168. Schiefwinklicht heißen alle Dreiecke, worin kein rechter Winkel ist. Dazu gehören

1. das gleichseitige abc, Fig. 6., worin alle Seiten, folglich auch alle Winkel einander gleich sind;

2. das gleichschenklichte def Fig. 7., worin 2 Seiten und 2 Winkel einander gleich sind. Ist de = df, so ist < n = < o.

3. das stumpfwinklichte, worin 1 Winkel größer, als ein rechter ist. In Fig. 8. ist < m stumpf;

4. Das spitzwinklichte, worin jeder Winkel kleiner, als ein rechter ist. Fig. 6. und 7.

§. 169. Zwei gerade Linien ab und cd Fig. 9., die nach einerlei Richtung laufen, und in jedem Puncte gleichweit von einander abstehen, heißen Parallelen.

Es durchschneide eine dritte gerade Linie hk die Parallelen, so entstehen 8 Winkel o, p, q, r, s, t, u, v. Da die hk gegen beide Parallelen einerlei Neigung hat, so muß < o = < s, p = t; q = u; r = v. Nun sind o und r, so wie s und v Scheitelwinkel, und einander gleich, folglich ist auch r = s; da die Scheitelwinkel p und q, t und u einander auch gleich sind, so ist t = q. Überhaupt sind < o, r, s und v einander gleich; so wie auch p, q, t und u einander gleich sind.

Die Winkel q, t oder r, s heißen Wechselswinkel, und übereinstimmende Wechselswinkel sind einander gleich.

§. 170. **In jedem Dreieck sind alle 3 Winkel zusammengenommen nicht größer und nicht kleiner, als zwei rechte Winkel.** Es sey das Dreieck ABC Fig. 10., und m, t, o die 3 Winkel desselben. Man ziehe durch c die Linie DE parallel mit AB.

Nun ist < t = < q; und < o = < r, weil es Wechselswinkel (Siehe §. 169.); und < m = < m; folglich sind die 3 Winkel q + m + r eben so groß, als m + t + o, und, da sie unter der geraden Linie DE an dem Puncte C liegen, zwei rechten Winkeln gleich (Siehe §. 165.).

Weil Winkel o und < n zwei Nebenwinkel auf der AB um den Punct B sind, so machen beide eben so viel, als 2 rechte Winkel. Wenn aber m + t + o = n + o (o subt.

so ist m + t = n

Also ist der Winkel n außerhalb des Dreiecks ABC,

ABC, an der verlängerten Seite AB so groß, als die beiden innern gegenüberliegenden Winkel $t + m$.

§. 171. Wenn von den 6 Stücken eines Dreiecks 3 bekannt sind, so lassen sich die andern 3 durch Zeichnung (und Rechnung) finden. Unter den bekannten muß wenigstens eine Seite seyn, weil ein großes Dreieck eben solche Winkel haben kann, als ein kleines. Z. B. in dem kleinen △ wären die Seiten 3, 4, 5; im großen aber 9, 12, 15, so wären in beiden die Seiten verschieden, aber die Winkel gleich.

Aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel kann nur Ein Triangel gebildet werden, denn es ist die Neigung und Länge jedes Schenkels gegeben, folglich paßt zur 3ten Seite auch nur Eine Linie. Daher sind sich zwei Dreiecke völlig gleich und decken sich, wenn zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel des einen △ gleichen Stücken im andern △ gleich sind.

Ein Dreieck ist bestimmt, wenn eine Seite und die beiden anliegenden Winkel gegeben sind. Es sey ab und $< o$ und $< m$ Fig. 11. gegeben, so ist die Neigung der Seiten ac und bc gegeben, und sie können sich nur in dem Puncte c schneiden. Gesetzt, es könnte dies auch in einem andern Puncte d geschehen, so müßte $< o$ zweierlei Neigungen des Schenkels ab zulassen, welches ein Widerspruch ist. Zwei Dreiecke sind einander völlig gleich und decken sich, wenn die eine Seite und die anliegenden Winkel in dem einen △ der einen Seite und den anliegenden Winkeln im andern △ gleich sind.

Da alle 3 Winkel eines Dreiecks zusammengenommen = 2 Rechten sind, so ist aus 2 Winkeln allemal der 3te zu finden, wenn man die Summe der beiden bekannten von 2 Rechten abzieht. Zwei Dreiecke müssen daher gleiche Winkel haben, wenn 2 Winkel des einen △ zweien Winkeln des andern △ gleich sind.

Drei Seiten bestimmen ein Dreieck vollkommen. Zwei Dreiecke, in denen die 3 Seiten übereinstimmen, d. h. wo die 3 Seiten des einen den 3 Seiten des andern gleich sind, sind sich völlig gleich und decken sich.

172. Die Größe eines Winkels ist ein Bogen, der aus der Winkelspitze mit einem Zirkel durch beide Schenkel gezogen wird. — Dies führt zum Kreis.

Ein Kreis entsteht, wenn eine gerade Linie Ac Fig. 12., die um den Punct c beweglich, mit dem andern Ende A um c herumgeführt wird. Die krumme, von A beschriebene, Linie heißt Peripherie, Umfang, Kreislinie, Kreis, Zirkel. Die cA heißt Radius oder Halbmesser. Der Punct c ist Centrum oder Mittelpunct, und steht vom Umfange überall gleich weit ab; eine Linie, die den Kreis trifft und durch's Centrum geht, AD, heißt Diameter oder Durchmesser, und theilt sowol die Kreislinie, als die von ihr eingeschlossene Fläche in 2 gleiche Theile. Sie ist = 2 Radien oder Halbmessern. Es sind unzählig viele Radien und Diameter im Kreise möglich, aber alle berühren den Mittelpunct.

Steht der Halbmesser Bc auf AD senkrecht, so theilt er den Halbkreis DABD in zwei Viertelkreise, Quadranten. Betrachtet man Ac und cB als Schenkel des rechten Winkels o, so ist AB der diesem Winkel gehörige Bogen, und also das Maaß desselben. Nun ist AB $\frac{1}{4}$ von der Kreislinie, folglich auch die Größe oder das Maaß eines rechten Winkels = $\frac{1}{4}$ Peripherie.

§. 173. Um einen Bogen in Zahlen ausdrücken zu können, theilt man den ganzen Umfang, er sey groß oder klein, in 360 Theile, Grade genannt, den Grad in 60 Minuten, die Minute in 60 Sekunden, diese wieder in 60 Tertien, oder, was gewöhnlicher ist, in Decimalsekunden, und bezeichnet sie der Kürze wegen mit ° (Grad), ′ (Minute), ″ (Sekunde), ‴ (Tertie). So heißt 50° 20′ 30″ 12‴ so viel als: 50 Grad, 20 Minuten, 30 Sekunden, 12 Tertien.

Ein Viertelkreis (das Maaß eines rechten Winkels) ist $\frac{360}{4} = 90°$; ein Halbkreis = 2 rechten Winkeln = 180°; das Maaß eines spitzen Winkels muß kleiner, als 90°, eines stumpfen größer, als 90° seyn. In Fig. 12 ist

$<o = <m =$ rechtem Winkel oder $90°$; $< n$ ist spitz, denn sein Bogen ist unter $90°$; und $<p$ größer, als $90°$, also stumpf.

Unter Kreisfläche versteht man den von der Peripherie eingeschlossenen Raum. Ein Stück derselben ACE, welches von 2 Radien abgeschnitten wird, heißt Sector, Ausschnitt. Eine gerade Linie, die den Umfang an 2 Puncten durchschneidet und nicht durch's Centrum geht, heißt Sehne oder Chorde, als FG. Das von der Kreisfläche durch die Sehne abgeschnittene Stück FGH heißt Sehnenabschnitt.

Es sind unzählig viele Sehnen möglich, aber die größte von allen ist der Diameter selbst.

§. 174. Eine Figur von 4 gleichgroßen Seiten und 4 rechten Winkeln heißt Quadrat Fig. 13. Die Linie ad nach gegenüberstehenden Winkeln heißt Diagonale und theilt das Quadrat in 2 gleiche rechtwinklichte Dreiecke. Denn

ab = cd; ac = bd, weil es Seiten eines Quadrats sind; und cb = cb; folglich haben beide Dreiecke übereinstimmige Seiten, und sind also einander gleich.

§. 175. Eine Figur von 4 gleichen Seiten, aber zweierlei Winkeln, wovon die gegenüberstehenden nur einander gleich sind, heißt Rhombus, Raute oder verschobenes Quadrat. Fig. 14.

Die Diagonale ad theilt auch diese Figur in 2 gleiche Dreiecke abd und adc, wie leicht zu erweisen. Die △ sind schiefwinklicht.

§. 176. Wenn in einer Figur zwar 4 rechte Winkel, aber nur die gegenüberstehenden Seiten einander gleich sind, so heißt sie Rechteck oder Oblongum. Die Diagonale cb Fig. 15. theilt es in 2 gleiche rechtwinklichte Dreiecke abc und cbd.

§. 177. Die Figur 15 kann auch zwei spitze und zwei stumpfe Winkel haben, verschoben seyn (s. Fig. 16.), dann heißt sie Rhomboides (verschobenes Oblongum) oder längliche Raute. Die durch die Diagonale cb entstandenen Triangel sind einander gleich und schiefwinklicht.

§. 178. Quadrat, Rhombus, Rechteck (Oblongum) und Rhomboides haben auch den gemeinschaftlichen Namen Parallelogramme, weil ihre gegenüberstehende Seiten stets parallel sind. Ein Triangel ist allezeit die Hälfte desjenigen Parallelogramms, aus dem er durch die Diagonale gebildet wurde. Die rechtwinklichten Triangel entspringen aus dem Quadrat, oder aus dem Rechteck; die schiefwinklichten aus dem Rhombus oder Rhomboides. Mag daher ein Dreieck beschaffen seyn, wie es will, so wird immer wieder ein Parallelogramm daraus werden, indem man einen gleichen Triangel schicklich daran fügt (ein Geschäft, das seiner Leichtigkeit wegen Anfängern zu empfehlen ist).

§. 179. Wenn in einer Figur nur 2 Seiten parallel sind, die beiden andern aber verschiedene Neigung haben, Fig. 17, so heißt sie Trapezium. Eine Diagonale cb theilt es in 2 ungleiche Dreiecke abc und cbd.

§. 180. Die Figur heißt Trapezoides, wenn keine der 4 Seiten mit einer andern parallel läuft Fig. 18. Die Diagonale ad theilt sie in 2 ungleiche Dreiecke abd, und adc.

§. 181. Eine von den Linien, die eine Figur umschließen, nennt man Grundlinie, Basis.

Unter der Höhe einer Figur versteht man die Länge des Perpendikels oder derjenigen Linie, die auf der Grundlinie senkrecht steht, und den entferntesten (höchsten) Punct der Figur berührt. Im Quadrat und Rechteck ist die Höhe allemal die eine, auf der Grundlinie stehende, Seite; im rechtwinklichten Triangel ist die eine Cathete als Grundlinie, und die andere als die Höhe anzusehen; im Rhombus und Rhomboides ist die Höhe = dem Abstande der mit der Grundlinie parallelen Seite; im schiefwinklichten Dreieck ist die Höhe = dem Abstande der Winkelspitze, welche der Grundlinie gegenüber steht, von der (nöthigenfalls verlängerten) Grundlinie. Im gleichseitigen und gleichschenklichten Dreieck fällt das Perpendikel auf die Mitte der Grundlinie, und halbirt den Winkel an der Spitze, denn es entstehen 2 völlig gleiche rechtwinklichte

Dreiecke durch dasselbe, deren Congruenz leicht in die Augen fällt.

Das Perpendikel fällt noch in den △, wenn die Winkel an der Grundlinie spitz sind. (In der Fig. 6 und 8 sind die Perpendikel durch punktirte Linien bp angegeben.) Es fällt außerhalb des △, wenn ein Winkel an der angenommenen Grundlinie stumpf ist, wie in Fig. 8.

Die Flächen, welche die Parallelogramme einschließen, findet man dadurch, daß man Grundlinie und Höhe mit einander multiplicirt. Das Product ist Quadratmaaß oder Quadratinhalt. — Sich davon zu überzeugen, zerlege man z. B. ein Rechteck durch Parallelen in kleine Quadrate von beliebiger Größe, so wird man gerade so viel Reihen von kleinen Quadraten bekommen, als die Seite eines solchen Quadrats in der Höhe des Parallelogramms enthalten ist. Bei schiefwinklichten Parallelogrammen hängt auf der Seite, wo der stumpfe Winkel liegt, gerade eben so viel über die Grundlinie, als auf der andern Seite fehlt, folglich wird auch ihr Flächeninhalt das Product der Grundlinie und Höhe seyn.

Da jeder Triangel $\frac{1}{2}$ Parallelogramm ist, das gleiche Grundlinie und gleiche Höhe mit ihm hat, so wird sein Flächenraum das halbe Product der Grundlinie und Höhe seyn.

Bei der Berechnung der Fläche einer Figur nimmt man die Grundlinie ohne etwanige Verlängerung wegen Fällung des Perpendikels.

§. 182. Parallelogramme von gleicher Grundlinie und Höhe sind einander der Fläche nach gleich, sie mögen in Hinsicht der Winkel auch noch so verschieden seyn.

Es sey ABCD das eine, und CBDF das andere Parallelogramm. Beide haben die gemeinschaftiche Grundlinie CD, und Höhe DB. Das Parallelogramm ABDC besteht aus den Dreiecken 1 und 2, Fig. 20.; das Parallelogramm BFDC aus den △ 2 und 3. Diese drei Dreiecke sind einander gleich. Denn

△ 1

$\triangle 1 = \triangle 2$, weil CB die Diagonale im Parallelogramm ist.

$\triangle 2 = \triangle 3$, weil beide übereinstimmende Seiten haben und DB die Diagonale des Parallelogramms CBFD ist.

Also ist $\triangle 1 + \triangle 2 = \triangle 2 + \triangle 3$

und Parall. ABDC = BFCD.

Zwar können die zu vergleichenden Parallelogramme in sehr verschiedenen Lagen erscheinen, allein der angeführte Satz behält immer seine Richtigkeit.

Weil Dreiecke als Hälften der Parallelogramme anzusehen sind, so gilt auch von ihnen der Satz:

Dreiecke von gleicher Grundlinie und Höhe schließen gleichgroße Flächen ein, mögen ihre Winkel auch noch so verschieden seyn.

§. 183. Parallelogramme und Dreiecke von gleicher Grundlinie, aber verschiedenen Höhen, verhalten sich zu einander, wie ihre Höhen.

P und p bezeichnen Parallelogramme; H und h ihre Höhen; und B die gemeinschaftliche Grundlinie: dann ist

$$P = B \cdot H$$

und $p = B \cdot h$

Und $P : p = B \cdot H : B \cdot h$ eine Proportion;

$$P : p = H : h \quad (: B \text{ dividirt})$$

Sind die Höhen H und h gleich, so verhalten sie sich, wie ihre Grundlinien B und b. D. h.

$$P : p = B : b.$$

Und wenn Grundlinien und Höhen verschieden sind, wie die Producte aus beiden. $P : p = B . H : b . h.$

Was in Hinsicht dieser Verhältnisse von den Parallelogrammen gesagt worden, muß natürlicherweise auch von den Dreiecken gelten.

§. 184. Einer der wichtigsten Lehrsätze in der ganzen Mathematik ist der vom Pythagoras erfundene:

Im rechtwinklichten Dreieck ABC Fig. 21. ist das auf der Hypotenuse AC errichtete Quadrat ADFC eben so groß, als die beiden auf den Catheten errichteten Quadrate ABJK und BCGH zusammen genommen sind. Oder

AC Quadrat = AB Quadrat + BC Quadrat.

Beweis. Ziehe BE parallel mit CF, so ist das Quadrat ADFC dadurch in 2 Parallelogramme ADEL und LEFC getheilt, wovon ersteres dem Quadrat ABJK, und letzteres dem Quadrat BCGH gleich ist. Diese Gleichheit ist eigentlich zu erweisen.

Man ziehe die beiden Hülfslinien AG und BF, so hat man 2 Dreiecke, die einander gleich sind, △ AGC = △ BFC, denn

AC = CF; CB = CG aus Bedingung.

< y + z = < x + z, weil y und x rechte Winkel, folglich sind in beiden Dreiecken ACG und BFC zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel, also auch die △ einander gleich.

Aber △ BCF = $\frac{1}{2}$ LEFC, weil beide gleiche Grundlinie CF und senkrechte Höhe CL haben; und △ ACG = $\frac{1}{2}$ CGHB, weil sie gleiche Grundlinie CG und gleiche Höhe CB haben.

Sind aber die Hälften zweier Dinge einander gleich, so sind es auch die Ganzen. Folglich ist das Quadrat BCGH = dem Rechteck LEFC.

Zöge man eine Hülfslinie von K nach C, und eine andere von B nach D, so ließe sich der Beweis, daß das Quadrat ABJK = dem Rechteck ADEL, wie vorher führen.

§. 185, Mit Hülfe des pythagorischen Lehrsatzes lassen sich zwei und mehrere Quadrate in eins verwandeln, oder auch Differenzquadrate finden.

1. Man setze die gegebenen Seiten zweier Quadrate rechtwinklicht zusammen, und ziehe die Hypotenuse, welche die Seite des verlangten Quadrats ist, das so viel Fläche hat, als beide gegebene Quadrate. In Fig. 22. sind die gegebenen Seiten a und b rechtwinklicht zusammen gesetzt, und dadurch die Seite c gefunden.

Setzte

Setzte man an die gefundene c abermals die Seite eines Quadrats rechtwinklicht, so würde sich durch die neue Hypotenuse die Seite desjenigen Quadrats ergeben, das alle 3 Quadrate vereinigte.

2, Ein Quadrat zu machen, das so groß ist, als der Unterschied zweier Quadrate, ziehe man EA Fig. 22. unbestimmt lang, nehme die kleinste der gegebenen Quadratseite a und setze sie an E rechtwinklicht; von B aus trage die andere Quadratseite b nach EA, wo sie nach D hintrifft. ED ist dann die Seite des gesuchten Unterschiedsquadrates

§. 186. Ähnlich sind zwei Dreiecke, wenn jeder Winkel des einen einem übereinstimmig liegenden Winkel des andern △ gleich ist, und die Dreiecke nur in der Größe der Seiten und nicht in den Winkeln verschieden sind. In Fig. 23. ist das innere Dreieck abc dem äußern größern ABC ähnlich, denn $< A = < a$; $< B = < b$; $< C = < c$. Da nun die Seiten von den Winkeln, die ihnen gegenüberstehen, abhängig und in beiden Dreiecken übereinstimmige Winkel sind, so stehen auch die Seiten des einen Dreiecks zu einander in demselben Verhältniß, wie die des andern △ zu einander. Ist z. B. die Seite x im großen △ um die Hälfte größer, als Seite M, so ist auch Seite z im kleinern △ um die Hälfte größer, als n; wenn x und z parallel sind, so wird auch M und n; so wie W und v parallel seyn, weil sie gleiche Neigungen zu einander haben. Dies drückt der Satz aus:

In ähnlichen Dreiecken sind diejenigen Seiten, die gleichen Winkeln gegenüberliegen, einander proportional, d. h. die Verhältnisse sind einander gleich, und geben eine Proportion.

$$x : M = z : n$$
$$\text{und } x : W = z : v$$
$$\text{also } z : v = x : W \text{ u. s. w.}$$

wenn also zwei Seiten des einen △, und eine ähnlichliegende im andern △ bekannt sind, so läßt sich die andere ähnlich liegende Seite im 2ten Dreieck durch die Regel de tri finden.

§. 187.

§. 187. Wird in einem Dreieck eine Linie mit der Grundlinie parallel gezogen, so sind die dadurch abgeschnittenen Stücke einander proportional, denn es entstehen dadurch 2 Dreiecke ABC und dBg (wenn dg die Parallele ist) Fig. 24., welche gleiche Winkel haben und einander ähnlich sind. Es ist nähmlich $< o = < m$ und $< B$ gemeinschaftlich, $< g = < c$. Daher gelten die Proportionen

$$\begin{aligned} Bd : dA &= Bg : gC \\ Bd : dg &= BA : AC \\ Bg : BC &= Bd : BA \\ AC : dg &= AB : dB. \end{aligned}$$

In allen Figuren, die einander ähnlich sind, sind die ähnlich liegenden Seiten einander proportional, sie mögen Dreiecke, oder andere Figuren bilden.

§. 188. *Die Flächen ähnlicher Figuren verhalten sich zu einander, wie die Quadrate der ähnlichliegenden Seiten.*

In den beiden ähnlichen Dreiecken ABC und abc ist $AG = H$ und $ag = h$ die Höhe; BC und bc Grundlinie $= G, g$ Fig. 26. Dann gilt

$$\frac{g : G = h : H}{\text{also ist } \frac{G \,.\, h}{g} = H}$$

Man findet aber den Inhalt eines $\triangle$, wenn Grundlinie und Höhe mit einander multiplicirt und durch 2 dividirt wird, oder $\frac{G \,.\, H.}{2}$ Also verhalten sich auch

$$\triangle ABC : \triangle abc = \frac{G \,.\, H}{2} : \frac{gh}{2}$$

durch 2 divid.

$$\triangle ABC : \triangle abc = G \,.\, H : gh$$

Für H seinen Werth $\frac{G \,.\, h}{g}$ gesetzt.

$$\triangle ABC : \triangle abc = G \,.\, \frac{G \,.\, h}{g} : gh$$

m. g mult.

$$\begin{aligned} \triangle ABC : \triangle abc &= G^2 \,.\, h : g^2 h \\ &= G_2 \quad : g^2 \end{aligned}$$

durch h dividirt.

Weil jede Seite Grundlinie oder G, g heißen kann, so gilt der Satz für jede Seite.

Aus der Betrachtung ähnlicher Figuren ergeben sich noch folgende Wahrheiten:

In ähnlichen Figuren verhalten sich die Umfänge (Perimeter) wie ähnlich liegende Seiten; und die Flächen ähnlicher Figuren verhalten sich, wie die Quadrate ähnlichliegender Seiten (ihrer Diagonalen, ihrer Höhen oder Grundlinien); und, weil alle Kreise einander ähnlich sind, die Kreisflächen, wie die Quadrate der Diameter oder Radien, die Umfänge aber, wie die Diameter oder Radien selbst.

§. 189. Zur Ausmessung der Linien bedient man sich des Längenmaaßes Ruthen, Fuß, Zoll, Linien und Scrupel. Die Ruthe gilt für die Einheit und wird im bürgerlichen Leben in 12 Fuß, der Fuß in 12 Zoll, der Zoll in 12 Linien, die Linie in 12 Scrupel; bei Mathematikern aber, des bequemern Rechnens wegen in 10 Fuß, 1 Fuß in 10 Zoll, dieser in 10 Linien, und diese in 10 Scrupel getheilt. Man bezeichnet in den Rechnungen die Ruthe mit °, den Fuß mit ′, den Zoll mit ″, die Linie mit ‴, den Scrupel mit ⁗. Je nachdem nun die Ruthe in 10 oder 12 Theile getheilt wird, so nennt man die Eintheilung Decimal- oder Duodecimalmaaß.

§. 190. Zur Ausmessung der Flächen nimmt man das Quadratmaaß. Eine Quadratruthe ist eine Fläche, die rechtwinklicht eine Ruthe lang und eben so breit ist. Theilt man jede Seite derselben in Fuß, und zieht die Theilpuncte zusammen, so erhält man kleinere Quadrate, und zwar bei der Decimaltheilung 100, bei der Duodecimaltheilung 144 Quadratfuße. So läßt sich wieder der Quadratfuß in 100 oder 144 Quadratzolle, jeder dieser Zolle in 100 oder 144 Quadratlinien u. s. w. zerlegen.

Die Frage: wie viel Flächenraum eine Figur habe, sagt so viel: wie viel Quadratruthen, Quadratfuß, Quadratzolle ꝛc. lassen sich in die Fläche legen?

Anmerk. In der Preußischen Monarchie ist das ehemalige Rheinländische Maaß gesetzlich eingeführt, und seine wahre Größe soll nach dem Secundenpendel angegeben werden. In Vega's Logarithmischen Tafeln findet man eine sehr ausführliche Tabelle zur Vergleichung allerlei Längen- Quadrat- und Hohlmaaße im pariser Maaße angegeben.

§. 191. Im Kreise sind die Sehnen gleicher Bogen gleich.

Man ziehe zur Sehne AB Fig. 26. die Radien CA und CB, welche einen Winkel bei C einschließen, dessen Maaß der Bogen AFB ist. Wenn nun DGE ein eben so großer Bogen ist, so ist $<$ m, den die Radien CE und CD einschließen, auch dem $< x + y$ gleich. Daher ist $\triangle$ ABC = $\triangle$ DEC, folglich AB = ED.

§. 192. Weil die Dreiecke ABC und ECD gleichschenklicht sind, so theilt die CN, welche auf der Mitte von AB in N senkrecht steht, den Winkel ACB in zwei gleiche Theile, $< x = < y$; denn in den rechtwinklichten $\triangle$ ANC und NCB ist AN = NB; AC = BC, weil es Radien, NC = NC, also auch die ähnlichliegenden Winkel einander gleich, und $x = y$.

Das Perpendikel auf der Mitte einer Sehne geht daher allemal durch's Centrum, und theilt Sehne, Bogen und Winkel in zwei gleiche Theile.

§. 193. Der Abstand einer Sehne vom Centro wird auf dem aus dem Centro auf die Mitte der Sehne gefällten Perpendikel gemessen. Da nun die Sehnen gleicher Bogen gleich groß, und $\triangle$ ACB = DCE, so muß auch der Abstand gleichgroßer Sehnen vom Mittelpunct eines Kreises gleich seyn.

