UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Der Rathgeber bei mathematischen Beschäftigungen

Stöpel, August

Stendal, 1819

Zweite Abtheilung. Praktische Geometrie.

urn:nbn:de:hbz:466:1-63556

Visual Library

Zweite Abtheilung.

Practische Geometrie.

I. Zeichnung geometrischer Figuren.

§. 392. Zur Zeichnung geometrischer Figuren gehört ein gutes Reißzeug.

Anmerk. Das Unentbehrlichste in demselben ist:

1. ein Federzirkel, welcher an dem einen Schenkel eine leicht bewegliche Schraube hat; vermittelst derselben sind die feinsten Bewegungen der Schenkel möglich.
2. Ein anderer Zirkel, von dem der eine Schenkel abgenommen, und dem dafür eine Blei- oder Reißfeder angeschraubt werden kann.

   Die Spitzen der Zirkel müssen nicht gehärtet, sehr spitz, wie Nadeln, und rund seyn; die Schenkel schlank, dünn, und nach der Spitze hin piramydenförmig zulaufen; die Gewinde so gearbeitet, daß die Schenkel beim Auf- und Zumachen nicht Rückungen machen, sondern in jeder Stellung gleich vest stehen. Eckige Spizzen geben beim Umdrehen des Zirkels dicke Puncte und verderben die Zeichnung; plumpe Schenkel hindern das Auge, die Puncte zu sehen.
3. Eine Reißfeder muß wohl polirte, an dem schreibenden Ende zart abgerundete, vermittelst einer feinen Schraube leicht zusammenhängende Backen haben; vor und nach dem Gebrauch sauber abgewischt, und die Tinte ihr mit einer

Schreibfeder oder einem Pinsel zugefüllt werden, damit die äußere Seite nicht schmutzig wird, und ungeschickte Linien macht. Je zarter und gleichförmiger die Linien sind, desto besser ist die Reißfeder. — Die Tinte oder Tusche muß sehr flüssig seyn.

4. Eine **kurze Reißfeder** mit einem Gelenk, zum Einsetzen in den zweiten Zirkel, um Kreise zu beschreiben, muß ein gutes Gewind im Gelenk haben, und niemals zu leicht beweglich seyn.

5. Ein **Transporteur** ist ein messingner Halbkreis, der in 180° getheilt ist. Die Theilungslinien sind zart und laufen am abgedachten Umkreise scharf aus. Dies nothwendige Instrument ist nur dann brauchbar, wenn die Grade gleich groß sind, und der Mittelpunct durch eine scharfe Spitze angegeben ist.

6. Der **tausendtheilige** oder **verjüngte Maaßstab** ist ein messingnes oder hölzernes Lineal, auf welchem eine Zeichnung Fig. 80. befindlich ist, mittelst welcher man allerlei Linien messen, und verjüngt oder verkleinert aufs Papier tragen kann. Die Linie AB ist gleich und parallel CD, jede