§. 194. Eine gerade Linie, die an den Kreis hinstreift und ihn nur in einem einzigen Puncte g berührt, heißt Tangente (Berührende) Fig. 26. Weil eine gerade Linie aus dem Centro nach der Peripherie auf dem Puncte, den sie trifft, senkrecht steht, so wird auch der Radius Cg auf dem Berührungspuncte der Tangente Tg, und mithin auf Tg selbst senkrecht stehen. Folglich steht auch Tangente Tg auf dem Radius Cg senkrecht.

§. 195. Jeder Winkel an der Peripherie ist halb so groß, als der Winkel am Mittelpunct, der mit ihm auf gleichem Bogen steht. Oder $< y = \frac{1}{2} x$; denn $\triangle$ CDB Fig. 27. ist gleichschenklicht, daher $y = z$; und x ist der äußere Winkel am $\triangle$, folglich so groß, als $y + z = 2y$; und $y = \frac{1}{2} x$.

2. Der Satz gilt auch, wenn der Winkel an der Peripherie mit seinen Schenkeln das Centrum umschließt, Fig. 28.

$$< ADB \text{ oder } y + z = \tfrac{1}{2} ACB \text{ oder } \frac{u + x}{2}.$$

Man ziehe DE durch das Centrum, so ist $\triangle$ DCA gleichschenklicht, und $< y = < r$; $< u$ aber $= y + r$; also $u = 2y$; und $y = \frac{1}{2} u$. Dasselbe läßt sich auch auf der andern Seite beweisen, wo $x = 2z$, und $z = \frac{1}{2} x$.

$$\text{also } \tfrac{1}{2} u + \tfrac{1}{2} x = y + z$$

$$= < \frac{ACB}{2} = < ADB.$$

3. Und wenn die Schenkel des Peripheriewinkels z das Centrum nicht berühren noch umschließen, Fig. 29., so gilt doch

$$< x = < 2z, \text{ oder } z = \tfrac{1}{2} x.$$

Man ziehe die Hülfslinie DCE durch's Centrum, so ist im gleichschenklichten $\triangle$ CDB $< y + z = < n$, und der äußere Winkel $x + u$ am $\triangle$ CDB $= y + z + n$.

$$\begin{array}{ll}
\text{Nach dem ersten Falle ist} & < u = 2y \\
\text{Aber} & u + x = y + z + n \\
\text{und da} & n = y + z \\
\hline
\text{so ist} & u + x = 2y + 2z \\
\hline
\text{Da nun} & u = 2y \\
\hline
\text{so muß} & x = 2z, \text{ oder } z = \tfrac{1}{2} x \text{ seyn.}
\end{array}$$

§. 196. Das Perpendikel auf dem Diameter eines Kreises ist die mittlere Proportionallinie zwischen den durch dasselbe abgeschnittenen Stücken des Diameters, oder Fig. 30.

$$AE : ED = ED : EB, \text{ und } ED^2 = AE \,.\, EB.$$

Ziehe die Hülfslinien AD und DB, so ist $< ADB$ ein Rech-

Rechter, weil er der Winkel an der Peripherie ist, dessen Schenkel einen Halbkreis $= 180°$ abschneiden, also

$\triangle$ ADB rechtwinklicht, oder $z + n = 90°$

$\triangle$ ADE ist bei E rechtwinklicht (oder $m = 90°$), und hat mit jenem $\triangle$ den $< x$ gemein. Daher $\triangle$ ADB ähnlich dem $\triangle$ ADE; $m = z + n$; $x \quad x$ und daher $z = y$.

Ferner ist auch $\triangle$ DEB den beiden ähnlich, denn er ist bei v rechtwinklicht und y ist zwei $\triangle$ gemeinschaftlich, folglich $< n = < x$.

Nun sind in ähnlichen Dreiecken die Seiten, welche gleichen Winkeln gegenüber stehen, einander proportional,

$$AE : ED = ED : EB$$

(steht geg. $< z$) $\quad (y) = (x) \quad (n)$

denn $z = y$, und $x = n$.

Anmerk. Man nennt die ED auch Ordinate und bezeichnet sie gemeiniglich mit y; den Diameter AB mit a, und das Stück BE desselben (Absciſſe genannt) mit x, und sucht dann einen Werth für y oder ED folgendermaßen: $AE = a - x$, $EB = x$, dies in die obige Gleichung gesetzt:

$$a - x : y = y : x$$

$$ax - x^2 = y^2$$

$\sqrt{(ax - x^2)} = y$, welchen Ausdruck man die **Gleichung für den Kreis** nennt.

§. 197. Vielecke, Polygone, sind Figuren, die mehr, als 4 Seiten, haben. Wenn alle Seiten gleich lang sind, so heißt das Vieleck regulär, im Gegentheil irregulär. Wir beschäftigen uns hier nur mit den regulären oder gleichseitigen Vielecken. Man beschreibt die Vielecke mit Hülfe eines Kreises, welchen man in so viel Theile theilt, als das Vieleck Seiten haben soll; die Theilpuncte zusammengezogen, bilden das Vieleck. Folglich sind die Seiten eines Vielecks als Sehnen gleicher Bogen anzusehen. Zieht man aus dem Mittelpunct des Kreises gerade Linien nach den Ecken, so erhält man eben so viel völlig gleiche Dreiecke, als das Vieleck Seiten hat.

§. 198. Centriwinkel heißen diejenigen Winkel, die am Mittelpunct entstehen, wenn Radien nach allen Ecken eines Vielecks gezogen werden.

Polygonwinkel sind die, welche zwei Seiten des Vielecks mit einander machen.

Alle Centriwinkel eines Vielecks, so wie alle Polygonwinkel sind einander gleich.

§. 199. Die Zeichnung des Sechsecks ist die leichteste, denn jede Seite desselben ist dem Radius gleich, und man erhält die Theilpuncte im Kreise, wenn man den Halbmesser 6 mal in demselben umschlägt. Fig. 31. ist GFEDBA ein in einem Kreise beschriebenes Sechseck. Die Winkel m, n, o, p, q, r sind Centriwinkel, und da die Summe aller Winkel um den Punct c nur 360° beträgt, so wird hier jeder $= \frac{360}{6} = 60°$ seyn (Im Fünfeck würde ein Centriwinkel $= \frac{360}{5} = 72°$ seyn). Die Winkel u, t, s, v sind halbe Polygonwinkel, und einander gleich.

Weil alle Radien einander gleich sind, so sind die Dreiecke in einem jeden Vieleck gleichschenklicht, und daher die $<$ t und s gleich dem Rest, der bleibt, wenn ein Centriwinkel p von 180° (der Summe aller Winkel im Dreieck) abgezogen wird; weil $t = s$, so ist jeder = dem halben Reste.

Daher $\frac{360}{z}$ = Centriwinkel, wo z die Anzahl der Seiten bedeutet; und $\frac{360}{z}$ von 180° abgezogen = dem Polygonwinkel $= t + s$.

Man betrachte AB als Sehne, so wird ein Perpendikel aus C die AB und $<$ p in 2 gleiche Theile theilen. Dies Perpendikel ist die Höhe eines jeden Dreiecks im Vieleck und wird durch den pythagorischen Satz gefunden, denn $\triangle$ ACP ist bei P rechtwinklicht.

$$CA^2 = AP^2 + CP^2$$

$$CA^2 - AP^2 = CP^2$$

$$\sqrt{(CA^2 - AP^2)} = CP$$

so wie überhaupt jede von den 3 Linien AC (Radius) AP

AP (halbe Seite des Vielecks), und PC (Perpendikel) durch diesen Satz gefunden werden kann.

Eigentlich ist durch den Radius, und die Anzahl der Seiten eines Vielecks alles in der ganzen Figur bestimmt, d. h. Größe der Seiten und des Perpendikels, Winkel ꝛc. In der Flächenmessung werden Formulare mitgetheilt werden, allerlei Aufgaben bei Vielecken zu berechnen.

Weil im Sechseck alle Seiten Radien sind, so müssen auch die Winkel p, t, s einander gleich, d. h. jeder 60° seyn.

Der Flächenraum eines der Dreiecke im Polygon mit der Anzahl der Seiten multiplicirt, giebt den Flächenraum des Vielecks.

§. 200. Auch um einen Kreis läßt sich ein Vieleck zeichnen, wenn man zuvor ein eben so vielseitiges in demselben beschreibt, und dann des äußern Vielecks Seiten mit denen des innern parallel zieht. Fig. 32. ist dies zur Hälfte geschehen.

Die Berechnung des äußern Vielecks gründet sich auf Folgendes:

Wenn ad, db, bf Seiten des Vielecks im Kreise, und AD, DB, BF Seiten des Vielecks außerhalb, und Radius und Seite des innern bekannt sind, so theilt das Perpendikel cm nicht nur bf, sondern auch BF in 2 gleiche Theile, und bildet rechte Winkel.

Nun ist $cm^2 = cb^2 - mb^2$

$$cm = \sqrt{(cb^2 - mb^2)}$$

Da cn = Radius, und die △ Cmb und CnB einander ähnlich, so gilt:

$$Cm : mb = Cn : nB$$

$$\text{und } nB = \frac{mb \cdot Cn}{Cm}, \text{ und } 2nB = BF$$

§. 201. Will man die Seite eines Vielecks von doppelt so vielen Seiten berechnen, so verfahre man also: Fig. 32.

Wenn EF die Seite des gegebenen Vielecks, Cp das Perpendikel; fq = qE die Seiten des doppelt so vielseitigen, so ist nach vorigem §. die Cp und pq zu finden.

Im rechtwinklichten $\triangle$ pfq ist

$$pf^2 + pq^2 = fq^2$$

$$\sqrt{(pf^2 + pq^2)} = fq = \text{der Seite des gesuchten Vielecks.}$$

Setzt man die Vervielfältigung der Seiten eines im Kreise beschriebenen Vielecks fort, bis die Seiten so klein werden, daß sie von der krummen Linie nicht zu unterscheiden sind, so wird man durch die Addition aller Seiten beinahe die Kreislinie selbst bekommen. Thut man dasselbe auch bei einem Vielecke außer dem Kreise, so erhält man die Kreislinie auch beinahe, jedoch etwas zu groß. Der Unterschied zwischen beiden Resultaten halbirt und zu dem kleinern Resultat addirt, wird die krumme Linie noch genauer, aber niemals völlig genau, angeben.

§. 202. Ludolf nahm den Diameter eines Kreises = 1, oder 1000000 und fand nach angezeigter Art die Kreislinie zu 3,141592; oder wenn der Durchmesser 1000000 ist, so ist der Umfang 3141592, welches Verhältniß des Diameters zur Peripherie das Ludolfische genannt, und sehr gewöhnlich ist. Ein anderes Verhältniß ist 113 : 355; oder 3183 : 10000.

Wir wollen uns des Ludolfischen bedienen, und das Verhältniß 1 : 3,141592 beständig durch p ausdrücken, welcher Buchstabe dennach die Zahl 3,141592 bedeutet, von der wir so viel Decimalstellen nehmen können, als wir wollen, und als die gewünschte Genauigkeit fordert. Gewöhnlich werden 2 Decimalstellen genügen.

Da die Kreise ähnliche Figuren sind, so findet man den Umfang eines jeden Kreises, wenn man den Durchmesser und Umfang eines einzigen weiß, durch die Proportion.

Es sey D der Durchmesser und U der Umfang eines Kreises, so giebt $1 : 3,14159.. = D : U$

$$= p$$

$$pD = U = \text{Umfang},$$

$$\text{und also } \frac{U}{p} = D = \text{Durchmesser}.$$

Weil alle Kreise in 360° getheilt werden, so kann man auch die Länge eines Bogenstückes für einzelne Grade bestimmen.

§. 203.

§. 203. Man kann die Kreislinie als ein Vieleck von unendlich vielen Seiten ansehen, und ein bestimmtes Stück davon für eine solche Seite nehmen, von der sich Linien nach dem Centro ziehen lassen, wodurch ein Dreieck entsteht, dessen Höhe der Radius, und dessen Grundlinie der Bogen ist. Der Flächenraum eines solchen Sectors würde durch das halbe Product des Bogens in den Radius gefunden werden. Setzt man statt des Bogens den ganzen Umfang, so erhält man den Flächenraum des Kreises, welcher demnach einem Dreieck gleicht, dessen Grundlinie der Umfang, und dessen Höhe der Radius ist. Drücken wir dies in Zeichen aus, so ist Fläche des Kreises $= \frac{U \cdot r}{2}$, wobei $r =$ Radius; oder da $U = Dp$, und $D = 2r$, so haben wir das Formular $\frac{2r \cdot r \cdot p}{2} = r^2 p =$ Kreisfläche.

Das Quadrat des Diameters muß 4 mal größer seyn, als das des Radius, weil letzterer nur $\frac{1}{2}$ D ist, folglich wird man auch die Kreisfläche finden durch $\frac{D^2 p}{4}$.

§. 204. Der Kreis ist die vollkommenste Figur. Kommt es darauf an, mit einer gegebenen Umfassung die größtmögliche Fläche einzuschließen: so wähle man die kreisförmige, denn der Kreis schließt bei gleichem Umfange von allen möglichen Figuren die größte Fläche ein.

§. 205. Die Flächen mehrerer Kreise verhalten sich zu einander, wie die Quadrate ihrer Halbmesser oder Radien, oder ihrer Diameter. Denn wenn A und B zwei Kreise vorstellen, so ist

$$\left.\begin{array}{l} A = \frac{D^2 p}{4} \\ B = \frac{d^2 p}{4} \end{array}\right\} \text{ also } A : B = \frac{D^2 p}{4} : \frac{d^2 p}{4}$$

$$A : B = D^2 p : d^2 p \quad \text{(4 dividirt.}$$

$$A : B = D^2 : d^2 \quad \text{(p divid.}$$

Oder

$$\left.\begin{array}{l} A = R^2 p \\ B = r^2 p \end{array}\right\} \text{ also } A : B = R^2 p : r^2 p$$

$$A : B = R^2 : r^2$$

§. 206. Wie allerlei Vielecke gezeichnet und berechnet werden, wie die Fläche der Kreisstücke, und allerlei anderer krummlinigten Figuren zu finden sey, wird in der Lehre von Linien- und Flächenmessung vorkommen.

§. 207. Ehe wir zur Betrachtung der Körper schreiten, müssen wir noch Einiges über die Lage der Ebenen gegen einander berühren.

Unter einer Ebene stelle man sich eine völlig gerade Fläche nach beliebiger Länge und Breite vor, in welcher gerade Linien, die man von allen Puncten ihres Umfanges über dieselbe zieht, mit allen ihren Puncten liegen. Die Begrenzung der Ebene kann krumm, eckig oder gerade seyn, es gehören diese Eigenschaften nicht mit zu ihrem Begriff. (Ein Spiegel, stillstehendes Wasser kann die sinnliche Anschauung einer Ebene erleichtern.) Obgleich die Ebene ohne alle Dicke und Tiefe seyn muß, so kann man sich doch ihre Ausdehnung nach Länge und Breite unbegrenzt vorstellen.

§. 208. Die Vorstellung mehrerer Ebenen gegen einander auf dem Papier ist deshalb schwierig, weil das Papier nur eine Ebene vorstellt, und darauf Linien und Puncte zu zeichnen sind, die außerhalb desselben liegen. (Durch Kartenblätter, welche man also legt, wie es die Betrachtungen erfordern, kommt man der Einbildungskraft des Ungeübten sehr zu Hülfe. Die auf einer Ebene stehenden Linien können durch Drathstücke oder Nadeln versinnlicht werden.)

§. 209. Zwei Puncte bestimmen die Lage einer Ebene nicht, denn ein, nur in 2 Puncten befestigtes Kartenblatt kann sich um sie, wie um eine Axe drehen, und allerlei Lagen haben. Drei Puncte, die nicht in einer geraden Linie liegen, bestimmen die Lage einer Ebene vollkommen. Ein Tisch steht auf drei Beinen auf jedem Boden fest. Ein vierbeinigter Tisch kann wanken, weil die Füße 4 Puncte vorstellen, durch welche 2 Ebenen gelegt werden können. Jeder Triangel und jeder Kreis wird nur in einer Ebene liegen, denn 3 Puncte bestimmen diese Figuren.

§. 210.

§. 210. Eine gerade Ebene kann auf einer Ebene unter unzähligen Winkeln stehen. (Eine Nadel auf einer Tischfläche befestigt zeigt dies deutlich.) Sie steht aber senkrecht, wenn sie mit der Ebene rings herum rechte Winkel macht. Sie kann mit zwei, in einer geraden Linie liegenden Puncten rechte Winkel, und mit allen übrigen schiefe Winkel machen. Steht aber eine Linie so auf einer Ebene, daß sie mit 2 nicht in einer geraden Linie liegenden Puncten rechte Winkel macht, so steht sie auf der ganzen Ebene senkrecht. Giebt man daher einem gemeinen Winkelhaken noch einen 3ten Schenkel, so kann man mittelst desselben die senkrechte Stellung einer Linie auf einer Fläche bekommen.

§. 211. Zwei Linien, die auf einer Ebene senkrecht stehen, sind parallel, denn es befinden sich um beide rechte Winkel.

Wenn sich zwei senkrechte Ebenen schneiden, so ist die Durchschnittslinie auch senkrecht. Z. B. die senkrechten Seitenwände eines Zimmers durchschneiden sich in der Ecke senkrecht, die Ecke ist die Durchschnittslinie und steht auf dem Fußboden senkrecht.

Ein Perpendikel, welches durch mehrere parallele Ebenen geht, steht auf allen senkrecht.

Steht eine Ebene auf einer andern, so machen beide einen Winkel, welcher Flächenwinkel, Neigungswinkel heißt, und sehr verschieden seyn kann, nachdem sich die Ebenen gegen einander neigen.

§. 212. Mit 2 oder 3 Ebenen läßt sich noch kein Raum einschließen. Zum wenigsten gehören dazu 4 Ebenen, wie jeder Versuch beweist.

§. 213. Ein Körper wird von Ebenen, die man Seitenflächen nennt, eingeschlossen. Die Geometrie lehrt, wie der durch die Seitenflächen eingeschlossene Raum zu berechnen sey.

Das Gefundene heißt der kubische oder körperliche Inhalt. Die äußere Umgebung oder der Flächenraum aller Seiten heißt das Netz, auch die Oberfläche des Körpers; diejenige Seite desselben, worauf er steht, oder stehen könnte, nennt man Grundfläche; ein Perpendikel auf der Grundfläche aus dem höchsten Punct des

Körpers heißt seine Höhe, oft auch, um Mißdeutungen vorzubeugen, senkrechte oder gerade Höhe.

§. 214. Diejenigen Körper, deren Ebenen ihren Grund in geraden Linien oder im Kreis haben, sind: Prisma, Parallelopipedon, Kubus oder Würfel, Cylinder, Piramyde, Kegel und Kugel, und nur sie werden gemeiniglich in der Geometrie abgehandelt.

§. 215. Der sogenannten Platonischen Körper, deren Seiten Polygone, oder deren Ecken alle gleichen körperlichen Raum einschließen, sind nur fünf: Tetraeder, Würfel, Octoeder, Dodecaeder, Icosaeder; und mehrere sind auch nicht möglich.

Die Zeichnung und Berechnung dieser Körper folgt unten; hier nur eine allgemeine Betrachtung über die geometrischen Körper.

§. 216. Das Maaß, womit die Körper gemessen werden, ist der Würfel oder Kubus, daher es auch Kubikmaaß heißt. Eine Kubikruthe ist ein Körper, der rechtwinklicht eine Ruthe lang, eben so breit und hoch ist. Seine Grundfläche ist daher eine Ebene von einer Quadratruthe, oder 10. 10 = 100 Quadratfuß. Stellt man ihn sich auch 10 Fuß hoch vor, so besteht der ganze Körper aus 10. 10. 10 = 1000 Kubikfuß. Theilt man die Ruthe in 12 Theile, so hat die Grundfläche 12. 12 = 144 Quadratfuß, und der Körper 12. 12. 12 = 1728 Kubikfuß Duodecimalmaaß.

Anmerk.	Decimalmaaß.	Duodecimalmaaß.
Ein Kubikfuß wird	10. 10. 10 = 1000 Kubikzoll,	od. 1728 Kubikz.
ein Kubikzoll —	10. 10. 10 = 1000 Kubiklin.,	od 1728 K. Linien
eine Kubiklinie —	10. 10. 10 = 1000 K. Scrupl.	od. 1728 K. Scpl.

§. 217. Körper, deren Seitenflächen senkrecht auf der Grundfläche stehen, haben oben eine Decke, welche der Grundfläche völlig gleich ist, und daher hat ein solcher Körper eigentlich 2 Grundflächen. Dazu gehören:

1. der Würfel, welcher in 6 gleiche Quadrate eingeschlossen ist;
2. das Parallelopipedon mit 2 Grund- und 4 Seitenflächen, wovon 2 gegenüberstehende gleich, alle

alle aber Parallelogramme sind. (Ein längliches Kästchen, der Raum eines rechtwinklichten 4eckigen Zimmers sind Körper dieser Art.)

3. Das Prisma, dessen 2 Grundflächen 3, 4, 5 und mehr Seiten haben, worauf eben so viel Seitenflächen senkrecht stehen, die Parallelogramme sind. (Ein senkrecht stehender überall gleich dicker Pfeiler, welcher 3, 4, 5 und mehr Ecken hat.)

4. Cylinder, dessen beide Grundflächen Kreise sind, und dessen Seitenfläche wie der Kreis gebogen ist. (Eine Walze, ein runder Thurm, eine Tubusröhre ꝛc.)

Man findet den körperlichen Inhalt dieser 4 Arten von Körpern dadurch, daß man den Flächenraum der Grundfläche mit ihrer senkrechten Höhe multiplicirt. Denn es können eben so viel Schichten von einer gewissen Dicke über der Grundfläche liegen, als die Höhe Theile hat, die einzeln so lang sind, als die Dicke der Schichten angenommen ist. Z. B. es sey die Grundfläche = ein Quadratfuß, so würde in einer Schicht von 1 Fuß Höhe, 1 Kubikfuß, und in jeder folgenden eben so viel körperlicher Inhalt enthalten seyn. Die Gestalt der Grundfläche mag noch so verschieden seyn, so wird sich doch ihr Quadratinhalt berechnen lassen, und immer die Regel gelten, daß Grundfläche mal Höhe den körperlichen Inhalt dieser Körper giebt.

§. 218. Wenn die Seitenflächen dieser 4 Körper, die man auch prismatische nennt, nicht auf der Grundfläche senkrecht stehen, so heißen sie schiefe, ihre Seitenflächen sind nicht mehr Rechtecke, sondern verschoben, und ihre Höhe mißt ein Perpendikel aus dem höchsten Punct auf die Grundfläche oder deren Verlängerung. Alsdann aber sind sie, wie die geraden, zu behandeln.

§. 219. Die Piramyde und der Kegel haben nur Eine Grundfläche, und ihre Seitenflächen laufen oben in einen Punct zusammen. Die Grundfläche der Piramyde kann 3, 4, 5 und mehr Seiten haben; die Seitenflächen derselben sind Dreiecke, deren Grundlinien mit den Seiten der Grundfläche einerlei sind.

Die Grundfläche des Kegels ist ein Kreis; seine Seitenfläche (Mantel oder krumme Oberfläche genannt) ist, ausgebreitet, ein Kreissector, dessen Centrum in der Spitze des Kegels liegt. (Ein Zuckerhut giebt eine sinnliche Vorstellung des Kegels.)

§. 220. Ein Kegel ist eine Piramyde von unendlich vielen Seiten, und wenn die Grundflächen und Höhen dieser beiden Körper gleich sind, so sind es auch ihre körperlichen Inhalte. Denn gesetzt, man schnitte von beiden dünne Scheiben mit der Grundfläche parallel ab, so müßten sich diese nothwendig an Masse gleich seyn, und setzte man die Trennung fort, so würde man gleich viel und gleich große, obgleich verschieden gestaltete, Stücke oder Theile bekommen. Sind aber die Theile sich einzeln an Zahl und Inhalt gleich, so müssen es auch die Ganzen seyn. Piramyden von gleicher Grundfläche und Höhe schließen gleichgroße Räume ein, wenn sie auch in der Anzahl der Seiten noch so sehr verschieden sind.

§. 221. Jedes dreieckte Prisma läßt sich in 3 gleichgroße Piramyden zerschneiden.

Anmerk. Durch Linien auf dem Papiere läßt sich der Beweis dieses Satzes nie dem Anfänger ganz deutlich und überzeugend machen. Der Lehrer führe ihn aber sinnlich, indem er z. B. ein dreieckiges Prisma aus Holz verfertigen, und nach der Anweisung, die jedes Lehrbuch giebt, durchschneiden läßt. Er wird 3 gleichgroße Piramyden, wovon 2 völlig gleich, und eine schiefwinklicht, erhalten. Daß sich aber diese 3 Piramyden an Masse gleich sind, beweise er so: die Gleichheit der beiden ersten fällt in die Augen, denn sie haben die Grundfläche des Prisma's zur Grundfläche, und seine Länge zur Höhe; legt man nun eine Seitenfläche der ersten Piramyde auf eine Seitenfläche der 3ten (schiefen) Piramyde, so decken sich beide, und folglich nehme man diese zur Grundfläche bei der Vergleichung; die Höhe dieser so gelegten Körper ist die Dicke des Prisma. Daher haben auch sie gleiche Grundfläche und Höhe und sind dem Inhalte nach einander gleich.

§. 222. Wenn die Piramyde der 3te Theil eines prismatischen Körpers ist, so muß es der Kegel auch seyn. §. 220.

§. 220. Man wird ihren Körperinhalt also finden, wenn man ihre Grundfläche mit der Höhe multiplicirt und durch 3 dividirt.

§. 223. Kegel und Piramyde heißen abgekürzt, wenn die Spitze durch einen der Grundfläche parallelen Schnitt davon getrennt worden ist. Man wird den Inhalt derselben finden, wenn man die fehlende Spitze für sich als einen Kegel oder eine Piramyde berechnet, und vom ganzen Körper (wie er mit der Spitze seyn würde) abzieht. Die Länge der fehlenden Spitze findet man durch eine leichte Rechnung aus den Durchmessern der Grund- und Durchschnittsfläche, und Höhe. Es sey $R =$ Halbmesser der Grundfläche, $r =$ Halbmesser der Durchschnittsfläche, H die Höhe des ganzen, und h die Höhe des abgekürzten Körpers, so folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke Fig. 121.

$cp : po = cm : mb$, d. i. in angenommenen Zeichen

$$(R-r) : h = R : H, \text{ also } H = \frac{h \cdot R}{R-r}$$

und $H-h$ ist die Höhe der fehlenden Spitze bno.

Anmerk. Ueberhaupt ist es gut, mit dieser Betrachtung über die Körper zugleich die Zeichnung und Netze derselben zu vergleichen, wozu unter § 424 bis 443 Anleitung gegeben wird. Dann wird es auch nicht schwer werden, die Oberflächen der Piramyde Fig. 120, und Fig. 122 zu berechnen.

§. 224. Eine Kugel entsteht, wenn sich ein Halbkreis um den Diameter bewegt. Daher

a. stehen alle Puncte auf ihrer krummen Oberfläche gleichweit vom Mittelpunct ab;

b. sind alle Radien gleich lang;

c. sind alle Kugeln ähnliche Körper;

d. ist jede Durchschnittsfigur, welche durch eine schneidende Ebene, die durch die Kugel dringt, entsteht, ein Kreis, und jeder Kugelschnitt eine Kreisfläche;

e. steht ein Perpendikel aus dem Centro auf der Durchschnittsfigur allemal in ihrer Mitte;

f. trifft der größte Schnitt allemal das Centrum, und theilt die Kugel in zwei Halbkugeln;

g. schneiden diejenigen Ebenen, welche in gleichen Entfernungen vom Mittelpunct die Kugel durchdringen, gleichgroße Stücke ab.

Von der Wahrheit dieser Sätze wird sich jeder, der die Lehre vom Kreis wohl begriffen, leicht überzeugen, daher übergehen wir die Beweise.

§. 225. Eine gerade Linie durch den Mittelpunct der Kugel bis zum Umfange heißt Diameter, die Hälfte ist Radius der Kugel. Die Endpuncte eines Diameters, um welche sich die Kugel wälzen läßt, heißen Pole, ihr Diameter Axe.

§. 226. Eine schneidende Ebene, welche den Mittelpunct der Kugel trifft, bildet auf ihrer Oberfläche einen größten Kreis. Das Centrum eines größten Kreises ist also zugleich der Mittelpunct der Kugel. Es sind unzählig viel größte Kreise möglich.

§. 227. Ein kleinerer Kreis entsteht auf der Oberfläche, wenn die schneidende Ebene nicht durch das Centrum geht. Es sind unzählig viele möglich.

§. 228. Weil die Oberfläche der Kugel durch den Kreis gebildet wurde, so theilt man sowol die größten, als die kleinern Kreise auch in 360 Grade und ihre Unterabtheilungen.

§. 229. Ein größter Kreis, der von den Polen überall 90° weit absteht, heißt Aquator oder Gleicher.

§. 230. Um das Verhältniß der Oberfläche zum Diameter zu finden, legte man unendlich nahe schneidende Ebenen durch die Kugel und nahm die dadurch abgeschnittenen Stücke für abgekürzte Kegel, deren Oberfläche man addirte.

§. 231. Eine bestimmte Menge solcher neben einander liegender Kegelstücke wird einen Kugelabschnitt ausmachen. Weil nun die Durchmesser jedes solchen Kegelstücks unendlich wenig von einander unterschieden seyn werden, so kann man in der Gleichung für die Oberfläche

des

des abgekürzten Kegels $(R+r) p . h$ anstatt $R+r$ auch $2R$ setzen, folglich $2R . p . h$.

Die Oberfläche eines Kugelabschnitts KAGH Fig. 33. wird daher auch gefunden werden durch

$$2R . p . AH.$$

Es sey der Radius R einer Kugel 8 Zoll, die Höhe des Stückes $AH = 2$ Zoll, so ist $2 . 8 . 3{,}14 . 2 = 100{,}512\ldots$ Quadratzoll Oberfläche.

Für AH läßt sich ein anderer Ausdruck finden. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ADG und AGH ergiebt sich, daß

$$AH = \frac{AG^2}{2R}$$

Diesen Ausdruck in vorige Gleichung gebracht, giebt

$$\frac{2R . p . AG^2}{2R} = AG^2 . p = \text{Oberfläche eines Ku-}$$

gelabschnitts.

Weil nun jede Kreisfläche durch die allgemeine Formel $r^2 p$ gefunden wird, so kann AG als Radius desjenigen Kreises gelten, dessen Fläche der Oberfläche des Kugelabschnitts gleicht, und daher der Satz:

Der Flächenraum eines Kugelabschnitts ist gleich dem Flächenraum eines Kreises, dessen Radius die Sehne zwischen dem Pol und dem Abschnitt ist.

§. 232. Je näher die schneidende Ebene dem Mittelpunct kommt, desto größer wird der Abschnitt. Im Mittelpunct ist er = Halbkugel. Dann wird die Sehne AJ der Radius eines Kreises seyn, der so viel Flächenraum hat, als die Oberfläche der halben Kugel. Es ist aber $AJ^2 = CA^2 + CJ^2$

$$= R^2 + R^2 = 2R^2.$$

Und $AJ^2 . p = 2R^2 p =$ zweien größten Kreisen; folglich ist der Flächenraum der ganzen Kugel der Fläche von 4 größten Kreisen gleich, $= 4R^2 p$.

§. 233. Da $4R^2 = D^2$, so kann auch die Oberfläche der Kugel durch $D^2 p$ gefunden werden, oder sie ist einer Kreisfläche gleich, deren Radius der Durchmesser der Kugel ist.

§. 234.

§. 234. Wenn zwei parallele Ebenen FG und fg eine Kugel schneiden, Fig. 34., so heißt der Raum auf der Oberfläche zwischen beiden eine Zone, als fgGF. Zieht man die Oberfläche des Stückes fgA von der Oberfläche der Halbkugel ab, so giebt der Rest den Flächenraum der Zone:

$$(2R \,.\, p \,.\, AH) - (2R \,.\, p \,.\, Ah) = \text{Zone}$$

oder $2R \,.\, p \,.\, (AH - Ah)$; und da $AH - Ah = Hh$, so ist sie $= 2R \,.\, p \,.\, Hh$.

Nun ist Hh die Höhe der Zone; $2R \,.\, p = Dp =$ der Peripherie eines größten Kreises. Daher giebt $D.p\,Hh$, oder die Peripherie eines größten Kreises multiplicirt mit der Höhe der Zone, den Flächenraum derselben.

§. 235. Der körperliche Inhalt der Kugel ist dem eines Kegels oder einer Piramyde gleich, deren Grundflächen der ganzen Oberfläche der Kugel, und deren Höhen der Hälfte ihres Diameters gleichen.

Theilt man die Oberfläche der Kugel in lauter sehr kleine Quadrate, so stellen diese die Grundflächen einer eben so großen Menge von Piramyden, deren Spitzen sämmtlich im Mittelpunct liegen, vor. Ihre Höhen sind also dem Radius gleich; und ihr gemeinschaftlicher Inhalt macht den Kugelinhalt aus.

Nun giebt $\frac{1}{3}\,G \,.\, H$ oder $G \,.\, \frac{H}{3}$ (Grundfläche mal $\frac{1}{3}$ Höhe) den Inhalt einer Piramyde; und $\frac{1}{3}\,H = \frac{1}{3}$ Radius oder $\frac{1}{6}$ Diameter. Folglich wird die Kugelfläche mit $\frac{1}{6}$ Diameter multiplicirt den Inhalt derselben geben. Weil die Oberfläche $= D^2 p$, so ist nun körperlicher Inhalt $= D^2 \,.\, p \,.\, \frac{D}{6} = \frac{D^3 p}{6}$.

§. 236. Vergleicht man die Kugel mit einem Cylinder, dessen Durchmesser und Höhe dem Durchmesser der Kugel gleicht, so findet sich, daß der Inhalt der Kugel $\frac{2}{3}$ vom Inhalt des Cylinders sey. Den weitläufigen gewöhnlichen geometrischen Beweis mag folgender kürzere ersetzen:

Der

Der Inhalt des Cylinders ist $= G \,.\, H$, d. h. $r^2 \,.\, p \,.\, H$ oder $\frac{D^2 \,.\, p \,.\, H}{4}$, oder (weil $H = D$) $= \frac{D^3 \,.\, p}{4}$; Inhalt der Kugel $= \frac{D^3 \,.\, p}{6}$.

Wenn nun $K =$ Kugel; $Z =$ Cylinder, so verhalten sich

$$K : Z = \frac{D^3 p}{6} : \frac{D^3 \,.\, p}{4} \qquad (4$$

$$K : Z = \frac{4 D^3 \,.\, p}{6} : D^3 p \qquad (6$$

$$K : Z = 4 D^3 p : 6 D^3 p \qquad (D^3 p$$

$$K : Z = 4 : 6 \qquad (:2$$

$$K : Z = 2 : 3$$

$$K = 2\frac{Z}{3} = \tfrac{2}{3} Z$$ d. i. die Kugel ist $\frac{2}{3}$ des Cylinders.

§. 237. Da der Kegel $\frac{1}{3}$ des Cylinders oder eines Prismas von gleicher Grundfläche und Höhe, die Kugel aber $\frac{2}{3}$ Cylinder, so ist das Verhältniß dieser drei Körper: Kegel, Kugel, Cylinder, wie 1, 2, 3; oder 1 : 2 : 3.

Anmerk. Die bisher vorgetragenen geometrischen Wahrheiten sind zum völligen Verstehen der in den folgenden Abschnitten gegebenen Formeln erforderlich, aber für denjenigen, welcher gründliche Kenntnisse in der Mathematik zu erlangen wünscht, noch nicht genügend. Ihm empfehlen wir

Häseler's Anfangsgründe der reinen Mathematik ꝛc. 3 Theile. (Zum Selbstunterricht vorzüglich geeignet.)

Kästner, Buria's, Kiesewetter's und andere Schriften, deren Menge sehr groß ist.

VIII. Ebene Trigonometrie.

§. 238. Sie ist die Wissenschaft, aus drei gegebenen Stücken eines Dreiecks (worunter aber wenigstens 1 Seite seyn muß) die übrigen drei Stücke zu berechnen; und daher jedem guten Mathematiker unentbehrlich. Denn die geometrischen Auflösungen vieler Aufgaben sind theils nicht genau genug, theils unmöglich in der Ausübung, indem es in der angewandten Mathematik zuweilen Dreiecke giebt, worin Winkel von Sekunden, und Seiten von Millionen Meilen vorkommen, deren Construction nicht angeht. Die gehörig geführte Rechnung aber löst solche und überhaupt jede dahin gehörige Aufgabe mit der größten Schärfe auf.

Diese so äußerst wichtige Dreieckberechnung gründet sich auf den Satz, daß die ähnlichliegenden Seiten in ähnlichen Figuren einander proportional sind.

§. 239. Wir machen uns mit den dabei vorkommenden Kunstausdrücken bekannt.

Ein Perpendikel EB Fig. 35. vom Umkreise auf den Radius CA heißt Sinus des Winkels n, oder des Bogens AB. Er ist die halbe Chorde oder Sehne des Bogens BAJ, welcher 2n mißt. Wird $<$ n kleiner oder größer, so wird es auch sein Sinus; wird n ein rechter Winkel, so wird BE auf GC fallen, also gleich dem Halbmesser, oder Sinus totus, größter Sinus seyn. BE ist auch der Sinus des $<$ KCB, der eben so viel über 90° hat, als dem n zu einem rechten Winkel fehlt.

Was einem Winkel an 90° fehlt, heißt sein Complement, oder seine Ergänzung. Dem $<$ n fehlt der Bogen GB Fig. 36. oder der Winkel o, ehe er 90° wird, daher ist SB der Sinus complementi, oder Cosinus von n. Der Cosinus nimmt zu, wenn der Sinus abnimmt, und umgekehrt.

Die Linie TA heißt die Tangente des Winkels n. Sie nimmt mit dem Winkel n zu und ab, und ist, wenn n = 90° wird, unendlich, weil sie dann mit CB parallel läuft.

GH ist die Tangente des Winkels o, also die Cotangente des < n.

CT ist der bis zur Tangente verlängerte Radius, und heißt Secante; und CH, welche die Cotangente schneidet, heißt Cosecante.

Das Stück EA des Radius CA heißt der Sinus versus, Quersinus, oder Pfeil. Er ist gleich Radius minus Cosinus oder CA — SB.

§. 240. Die Größe dieser Linien wird sich berechnen lassen, wenn der Radius CA oder CB und der Winkel n bekannt sind. Denn man kann dann < n als den halben Centriwinkel, und BE als die halbe Seite eines Vielecks betrachten und berechnen. Ist aber BE gefunden, so ergiebt sich CE = SB durch den pythagorischen Satz, denn $CB^2 - BE^2 = SB^2$, oder r^2 — Sin. Quadrat = Cosin. Quadrat.

Aus CE und EB findet man die Tangente TA durch

$$CE : EB = CA : AT$$

oder Cos. n : Sin. n = r : AT (Tangente).

Die Sekante CT durch

$$CE : CB = CA : CT$$

d. i. Cos. n : r = r : Sekante.

Die Cotangente GH durch

$$CS : SB = CG : GH$$

d. i. Sin. n : Cos. n = r : Cotangente.

Die Cosekante CH durch

$$CS : CB = CG : CH$$

d. h. Sin. n : r = r : Cosekante.

§. 241. Nimmt man nun den Radius zu 10 Millionen Theilen an, so läßt sich für jeden gegebenen Winkel n die Größe aller genannten Linien in solchen Theilen angeben. Dies mühsame Geschäft ist längst vollendet, und die Berechnung findet man in den sogenannten trigonometrischen Tafeln von Black, Wolf, Schulze, Vega ꝛc., wo man die Größe des Sinus, Cosinus, der Tangente und Cotangente u. s. w. für jeden Winkel von Minute zu Minute, und in den größern Tafeln bei den ersten und letzten Graden des Quadranten von Sekunde zu Sekunde berechnet hat.

Wie

Weil nun alle Kreise einander ähnlich sind, so läßt sich jede ähnliche Linie in einem Kreise, aus diesem so berechneten, durch die Proportion finden. Daher muß jedes zu berechnende Dreieck auf die trigonometrischen Linien, deren Größe für einen angenommnen Radius die logarithmischen Tafeln enthalten, zurückgeführt werden. Für Anfänger sind Black's Tafeln immer noch brauchbar; Geübteren aber Vega's und Schulze's Tafeln zu empfehlen. Siehe §. 119. Ohne ein solches Werk können Dreiecke nicht berechnet werden.

§. 242. Die Anwendung der trigonometrischen Tabellen ergiebt sich aus folgendem Lehrsatz:

In jedem geradlinichten oder ebenen Dreieck verhalten sich die Seiten zu einander, wie die Sinus der ihnen gegenüberstehenden Winkel; und umgekehrt: die Sinus der Winkel verhalten sich zu einander, wie die ihnen gegenüberliegenden Seiten.

Es läßt sich nämlich um jedes Dreieck ein Kreis beschreiben. Die 3 Seiten werden dann Chorden. Fig. 37. ist ABO ein △; man fälle aus C die Perpendikel auf die Chorden, so werden sie in zwei Theile getheilt, und $< A$ ist als Peripheriewinkel $= \frac{1}{2}$ BFO $=$ BF, oder der Bogen BF ist das Maaß von A. Wenn nun CF als Radius angesehen wird, so ist BE der Sinus des Winkels A und auch des Bogens BF; BE ist $= \frac{1}{2}$ BO. Weil sich das Gesagte auch auf die Seite AB anwenden läßt, so ist Be $=$ Sin. O $= \frac{1}{2}$ AB; und also

$$\tfrac{1}{2}\,BO : \tfrac{1}{2}\,AB = \text{Sin. } A : \text{Sin. } O$$

also auch $BO : AB = \text{Sin. } A : \text{Sin. } O,$

§. 243. Aus der Lehre von den Proportionen ist uns bekannt, daß aus 3 Gliedern allezeit das 4te gefunden werden kann. Hiernach ergeben sich schon mancherlei Auflösungen.

Z. B. Es sey Fig. 6. in dem Dreieck abc die Seite ab $= 120$ Fuß; $< a = 40°$; $< b = 58°$ gegeben, so findet man 1. den Winkel c durch $180° - (40 + 58) = 180° - 98 = 82°$; und dann die Seite cb durch die Proportion

Sin. c : ab = Sin. a : cb
d. h. Sin. 81° : 120 = Sin. 40° : cb. In den Taf. findet man = 9902681 : 120 = 6427876

$$\frac{\text{und } 120 \cdot 6427876}{9902681} = 77 \text{ Fuß, } 8 \text{ Zoll, } 9 \text{ Linien} = 77' \, 8'' \, 9''' \, 3''''$$

Durch die in den trigonometrischen Tafeln den Winkeln beigefügten Logarithmen wird das Multipliciren und Dividiren so großer Zahlen vermieden, und die Rechnung gewinnt folgende Gestalt:

Sin. 82° : 120 Fuß = Sin. 40° : cb

$$\begin{array}{r} \text{log. Sin } 40° = 9.8080675 \\ \text{log. } 120 \text{ Fuß} = 2.0791812 \\ \hline 11.8872487 \\ \text{log. } 82° = 9.9957528 \\ \hline \text{log. cb} = 1.8914959 \end{array}$$

wozu die Zahl 77,893 (d. h. 77 Fuß, 8 Zoll, 9 Linien, 3 Scrupel) gehört.

§. 244. Zur Dreieckberechnung gehören noch folgende Lehrsätze:

1. **Im rechtwinklichten Dreieck verhält sich der rechte Winkel (Sinus totus) zur Cathete, wie die Tangente des an dieser Cathete liegenden Winkels zur andern Cathete.** Nach Fig. 5. ist dies

Sin. tot. : ac = Tang. c : ab. Es sey ac = 120 Fuß und $< c = 35° \, 50'$;

so ist 90 : 120 = Tang. 35° 50′

$$\begin{array}{r} \text{log. Tang. } 35° \, 50' = 9,8586019 \\ \text{log. } 120 \text{ Fuß} = 2,0791812 \\ \hline 11,9377831 \\ \text{log. } 90° = 10,0000000 \\ \hline \text{log. ab} = 1,9377831 \end{array}$$

Hiezu gehört die natürliche Zahl 86,653 d. h. 86 Fuß, 6 Zoll, 5‴ 3⁗.

2. **In jedem Dreieck verhält sich die Summe der beiden Schenkel ab + ac Fig. 38. zu ihrem Unterschiede ac − ab, wie die Tangente**

gente der halben Summe der Winkel an der Grundlinie bc zur Tangente des halben Unterschiedes eben dieser Winkel. D. h.

$$ab + ac : ab - ac = \text{Tang.}\ \tfrac{1}{2}(x+y) : \text{Tang.}\ \tfrac{1}{2}(x-y)$$

Dieser Satz lehrt, wie aus zwei bekannten Seiten und dem eingeschlossenen Winkel die übrigen Winkel zu finden sind.

$$\begin{aligned}
\text{Es sey } ac &= 2115 \\
ab &= 1738 \\
\hline
\text{Summe} &= 3853 \\
\text{Unterschied} &= \ \ 377 \\
\text{und} < m &= 63^\circ\, 36' \\
\text{also } x + y &= 116^\circ\, 24' \\
\text{daher } \tfrac{1}{2}(x+y) &= 58^\circ\, 12'
\end{aligned}$$

$$\text{Also } 3853 : 377 = \text{Tang.}\ 58^\circ\, 12' : \text{Tang.}\ \tfrac{1}{2}(x-y)$$

$$\begin{aligned}
\text{log. Tang. } 58^\circ\, 12' &= 10{,}2075899 \\
\text{log. } 337 &= \ \ 2{,}5763414 \\
\hline
& \ \ 12{,}7839313 \\
\text{log. } 3853 &= \ \ 3{,}5857990 \\
\hline
\text{log. Tang. } \tfrac{1}{2}(x-y &= \ \ 9{,}1981323
\end{aligned}$$

wozu der $< 8^\circ\, 58'$ gehört. Wird derselbe zu $58^\circ\, 12'$ addirt, so erhält man den größern $< y = 67^\circ\, 10'$, und davon subtrahirt, den $< x = 49^\circ\, 14'$.

3. Wenn aus einem Punct A Fig. 39. zwei gerade Linien einen Kreis in E und H, D und C schneiden, so ist

$$AC : AH = AE : AD.$$

Mit Hülfe dieses Satzes findet man aus den gegebenen 3 Seiten eines Dreiecks ABC die Winkel.

Beschreibe mit der kleinsten Seite eines Dreiecks, hier mit BC, einen Kreis, der alle 3 Seiten schneidet; dann ist $AB + BH = AB + BC$ (denn $BC = BH = EB =$ Halbmesser; $AE = AB - BC$. Durch obige Proportion findet man AD, folglich auch CD und CG, denn das Perpendikel GB steht auf der Mitte von CD.

Jetzt

Jetzt ist das Dreieck ABC in 2 rechtwinklichte $\triangle$ AGB und BGC zerlegt; in einem jeden sind 2 Seiten und der rechte Winkel bekannt, folglich können auch die übrigen Winkel gefunden werden.

Es sey $BC = 7$ so ist $AH = 9 + 7 = 16$; $AE = 9 - 7 = 2$

$AB = 9$ und

$AC = 11$ $AC : AH = AE : AD$

$11 : 16 = 2 : 2{,}9 \ldots\ldots$

$AC - AD = 11 - 2{,}9 = 8{,}1 = DC$; und $\frac{1}{2}$ DC $= 4{,}05 = CG$; also $AG = 11 - 4{,}05 = 6{,}95$.

$AB : \text{Sin. tot.} = AG : \text{Sin. x}$

d. h. $9 : 90^\circ = 6{,}95 : \text{Sin. x}$

$$\begin{array}{rl} \log. 6{,}95 = & 0{,}8419848 \\ \log. \text{Sin. t.} = & 10{,}0000000 \\ \hline & 10{,}8419848 \\ \log. 9 = & 0{,}9542425 \\ \hline \log. \text{Sin. x} = & 9.8877423 = 50^\circ 33' < x \end{array}$$

folglich ist $< y$, als seine Ergänzung zu $90^\circ = 39^\circ 27'$

Ferner $BC : CG = \text{Sin. tot.} : \text{Sin. v}$

$7 : 4{,}05 = 90^\circ$

$$\begin{array}{rl} \log. 90^\circ = & 10{,}0000000 \\ - 4{,}05 = & 0{,}6074550 \\ \hline & 10{,}6074550 \\ \log. 7 & 0{,}8450980 \\ \hline \log. v & 9.7623570 = 35^\circ 21, < v \end{array}$$

Also Z = Complement $= 54^\circ 39'$; und $x + v = 85^\circ 54'$.

§. 245. Wenn die Sinus und Tangenten von stumpfen Winkeln vorkommen, so nimmt man, weil die Tafeln nur bis 90° berechnet sind, die Ergänzung zu 180°. z. B. Man sucht den Sinus von $110^\circ 20'$, so zieht man $110^\circ 20'$ von 180° ab, und erhält $69^\circ 40'$, wozu man in den Tafeln den Sinus findet. Aus dem Verhältniß der Seiten und Winkel ergiebt sich, ob ein gefundener Winkel unter 90°, oder die Ergänzung zu 180 ist. Im letzten Fall muß der gefundene Winkel von 180° subtrahirt werden.

§. 246. In allen trigonometrischen Tafeln hat man dafür gesorgt, daß auf einer Seite Sinus, Tangente, Secanten u. s. w. und dieser gegenüber die Cosinus, Cotangenten u. s. w. befindlich sind. Daher kommt es, daß Anfang und Ende der Tafeln beisammen stehen. Sucht man z. B. den Cosinus eines Winkels von 50° 30′, so findet man ihn gegenüber, wo er Sinus bei 39° 30′ ist.

§. 247. Man muß bei trigonometrischen Rechnungen wohl darauf achten, ob der gefundene Logarithmus unter den Logarithmen der natürlichen Zahlen, oder unter denen der Winkel zu suchen sey. Das Maaß jeder Linie ist eine natürliche Zahl; das eines Winkels ein Sinus, eine Tangente. — Anfänger thun wohl, wenn sie das Aufsuchen der Logarithmen an schon ausgerechneten Exempeln üben.

Beim Anordnen einer Proportion merke man, daß jede Seite aus ihrem gegenüberstehenden Winkel, und umgekehrt, zu finden ist nach §. 242. Im rechtwinklichten Dreieck ist schon allemal der rechte Winkel bekannt; nach §. 244 sind die Catheten und Winkel zu finden, indem man jedes Glied der dort gegebenen Proportion zum letzten machen kann.

§. 248. Setzt man den Radius = 1, so sind die Sinus, Tangenten 2c. nur Decimaltheile desselben, welches in den Rechnungen nichts weiter ändert, als daß der Sin. tot., den man gewöhnlich mit R oder r bezeichnet, aus derselben wegbleibt, weil 1 weder multiplicirt noch dividirt. Rechnet man mit Logarithmen, und ist r Multiplicator, so vermehrt man die Kennziffer um 10, und wenn r Divisor ist, so vermindert man sie um 10.

§. 249. Weil man bei der Dreiecksberechnung doch nothwendig die trigonometrischen Tafeln gebraucht, und man nicht alle Formeln für die sehr verschiedenen Fälle, welche vorkommen können, im Gedächtniß zu behalten im Stande ist, so pflegt man kleine Tabellen, wie Tafel XII. im Anhange, den trigonometrischen Handbüchern anzuhängen. Mittelst derselben kann jede Aufgabe gelöst werden. Zuvörderst benenne man das gegebene Dreieck mit den Buchstaben A, B, C, wie die Figuren bei dieser Tafel auch benannt sind; lege dann den gegebenen Stücken

ken ihre Werthe unter, und suche in der ersten und zweiten Spalte das Gegebene und Gesuchte auf, so findet man in der dritten Spalte die dazu gehörige Proportion.

§. 250. Die Auflösung der rechtwinklichten Dreiecke ist leichter, als die der schiefwinklichten; deshalb zerlegt man oft die letzteren durch Perpendikel in rechtwinklichte, wie §. 244. geschehen ist. Dabei ist darauf zu achten, ob das Perpendikel in oder außer dem Dreiecke steht. Bei verwickelten Fällen ist eine geometrische Zeichnung zur leichtern Übersicht zu empfehlen.

IX. Die sphärische Trigonometrie.

§. 251. Sie lehrt Dreiecke berechnen, deren Seiten Bogenstücke von Kugelkreisen, folglich krumme Linien sind. Zur Bildung eines Kugeldreiecks gehören 3 Bogenstücke von 3 größten Kreisen auf der Kugeloberfläche, und 3 Winkel, also ebenfalls 6 Stücke.

Die sphärischen Dreiecke werden, wie die ebenen, in recht- und schiefwinklichte, gleich- und ungleichseitige getheilt, je nachdem die Kreisbogen, woraus sie bestehen, beschaffen sind. Rechtwinklicht sind diejenigen, welche einen oder mehrere rechte Winkel haben; schiefwinklicht die, worin alle Winkel schief, d. h. stumpf oder spitz sind. In einem Kugeldreieck können mehrere rechte und stumpfe Winkel seyn, wodurch sich die sphärischen Dreiecke sehr von den ebenen unterscheiden.

Die Seiten werden, weil sie Bogen sind, nach Graden, Minuten und Sekunden gemessen, und keine Seite kann über, oder auch nur $= 180°$ seyn, weil mit so großen Bogen kein Dreieck gebildet werden kann.

§. 252. Übrigens findet zwischen Seiten und ihren gegenüberstehenden Winkeln eben das Verhältniß statt, wie in der ebenen Dreiecksberechnung, d. h. die größte Seite ist dem größten, die kleinste dem kleinsten Winkel gegenüber; gleichen Seiten gehören in einem △ gleiche Winkel; zwei Seiten zusammengenommen sind größer, als

als die dritte; und alle 3 Seiten sind allemal kleiner, als 360°. Jeder Winkel kann zwar größer, als 90°, aber niemals $= 180°$ seyn, weil sonst beide Schenkel Eine Linie bilden würden.

Die Grenze der Größe aller 3 Winkel eines sphärischen Dreiecks ist über 180°, und unter 6 rechten $<$ oder unter 540°.

§. 253. Weil die Seiten eines sphärischen Dreiecks Bogen sind, die nach den Sinus wachsen und abnehmen, so ist das allgemeine Gesetz, wodurch die Kugeldreiecke sich bestimmen lassen, von dem in der ebenen Trigonometrie etwas verschieden, und im Wesentlichen folgendes:

> Im Kugeldreieck verhalten sich die Sinus der Seiten, wie die Sinus der ihnen entgegenstehenden Winkel.

Nach Fig. 40. mögen M, N, R Winkel, und a, b, c Seiten eines Kugeldreiecks seyn, so gilt

$$\text{Sin. } M : \text{Sin. } b = \text{Sin. } R : \text{Sin. } a$$

und $\text{Sin. } M : \text{Sin. } b = \text{Sin. } N : \text{Sin } c$

Durch Versetzung kann jedes Glied zum letzten gemacht und durch Rechnung gefunden werden.

Wenn nun bei R ein rechter Winkel ist, so ist die Auflösung noch leichter, weil dem rechten Winkel der Logarithme 10,0000000 gehört.

Es sey $a = 50°$, $b = 35°$; R ein rechter Winkel; man sucht $<$ M.

$$\text{Sin. } a : \text{Sin. } R \text{ (Sin. tot.)} = \text{Sin. } b : \text{Sin. } M$$

d. i. $\text{Sin. } 50° : 90° = \text{Sin. } 35° : \text{Sin. } M$

$$\begin{array}{rl} \log. \text{Sin. } 35° = & 9{,}7585913 \\ - \text{ Sin. tot.} = & 10{,}0000000 \\ \hline & 19{,}7585913 \\ \log. \text{Sin. } 50° = & 9{,}8842540 \\ \hline \log. \text{Sin. } M = & 9{,}8743373 = 45°\,28'\,56'' \end{array}$$

§. 254. In der ebenen Trigonometrie wußten wir den 3ten Winkel aus den beidein andern zu finden, denn alle drei hatten 180°; nicht so in der sphärischen, denn die 3 Winkel sind stets größer als 180°; daher konnten wir

wir nach dem vorigen §. nicht eher eine Seite finden, bis der gegenüberstehende Winkel bekannt war, und umgekehrt.

§. 255. Es sind also mehrere Gesetze aus der Natur der sphärischen Dreiecke abgeleitet worden, durch welche sich aus 3 bekannten Stücken allemal die übrigen finden lassen.

Zweites Gesetz.

Im rechtwinklichten sphärischen Dreieck verhält sich der Sinus totus zum Sinus einer Perpendikularseite, wie die Tangente des an dieser Seite befindlichen Winkels, zur Tangente der andern Perpendikularseite.

Es sey Fig. 40. bei R der rechte Winkel, so gilt

$$\text{Sin. tot.} : \text{Sin. c} = \text{Tang. M} : \text{Tang. b}$$
$$\text{Sin. tot.} : \text{Sin. b} = \text{Tang. N} : \text{Tang. c.}$$

Durch Versetzung der Glieder wird jedes gefunden werden können.

Z. B. wenn $b = 35°$; $M = 48° 29'$, so findet man c durch

$$\text{Tang. M} : \text{Tang. b} = r = \text{Sin. c}$$
$$\log. r = 10{,}0000000$$
$$\log. \text{Tang. b} = 9{,}8452268$$
$$19{,}8452268$$
$$\text{Tang. M} = 10{,}0531916$$
$$\log. \text{Sin. c} = 9{,}7920352 = 38° 17' = c$$

§. 256. Drittes Gesetz.

Im rechtwinklichten sphärischen Dreieck verhält sich der Sinus totus zum Cosinus einer Cathete, wie der Cosinus der andern Cathete zum Cosinus der Hypotenuse.

(Unter Cosinus verstehen wir allemal die Ergänzung einer Seite oder eines Winkels zu 90°.)

Es sey Fig. 41. bei R der rechte Winkel, a Hypotenuse; b und c sind Catheten.

Der

Der Kürze wegen wollen wir den Sinus totus $= 90°$ stets r nennen. Dann gelten

$r : \text{Cos. } b = \text{Cos. } c : \text{Cos. } a$
$r : \text{Cos. } c = \text{Cos. } b : \text{Cos. } a$, und durch Versetzung
$\text{Cos. } b : r = \text{Cos. } a : \text{Cos. } c$
$\text{Cos. } c : r = \text{Cos. } a : \text{Cos. } b$

Z. B. Es sey $b = 35°$; $c = 38° 17'$, man sucht a, so ist
$r : \text{Cos. } b = \text{Cos. } c : \text{Cos. } a$
$\quad 35° \qquad 38° 17'$

$$\begin{array}{rl} \text{log. Cos. } 38° 17' = & 9,8948457 \\ - \; - \; 35° \quad = & 9,9133645 \\ \hline & 19,8082102 \\ \text{log. } r = & 10,0000000 \\ \hline \text{Cos. } a = & 9,8082102 = 49° 59' = a \end{array}$$

§. 257. Auf diese Weise die Winkel zu finden, ist folgendes

Viertes Gesetz.

Der Sin tot. verhält sich zum Cosinus einer Cathete, wie der Sinus des anliegenden Winkels, zum Cosinus des gegenüberstehenden Winkels.

Fig. 41.

$r : \text{Cos. } b = \text{Sin. } N : \text{Cos. } M$
$r : \text{Cos. } c = \text{Sin. } M : \text{Cos. } N.$

Hiernach kann aus 3 Winkeln eine Seite gefunden werden, denn M, N und r sind Winkel, und b und c Seiten; versetzt man die Glieder, so kommt

$\text{Sin. } N : \text{Cos. } M = r : \text{Cos. } b$
$\text{Sin. } M : \text{Cos. } N = r : \text{Cos. } c.$

Es sey $c = 38° 17'$, $M = 48° 30'$, Gesucht N, so ist $r : \text{Cos } c = \text{Sin. } M : \text{Cos. } N$

$$\begin{array}{rl} \text{log. Sin. } M = & 9,8744561 \\ - \text{Cos. } c = & 9,8948457 \\ \hline & 19,7693018 \\ \text{log. } r = & 10,0000000 \\ \hline \text{log. Cos. } M = & 9,7693018 \\ = & 53° 59' = N. \end{array}$$

§. 258. Fünftes Gesetz.

Im rechtwinklichten sphärischen Dreieck verhält sich der Sinus totus zur Cotangente eines der übrigen Winkel, wie die Cotangente des andern Winkels zum Cosinus der Hypotenuse.

Nach Fig. 41. $r : \text{Cot. } M = \text{Cot. } N : \text{Cosin. } a$
$r : \text{Cot. } N = \text{Cot. } M : \text{Cosin. } a.$

Nach diesem Gesetz ist aus den 3 Winkeln die Hypotenuse zu finden.

Es sey $M = 48° 30'$, $N = 53° 59'$; Gesucht a

$$\begin{aligned} r : \text{Cot. } M &= \text{Cot. } N : \text{Cos. } a \\ \log. \text{Cot. } N &= 9.8615267 \\ - \text{Cot. } M &= 9.9468084 \\ \hline \log. \text{Cosin.} &= \cancel{1}9{,}8083351 = 49° 58' \end{aligned}$$

(Wenn r Divisor ist, so braucht man nur die Kennziffer um 10 zu vermindern oder die 1 auszustreichen.)

§. 259. Sechstes Gesetz.

Der Sinus totus verhält sich zum Cosinus eines der beiden übrigen Winkel, wie die Cotangente der an diesem Winkel liegenden Cathete zur Cotangente der Hypotenuse.

Nach Fig. 41. $r : \text{Cos. } N = \text{Cotang. } b : \text{Cotang. } a$
$r : \text{Cos. } M = \text{Cot. } c : \text{Cot. } a$

Es sey $b = 35°$, $N = 53° 59'$; Gesucht a

$$\begin{aligned} r : \text{Cos. } 53° 59' &= \text{Cot. } 35° : \text{Cot. } a \\ \log. \text{Cotang. } 35° &= 10{,}1547732 \\ - \text{Cos. } 53° 59' &= 9{,}7693925 \\ \hline \log. \text{Cotang. } a &= \cancel{1}9{,}9241657 \\ &= 49° 59' \end{aligned}$$

§. 260. Diese angeführten Gesetze sind völlig hinreichend, alle Aufgaben bei rechtwinklichten Kugeldreiecken aufzulösen. Es sind überhaupt 30 Fälle bei rechtwinklichten Kugeldreiecken durch diese 6 Gesetze aufgelöst. Die erste Hälfte der XIII. Tafel im Anhange enthält sie alle. Mittelst derselben ist jede Auflösung leicht; denn man benenne das gegebene Kugeldreieck nur so, daß A am rechten Winkel, B und C an den andern Winkeln stehen, unterscheide das Gegebene und Gesuchte gehörig, und suche es in der 2ten und 3ten Spalte auf, so enthält die 4te Spalte die dazugehörige Proportion, und in der 5ten steht, ob das Gefundene größer oder kleiner als 90° ist.

§. 261. Da der Sinus und Cosinus eines Winkels unter 90° gleich sind mit einem andern über 90°, so muß das Gesuchte zuweilen zweifelhaft seyn, zumal da wir mit Bogen und Winkeln zu thun haben, die nahe an 180° seyn können. Es ist daher nothwendig, daß man bei den 3 gegebenen Stücken in einer Proportion auch darauf Rücksicht nimmt, ob sie stumpf oder spitz sind, und wo es sich thun läßt (nur bei den Sinus wird es nicht angehen) die spitzen Winkel oder Bogen mit +, und die stumpfen durch — ausdrückt. Es wird sich dann bei dem 4ten Gliede durch das ihm zukommende Zeichen entwickeln, ob das Gefundene größer, oder kleiner, als 90° sey. Eigentlich ist nur der eine Fall zweifelhaft, wenn alle 4 Glieder Sinus sind. (Hat man eine Kugel (Globus), auf welcher sich zur richtigen Übersicht das Dreieck zeichnen läßt, so bleibt kein Fall zweifelhaft; überhaupt ist zur bessern Einsicht in die Einrichtung und Gestalt der Kugeldreiecke eine Kugel nothwendig.)

Die Sinus der Winkel und Bogen (stumpfe und spitze) erhalten stets das Zeichen +.

Die Cosinus der spitzen Winkel sind +; der stumpfen —; bei 90° werden sie Null.

Die Tangenten haben bis 90° +; bei 90° sind sie unendlich; über 90° haben sie —.

Die Cotangenten unter 90° +; bei 90° = 0; über 90° = —.

§. 262. Gleichartig heißen zwei Winkel oder Bogen, wenn sie beide über, oder unter 90° haben; ungleichartig, wenn der eine über, der andere unter 90° hat.

§. 263. Wenn der Radius $r = 1$ gesetzt wird, so werden alle Sinus und Cosinus zu Brüchen von 1; die Tangenten unter 45° sind auch Brüche, bei 45° = 1; über

über 45° unechte Brüche. In Rechnungen und Formeln kommt dies oft vor und ist bequem. Will man die natürlichen Sinus, Tangenten u. s. w. suchen, so lassen sie sich, wie andere Brüche, durch einander multipliciren und dividiren, und der Quotient wird unter den natürlichen Sinus, Tangenten etc. in den Tafeln aufgesucht.

Es läßt sich aber in solchen Formeln, worin $r = 1$ ist, das r leicht wieder herstellen. Sind die trigonometrischen Linien mit einander bloß multiplicirt, so ist r Divisor gewesen. Z. B. $\text{Cot. } H = \text{Cos. } N \cdot \text{Cot. } b$. Hier ist r Divisor, und die Formel aus der Proportion $r : \text{Cos. } N = \text{Cot. } b : \text{Cot. } H$ entstanden. Bei Formeln, wie $\text{Cot. } H = \frac{\text{Cos. } M}{\text{Tang. } c}$, ist r im Zähler gewesen, und eigentlich $\text{Cot. } H = \frac{r \cdot \text{Cos. } M}{\text{Tang. } c}$ zu lesen.

Man muß dann darnach die Kennziffer ordnen, und wenn man den Logarithmen des Divisors von dem des Dividendus nicht abziehen kann, zur Kennziffer des letztern 10 addiren; ist r Divisor, von der Kennziffer des Quotienten 10 abziehen.

§. Die schiefwinklichten Kugeldreiecke sind von zweierlei Art:

1. solche, deren Winkel an der Grundlinie gleichartig sind. Ein von ihrer Spitze herabgelassenes Perpendikel fällt innerhalb des Dreiecks, und ist mit den Winkeln gleichartig;
2. solche, deren Winkel an der Basis ungleichartig sind. Das Perpendikel fällt außerhalb der Basis, und ist mit dem, ihm im Dreieck am nächsten liegenden Winkel ungleichartig.

Das Perpendikel theilt die Dreiecke der erstern Art in zwei rechtwinklichte; auch die der 2ten Art werden dadurch in rechtwinklichte verwandelt, wodurch die Rechnung sehr erleichtert wird.

§. 265. Man hat 7 Hauptgesetze zur Auflösung schiefwinklichter Dreiecke.

Er=

Erstes Gesetz.

Im schiefwinklichten Kugeldreieck verhalten sich die Sinus der Seiten, wie die Sinus der ihnen entgegenstehenden Winkel.

Wir haben dies Gesetz als das erste bei den rechtwinklichten Kugeldreiecken kennen gelernt,

§. 266. Zweites Gesetz.

Wenn das Perpendikel Pa Fig. 42. auf der Grundlinie steht, so verhalten sich die Sinus der beiden Winkel x und y, welche durch das Perpendikel entstehen, wie die Cosinus der beiden Winkel an der Grundlinie M und T.

$$\text{Sin. } x : \text{Sin. } y = \text{Cosin. } M : \text{Cosin. } T.$$

Es sey A (oder Seite bp) $= 66° 45'$; Winkel $M = 43° 20'$; $< N = 79° 9'$; man sucht den Winkel T.

Durch das Perpendikel Pa entstehen 2 rechtwinklichte Dreiecke bpa, und apd. Im erstern ist Seite A, $< M$, und der rechte Winkel bei a bekannt, man sucht erst $< x$ durch

$1 : \text{Cos. } A = \text{Tang. } M : \text{Cot. } x.$ (Siehe Tafel XIII. Fall 24, wo $A = BC$; $M = B$; $x = c$ genannt).

$$\begin{array}{rl} \text{log. Tang. } 43° 20' = & 9{,}9747195 \\ - \text{ Cos. } 66° 45' = & 9{,}5963154 \\ \hline \text{log. Cot. } x = & \cancel{1}9{,}5710349 = 69° 34' = x. \end{array}$$

Nun ist $N - x = y$, d. h. $79° 9' - 69° 34' = 9° 35' = y$.

Ferner: $\text{Sin. } x : \text{Sin. } y = \text{Cos. } M : \text{Cos. } T$
$69° 34' : 9° 35' = 43° 20' : \text{Cos. } T$

$$\begin{array}{rl} \text{log. Cos. } M = & 9{,}8617576 \\ - \text{ Sin. } y = & 9{,}2213671 \\ \hline & 19{,}0831247 \\ \text{log. Sin. } x = & 9{,}9717762 \\ \hline \text{log. Cos. } T = & 9{,}1113485 = 82° 34' = T. \end{array}$$

Man

Man hat also mehrentheils zwei Proportionen nöthig. (Siehe Anhang Tafel XIII. 2. 5te der schiefwinklichten Dreiecke).

§. 267. Drittes Gesetz.

Steht das Perpendikel auf der Grundlinie, so verhalten sich die Sinus der beiden Stücke derselben umgekehrt, wie die Tangenten der beiden anliegenden Winkel. Nach Fig. 42.

Sin. ba : Sin. da = Tang. T : Tang. M
oder Cot. M : Cot. T.

§. 268. Viertes Gesetz.

Die Cosinus der durch das Perpendikel entstandenen Stücke der Grundlinie verhalten sich, wie die Cosinus der anliegenden Seiten. Fig. 42.

Cos. ba : Cos. da = Cosin. A : Cos. B.

§. 269. Fünftes Gesetz.

Die Cosinus der beiden Winkel, die das Perpendikel macht, verhalten sich verkehrt, wie die Tangenten der beiden anliegenden Seiten. Nach Fig. 42.

Cos. x : Cos. y = Taug. B : Tang. A.

§. 270. Es falle das Perpendikel außerhalb des Dreiecks, so ist < Z die Ergänzung zu 180°, oder Fig. 43. Nebenwinkel von T, und beide haben einerlei Sinus.

$$\left.\begin{array}{r}\text{Es sey Seite A} = 70^\circ \\ \text{Seite C} = 60^\circ \\ < \text{M} = 30^\circ\end{array}\right\}\ \text{man sucht} < \text{T.}$$

Hier sind nun 2 Seiten und der eingeschlossene Winkel bekannt, man sucht den einer Seite gegenüber liegenden Winkel. (Vergl. Anhang Tafel XIII. 2. 9ten Fall; wo B = M; A = T; C = p gesetzt ist.)

r : Tang.

$r : \text{Tang. } A = \text{Cos. } M : \text{Tang. } ab$

$$\begin{array}{lr} \log. \text{Cos. } M = 30^\circ = & 9{,}9375306 \\ - \text{Tang. } A = 70^\circ = & 10{,}4389341 \\ \hline & 20{,}3764647 \\ \log. r = & 10{,}0000000 \\ \hline \end{array}$$

$\log. \text{Tang. } ab = 10{,}3764647 = 67^\circ\, 12' = ab.$

Da nun Seite C nur 60° hat, so ist $da = 7^\circ\, 12'$ und das Perpendikel fällt außerhalb.

Ferner: $\text{Sin. } da : \text{Sin. } ab = \text{Tang. } M : \text{Tang. } T$

$$\begin{array}{lr} \log. \text{Tang. } M = 30^\circ = & 9{,}7614394 \\ - \text{Sin. } ab = 67^\circ 12' = & 9{,}9646665 \\ \hline & 19{,}7261059 \\ - \text{Sin. } da = 7^\circ 12' = & 9{,}0980662 \\ \hline \end{array}$$

$\log. \text{Tang. } T = 10{,}6280397 = 76^\circ 45'$

Weil das Perpendikel außerhalb liegt, so ist M und T ungleichartig, also der gefundene Winkel = dem Nebenwinkel von T, oder = z, und $T = 180^\circ - 76^\circ 45' = 103^\circ 15'$, folglich stumpf.

§. 271. **Sechstes Gesetz.** Aus 3 gegebenen Seiten einen Winkel zu finden.

> **Das Product der Sinus der beiden, den gesuchten Winkel einschließenden, Seiten, verhält sich zum Product der Sinus beider Überschüsse der halben Summe der 3 Seiten über jede von beiden Seiten, wie das Quadrat des Sinus totus zum Quadrat des Sinus des halben gesuchten Winkels.** Fig. 44. Aus 3 Seiten <M zu finden:

$$\text{Sin. } A . \text{Sin. } C : \text{Sin. } \tfrac{1}{2}\,(B + A - C) . \text{Sin. } \tfrac{1}{2}\,(B + C - A) = r^2 : \text{Sin.}^2\, \tfrac{1}{2}\, M.$$

Diese in der Astronomie häufig vorkommende Formel läßt sich folgendermaßen auflösen:

Es sey $= A = 65° 31'$ halbe Sum̃e $85° 52'$
$B = 39° 29'$ $\quad A = 65° 31'$ abgez.
$C = 66° 45'$
Summe $= 171° 45'$ $\quad$ Diff. I $= 20° 21' = \frac{B+C-A}{2}$
halbe Summe $85° 52'$ { halbe Sum̃e $85° 52'$
$C = 66° 45'$ abgez.
Diff. II $= 19° 7' = \frac{B+A-C}{2}$

Diff. I = log. Sin. $20° 21' = 9{,}5412721$
Diff. II = log. Sin. $19° 7' = 9{,}5152017$
A dec. Erg. log. Sin. $65° 31' = 0{,}0409195$
C dec. Erg. log. Sin. $66° 45' = 0{,}0367832$
$19{,}1341765$

$\sqrt{}$ ausgez. durch 2 :)
log. $\frac{1}{2}$ M $= 9{,}5670882 = 21° 40' = \frac{1}{2}$ M
(2
$43° 20' = M$

§. 272. **Siebentes Gesetz.** Aus 3 gegebenen Winkeln eine Seite zu finden.

Das Product der Sinus der Winkel, welche die gesuchte Seite einschließen, verhält sich zum Product der Cosinus beider Überschüsse der halben Summe über jeden von beiden Winkeln, wie das Quadrat des Halbmessers, zum Quadrat des Cosinus der halben Seite. Nach Fig. 45., wenn Seite A gesucht wird,

$$\text{Sin. M . Sin. N : Cos. } \tfrac{1}{2}\,(T+M-N) \text{ . Cos. } \tfrac{1}{2}\,(T+N-M) = r^2, \text{ Cosin.}^2\, \tfrac{1}{2}\, A.$$

Es sey $M = 50° 36'$ $\quad$ halbe S. $104° 22'$
$T = 75° 58'$ $\quad < N = 82° 10'$
$N = 82° 10'$
Summe $208° 44'$ $\quad$ Diff. I $= 22° 12' = \frac{T+M-N}{2}$
halbe S. $= 104° 22'$ $\quad$ halbe S. $104° 22'$
$< M = 50° 36'$
Diff. II $= 53° 46' = \frac{T+N-M}{2}$

log.

log. Diff. I = Cos. 22° 12′ = 9,9665503
log. Diff. II = Cos. 53° 46′ = 8,7716426
$\angle$ M decad. Erg. log. Sin. 50° 36′ = 0,1119702
$\angle$ N — — — Sin. 82° 10′ = 0,0040716

19,8542347

$\sqrt{}$ ausgez. durch 2:)
log. Cosin. $\frac{1}{2}$ A = 9,9271173 = 32° 16′ = $\frac{1}{2}$ A
(2
ganze Seite = 64° 32, = A

§. 273. Zur bequemen Auflösung der schiefwinklichten Kugeldreiecke befindet sich im Anhange die zweite Abtheilung der XIII. Tafel. Man hat bei ihrem Gebrauch nur nöthig, zu untersuchen, was in einem Dreieck bekannt oder gegeben, und was das Gesuchte sey. Was man weiter zu thun habe, enthält die jedem Fall beigefügte Auflösung sehr deutlich. Caille ist der Verfasser derselben.

Die sphärische Trigonometrie wird denen, die geographische und astronomische Rechnungen zu machen haben, eine unentbehrliche Wissenschaft seyn; jedoch beschränken sich die Meisten darauf, eine Fertigkeit im Gebrauch der Tafel XIII. zu erlangen, mit der sie auch ziemlich ausreichen.

X. Von den Kegelschnitten.

§. 274. Zu den krummen Linien, welche ihren Ursprung aus dem senkrechten Kegel haben, gehören: Kreis, Parabel, Ellipse und Hyperbel. Die Lehre vom Kreis rechnet man mit zur Geometrie; die aber von der Parabel, Ellipse und Hyperbel gehört zur höhern Geometrie, von welcher wir die vorzüglichsten Lehren anführen wollen.

Der Kreis entsteht, wenn eine schneidende Ebene einen Kegel so durchdringt, daß die Durchschnittsfigur mit der Grundfläche parallel wird.

§. 275. Wird ein senkrechter Kegel ABC Fig. 46. so durchschnitten, daß die Durchschnittsfigur mit der

Seite

Seite AB parallel wird, so entsteht auf der Oberfläche eine krumme Linie GLErS, welche Parabel heißt.

Es sey EF die schneidende Ebene. Man lege da, wo sie in den Kegel dringt, die Ebene ED, und an einem andern beliebigen Orte eine zweite Ebene KH, beide mit der Grundfläche parallel, durch den Kegel, so werden ihre Durchschnittsfiguren Kreise seyn. Wo der Parabelschnitt die Kreisfläche HJKL trifft, entsteht ein Durchschnitt, der zur Hälfte in der Figur angedeutet, und JL ist. Diese JL steht auf dem Diameter HK in J, und auch auf der Mitte des Parabelschnitts EF, welche Axe heißt, senkrecht, und berührt in L sowol den Kreis HLK, als die parabolische Linie ELG, welche letztere durch den Abstand JL von der Axe bestimmt wird. Da die Ebene HK beliebig gelegt ist, so wird der Werth, den wir für JL ausmitteln, allgemein gelten, die HK mag liegen, wo sie will; man sieht bald, daß JL größer wird, je weiter HK von E entfernt ist.

Die Dreiecke ADE und EJK sind einander ähnlich, daher gilt

$$AD : DE = EJ : JK, \text{ und } JK = \frac{DE \cdot EJ}{AD}$$

Weil HK der Diameter eines Kreises ist, und JL senkrecht darauf steht, so gilt

$$HJ : JL = JL : JK, \text{ und } JK = \frac{JL^2}{HJ}; \text{ und } JL^2 = HJ \cdot JK$$

Da DE = HJ, so kann auch DE für HJ gesetzt werden, dann ist $JL^2 = DE \cdot JK$; und für JK hatten wir den Werth $\frac{DE \cdot EJ}{AD}$ gefunden, wird nun dieser für JK gesetzt, so ist

$$JL^2 = \frac{DE \cdot DE \cdot EJ}{AD} = \frac{DE^2 \, EJ}{AD}$$

In einer und derselben Parabel ist AD und DE beständig; EJ und JK aber hängen von der Höhe der Ebene HK ab; folglich ist $\frac{DE^2}{AD}$ eine beständige Größe, und

heißt

heißt der Parameter. Man bezeichnet ihn mit a, b oder p; wir wählen das letztere Zeichen, und nennen den Parameter $= p$.

Die veränderliche JL heißt y; und die veränderliche EJ heißt x; dann ist obige Gleichung $JL^2 = \frac{DE^2}{AD} . EJ$ auch gleich: $y^2 = p . x$, welche man die Gleichung für die Parabel nennt.

§. 276. In Fig. 47. ist die Parabel außer dem Kegel zu sehen. Die krumme Linie SELG ist sie; in E ist der Scheitel; EB heißt Axe; ES, und EG sind ihre Arme, die unendlich lang seyn können. Ein beliebiges Stück EJ von der Axe heißt Abscisse $= x$; eine auf J senkrecht stehende Linie JL heißt Ordinate $= y$.

Wenn zwei von den Größen y, x, und p bekannt sind, so ist die dritte leicht zu finden. Denn

$$\left.\begin{array}{l} y^2 = x . p \\ \text{Also } y = \sqrt{(x . p)} = \text{Ordin.} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{und } x = \frac{y^2}{p} = \text{Abscisse.} \\ \text{und } p = \frac{y^2}{x} = \text{Parameter.} \end{array}$$

§. 277. Die Gleichung für die Parabel läßt sich auch aus dem Kreise ableiten.

Es sey BmfD der eine Arm einer Parabel, BA die Axe; Ba $= x =$ Abscisse; ad $= p =$ Parameter; am $= y =$ Ordinate. Man sehe Bd als den Diameter eines Kreises an, aus dessen Mittelpunct c sich der Halbkreis dmB beschreiben läßt. Dann gilt nach §. 196.

$$da : am = am : AB \text{: in unsern Zeichen}$$
$$p : y = y : x$$
$$\text{folglich } p . x = y^2$$

Dasselbe wird auch in dem Halbkreise gfB der Fall seyn, worin Be Abscisse, ef Ordinate, eg Parameter ist. Man bemerke, daß Abscisse und Ordinate wachsen, je weiter letztere vom Scheitel B absteht, aber ad $=$ eg bleibt, weil sie Parameter ist; und daß man jede der 3 Größen x, y und p durch Zeichnung finden kann, sobald zwei von ihnen bekannt sind.

Wäre

Wäre z. B. x und y gegeben, so findet man den Parameter, wenn man an den Punct m einen rechten Winkel setzt, dessen einer Schenkel in B liegt. Der andere Schenkel wird die Axe in d schneiden, und dadurch den Parameter ad bestimmen.

Wäre p und y, oder da und am gegeben, so fände man aB oder x eben so, weil die Lage des rechten Winkels an m durch die des einen Schenkels dm bestimmt wird, und der andere die Axe in B schneiden muß.

Die Ordinate y findet man, wenn man x und p in einer geraden Linie an einander setzt, im Endpunct von x (hier in a) ein Perpendikel am errichtet, dessen Länge durch den Kreis bestimmt wird, der sich aus der Mitte der $x+p$ durch B und d ziehen läßt.

§. 278. Wenn die Parabelarme glattpolirte Flächen wären, so würden alle mit der Axe parallel einfallende Lichtstrahlen SR Fig. 49. nach der Brechung in dem Punct F zusammen kommen, welcher Brennpunct heißt.

Der Abstand des Brennpuncts vom Scheitel ist $\frac{1}{4}$ p (Parameter), und die Ordinate auf demselben ist $\frac{1}{2}$ p; nach Fig. 49. ist

$$FM = \tfrac{1}{2}p; \text{ und } TM = p$$
$$AF = \tfrac{1}{4}p.$$

§. 279. Aus der Abscisse und zugehörigen Ordinate findet man den Brennpunct. $AF = \frac{y^2}{4x} = \frac{PR^2}{4.AP}$.

§. 280. Eine Linie FR vom Brennpunct der Parabel an den Arm derselben ist allezeit so groß, als die Abscisse der Ordinate, die aus diesem Punct R auf die Axe herabgelassen, plus der Entfernung des Brennpuncts vom Scheitel, d. h. Fig. 49.

$$FR = AP + AF = x + \tfrac{1}{4}p.$$

§. 281. Eine Linie AM, vom Scheitel zur Ordinate in der Parabel Fig. 50. heißt Chorde. Sie ist

$$AM = \sqrt{(AP^2 + PM^2)} = \sqrt{(x^2+y^2)} = \sqrt{(x^2+px)}.$$

Jede gerade Linie, welche die Parabel in 2 Puncten schneidet, heißt Chorde, oder Sehne. Da alsdann die Sehnen mit der Axe nicht parallel laufen können, so wird die Axe oder ihre Verlängerung von den Sehnen unfehlbar getroffen werden.

§. 282. Tangente heißt eine Linie LF Fig. 51., welche die Parabel nur in Einem Puncte L berührt. Sie kann nie der Axe parallel werden, und muß also ihre Verlängerung durchschneiden.

§. 283. Die Linie, oder der Theil der Axe, FP, welche durch die auf den Berührungspunct der Tangente gezogene Ordinate PL bestimmt wird, heißt Subtangente.

§. 284. Ein Perpendikel auf der Tangente im Punct L, die LR, Fig. 51., heißt Normale; das Stück der Axe PR ist Subnormale.

§. 285. Die Werthe für diese Linien sind:

$FA = AP = x$; folglich ist $FP = 2x =$ Subtangente; also liegt die Hälfte derselben innerhalb, und die andere außerhalb der Parabel.

Die Tangente $FL = \sqrt{(FP^2 + PL^2)} = \sqrt{(4x^2 + px)}$.

Die Subnormale $PR = \frac{1}{2}p$, = dem halben Parameter, also beständig.

Die Normale $RL = \sqrt{\left(\frac{p^2 + 4px}{4}\right)} = \frac{\sqrt{(p^2 + 4px)}}{2}$.

Man kann sich FR als den Diameter eines Kreises vorstellen, in dessen Peripherie die drei Puncte F, L und R liegen.

§. 286. Wenn nun Fig. 51. in f der Brennpunct, so ist $Ff = x + \frac{1}{4}p$; fL ist auch $\frac{1}{4}p + x$; $AR = x + \frac{1}{4}p$, und $fR = x + \frac{1}{2}p - \frac{1}{4}p = x + \frac{1}{4}p$, folglich $\triangle FfL$ gleichschenklicht. Der Mittelpunct des Kreises FLR ist daher im Brennpunct f, woraus folgt, daß mit Hülfe eines Kreises, dessen Radius fL ist, sich Tangente, Subtangente und Normale mechanisch finden lassen.

§. 287. Eine mit einer Tangente TM Fig. 52. parallele Sehne GL wird durch eine mit der Axe parallel gezogene, und durch den Berührungspunct M der Tan-

gente

gente TM gehende Linie NS in zwei gleiche Theile getheilt, so daß $up = pL$.

§. 288. Die Linie NS, welche mit der Axe parallel läuft, heißt Diameter; up und pl sind seine Ordinaten, und der Punct M sein Scheitel; Mp Abscisse auf dem Diameter.

Es sind unzählig viele Diameter und Sehnen in einer Parabel möglich. Zieht man zwei oder mehrere parallele Sehnen, und theilt sie in 2 gleiche Theile, so wird man Puncte finden, durch welche der Diameter geht. Errichtet man auf dem Diameter mehrere senkrechte Linien und verlängert sie bis zur Parabel, so findet man auf ihrer Mitte die Puncte, durch welche die Axe derselben geht.

§. 289. Das Verhältniß der Abscissen und Ordinaten auf der Axe ist:

$$x : y = y : p; \text{ also } y^2 = x \cdot p; \text{ oder} = x \frac{y^2}{p}$$

$$x' : y' = y' : p; \text{ also } y'^2 = x' p; \text{ oder } x' = \frac{y'^2}{p}$$

also verhalten sich x zu x′ wie die Quadrate von y und y′. Sind nun Mp und Mv zwei verschiedene Abscissen, und $= u, u'$; up und wv dazu gehörige Ordinaten auf dem Diameter, und $= z, z'$: so verhält sich auch hier

$$u : u' = z^2 : z'^2$$

d. h. die Abscissen verhalten sich zu einander, wie die Quadrate der Ordinaten.

Die 3te Proportionalgröße zur Abscisse und Ordinate ist allezeit gleich dem Parameter, $x : y = y : p$; und bei dem Diameter $u : z = z : t$. Diese 3te Proportionalgröße ist constant oder beständig. Bei dem Diameter ist

der Parameter $t = \frac{z^2}{u}$

die Ordinate $z = \sqrt{(t \cdot u)}$

die Abscisse $u = \frac{z^2}{t}$.

§. 290. Vergleicht man den Parameter t des Diameters mit dem Parameter p der Axe, so findet sich, daß

$\frac{a}{4}t = x + \frac{1}{4}p$, folglich ist t gleich der aus dem Brennpunct zum Durchschnittspunct des Diameters gezogenen geraden Linie FR (Fig. 49. §. 280.) viermal genommen; d. h. $t = 4(x + \frac{1}{4}p)$. Jeder Diameter hat seinen eignen Parameter.

§. 291. Jede Linie Fm oder FM, Fig. 53., vom Brennpunct zur Parabel heißt Radius vector, oder Vector, oder Zuglinie.

Wenn nun FR und Fr Perpendikel auf die Tangenten TM und tm sind, so verhalten sich $FR : Fr = \sqrt{FM} : \sqrt{Fm}$, d. h. die Perpendikel aus dem Brennpunct auf die Tangenten verhalten sich zu einander, wie die Quadratwurzeln aus den zugehörigen Zuglinien.

§. 292. Den Flächenraum, welchen die parabolische Linie einschließt, kann man nur dann angeben, wenn die Fläche durch eine doppelte Ordinate CB Fig. 55. geschlossen ist.

Der Triangel BAC ist in der parabolischen Fläche der größtmögliche. Nimmt man seinen Flächenraum $\frac{4}{3}$mal, so hat man den Flächenraum des parabolischen Abschnitts CGAHB. Die Grundlinie CB = 2y; die Höhe des △ ist DA = x, sein Inhalt $\frac{2y \cdot x}{2} = yx$ = Fläche des größten Dreiecks, und $\frac{4yx}{3}$ = Inhalt des parabolischen Abschnitts.

§. 293. Der parabolische Raum muß sich, wie jeder andere, in jede andere geometrische Figur verwandeln lassen, wozu der Abschnitt Verwandlung der Figuren Anleitung geben wird.

§. 294. Ein Parallelogramm auswärts um die Parabel verhält sich zur Fläche derselben, wie 3 zu 2; daher verhalten sich die parabolischen Räume zu einander, wie die Parallelogramme, die um sie beschrieben sind. Nach Fig. 55. verhält sich Parallelogramm JKBC zur parabolischen Fläche CGAHBC wie 3 zu 2.

§. 295. Parabeln sind einander ähnlich, wenn die darin beschriebenen größten Triangel einander ähnlich sind;

sind; daher ist es leicht, ähnliche Parabeln zu zeichnen, wenn man ähnliche Dreiecke beschreibt, aus der halben Grundlinie ($=y$) und Höhe ($=x$) nach §. 276. den Parameter sucht, und darnach die Parabeln construirt.

§. 296. Wenn der Parameter bekannt ist, so läßt sich die Parabel folgendermaßen zeichnen. Fig. 54.

Ziehe die gerade Linie dK, und auf derselben sey Bd = Parameter, BK = Axe, in B der Scheitel, auf dem das Perpendikel BN errichtet wird.

Mit dem Parameter Bd beschreibe aus B den Bogen a1d und mehrere Bogen aus andern beliebigen Puncten der Axe, so, daß sich die Bogen alle in d vereinigen und die aufgerichtete BN schneiden. In den Puncten a, e, h, i, wo die Kreise die Axe treffen, errichte senkrechte Ordinaten, und trage auf sie von der Axe aus die Weiten B1, B2 B3 rc., so erhält man auf den Ordinaten die Puncte m, f, r, s rc., durch welche sich der Parabelarm BD ziehen läßt. Es ist dann B1 = am, B2 = ef, B3 = hr rc.

§. 297. Die richtigste Parabel erhält man aber, wenn man für die Abscissen Ba, Be, Bh rc. die Ordinaten am, ef, hr rc. berechnet, und nach dem Maaßstabe aufträgt. Je näher die Ordinaten an einander stehen, desto näher liegen die Puncte m, f, r, s an einander und desto genauer läßt sich der Parabelarm ziehen. Es versteht sich von selbst, daß die Ordinaten auch auf die andere Seite der Axe getragen werden müssen, um den andern Arm zu bekommen. Je größer man den Parameter Bd nimmt, desto weiter sperren sich die Parabelarme aus einander.

§. 298. Es bewege sich die Parabel, 55te Fig., um ihre Axe AD, so entsteht ein parabolischer Afterkegel, dessen unterster Durchmesser CB, dessen Höhe DA ist. Durch diese Bewegung beschreibt das Parallelogramm JKBC einen Cylinder, dessen Diameter CB und dessen Höhe DA ist. Dieser Cylinder ist doppelt so groß an körperlichem Inhalt, als der Afterkegel.

Nun ist $AD = x$; $DB = y$, folglich der Inhalt des Cylinders $y^2 px$; und des Afterkegels CGAHB $= y^2$

$= \frac{y^2 px}{2}$, wobei p die bekannte Zahl 3,14 .... bedeutet.

§. 299. Es ist gut, wenn Anfänger sich an der Berechnung und Zeichnung einer Parabel üben, daher wird ihnen folgende Berechnung nicht unwillkommen seyn.

Es sey der Parameter $= p = 30$, die erste Abscisse $= x = 5$, die zweite $= 10$ rc., so finden wir die dazugehörigen Ordinaten durch

$$y = \sqrt{(xp)} = \sqrt{(5 . 30)} = \sqrt{150} = 12,24 .....$$

Wenn x = 5,	so ist	y =	12,247 .....
10	—	—	17,320
15	—	—	21,213
20	—	—	24,495
25	—	—	27,386
30	—	—	30,000
35	—	—	32,404
40	—	—	34,641
50	—	—	38,730
60	—	—	42,426
70	—	—	45,826
80	—	—	48,990
90	—	—	51,962
100	—	—	54,772
110	—	—	57,446
120	—	—	60,000
130	—	—	62,450
140	—	—	64,807
150	—	—	67,092.

Diese Werthe für x und y trägt man nach §. 297. auf eine gerade Linie von einem Punct, dem Scheitel, aus, und bekommt für jeden Arm 20 Puncte, durch welche er sich schon genau genug ziehen läßt.

§. 300. Um mit einem Blicke die Formulare für alle parabolische Linien übersehen zu können, sammeln wir sie in folgender Tabelle, in welcher auch die Zahlenwerthe, wie sie die Rechnung und Zeichnung in der Fig. 71. übereinstimmig gegeben haben, befindlich sind. Das Maaß ist $\frac{1}{2}$ Rheinl. Decimalzoll = 100.

Fol-

Formeln und Berechnung für alle Linien in der Parabel Fig. 71.

Linien.	Formeln.	Zahlenwerth.
LA = Parameter	$p = \frac{y^2}{x}$ (gegeben).	30.
AP = Abscisse	$x = \frac{y^2}{p}$ (gegeben).	60.
PM = Ordinate	$y = \sqrt{(x \cdot p)}$.	42,426
TP = Subtangente	$= 2x$	120.
TA = AP = =	x	60.
TM = Tangente	$= \sqrt{(4x^2 + y^2)}$	127,279
F = Brennpunct	$AF = \frac{1}{4} p = \frac{y^2}{4x}$	7,5
Fd = Ordinate in F	$= \frac{1}{2} p$	15.
PR = Subnormale	$= \frac{1}{2} p$	15.
PF — —	$= x - \frac{1}{4} p$	52,5
MR = Normale	$= \sqrt{(y^2 + \frac{p^2}{4})}$	45.
FM = Radius vector	$= x + \frac{1}{4} p$	67,5
AM = Chorde	$= \sqrt{(x^2 + y^2)}$	73,484
KL = Diameter		
Parameter d. Diam.	$t = 4\left(x + \frac{p}{4}\right)$ oder $= \frac{z^2}{v}$	270.
NO = Abscisse des Diameters	$= v = \frac{z^2}{t}$ (gegeben)	20,4
SO = OH = Ordinate des Diameters	$= z = \sqrt{(t \cdot v)}$	74,219
NE	$= \frac{y \cdot v}{2x}$	7,212
OE oder auch durch	TP : PN = NO : NE TP : TM = NO : OE	21,72
SE =	SO — OE =	52,6

PE

Linien.	Formeln.	Zahlen-Werth.
PE $=$	$y - NE =$	35,2
AQ eine größere Abscisse	x' (gegeben)	150.
BQ größere Ordinate	$y' = \sqrt{(x' \cdot p)}$	67,082
Fläche des größten $\triangle$ ABH	$= AQ \cdot BQ = x' \cdot y'$	10062,3 $\square$ Maaß.
Fläche des parab. Abschnitts HNAMB	$= \frac{4}{3}(AQ \cdot BQ) = \frac{4x'y'}{3}$	13416,4 $\square$ Maaß.
Inhalt des Afterkegels AMBHNA	$= \frac{y'^2 \cdot x' \cdot 3,14\ldots}{2}$	1060275. Kubikmaaß.

Von der Ellipse.

§ 301. Es dringe bei E eine schneidende Ebene in den senkrechten Kegel ABC Fig. 56., und spalte denselben nach der Richtung EKH so, daß die Axe mit getroffen wird, so entsteht die Durchschnittsfigur EKHL, welche Ellipse heißt, und in der Figur zur Hälfte sichtbar ist.

Man lege die mit der Grundfläche BC parallelen Ebenen DE und HJ da durch den Kegel, wo die Ellipse anfängt und endigt, so wie auch eine schneidende parallele Ebene FG irgendwo durch die Ellipse. Alsdann wird FG der Durchmesser eines Kreises, dessen Hälfte FLG; KL wird sowol auf EH als FG senkrecht stehen, und die Ordinate der Ellipse, EH Axe, und EK Abscisse derselben seyn. Aus der Beschaffenheit des Kegels und der Lage der schneidenden Ebenen suchen wir eine Gleichung für die Ordinate KL.

$\triangle$ DEH ist ähnlich $\triangle$ FKH, daher gilt

$$EH : DE = HK : FK, \text{ und } FK = \frac{DE \cdot HK}{EH},$$

$\triangle$ EHJ ist ähnlich $\triangle$ EKG, daher gilt

$$EH : HJ = EK : KG, \text{ und } KG = \frac{EK \cdot HJ}{EH}.$$

Aus

Aus dem Kreise gilt

$FK : KL = KL : KG$, und $KL^2 = FK . KG$.

Wenn nun in der letzten Gleichung für FK und KG das gefundene Gleiche untergelegt wird, so ist

$$KL^2 = \frac{HK . DE . EK . HJ}{EH . EH}.$$

Nennt man $EH = a$, so wird $KL^2 = y^2 = \frac{DE . HJ . HK . EK}{a . a}$

und $EK = x$, so ist $HK = a - x$; $\frac{DE . HJ}{a}$ ist eine beständige Größe und heißt Parameter $= b$. Diese Zeichen untergelegt, giebt:

$$\frac{b.(a-x)x}{a} = \frac{b.(ax - x^2)}{a} = bx - \frac{bx^2}{a} = y^2 = \text{Ordinate}.$$

In der Ellipse ist also das Quadrat der Ordinate gleich der Abscisse, multiplicirt mit dem Parameter, minus dem Parameter multiplicirt mit dem Quadrat der Abscisse, dividirt durch die große Axe, d. h. $y^2 = bx - \frac{bx^2}{a}$.

§. 302. Die Fig. 57. ist eine Ellipse; in derselben ist $EH = a =$ große Axe, $JK =$ kleine Axe $= c$. Beide Axen theilen die Ellipse in 4 gleiche Quadranten; in C ist der Mittelpunct; E und H heißen Scheitel der Ellipse. EP ist eine Abscisse auf der großen Axe, und PM die dazu gehörige Ordinate, desgleichen PN.

Man bemerkt leicht, daß die Ordinaten immer kleiner werden, je näher sie am Scheitel stehen; in E und H werden sie = Null, im Mittelpunct C aber am größten, d. h. gleich der kleinen Axe seyn. Eine Ellipse ist vollkommen bestimmt, wenn ihre beiden Axen bekannt sind; wenn beide Axen einander gleich werden, so ist die Ellipse ein Kreis; je mehr beide Axen verschieden sind, desto länglicher wird die Ellipse.

§. 303. Ist die halbe kleine Axe die größte Ordinate, so ist $x = \frac{1}{2}$ a und die Gleichung für die Ellipse wird

$$\frac{ba}{2} - \frac{baa}{4a} = y^2$$

$$\frac{ba}{2} - \frac{ba}{4} = y^2 \quad (4$$

$$2ba - ba = 4y^2$$

$$ba = 4y^2$$

$$\frac{ba}{4} = y^2$$

$$\sqrt{\frac{ba}{2}} = y = \tfrac{1}{2} C = \text{halben kleinen}$$

Axe, folglich ist die ganze kleine Axe $= \sqrt{ba} = c$; und $c^2 = ba$, also $a : c = c : b$, d. h. die kleine Axe ist die mittlere Proportionalgröße zwischen der großen Axe und dem Parameter.

§. 304. Beide Axen und der Parameter sind beständige Größen, und aus zweien von ihnen ist allezeit die 3te zu finden.

Die große Axe $a = \frac{c^2}{b}$; die kleine Axe $c = \sqrt{ab}$; der Parameter $b = \frac{c^2}{a}$.

§. 305. In jeder Ellipse sind zwei Brennpuncte F und f Fig. 58., welche gleich weit von den Scheiteln abstehen, und in den Puncten der großen Axe liegen, auf welchen die Ordinaten so groß sind, als der halbe Parameter. Folglich ist der ganze Parameter so groß, als die doppelte Ordinate auf dem Brennpunct. In Fig. 58. ist PM = Parameter.

§. 306. Man findet die Brennpuncte, wenn man die halbe große Axe, vom Endpunct der kleinen Axe an, auf die große Axe trägt. Denn $FD = \frac{1}{2} a = AC$.

Der Abstand der Brennpuncte vom Mittelpuncte ist CF, und $CF^2 = FD^2 - CD^2$, oder

$$CF^2 = \tfrac{1}{4}a^2 - \tfrac{1}{4}c^2; \text{ also } CF = \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - \frac{c^2}{4}\right)} = \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{4}}.$$

§. 307.

§. 307. In der Ellipse verhalten sich die Quadrate der Ordinaten zu einander, wie die Rechtecke, die aus der Multiplication der beiden zugehörigen Stücke der großen Axe entstehen.

Nach Fig. 57. $PM^2 : QN^2 = EP \cdot PH : EQ \cdot QH$

$$y^2 : z^2 = x \cdot (a-x) : v \cdot (a-v)$$

wobei z eine zweite Ordinate und v ihre Abscisse ist. Eigentlich hat jede Ordinate 2 Abscissen, z. B. zu y oder oder PM gehören die Abscissen EP und HP; daher kann man auch sagen:

die Quadrate der Ordinaten verhalten sich, wie die Rechtecke aus ihren Abscissen.

§. 308. Zeichnung der Ellipse.

1. Man bevestige in den beiden Brennpuncten einen Faden, welcher länger, als der Abstand der Brennpuncte von einander, und allemal gleich der großen Axe ist. Mit einem schreibenden Stift ziehe man den Faden gleichmäßig an, und führe denselben um die Brennpuncte herum, so wird der Stift die krumme elliptische Linie beschreiben. Wenn in Fig. 58. in F und f die Brennpuncte, so ist FDf der Faden und in D der schreibende Stift; rückt D nach M, so ist fMF der Faden. Folglich ist $fD + DF = fM + MF =$ der großen Axe.

Anmerk. Diese Zeichnungsart ist zwar sehr leicht, hat hat aber doch ihre Schwierigkeiten, denn der Faden wird während der Zeichnung durch das Anziehen länger. Bei großen Figuren, als elliptische Gewölbebogen, Stubendeckenmalerei u. dgl. ist sie indessen immer noch die anwendbarste.

2. Mühsamer, aber auch genauer, ist folgende Verfahrungsweise: Für die gegebene große Axe und den Parameter berechne man aus den willkührlich genommenen Abscissen die dazu gehörigen Ordinaten und trage sie rechtwinklicht von den Scheiteln an auf beide Seiten der großen Axe.

Je weniger die Abscissen von einander verschieden sind, desto enger liegen die Ordinaten an einander, und desto mehr

mehr Puncte erhält man, durch welche sich die krumme Linie aus freier Hand ergänzen läßt. Da beide Axen die Ellipse in 4 völlig gleiche Quadranten theilen, so ist die Berechnung für einen hinlänglich. Weiter unten theilen wir eine solche Berechnung mit.

§. 309. Wenn die Abscissen vom Mittelpunct C Fig. 57. genommen werden, welches gewöhnlich geschieht und bequem ist, so erhält man folgende Gleichung für die Ordinaten y

$$y = \sqrt{\left(\frac{c^2}{4} - \frac{c^2 u^2}{a^2}\right)},$$

worin $u = CP$, Abscisse vom Mittelpunct, $c =$ kleine, $a =$ große Axe.

Der Parameter b ist nach dieser Formel $= \frac{a y^2}{\frac{1}{4}a^2 - u^2}$,

Die Abscisse $u = \frac{\sqrt{(a^2 - c^2)}}{2}$.

Anmerk. u ist das Stück der halben großen Axe, was x übrig läßt, also $U = \frac{1}{2} a - x$.

§. 310. Linien aus den Brennpuncten nach irgend einem Punct M in der Ellipse Fig. 58. sind zusammengenommen so groß, als die große Axe. $FM + fM = a$, der Punct M mag liegen, wo er will; FM und fM heißen Vectoren oder Zuglinien.

§. 311. Liegt M nicht in D, so sind FM und fM ungleich. Ihr Unterschied wird gefunden:

$$fM = \tfrac{1}{2}a + \frac{u\sqrt{(a^2 - c^2)}}{a}; \quad FM = \tfrac{1}{2}a - \frac{u\sqrt{(a^2 - c^2)}}{a}.$$

Die Differenz $= \frac{2u\sqrt{(a^2 - c^2)}}{a}$.

§. 312. Die Puncte F und f heißen deshalb Brennpuncte, weil die Winkel, welche die Linien FM und fM mit der Ellipse machen, einander gleich sind, Fig. 58. ist $\angle m = \angle n$. Wenn daher in dem einen Brennpunct ein leuchtender Körper stände, und die innere Seite einer Ellipse eine glatte Ebene wäre, so würden die auf den Umkreis

kreis fallenden Lichtstrahlen von allen Puncten nach dem andern Brennpuncte hin zurück fallen, und sich dort sammeln.

§. 313. Eine gerade Linie durch das Centrum, wie mH Fig. 59., heißt ein Diameter, und theilt die Ellipse in 2 gleiche Hälften. Die Ordinaten vom Endpunct des Diameters zur Axe sind gleich groß, Pm = GH.

§. 314. Eine Linie, welche die Ellipse nur in einem Puncte berührt, als OM, heißt Tangente des Puncts M. Sie wird folgendermaßen gezogen:

Aus den Brennpuncten F und f ziehe gerade Linien an den Punct, den die Tangente berühren soll, hier an M, Fig. 59., verlängere fM bis R, daß MR = FM wird, und ziehe RF zusammen. Nun theile RF in 2 Theile in L, und ziehe ML, welche verlängert die Axe in O schneidet, so ist OM die Tangente.

§. 315. Zieht man mit der Tangente OM parallel einen Diameter Hm, so schneidet derselbe von fM ein Stück fT ab. Das übrige Stück TM ist der halben großen Axe gleich.

$TM = \frac{1}{2} a$; weil nun $fM = \frac{1}{2} a + \frac{u\sqrt{(a^2 - c^2)}}{a}$

so ist das Stück $fT = \frac{u\sqrt{(a^2 - c^2)}}{a}$.

Das Stück $fR = a =$ der großen Axe.

§. 316. Ein Perpendikel auf der Tangente am Punct M, nach der Axe, theilt den Winkel, den die Vectoren an M machen, in zwei gleiche Theile. Winkel $n = < r$, und dM ist Perpendikel. Der Abstand des Perpendikels vom Brennpunct, oder

$$Fd = \frac{fF.FM}{fR} = \frac{\sqrt{(a^2 - c^2)}.\left(\frac{1}{2} a - \frac{u\sqrt{(a^2 - c^2)}}{a}\right)}{a}.$$

§. 317. Die OP heißt Subtangente und macht mit der Ordinate PM und Tangente OM einen recht-

winkewinklichten Triangel. Sieht man od als den Durchmesser eines Kreises an, so lassen sich die 3 Puncte O, M und d in die Kreislinie bringen.

$$PO = \frac{a^2 - 4u^2}{4u}; \; Pd = \frac{c^2 u}{a^2}.$$

§. 318. Die Tangente ist im rechtwinklichten Dreieck OPM die Hypotenuse, daher ist $OM = \sqrt{(PM^2 + OP^2)} = \sqrt{\left(\left(\frac{a^2 - 4u^2}{4u}\right)^2 + \left(\frac{c^2}{4} - \frac{c^2 u^2}{a^2}\right)\right)}$.

§. 319. Die Subtangente OP giebt auch die Proportion Fig. 59. und 60.

$$CP : AP = BP : OP$$

$$u : \tfrac{1}{2}a - u = \tfrac{1}{2}a + u : OP, \text{ und } OP = \frac{\tfrac{1}{4}a^2 - u^2}{u}.$$

Die Entfernung des Puncts O vom Centro C giebt

$$CP : AC = AC : OC$$

$$= u : \tfrac{1}{2}a = \tfrac{1}{2}a : OC$$

$$\text{und } OC = \frac{\tfrac{1}{4}a^2}{u}.$$

§. 320. Den Abstand OA giebt die Proportion

$$CP : AP = CA : OA$$

d. h. $u : \tfrac{1}{2}a - u = \tfrac{1}{2}a : OA$; und $OA = \frac{\tfrac{1}{4}a^2}{u} - \tfrac{1}{2}a$;

§. 321. Subtangente und Abscisse, mit einander multiplicirt, geben ein Rechteck, welches eben so groß ist, als dasjenige, was aus der Multiplication der beiden Stücke der großen Axe, die die Abscisse trennt, entsteht.

$$OP \,.\, PC = PB \,.\, AP.$$

§. 322. Das Perpendikel auf der Tangente in M heißt Normale; in Fig. 59. ist Md die Normale; Pd die Subnormale.

Die Subnormale $Pd = u - dC$, oder $\frac{c^2 u}{a^2}$.

Die Normale $Md = \sqrt{(y^2 + Pd^2)}$.

§. 323.

§. 323. Man ziehe Fig. 60. durch M einen Diameter MCV; und einen andern QCN mit der Tangente OM parallel, so hängen beide Diameter von der Tangente ab, und heißen conjugirte Diameter. Berührte die Tangente den Endpunct einer Axe, so müßte ihr die andere Axe parallel seyn; folglich sind beide Axen auch conjugirte Diameter.

§. 324. Wenn von den Endpuncten der Diameter Perpendikel auf die Axe fallen, NJ und PM, so ist

$$CJ^2 = AP.PB; \text{ und } CP^2 = AJ.JB$$

und es sey $CJ^2 = v^2 = \frac{a^2}{4} - u^2 \qquad u^2 = \frac{a^2}{4} - v^2.$

§. 325. Weil hiedurch die Abscisse $CJ = v$ gefunden ist, so ist auch NJ und NC zu finden.

$$NJ\ (\text{Ordinate in } J) = \sqrt{\left(\frac{c^2}{4} - \frac{c^2 v^2}{a^2}\right)},$$

$$NC\ (\text{Hypotenuse in } \triangle\ NCJ) = \sqrt{(CJ^2 + CJ^2)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{c^2}{4} - \frac{c^2 v^2}{a^2} + \frac{a^2}{4} - u^2\right)};\ CM = \sqrt{(CP^2 + PM^2)}$$

$$= \sqrt{(u^2 + y^2)} = \sqrt{\left(u^2 + \frac{c^2}{4} - \frac{c^2 u^2}{a^2}\right)}.$$

Anmerk. Die durch die conjugirten Diameter und ihre Ordinaten gebildeten Dreiecke NJC und PMC sind einander der Fläche nach gleich.

§. 326. Wenn die Puncte P und J in einander fallen, so sind die Diameter einander gleich. Dann ist Abscisse $u = \sqrt{\frac{a^2}{8}}$.

§. 327. Reicht die Tangente OM bis zur verlängerten kleinen Axe in R, so ist $MR = \frac{NC^2}{OM}$, Fig. 60.

§. 328. Derjenige Diameter, der auf der Tangente steht, theilt den conjugirten Diameter und jede Parallele HK in z in 2 gleiche Theile. Es verhält sich

$$MZ.ZV : HZ^2 = MC^2 : CN^2.$$

Die

Die Linien HZ oder ZK heißen Ordinaten auf dem Diameter. Nennt man sie w, und ihre Absciſſen MZ = r; MV = d, ſo iſt $w^2 = \frac{r.(d-r).CN^2}{\frac{1}{4}d^2}$.

§. 329. Aus dem Vorhergehenden läßt ſich nun die Aufgabe löſen: in einer gegebenen Ellipſe zu finden

1. jeden Diameter. Man ziehe zwei parallele Sehnen, wo man will, theile jede in 2 gleiche Theile, und ziehe durch dieſe Theilpuncte eine gerade Linie, welche ein Diameter ſeyn und durch's Centrum gehen wird. Es ſey Fig 63. die Sw, und TJ eine Chorde, ſo iſt LO der Diameter.
2. Das Centrum. Es liegt auf der Mitte des Diameters.
3. Die große Axe. Beſchreibe aus dem Mittelpunct C mit willkührlicher Zirkelöffnung den Bogen GH, ziehe die Chorde GH und theile ſie in 2 gleiche Theile. Durch ihre Mitte und durch das Centrum ziehe eine gerade Linie, welche die große Axe ſeyn wird.

   Rechtwinklicht auf der Mitte der großen Axe ſteht die kleine Axe DD.
4. Die Brennpuncte. Trage die halbe große Axe vom Endpunct der kleinen nach der großen Axe, alſo daß DF und Df Fig. 58. = AC.
5. Die beiden gleichen conjugirten Diameter. Ziehe AD und Ad, theile jede in m und n, Fig. 63., in 2 gleiche Theile, und ziehe durch C und m, ſo wie durch C und n die beiden Diameter MV und NQ.

§. 330. Die Lage der Ordinaten zu beſtimmen, wenn der Diameter gegeben iſt.

Es ſey MV der gegebene Diameter, Fig. 62. Nimm w willkührlich, ziehe wM und verlängere ſie bis MG = Mw. Von G ziehe eine Parallele mit dem Diameter, bis ſie die Ellipſe in A erreicht. Von A ziehe die Aw, welches die doppelte Ordinate ſeyn wird, welche die Lage aller andern beſtimmt.

Parallel mit Aw geht NQ durch das Centrum und iſt conjugirter Diameter.

§. 331. Das Parallelogramm RSFU, Fig. 64, welches die beiden Axen einer Ellipse bilden, hat eben so viel Fläche, als dasjenige, was sich aus den conjugirten Diametern MP und QN bilden läßt, und hier WXYZ ist.

Überhaupt sind alle um die Ellipse beschriebene Parallelogramme der Fläche nach einander gleich.

§. 332. Die bis zur Tangente verlängerten Perpendikel auf den Endpuncten der großen Axe geben mit einander multiplicirt ein Rechteck, das dem Quadrat der halben kleinen Axe gleich ist.

$$AQ \,.\, BS = cd^2;\ AQ = \frac{a \,.\, y}{a + 2u},\ BS = \frac{a \,.\, y}{a - 2u}\ \text{Fig. 61.}$$

§. 333. Wenn man aus den Brennpuncten Perpendikel auf die Tangente fallen läßt, so ist das Product dieser Linien ebenfalls dem Quadrat der halben kleinen Axe gleich. $FH \,.\, fh = cd^2 = \frac{c^2}{4}$, folglich sind die Rechtecke $QA \,.\, SB$ und $FH \,.\, fh$ einander gleich, Fig. 61.

§. 334. Bewegte sich ein Körper in der Ellipse um den Brennpunct F, Fig. 58., so würde sich seine Geschwindigkeit in einem Puncte M zu der Geschwindigkeit in D (der mittlern Entfernung von F) verhalten, wie $\sqrt{FM} : \sqrt{fM}$ d. i. wie die Quadratwurzeln aus den Vectoren.

§. 335. Beschreibt man mit der halben großen Axe aus dem Centrum einen Kreis, Fig. 65, und errichtet auf derselben die willkührlichen Ordinaten Pm, Qn, Ro, Cd, und verlängert sie bis zum Kreise in a, b, c, e, so verhalten sich die Ordinaten der Ellipse, wie die Ordinaten des Kreises; d. i.

$Pm : Pa = Qn : Qb$ u. s. w.

und $Pm : Pa = Cd : Ce$, d. h. wie die halbe kleine Axe zur halben großen Axe.

§. 336. Die Fläche der Ellipse $= E$ verhält sich zur Fläche des Kreises (dessen Radius die halbe große Axe), $= K$, wie die kleine Axe zur großen Axe; d. i. $E : K = c : a$, und die Fläche der Ellipse

$$E = \frac{K \,.\, c}{a}$$

§. 337. Ist der Kreis mit der halben kleinen Axe beschrieben, so ist

$$E : K = a : c$$

$$\text{und } E = \frac{K \cdot a}{c}.$$

§. 338. Die elliptische Fläche ist auch gleich einer Kreisfläche, deren Diameter die mittlere Proportionalgröße zwischen beiden Axen ist. $a : d = d : c$, also ist $a \cdot c = d^2$, weil $\frac{d^2 p}{4}$ = Kreisfläche, so ist die elliptische Fläche $= \frac{a \cdot c \cdot p}{4}$, welches Formular das bequemste ist ($p = 3{,}14159\ldots\ldots$).

§. 339. Bei Ellipsen, in denen die Brennpuncte nahe am Centro liegen, ist $\triangle$ COM der Fläche nach fast gleich dem $\triangle$ QCM, Fig. 65., wobei Q der Brennpunct der Ellipse. Dies giebt ein Mittel, die Ellipse nach einem gegebenen Verhältniß zu theilen. Wenn im Kreise BO der achte Theil der Peripherie wäre, so wäre Sector BCO $\frac{1}{8}$ der Kreisfläche. Zieht man nun aus dem Brennpunct Q die Linie QO, und zu ihr die Parallele CM, so ist auch BmQ $\frac{1}{8}$ der elliptischen Fläche.

Anmerk. Dieser Satz findet in der Astronomie Anwendung.

§. 340. Die Flächen der Ellipsen verhalten sich zu einander, wie die Producte aus ihren Axen; und wenn sich gleichnamige Axen gleich sind, wie die andern Axen.

§. 341. Wenn sich eine halbe Ellipse um die feststehende Axe bewegt, so entsteht eine Art Kugel, Sphäroid, die aber nach der Richtung der kleinen Axe eingedrückt erscheint. Ein solcher Körper heißt Ellipsoide. Der körperliche Inhalt derselben $= \frac{ac^2 p}{6}$, wobei $p = 3{,}14159\ldots$

§. 342. Auch aus dem Cylinder läßt sich eine Ellipse schneiden. Der Durchmesser desselben wird dann jedesmal der kleinen Axe gleich. Die große Axe hängt von dem Winkel ab, unter welchem die schneidende Ebene den Cylinder trifft.

Diesen Winkel $= w$ findet man durch

$$\text{Sin. } w = \frac{\text{Sin. tot. } c}{a}$$; und wenn w gegeben ist

$$a = \frac{\text{Sin. tot. } c}{\text{Sin. } w}.$$

§. 343. Wenn beide Axen bekannt sind, so läßt sich die Ellipse berechnen und zeichnen.

Es sey Fig. 72. AB die große Axe $= a = 176$; ED die kleine Axe $= c = 154$, und CP die eine Abscisse $= 51 = u$, vom Mittelpunct angenommen, so lassen sich alle in dieser Figur sichtbare gerade Linien darnach berechnen, welches in der weiterhin folgenden Tabelle geschehen ist. Allein die Ellipse selbst zu zeichnen, oder Puncte zu finden, durch welche die krumme Linie gezogen wird, nehme man u willkührlich, und nach und nach immer größer, bis es der halben großen Axe gleicht, und berechne dazu die Ordinaten. Weil sich aber die Ellipse in der Gegend der großen Axe schnell krümmt, so nehme man auch auf der kleinen Axe mehrere Abscissen und berechne dazu die Ordinaten, welche man gehörigermäßen auf beiden Seiten des Centrums und der Axe, auf der die Abscissen genommen, rechtwinklicht nach dem Maaßstabe (hier 1 Zoll $= 100$ Theile) aufträgt.

Formular für die Ordinaten auf der großen Axe

$$\sqrt{\left(\frac{c^2}{4} - \frac{c^2 \cdot u^2}{a^2}\right)},$$

auf der kleinen Axe $\sqrt{\left(\frac{a_2}{4} - \frac{a^2 \cdot u^2}{c^2}\right)}$.

Wenn CP oder u =	5,	so ist PM	oder y	=	76,9
	10	—	—	—	76,5
	15	—	—	—	75,9
	20	—	—	—	75,0
	25	—	—	—	73,8
	30	—	—	—	72,4
	35	—	—	—	70,7
	40	—	—	—	68,6
	45	—	—	—	66,2

 Wenn

Wenn CP oder u =	50,	so ist PM	oder	y =	63,5
	55	—	—	—	60,3
	60	—	—	—	56,5
	65	—	—	—	52,1
	70	—	—	—	47,0
Abscissen auf der kleinen Axe = u	5	—	—	—	87,8
	10	—	—	—	87,3
	15	—	—	—	86,3
	20	—	—	—	84,9
	25	—	—	—	83,2
	30	—	—	—	81,1
	35	—	—	—	78,4
	40	—	—	—	75,2

Diese für 1 Quadranten berechneten Ordinaten gelten für alle vier, und sind völlig hinreichend, die Ellipse zu ziehen.

Formelntafel zur Berechnung aller Linien in der Ellipse Fig. 72.

Linien.	Formeln.	Werth in Zahlen.
AB = große Axe	$a = \frac{c^2}{b}$	176.
AC = halbe große Axe	$\frac{1}{2} a = \frac{c^2}{2b}$	88.
DE = kleine Axe	$c = \sqrt{ab}$	154.
DC = halbe kleine Axe	$\frac{1}{2} c = \frac{\sqrt{ab}}{2}$	77.
CF = Cf Brennpuncte	$= \sqrt{\left(\frac{a^2 - c^2}{4}\right)}$	42,6
Ff = Abstand der Brennpuncte	$= 2\sqrt{\left(\frac{a^2 - c^2}{4}\right)}$	85,2
Parameter . .	$b = \frac{c^2}{a}$	134,75

Beständige Größen.

PG

Linien.	Formeln.	Werth in Zahlen.
PC = Abscisse, gegeben,	$u = \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - \frac{a^2 y^2}{c^2}\right)}$	51.
PM = Ordinate zu u	$y = \sqrt{\left(\frac{c^2}{4} - \frac{c^2 u^2}{a^2}\right)}$	62,75
PO = Subtangente	$= \frac{a^2 - 4u^2}{4u}$ . . .	100,84
OM = Tangente	$= \sqrt{(OP^2 + PM^2)}$ $= \sqrt{\left(\frac{(a^2 - 4u^2)^2}{4u} + \left(\frac{c^2}{4} - \frac{c^2 u^2}{a^2}\right)\right)}$	118,77
FM = Radius vector	$= \frac{1}{2} a - \frac{u\sqrt{(a^2 - c^2)}}{a}$	63,31
fM = Radius vector	$= \frac{1}{2} a + \frac{u\sqrt{(a^2 - c^2)}}{a}$	112,69
Fd	$= \frac{\sqrt{(a^2 - c^2)} . \left(\frac{1}{2} a - \frac{u\sqrt{(a^2 - c^2)}}{a}\right)}{a}$	30,65
Cd = — —	$= \frac{u(a^2 - c^2)}{a^2}$ . .	11,95
AP — —	$= \frac{1}{2} a - u$ . . .	37.
PF — —	$= u - \sqrt{\left(\frac{a^2 - c^2}{4}\right)}$	8,4
Pf — —	$= u + \sqrt{\left(\frac{a^2 - c^2}{4}\right)}$	93,6
AF, Brennpunct vom Scheitel	$= \frac{1}{2} a - \sqrt{\left(\frac{a^2 - c^2}{4}\right)}$	45,4
Ad — —	$= \frac{1}{2} a - \frac{u(a^2 - c^2)}{a^2}$ oder $\frac{1}{2} a - Cd$	76,05
Pd = Subnormale	$= \frac{c^2 u}{a^2}$	39,05

Linien.	Formeln.	Werth in Zahlen.
CO = — —	$=\frac{\frac{1}{4}a^2}{u}$	151,84
OA — —	$=\frac{\frac{1}{4}a^2}{u}-\frac{1}{2}a$ . .	63,84
Md = Normale	$=\sqrt{(y^2+Pd^2)}$.	73,89
CM — —	$=\sqrt{(u^2+y^2)}$.	80,86
MV = Diameter	$=2\sqrt{(u^2+y^2)}$.	161,72
AZ — —	$=\frac{PM\,.\,OA}{OP}$ . .	39,63
BS — —	$=\frac{PM\,.\,OB}{OP}$ . . .	149,24
CR — —	$=\frac{PM\,.\,OC}{OP}$ . .	94,48
CJ = Abscisse des Diameters	$v=\sqrt{\left(\frac{a^2}{4}-u^2\right)}$	71,71
NJ = Ordinate darauf	$=\sqrt{\left(\frac{c^2}{4}-\frac{c^2v^2}{a^2}\right)}$	44,63
NC = halber conjugirter Diamet.	$=\sqrt{(JC^2+JN^2)}$	
oder	$=\sqrt{\left(\frac{c^2}{4}-\frac{c^2v^2}{a^2}+\frac{a^2}{4}-u^2\right)}$	84,47
NQ = conjugirter Diameter	$2\sqrt{\left(\frac{c^2}{4}-\frac{c^2v^2}{a^2}+\frac{a^2}{4}-u^2\right)}$	168,93
MR — —	$=\frac{NC^2}{OM}$	60,07
OS — —	$=\frac{OM\,.\,OB}{OP}$ . .	282,48
OZ — —	$=\frac{OM\,.\,OA}{OP}$ . .	75,19

OB

Linien.	Formeln.	Werth in Zahlen.
OB = — —	$= a + \left(\frac{\frac{1}{4}a^2}{u} - \frac{1}{2}a\right)$	239,84
VX = Abscisse auf dem Diameter	gegeben	22,5
XM — —	MV — VX	139,22
GX = WX Ordinate a. d. Diameter	$= \sqrt{\left(\frac{MX.XV.NC^2}{MC^2}\right)}$	58,46
Fh Perp. auf die Tangente aus d. Brennpunct	$= \frac{dM.OF}{Od}$ . . .	57,7
OF — —	= OP + PF . .	109,24
Od — — oder	= OP + Pd } = OC — dC } . .	139,89
fH Perpendikel a. d. Tangente	$= \frac{dM.Of}{Od}$ . . .	102,75
Of — —	= OC + Cf . . .	194,44
Fläche der Ellipse	$= \frac{a.c.3,1415....}{4} =$	21786,8 □Maaß
Inhalt der Ellipsoide	$= \frac{a.c^2.3,1415....}{6} =$	2185445 Kubik-Maaß

Von der Hyperbel.

§. 344 Wenn zwei Kegel ECD und RCS Fig. 66. mit den Spitzen gegen einander stehen, und eine schneidende Ebene VABQ durch beide Kegel dringt, so entstehen auf den Oberflächen der Kegel zwei krumme Linien UMAN und ZBQ, welche Hyperbel heißen. In A und B sind die Scheitel derselben; QB und BZ sind die Arme der Hyperbel im obern, und OA und AN im untern Kegel. Die Figur im obern Kegel ist stets der im untern gleich, der Schnitt mag liegen, wie er will, wenn er nur beide Kegel trifft.

Der Abstand der Scheitel von einander, also die Linie AB heißt die große Axe oder Zwergaxe, die verlängert beide Hyperbeln in gleiche Hälften theilt.

Eine mit der Grundfläche parallel gelegte Ebene HG durchdringt nun auch die Axe AV in P und die ganze Hyperbel, und bildet einen Kreis, der hier zur Hälfte GMH zu sehen ist. Die MP ist auf der Axe AV und auf dem Diameter GH in P senkrecht, mißt den Abstand des Puncts M von der Axe in P, und heißt Ordinate. Der Abstand vom Scheitel, die AP, heißt Abscisse und wird durch x, so wie die Ordinate mit y bezeichnet, weil beide veränderliche Größen sind, und von der Lage der GH abhängen.

Die Gleichung für die Ordinate PM = y finden wir folgendermaßen.

Man lege da, wo die schneidende Ebene in die Kegel dringt, die parallelen Ebenen BL, und AF durch die Kegel, dann ist △ BFA ähnlich dem △ BGP; und △ BAL ähnlich dem △ APH, daher

$$BA : AF = BP : PG, \text{ und } PG = \frac{AF . BP}{BA}$$

$$AB : BL = AP : PH, \text{ und } PH = \frac{BL . AP}{AB}$$

$$GP : PM = PM : PH, \text{ und } PM^2 = GP . PH.$$

Setzt man nun für GP und PH die eben gefundenen Werthe, so wird $PM^2 = y^2 = \frac{AF . BP}{BA} \cdot \frac{BL . AP}{AB}$.

In einer und derselben Hyperbel sind beständige Größen AB = a, AF und BL, und bringt man sie zusammen, so ist $\frac{BL . AF}{AB} \cdot \frac{AP . BP}{AB} = y^2 = PM^2$. Die Größe $\frac{BL . AF}{AB}$ heißt Parameter = b; da nun AP = x; BP = a + x; AB = a, so wird die Gleichung für die Ordinate der Hyperbel:

$$y^2 = b . \left(\frac{a + x}{a}\right) x = \frac{bax}{a} + \frac{bx^2}{a} = bx + \frac{bx^2}{a},$$

folg-

folglich ist $y = \sqrt{\left(bx + \frac{bx^2}{a}\right)}$.

§. 345. Die Wurzel kann + und — haben, folglich giebt es auch zweierlei Ordinaten, wovon man eine positiv und die andere negativ nehmen kann. Auf der Zwergaxe AB kann es keine Ordinaten geben. Die Arme der Hyperbel können unendlich lang seyn.

§. 346. Wenn man auf der Mitte der großen Axe in C ein Perpendikel errichtet, welches die halbe Quadratwurzel aus dem Product der großen Axe und des Parameters ist, so heißt diese CD, Fig. 67., die halbe kleine Axe; folglich ist $Dd = \sqrt{a \cdot b}$ = der kleinen Axe, welche daher die mittlere Proportionalgröße zwischen der großen Axe und dem Parameter ist. Bezeichnen wir sie mit c, so gilt $a : c = c : b$. Und $a = \frac{c^2}{b}$; $b = \frac{c^2}{a}$.

§. 347. In der Hyperbel giebt es zwei Brennpuncte. Sie liegen, wie in allen Kegelschnitten, da auf der Axe, wo die doppelte Ordinate dem Parameter gleicht. Fig. 67. ist mn = Parameter, in F und f sind die Brennpuncte.

Den Abstand der Brennpuncte von den Scheiteln giebt das Formular $AF = Bf = -\frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{(ab + a^2)}}{2}$.

Mechanisch findet man die Brennpuncte, indem man an den Scheiteln Perpendikel AE = halben kleinen Axe CD errichtet, und mit dem Radius CE einen Kreis beschreibt, welcher durch F und f gehen wird.

§. 348. Wäre große Axe und Brennpunct F bekannte, so würde durch einen Kreis, dessen Radius CF ist, auf dem Perpendikel AE im Scheitel, die halbe kleine Axe gefunden. Der Abstand der Brennpuncte $e = \frac{\sqrt{(a^2 + ab)}}{2}$.

§. 349. Das Rechteck aus AF und BF ist dem Quadrat der halben kleinen Axe gleich; oder $AF \cdot BF = c^2 = CD^2$.

§. 350.

§. 350. In der Hyperbel verhalten sich die Quadrate zweier Ordinaten y und z zu einander, wie $(a+x)x : (a+v)v$ oder $ax + x^2 : av + v^2$, wobei v die Abscisse zu z ist.

§. 351. Wenn große Axe und Parameter gegeben sind, so wird sich die Hyperbel zeichnen lassen, indem man die x willkührlich nimmt, nach der Formel $y = \sqrt{\left(bx + \frac{bx^2}{a}\right)}$ die dazugehörigen Ordinaten berechnet, und gehörigermaßen auf die Axe trägt. Die Endpuncte zieht man aus freier Hand zusammen, und daher müssen die x nicht sehr von einander verschieden seyn.

Gesetzt, man habe die große Axe $AB = 100 = a$; den Parameter $= 50 = b$, und die Abscissen vom Scheitel an folgendermaßen genommen:

$x = 3$, so ist	$y = 12{,}43$	$x = 50$, so ist	$y = 61{,}24$
6 —	— 17,83	55 —	— 65,28
9 —	— 22,15	60 —	— 69,28
12 —	— 25,92	65 —	— 73,23
15 —	— 29,35	70 —	— 77,13
18 —	— 32,59	75 —	— 81,01
21 —	— 35,64	80 —	— 84,85
24 —	— 38,57	85 —	— 88,67
27 —	— 41,41	90 —	— 92,46
30 —	— 44,16	95 —	— 96,24
33 —	— 46,84	100 —	— 100.
36 —	— 49,48	u. s. w.	
39 —	— 52,06		
42 —	— 52,61		
45 —	— 57,12		

Hiernach sind die Hyperbeln Fig. 69, 70 und 73 gezeichnet; 1 Zoll = 100.

§. 352. Werden die Abscissen vom Mittelpunct C an genommen, so ist die Gleichung für die Ordinate

$$y^2 = \frac{c^2 u^2}{a^2} - \tfrac{1}{4} c^2, \text{ wobei } u = CP.$$

Dann ist das Verhältniß der Ordinaten y und z also:

$$y^2 : z^2 = \left(u - \frac{a}{2}\right) \cdot \left(u + \frac{a}{2}\right) : \left(v - \frac{a}{2}\right) \cdot \left(v + \frac{a}{2}\right).$$

Die

die Entfernung des Brennpuncts vom Scheitel

$$AF = -\frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{(a^2 + c^2)}}{2},$$

und vom Mittelpunct $CF = \frac{\sqrt{(a^2 + c^2)}}{2}$.

§. 353. Der Unterschied zweier geraden Linien aus den Brennpuncten an irgend einem Punct N Fig. 67. ist allemal der großen Axe gleich. D. i. $NF - fN = AB$ oder $= a$.

Anmerk. In der Ellipse war die Summe dieser Linien $= a$.

§. 354. Wird die kleine Axe an die Scheitel senkrecht gesetzt, wie Fig. 68. AE und BE, und durch ihre Endpuncte E und durch's Centrum eine gerade Linie CELS, die verlängert CEWg, desgleichen nNCEV ist, so heißen diese Linien gCS und nCV Asymptoten, Niezusammenfallende. Sie nähern sich zwar den Hyperbelarmen immer mehr, erreichen sie aber nie.

§. 355. Nennt man die bis zur Asymptote verlängerte Ordinate $PL = Z$, und $PM = y$, so ist $Z - y$

$$= \frac{c^2}{4(Z-y)} = ML.$$

In den ähnlichen Dreiecken CAE und CPL gilt

$$CA : AE = CP : PL$$

$$\text{d. i. } \frac{a}{2} : \frac{c}{2} = u : z$$

$$\text{oder } a : c = u : z, \text{ und } z = \frac{cu}{a}.$$

Was von dem einen Arme gilt, wird für alle 4 Arme gelten.

§. 356. Das Rechteck $NM \cdot ML = AE^2 = \frac{c^2}{4}$.

Zieht man vom Endpunct einer Ordinate eine gerade Linie mit der großen Axe parallel, die Linie Md Fig. 68., bis zur gegenüberstehenden Asymptote, so ist das Rechteck

$$Mq \cdot Md = CA^2 = \frac{a^2}{4}.$$

§. 357. Man kann auch auf der Asymptote CL Ordinaten, als Fig. 68., JA, RT, QM errichten, welche mit der zweiten Asymptote Cn parallel laufen. Nimmt man die Abscisse auf der Asymptote, die CQ = u, und QM = y, so ist $CQ = u = \frac{a^2 + c^2}{16y}$; und $QM = y = \frac{a^2 + c^2}{16u}$.

§. 358. Eine Ordinate JA auf der Asymptote nach dem Scheitel A ist besonders merkwürdig. Sie ist $= CJ = JE = \sqrt{(QC \cdot QM)} = \sqrt{\frac{a^2 + c^2}{16}}$. Das Quadrat von CJ, also $CJ^2 = \frac{a^2 + c^2}{16}$ heißt die **Potenz der Hyperbel.**

§. 359. Die außer den Hyperbelarmen zwischen diesen und den Asymptoten befindlichen Linien LM und mN sind einander gleich, LN mag liegen, wie sie will.

§. 360. Wenn die Lage der Asymptoten, und ein Punct M in der Hyperbel gegeben ist, so läßt sie sich zeichnen.

Halbire Fig. 68. den Asymptotenwinkel SCn, und ziehe die CH, welche die Axe vorstellt; suche die Potenz der Hyperbel, welche $= CJ^2 = CQ \cdot QM = \frac{a^2 + c^2}{16}$. Die Puncte Q, und M sind gegeben; und QM ist parallel CN. Es ist also $CJ = \sqrt{(CQ \cdot QM)}$. Die Größe CJ trage auf die Asymptote CS, und ziehe JA = CJ, mit CN parallel, so ist in A der Scheitel, CA die halbe große Axe, ein Perpendikel AE auf A ist die halbe kleine Axe. Nun nehme man die CQ nach Belieben = x, und suche dazu die QM = y. Aber $x \cdot y = CJ^2$, folglich $y = \frac{CJ^2}{x}$. Berechnet man auf diese Weise recht viele nahe an einander liegende y, und trägt sie auf die Puncte der Asymptote, für welche sie berechnet sind, so, daß sie mit der andern Asymptote parallel laufen, zieht darauf ihre Endpuncte zusammen, so erhält man den Hyperbel-arm ATM, und auf gleiche Art auch die andern Arme.

§. 361. Die Lage der Asymptoten ist eine Hauptsache, und hängt von der Größe der beiden Axen ab. Es ist aber

$$CA : AE = \text{Sin. tot.} : \text{Tang. } o.$$

§. 362. Wenn, was oft der Fall ist, der Asymptotenwinkel nCS und ein Punct M in der Hyperbel, also CQ und QM, gegeben sind, so findet man:

die kleine Axe $c = 4 \text{ Sin.} < o \,.\, \sqrt{(CQ \,.\, MQ)}$,
die große Axe $a = 4 \text{ Cos.} < o \,.\, \sqrt{(CQ \,.\, MQ)}$.

§. 363. Wenn in einer Hyperbel beide Axen gleich sind, so ist auch der Parameter jeder Axe gleich, und die Hyperbel heißt gleichseitig.

Die Gleichung ist dann $y^2 = u^2 - \frac{1}{4}a^2$; oder $y^2 = x^2 + ax$, je nachdem die Abscisse vom Mittelpunct oder vom Scheitel an genommen worden. Der Asymptoten-Winkel ist $= 90°$; der halbe, oder $< o = 45°$.

Die Ordinaten in der gleichseitigen Hyperbel verhalten sich, die Abscissen vom Mittelpunct an genommen,

$$y^2 : z^2 = u^2 - \tfrac{1}{4} a^2 : v^2 - \tfrac{1}{4} a^2,$$

wobei v Abscisse zu z. Wenn aber die Abscissen vom Scheitel an genommen werden:

$$y^2 : z^2 = x^2 + ax \quad : t^2 + at$$
$$= (a+x) \,.\, x) : (a+t) \,.\, t,$$ wobei t und x Abscisse zu z und y.

§. 364. Eine Tangente Tm Fig. 68. berührt die Hyperbel nur in einem Punct m, und trifft verlängert sowol die große Axe in T, als auch beide Asymptoten in t und g.

Man zieht die Tangente folgendermaßen:

Ziehe aus dem Punct m eine mit der andern Asymptote parallele Linie mh nach der nächsten Asymptote; trage Ch nach hg, so sind g und m zwei Puncte, durch welche die Tangente geht. Dann gilt in den ähnlichen Dreiecken ghm und gCt

$$gh : gC = gm : gt; \text{ oder } gh : hC = gm : mt;$$

weil

weil nun $gk = hC$, so ist auch $gm = mt$, und die zwischen den Asymptoten eingeschlossene Tangente wird durch den Berührungspunct m stets in 2 gleiche Theile getheilt.

§. 365. Man fälle in m ein Perpendikel mp auf die Axe, ein Perpendikel Vm auf die Tangente, so ist Tp Subtangente, mV Normale, pV Subnormale; pm Ordinate $= y$; Bp Abscisse $= x$ und Cp Abscisse $= u$.

Die Subnormale $Vp = \frac{ab + 2bx}{2a}$, oder $\frac{c^2u}{a^2}$.

Die Subtangente $Tp = \frac{(a+x)x}{\frac{1}{2}a+x}$, oder $\frac{u^2 - \frac{1}{4}a^2}{u}$, oder $\frac{4u^2 - a^2}{4u}$.

Die $TB = \frac{ax}{a+2x}$, oder $\frac{2au - a^2}{4u}$ = Abstand der Tangente vom Scheitel.

Die $CT = \frac{a^2}{4u}$ oder $= \frac{a^2}{2a+4x}$ = Abstand der Tangente vom Centro.

Die Tangente Tm ist Hypotenuse im $\triangle$ Tpm, also $= \sqrt{(Tp^2 + y^2)}$.

Die Normale $Vm = \sqrt{\left(y^2 + \left(\frac{c^2 . u}{a^2}\right)^2\right)}$

$= \sqrt{(pm^2 + pV^2)}$.

§. 366. Eine Linie, welche durch das Centrum C geht, sich innerhalb der Asymptoten hält, und also beide entgegengesetzte Hyperbeln in H und h Fig. 70. schneidet, heißt ein Diameter, und der Theil hH der Zwergdiameter.

Zieht man vom Punct H eine Linie Hp, parallel mit der Asymptote CL, verlängert sie, bis $pG = Hp$; und eine andere Hn mit der Asymptote CQ parallel, und verlängert sie bis $ng = Hn$, so ergeben sich zwei Puncte G und g, durch welche und durch das Centrum sich die gerade Linie Gg ziehen läßt, die zweiter, oder conjugirter Diameter genannt wird.

GC ist dann gleich gC. Die Tangente zum Punck H, also die Linie SQ ist gleich dem zweiten Diameter gG; $SH = CG$, und $HG = CS$; $HQ = Cg = GC = HS$. Die $CH = \sqrt{(u^2 + y^2)}$.

§. 367. Sind die beiden Diameter hH und gG gegeben, so findet man die Lage der Asymptoten, indem man HG halbirt, und durch C und p die Asymptote CpQ zieht.

§. 368. Eine mit der Tangente SH parallel gezogene Linie tw durchschneidet die Hyperbel in zwei Puncten in v und w. Der Diameter ZO theilt sie in r in 2 gleiche Theile, so daß $vr = rw$. Die Linien vr und rw heißen Ordinaten des Diameters. Nennt man eine Ordinate des Diameters z, den Diameter $hH = a$, $Gg = b$, und Cr Abscisse vom Centro an auf dem Diameter $= s$, so ist $Z^2 = \frac{b^2 s^2}{a^2} - \frac{b^2}{4}$, welches die Gleichung für die Ordinaten des Diameters ist.

§. 369. Zieht man beliebige gerade Linien von einer Assymptote zur andern, z. B. HJ und LT Fig. 69. und wo beide die Hyperbel schneiden, mit der andern Asymptote Parallelen, wie nK und No, so sind die Rechtecke Hn . nK, und LN . NO einander, und auch dem Quadrat der halben kleinen Axe gleich.

§. 370. Das Parallelogramm aus den beiden Axen AB (Fig. 73.) und EE, oder $a . c$ ist gleich dem Parallelogramm der beiden conjugirten Diameter hM und gG.

§. 371. Wenn man von beiden Brennpuncten F und f an einen Punct M Fig. 70. gerade Linien fM und MF zieht, und den Winkel fMF durch eine gerade Linie MT halbirt, so ist die Linie TM eine Tangente; und

$$fM : FM = fT : FT$$

$$\text{Aber } fM = \frac{\sqrt{(a^2 + c^2)u}}{a} + \frac{a}{2}$$

$$\text{und } FM = \frac{\sqrt{(a^2 + c^2)u}}{a} - \frac{a}{2}$$

$$CT = \frac{a^2}{4u};\ fC = \frac{\sqrt{(a^2 + c^2)}}{2}$$

also $fT = \frac{\sqrt{(a^2 + c^2)}\ 2u + a^2}{4u}$; und FT

$$= \frac{\sqrt{(a^2 + c^2)}\ 2u - a^2}{4u}.$$

§. 372. Weil die Winkel $x = y = n = o$, so würde ein Lichtstrahl bM Fig. 70., dessen Richtung nach dem Brennpunct f geht, vom Hyperbelarm AM so gebrochen werden, daß er in den Brennpunct F gelangen müßte. Daher heißen F und f die Brennpuncte.

§. 373. Eine Linie aus dem Brennpunct an den Berührungspunct M der Tangente TM heißt Radius vector, Zuglinie oder Träger. Ihr Werth ist §. 371. angegeben.

§. 374. Eine hyperbolische Fläche läßt sich nur dann berechnen, wenn die beiden Arme durch eine doppelte Ordinate rs Fig. 68. abgeschnitten sind. Es müssen dann bekannt seyn beide Axen, Abscisse CD, und Ordinate Dr nebst deren Verlängerung rV und sw. Nun findet man DV

$$CB : BE = CD : DV$$

$$= \frac{a}{2} : \frac{c}{2} = u : DV, \text{ und } DV = \frac{cu}{a}.$$

Zieht man davon $Dr = y$ ab, so bleibt rV.

Auf gleiche Weise läßt sich aa, bb, cc, dd rc., die man mit BE parallel zieht, finden. Die dadurch entstehenden kleinen Trapezia BEaa, aabb u. s. w., worin die krumme hyperbolische Linie für gerade anzunehmen ist, lassen sich berechnen, ihre Summe vom Trapezio BEVD abziehen, so wird der Raum BrDB $= \frac{1}{2}$ Hyperbel übrig bleiben.

Diese Verfahrungsweise ist mühsam, aber der einzige Weg, ohne die Kunstgriffe der Integralrechnung zu einem erträglichen Resultat zu gelangen.

Aus der Integralrechnung findet man für die Hyperbel eine ziemlich brauchbare Formel:

$\frac{2}{3}\sqrt{}$

$$\tfrac{2}{3}\sqrt{bx^3} + \sqrt{\frac{bx^3}{2a}} = \text{halben hyperbol. Fläche.}$$

Hiebei ist x eine Abscisse vom Scheitel.

§. 375. Wenn sich der Hyperbelarm Br mit der Asymptote EV um die Axe BD bewegt, so entsteht ein abgekürzter Kegel VEEW, in welchem die Hyperboloide rBsr steckt, deren körperlicher Inhalt gefunden wird durch

$$\frac{(2R^2 + cR - c^2) . P . H}{6},$$

wobei R = DV; c = kleinen Axe; P = 3,141 ...., H = BD = Höhe.

§. 376. Wir sammeln nun die sämmtlichen Formulare in eine Tafel, und fügen ihre Zahlenwerthe, welche in der Fig. 73. Zeichnung und Rechnung übereinstimmig gegeben haben, bei. Diese Figur ist nach der Berechnung §. 351. gezeichnet, 1 Decimalzoll = 100 Theile.

Formeltafel für die hyperbolischen Linien.

Linien.	Formeln.	Zahlenwerth.	
AB = großen Axe gegeben	$= a = \frac{c^2}{b}$	100.	Beständige Größen.
ECE = kleinen Axe	$= c = \sqrt{(ab)}$.	70,71	
Parameter — gegeben .	$= b = \frac{c^2}{a}$ . . .	50.	
AC = CB = halben großen Axe	$= \frac{1}{2} a = \frac{1}{2} \frac{c^2}{b}$ . .	50.	
CE = AE = BE = halben kl. Axe	$= \frac{1}{2} c = \frac{\sqrt{(a . b)}}{2}$	35,355	
AF = Bf = Abst. d. Brp. v. Scheitel	$= \frac{\sqrt{(ab + a^2)}}{2} - \frac{1}{2} a$	11,237	
CF = Cf = Abst. d. Brp. v. Centro	$= \frac{\sqrt{(ab + a^2)}}{2}$.	61,237	

Linien.	Formeln.	Zahlenwerth.	
Oder AF = Bf, in Werthen der Axen	$= \frac{\sqrt{(a^2+c^2)}}{2} - \frac{1}{2}a$	11,237	Beständige Größen.
CF = Cf, in Werthen der Axen	$= \frac{\sqrt{(a^2+c^2)}}{2}$.	61,237	
HCR und WCK, lich, wie Hyperbel	Asymptoten sind unend- arme.		
JB = EJ = CJ	$= \sqrt{\left(\frac{a^2+c^2}{16}\right)}$.	30,618	
CJ² = Potenz der Hyperbel	$= \frac{a^2+c^2}{16}$ . . .	937,5	
Winkel RCW = Asymptoten-Winkel	$\frac{1}{2}$ Tang. RCW $= \frac{c . \text{Sin. tot.}}{a}$	35°16′	
	und < RCW	70°32′	
AP = Abscisse vom Scheitel	= x, gegeben . .	25.	
PM = Ordinate dazu	$= y = \sqrt{\left(bx + \frac{bx^2}{a}\right)}$	39,528	
CP = Abscisse vom Mittelpunct	= u, gegeben, oder $= \frac{a^2 y^2}{c^2} - \frac{a^2}{4}$	75.	
PM, Ordinate zur Abscisse v. Centro	$y = \sqrt{\left(\frac{c^2 u^2}{a^2} - \frac{1}{4}c^2\right)}$	39,528	
Fm Radius vector	$= \frac{\sqrt{(a^2+c^2)}u}{a} - \frac{a}{2}$	41,855	
fm — —	$= \frac{\sqrt{(a^2+c^2)}u}{a} + \frac{a}{2}$	141,855	
PF Abst. d. Brennpuncte v. d. Ordin.	$= \frac{\sqrt{(a^2+c^2)}}{2} - u$	13,763	
Pl verlängerte Ordinate z. Asympt.	$= \frac{cu}{a}$	53,032	

Linien.	Formeln.	Zahlenwerth.
Ml, Verlängerung der Ordinate	$=\frac{cu}{a}-y$, oder $\frac{cu}{a}$ $\sqrt{\left(\frac{c^2u^2}{a^2}-\frac{c^2}{4}\right)}$	13,504
Rechteck vM, Ml	$=\frac{c^2}{4}$	
vM . . .	$=\frac{\frac{1}{4}c^2}{Ml}$	92,561
Ci = Abscisse auf der Asymptote	$u'=\frac{a^2+c^2}{16y'}$, gegeben	78.
Mi = Ordinate auf der Asymptote	$y'=\frac{a^2+c^2}{16u'}$ . .	12,019
TM Tangente zum Punct M	$=\sqrt{\left(\left(\frac{u^2-\frac{1}{4}a^2}{u}\right)^2+\frac{c^2u^2}{a^2}-\frac{c^2}{4}\right)}$	57,433
TP Subtangente	$=\frac{(a+x).x}{\frac{1}{2}a+x}$ oder $=\frac{u^2-\frac{1}{4}a^2}{u}$.	41,666
MR Normale	$=\sqrt{\left(\left(\frac{c^2u}{a^2}\right)^2+\frac{c^2u^2}{a^2}-\frac{c^2}{4}\right)}$ . .	54,486
PR Subnormale	$=\frac{c^2u}{a^2}$	37,5
TA Abst. d. Tang. vom Scheitel	$=\frac{ax}{a+2x}$ oder $\frac{2au-a^2}{4u}$	16,667
CT Abst. d. Tang. v. Mittelpunct	$=\frac{a^2}{2a+4x}$ oder $\frac{a^2}{4u}$.	33,3
ZD Diam., unendl.		

Linien.	Formeln.	Zahlenwerth.
Mh Zwergdiamet.	$\alpha = 2\sqrt{(u^2 + y^2)}$.	169,556
CM halber Zwergdiameter	$\frac{\alpha}{2} = \sqrt{(u^2 + y^2)}$	84,778
Gg conjugirter Diameter	$\beta = Vt = 2Mt = \frac{2 . \text{Sin. i . Mi}}{\text{Sin. tot.}}$	149,691
VM = Mt = gC = CG = $\frac{1}{2}\beta$ = $\frac{\text{Sin. i . Mi}}{\text{Sin. tot.}}$	jede dieser Linien = Mt, und im △ Mti ist Mi und it (= Ci) so wie < Mit (= Asymptot. Wink.) bekannt.	
op = pq, Ordinate auf d. Diameter	$= z = \sqrt{\left(\frac{\beta^2 s^2}{\alpha^2} - \frac{\beta^2}{4}\right)}$	71,186
Cp Abscisse auf dem Diameter	= s, gegeben, oder $= \sqrt{\left(\frac{a^2 z^2}{\beta^2} - \frac{\alpha^2}{4}\right)}$	117,
Die Rechtecke QN . NO, Lw . wU, xr . rs, Od . dL — von denen immer e. Größe gegeben.	$= \frac{e^2}{4}$	
Der Winkel CVt	$= \frac{\text{Sin. VCt . Ct}}{\text{Vt}}$.	100° 43′
Wink. CtV = 180° − (< VCt + < CVt) das ist im gegenwärtigen Fall	= 180° − (100° 43′ + 70° 32′	8° 45′
Hyperbolische Fläche MAPM	$= \frac{2}{3}\sqrt{bx^3} + \sqrt{\frac{bx^2}{2a}}$	601,57
Ganze hyperbol. Fläche MAmPM	$= \left(\frac{2}{3}\sqrt{bx^3} + \sqrt{\frac{bx^2}{2a}}\right) . 2$	1203,14 □Maaß

Linien.	Formeln.	Zahlenwerth.
Körperlicher Inhalt der Hyperboloide MAmM	$=\frac{(2R^2+cR-c^2).P.H}{6}$ wob. $R=vl$; $c=$ kl. Axe $P=3,14\ldots$; $H=AP=x$.	327075,8 Kubikmaaß.

XI. Von den Linien höherer Ordnungen.

§. 377. Unter diesem Namen versteht man solche Linien, in deren Gleichung eine höhere Potenz von x und y, als die zweite vorkommt. Wir wollen einige derselben betrachten und ihre Zeichnung und Berechnung kennen lernen.

§. 378. Die Cissoide Fig. 74. entsteht also:

In einem Kreise nehme man 2 gleich weit von A und B entfernte Puncte D und F, und ziehe die Linien PDh und GHF senkrecht auf den Diameter AB. Die Chorden DA und AFh durchschneiden die Perpendikel in H und h. Durch die Puncte h, H und L (auf dem Endpunct des senkrechten Diameters CL) geht eine krumme Linie AHLh, welche der eine Arm der Cissoide ist. Der andere Halbkreis enthält den andern Arm AMIN.

Der Diameter AB ist die Abscissenlinie $= a$; AG eine Abscisse $= x$, und GH die dazugehörige Ordinate $= y$. Zur Abscisse AP gehört die Ordinate Ph; zu AC gehört CL. Nimmt man nun mehrere von A und B gleich weit abstehende Puncte im Kreise, so findet man auch mehrere Puncte, die in der krummen Linie liegen, und die endlich zusammen gezogen, die krumme Linie darstellen.

Die Ordinate y findet man durch folgendes Formular: $y = \sqrt{\left(\frac{x^3}{a-x}\right)}$. Die Fig. 74. ist auf diese Weise construirt. $AC = 50$, also $AB = a = 100$; die Abscisscissen fangen in A an, und sind Am = 10; Av = 20, AG = 30 rc. = x, wozu die Ordinaten mn, vg, GH rc. = y berechnet, und rechtwinklicht auf ihre Abscissen getragen worden.

Wenn Am = x = 10,	so ist	mn	= y	= 3,33
Av = x = 20	—	vg	= y	= 10
30	—		=	= 19,64
40	—		=	= 32,66
50	—		=	= 50
60	—		=	= 73,5
70	—		=	= 106,9
80	—		=	= 160
90	—		=	= 270
100	—	BR		= unendlich.

Jenseits der Linie Rr ist also nichts von der Cissoide, deren Erfinder Diokles ist. Alle Cissoiden sind einander ähnlich. Wenn man daher die Ordinaten für eine solche Figur berechnet hat, so gelten sie für alle besondere Fälle, und man hat nur nöthig, den Diameter a in 100 Theile zu theilen, und die Ordinaten in solchem Maaße rechtwinklicht aufgetragen.

§. 379. Die Conchoide oder Muschellinie entsteht so:

Auf der geraden Linie AB Fig. 75. errichte das Perpendikel CD, nimm C willkührlich, und mache EF = ED. Aus C, dem Pol dieser Linie, ziehe willkührliche gerade Linien, Cc, Cf, Cg, CM, welche alle die Linie AB durchschneiden. Nimm die Weite ED = EF, und trage sie auf jede der aus C gezogenen Linien, so, daß de = dc, hm = hf, on = og, pB = BM, jede = ED = EF wird. Die zusammengezogenen Endpuncte D, c, f, g, M geben die obere Hälfte, und die Puncte F, e, m, n, p die untere Hälfte der Muschellinie. Durch die Linie CD wird sie in zwei gleiche Hälften getheilt.

Aus der Construction dieser Linie ersieht man, daß die Arme DG und FJ die Linie AB nur dann erreichen werden, wenn die aus C gezogenen Linien mit den Theilen pM ganz in AB fallen, welches eigentlich nie geschehen kann. AB heißt daher die Asymptote, der sich die Arme ewig nähern, ohne sie je zu erreichen.

§. 380. Zur Berechnung gehört, daß CE = b, und ED = EF = a bekannt sind: EP ist dann eine Absciſſe = x, und PM eine dazu gehörige Ordinate = y. In der auf Null gebrachten Gleichung erscheint x in der 4ten Potenz

$$x^4 + 2bx^3 + (y^2 + b^2 - a^2)\,x^2 - 2a^2bx - a^2b^2 = 0.$$

Um aber die Ordinaten, z. B. PM = y zu finden, ist folgendes Formular sehr bequem:

$$y = \frac{b + x \,.\, \sqrt{(a^2 - x^2)}}{x} = PM$$

und für die y in der untern Hälfte der Conchoide, die x von E an, ist

$$y = \frac{b - x \,.\, \sqrt{(a^2 - x^2)}}{x} = HM$$

Ist x = 0, so wird y unendlich und fällt auf AB; ist x = a, so wird y = 0; für negative x bekommt man positive Werthe von y, woraus sich ergiebt, daß unterhalb AB noch eine Muschellinie JFJ statt findet.

In Fig. 75. ist CE = b = 75; FE oder ED = a = 50, und die x von E aus nach D positiv, und von E nach F zu negativ genommen.

Wenn + x = 10,	so ist y =	416,41
15	— —	= 286,17
20	— —	= 217,67
25	— —	= 173,20
30	— —	= 140.
33	— —	= 122,93
36	— —	= 106,98
39	— —	= 91,46
42	— —	= 75,57
45	— —	= 58,12
47	— —	= 44,28
48	— —	= 35,87
49	— —	= 25,18
50	— —	= 0.

Trägt man diese Werthe von y und die zugehörigen x auf ED und zieht die Endpuncte zusammen, so erhält man die

die Muschellinie. Nikomedes, welcher 150 Jahre vor Christo lebte, erfand diese Linie, um mit Hülfe derselben die berühmte Aufgabe, den Würfel zu verdoppeln, zu lösen.

§. 381. Die Schnecken- oder Spirallinie des Archimedes entsteht so:

Der Punct C im Kreise Fig. 76. bewege sich gleichförmig auf dem Halbmesser CA nach der Peripherie, während CA selbst sich gleichförmig um den Mittelpunct C bewegt, so daß der bewegte Punct z. B. in M ist, wenn der Halbmesser in der Lage CP liegt. Dann gilt

$$CM : CA = \angle ACP : 360^\circ \ (= p).$$

Nennt man nun $CM = y$, und $AP = x$; $CA = r$; die Peripherie $= p$, so ist obige Proportion

$$y : r = x : p; \text{ und } y = \frac{r \cdot x}{p},$$

welches die Gleichung für die Spirallinie ist.

Die Absciſſen werden demnach auf der Peripherie und die Ordinaten vom Mittelpunct an genommen. Wenn $x = 0$, so ist $y = 0$ und M noch in C; so lange x kleiner, als die Peripherie p, so lange bleibt M innerhalb des Kreises und beschreibt die Spirallinie MNA; ist $x = p$, so ist $y = r$ und M in A, und man sagt: der beschreibende Punct M hat den ersten Gang gemacht; wird x größer, als p, so wird y größer, als r. und M beschreibt die krumme Linie außerhalb des Kreises. Ist nun CA zum zweitenmale in der Lage CP, so ist der Winkel $= p + x$, und

$$p : p + x = r : CM'; \text{ und } CM' = \frac{(p+x) \cdot r}{p}.$$

§. 382. Alle Schneckenlinien dieser Art sind einander ähnlich, und daher nach folgender Berechnung allemal zu zeichnen. Der Radius $r = CA = 50$; die Peripherie $= 360^\circ$ und die x von 10 zu 10° genommen, wozu die y oder der jedesmalige Abstand CM berechnet ist.

Wenn

Wenn $x = 10°$, so ist $y = 1,38$

20	— —	=	2,77
30	— —	=	4,16
40	— —	=	5,55
50	— —	=	6,94
60	— —	=	8,33
70	— —	=	9,72
80	— —	=	11,11
90	— —	=	12,50
100	— —	=	13,88
110	— —	=	15,28
120	— —	=	16,67
130	— —	=	18,05
140	— —	=	19,44
150	— —	=	20,83
160	— —	=	22,22
170	— —	=	23,61
180	— —	=	25
190	— —	=	26,39
200	— —	=	27,78
210	— —	=	29,17
220	— —	=	30,55
230	— —	=	31,95
240	— —	=	33,33
250	— —	=	34,72
260	— —	=	36,11
270	— —	=	37,78
280	— —	=	38,89
290	— —	=	40,28
300	— —	=	41,67
310	— —	=	43,05
320	— —	=	44,44
330	— —	=	45,83
340	— —	=	47,22
350	— —	=	48,61
360	— —	=	50
370	— —	=	51,39
380	— —	=	52,77
390	— —	=	54,17
400	— —	=	55,55.

Die Fläche, welche die Spirallinie einschließt, findet man durch $\frac{rx^3}{6p^2}$ = einem unbestimmten Raum derselben, je nachdem x einen größern oder kleinern Bogen bedeutet. Wenn x = p wird, so ist dieser Raum $\frac{rp}{6}$ oder = $\frac{1}{3}$ von der Kreisfläche, darin die Spirale beschrieben werden.

§. 383. Mechanisch erhält man eine Art Spirallinie, indem man um eine runde Scheibe einen Faden, dessen Länge dem Umfange der Scheibe gleicht, legt, den einen Endpunct an der Scheibe bevestigt, und den straff angezogenen Faden um die Scheibe bewegt, oder abwikkelt. Der zweite Endpunct des Fadens beschreibt dann die Spirallinie.

Der Umfang derjenigen Scheibe, von der sich oben berechnete Schneckenlinie mit einem Faden beschreiben läßt, muß gleich r seyn, folglich ist $\frac{50}{3,14}$ = 15,9 der Diameter, und 7,96 der Radius der erwähnten Scheibe.

§. 384. Cykloide oder Radlinie. Sie entsteht, wenn sich ein Punct A Fig. 77. in einem beweglichen um C beschriebenen Kreise durch's Fortrollen desselben auf der Ebene AM, durch N, F, P ꝛc. bewegt. Die krumme Linie ANFPZ heißt deshalb Radlinie, weil ein Radnagel A im Rade C beim Fortrollen dieselbe in der Luft beschreibt. Die Linie AM heißt Grundlinie, der Kreis um C, der beschreibende Kreis; der Punct A der beschreibende Punct.

Der beschreibende Punct A berührt die Ebene AB zum zweiten Male, wenn alle Theile der Peripherie sie berührt haben, folglich ist die Linie AZ der ganzen Peripherie, und AD, wenn der Punct A sich in F befindet, der halben Peripherie gleich.

Der zurückgelegte Weg des Rades heiße u, die Peripherie = 2rp, so verhält sich

$$u : 2rp = \angle ACG \; (= NCE) : 360$$

Steht nun z. B. das Rad in E, so ist der Punct A in N, und G in E, folglich u = AG = AE.

§. 385. Die Zeichnung einer Radlinie geschieht am leichtesten also: Mache AD der halben Peripherie, DF dem Durchmesser des beschreibenden Kreises gleich. In dem um DF beschriebenen Kreis nehme man den Punct R willkührlich, und ziehe durch R die NRLSP mit AM parallel und also auf DF senkrecht. Die Länge des Bogens FR = FS trage auf die Parallele von R nach N, und von S nach P, so sind N und P zwei Puncte in der Radlinie. Viele auf diese Weise gefundene Puncte zusammengezogen stellen endlich die verlangte Radlinie dar. Bei dieser Verfahrungsweise ist aber immer die Länge des Bogens RF zu berechnen nöthig.

Legt man an AM ein Lineal und rollt an demselben eine runde Scheibe, deren Radius AC, so läßt sich der bezeichnete Punct A genau verfolgen, und auf dem Papiere nachzeichnen.

Genauer und sicherer, obgleich mühsamer, ist die algebraische Construction dieser Linie.

Nennt man den Bogen $FR = x$, und $RN = y$, so ist $y = x$, welches die Gleichung der Cykloide ist.

Will man aber die y von der Linie DF an rechnen, so ist $y = x + \sqrt{(r^2 - z^2)}$, wobei $z = QL$ = dem Abstand der Ordinate vom Centro. Die x oder Bogenstücke müssen in Theilen des Halbmessers genommen werden. Nun ist QL = Cosinus, und $SL = \text{Sin.} < FQS$, dessen Bogen FS ist. Nimmt man QL willkührlich, so findet man dazu in den trigonometrischen Tafeln LS und FS, und $FS = SP$, also $FS + LS = PL = y$ = Ordinate.

§. 386. Daraus folgt:

Man theile QF in 100, und also DF, als Abscissenlinie in 200 Theile, so werden die Angaben der trigonometrischen Tafeln keiner weitern Rechnung bedürfen. Nimmt man z. B. $QL = 30 = \text{Cosin.} < FQS$, so findet man $LS = 95{,}39$ und Bogen $FS = 126{,}53$, ihre Summe $= 221{,}92 = y = PL$. Folgende Berechnung ist auf diese Weise gemacht. Die Abscissen fangen in F an, ihre Ordinaten stehen rechtwinklicht zu beiden Seiten.

Ist

Ist FL =	1,	so ist LP	=	28,23
	5	— —	=	62,91
	10	— —	=	88,66
	15	— —	=	108,17
	20	— —	=	124,32
	30	— —	=	150,99
	40	— —	=	172,66
	50	— —	=	191,32
	60	— —	=	207,54
	70	— —	=	221,93
	80	— —	=	234,88
	90	— —	=	246,54
	100	— —	=	257,08
	110	— —	=	266,62
	120	— —	=	275,13
	130	— —	=	283,02
	140	— —	=	289,92
	150	— —	=	296,04
	160	— —	=	301,45
	170	— —	=	305,98
	180	— —	=	309,75
	185	— —	=	311,33
	190	— —	=	312,64
	195	— —	=	313,65
	199	— —	=	314,11
	200	— —	=	314,16

Weil alle Cykloiden einander ähnlich sind, so ist vorstehende Berechnung für alle Fälle brauchbar. — Man empfiehlt die Cykloide zu Brücken- und Gewölbbogen.

§. 387. Die logarithmische oder logistische Linie acfghiklmb Fig. 78. entsteht, wenn man auf der geraden Linie AB in gleichen Abständen senkrechte Ordinaten errichtet, welche eine geometrische Progression bilden.

Dies zu bewerkstelligen, nehme man Bb willkührlich, multiplicire sie mit einer Zahl, größer, als 1, so bekommt man Mm; multiplicirt man Mm wieder mit jener Zahl, so erhält man Li. Heißt nun der Multiplicator oder Exponent = n; die Ordinate Bb = y, so ist Mm = ny.

Es sey z. B. $n = \frac{4}{3}$ und Bb oder $y = 16{,}85$; so ist $ny = \frac{4}{3} \cdot 16{,}85 = 22{,}5 = Mm$; und setzt man die Rechnung fort, so bekommt man folgende Ordinaten:

Bb	= 16,85	Gg	= 94,81
Mm	= 22,5	Ff	= 126,42
Ll	= 30	Cc	= 168,56
Kk	= 40	Aa	= 224,75
Ji	= 53,33		u. s. w.
Hh	= 71,11		

Anmerk. Fängt man von Aa an, die Ordinaten zu berechnen, so muß der Exponent kleiner, als 1 (hier $\frac{3}{4}$) seyn.

Die Krümmung dieser Linie hängt von dem Unterschied der Ordinaten, und ihrem Abstande von einander ab. Weil die Abscissen Bm, BL, BK ꝛc. in arithmetischer, und die Ordinaten in geometrischer Progression zunehmen, so stellt diese Linie eigentlich ein logarithmisches System dar, wovon ihr Name entstanden ist.

§. 388. Eine krumme Linie von angenehmer Biegung ist die Schlangenlinie oder, wie ich sie lieber nennen mögte, die Glockenlinie EASBF Fig. 76. b., deren Entstehung folgende ist.

In einem Parallelogramm ACDB soll das Rechteck AP . PB gleich seyn PM . AC. Nennt man $AB = a$; $AC = b$, weil es beständige Größen sind, und $PM = y$; $PB = x$, so ist AB die Abscissenlinie, und

AP . PB = PM . AC einerlei mit $(a - x) . x = by$

$$ax - x^2 = by$$

$$\text{und } \frac{ax - x^2}{b} = y$$

welches die Gleichung für die Ordinaten dieser Linie ist. Die Ordinate wird am größten seyn, wenn $x = \frac{1}{2}a$; wird x größer, als $\frac{1}{2}a$, so wird das Parallelogramm $(a - x) . x$ kleiner, folglich, weil b beständig, y anfangen, abzunehmen. Man braucht daher nur die Ordinaten zu den Abscissen von A bis Z, oder B bis Z zu berechnen, und wenn $Ap = BP$, so wird auch $pm = PM$ seyn.

Setzt man die Abscissenpuncte in A und B, so können die Abscissen sowol positiv, als negativ, oder von A nach Z, und von A nach q zu, genommen werden. Ist Aq = Ap, und PB = Br, so wird auch qu = pm, und rz = PM.

Wenn b = $\frac{1}{2}$ a, so wird die größte Ordinate = b, und s fällt in v; je näher der Werth von b dem von a kommt, desto flacher wird der Bogen, und die krumme Linie windet sich um HJ, wie eine Schlange; je mehr hingegen b von a unterschieden ist, desto höher steigt der Bogen, oder desto größer wird die mittelste Ordinate ZS. Überhaupt gestattet diese Linie die größte Mannichfaltigkeit, und ahmt mancherlei Gestalten der Körper nach.

Mittelst der Integralrechnung findet man die Fläche BPM oder für jedes beliebige Stück durch folgendes Formular $\frac{ax^2}{2b} - \frac{x^3}{3b}$, wobei die x von A oder B nach Z hin genommen werden müssen. Ist x = a, so giebt das Formular die Fläche ABSA. Eben so viel betragen die Flächen AHE + JBF; werden nun diese vom Parallelogramm HJFE abgezogen, so bleibt die Fläche ABFE = AHGS + SgJB, und daher ist die ganze Fläche der Glockenlinie EASBF dem Parallelogramm GgHJ gleich, dessen Grundlinie HJ = 2a, dessen Höhe = der größten Ordinate. Diese aber steht da, wo x = $\frac{1}{2}$ a, folglich wird anstatt $\frac{ax - x^2}{b}$ stehen können $\frac{a.a}{2b} - \frac{a^2}{4b}$ $= \frac{\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}a^2}{b} = \frac{\frac{1}{4}a^2}{b} = \frac{a^2}{4b} =$ ZS. Daher ist die Fläche des Parallelogramms HG . HJ $= \frac{a^2}{4b} \cdot 2a = \frac{2a^3}{4b}$ $= \frac{a^3}{2b} =$ der ganzen Fläche der Glockenlinie EASBF.

Die Fig. 76. b. ist nach folgender Berechnung gezeichnet: AB = a = 100; AC = b = 30; die x sind von den Abscissenpuncten A und B vor- und rückwärts, und die Ordinaten oder die y = PM = rz = pm = qu gehörigermaßen senkrecht auf und unter AB, AH und BJ getragen.

Wenn x oder Ap =	5,	so ist y =	15,84
	10	— — —	30,
	15	— — —	42,5
	20	— — —	53,33
	25	— — —	62,5
	30	— — —	70,
	35	— — —	75,83
	40	— — —	80,
	45	— — —	82,5
	50	— — —	83,33.

Die Fläche der ganzen Glockenlinie $= \frac{a^3}{2b} = \frac{1000000}{60}$ $= 16666\frac{2}{3}$ Quadratmaaß.

§. 389. Die Blattlinie Fig. 78. b. entsteht, wenn man folgende Proportion construirt:

$$AB^2 : PA^2 = PB : PM$$

Nennt man $AB = a$; $AP = x$; $PB = a - x$; und $PM = y$, so ist $a^2 : x^2 = a - x : y$

und $a^2 y = x^2 . (a - x)$

$$y = \frac{ax^2 - x^3}{a^2}.$$

Ist in A der Anfang der Absciſſen, und werden die y zu beiden Seiten der Axe AB rechtwinklicht aufgetragen, so entsteht die krumme Linie AMBmA, die ich Blattlinie genannt habe, weil ihre Gestalt mit einem Blatt die meiste Ähnlichkeit hat.

Anmerk.

Differenziirt man die Gleichung $a^2 y = ax^2 - x^3$

$$a^2 dy = 2axdx - 3x^2 dx$$

und setzt das Differenzial $dy =$ Null $=$ $dy = \frac{2axdx - 3x^2dx}{a^2}$

so ist $0 = 2axdx - 3x^2dx \quad : xdx$

$$0 = 2a - 3x$$

$$3x = 2a$$

und die größte Ordinate ist da, wo $x = \frac{2}{3}a$.

Die

Die Fläche, welche die Blattlinie einschließt, giebt das Formular $\frac{x^3}{3a} - \frac{x^4}{4a^2}$, wodurch man ein Stück APM findet. Setzt man $x = a$, so wird das Formular $\frac{a^3}{3a} - \frac{a^4}{4a^2} = \frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{4}$ = der Fläche ABMA; und doppelt $= \frac{2}{3}a^2 - \frac{2}{4}a^2 = \frac{a^2}{6}$ = der ganzen Fläche.

Die Fig. 78. b. ist nach folgenden Angaben gezeichnet: AB = a = 100, und AP = x = 5, 10, 15 rc. genommen, die so gefundenen Ordinaten über und unter AB rechtwinklicht aufgetragen, und die Endpuncte zusammengezogen.

Ist x = 5,	so ist y = 0,23		größte Ordin., wenn x = 66,6,	ist y = 14,81	
10	— —	0,9	70	— —	14,7
15	— —	1,91	75	— —	14,06
20	— —	3,2	80	— —	12,8
25	— —	4,68	85	— —	10,84
30	— —	6,3	90	— —	8,1
35	— —	7,96	93	— —	6,05
40	— —	9,6	95	— —	4,51
45	— —	11,14	97	— —	2,82
50	— —	12,5	98	— —	1,92
55	— —	13,61	99	— —	0,89
60	— —	14,4	100	— —	0.
65	— —	14,78			

Die ganze Fläche dieser Linie $= \frac{a^2}{6} = \frac{10000}{6} = 1666\frac{2}{3}$ Quadratmaaß.

§. 390. Die Quadratrix des Dinostratus.

Diese krumme Linie entsteht also:

Der Halbmesser CB im Quadranten BAC Fig. 79. bewege sich um C und komme nach und nach in die Lage CE, CJ, CK bis in CA; mit ihm parallel bewege sich eine andere Linie längs CA hinauf, die nach und nach in die Lage NP, kp, mn komme. Der beständige Durchschnitt der beiden sich bewegenden Linien erzeugt die krumme Linie DFGHA, welche Quadratrix heißt.

Die

Die geometrische Construction besteht darin, daß man CA in beliebige gleiche Theile theilt, und durch die Theilpuncte Parallelen mit CB zieht; darauf den Bogen AB in eben so viele Theile theilt, als CA hat, und nach den Theilungspuncten die Halbmesser CE, CJ, CK zieht. Die erhaltenen Durchschnittspuncte F, G, H liegen in der Quadratrix. Nennt man CA die Abscissenlinie, so sind CN, Ck, Cm ꝛc. Abscissen, und NF, kG, mH die dazu gehörigen Ordinaten. Weil nun z. B. in △ CmH drei Stücke, nämlich Cm = x, Winkel mCH = Bogen AK, und der rechte Winkel bekannt sind, so findet man mH oder y durch

$$\text{Sin. tot.} : Cm = \text{Tang. } HCm : mH$$

$$\text{d. i. Sin. tot.} : x = \text{Tang. } C : y$$

$$\text{und } y = \frac{x \cdot \text{Tang. } C}{\text{Sin. tot.}}$$

Durch dies leichte Formular sind für einen angenommenen Radius CA = 100 und Bogen AB in 100 Theilen, folgende Ordinaten berechnet, wornach jede Quadratrix gezeichnet werden kann.

Wenn CN = x 1,111, so ist y oder NF = 63,65 u. s. w.

x = 1,111,	y = 63,65	x = 70,	y = 35,67
5	— — 63,53	80	— 25,99
10	— — 63,14	90	— 14,25
20	— — 61,55	95	— 7,47
30	— — 58,88	100	— 0
40	— — 55,06		
50	— — 50.		
60	— — 43,59		

§. 391. Die Spirallinie, Radlinie und Quadratrix heißen auch zuweilen transcendente Linien, im Gegentheil von den algebraischen, deren Ordinaten durch algebraische Formeln gefunden werden. — Es sind unzählig viele krumme Linien möglich, und es ist eine angenehme Beschäftigung, sich sowol im Construiren und Berechnen, als auch im Erfinden derselben zu üben. Daher wird man die ausführlichere Betrachtung der krummen Linien, welche als Verzierungen in der Baukunst, als mechanische Krümmungen bei bewegten Körpern häufig vorkommen, gern verzeihen.

Wer sich in der Berechnung und Zeichnung solcher krummen Linien üben will, versuche z. B. nach der Formel

$$a : x = a^3 - x^3 : y^3, \text{ worin } y = \sqrt[3]{\left(\frac{a^3 x - x^4}{a}\right)}$$

für eine beständige Größe $a = 100$, die x willkührlich genommen, die dazu gehörigen Ordinaten zu berechnen, und auf a, worauf die Abscissen genommen, rechtwinklicht zu setzen. Er wird eine krumme Linie, fast dem steigenden Bogen Fig. 137. ähnlich, bekommen, worin die größte Ordinate hk, da auf der $bc = a$ steht, wo bh,

oder $x = \frac{a}{\sqrt[3]{4}} = 63$ ist. Werden die Ordinaten zu beiden Seiten der Linie a (in der Figur bc) aufgetragen, und ihre Endpuncte zusammengezogen, so bekommt man eine geschlossene krumme Linie, die einer gedrückten Ellipse gleicht.

Zweite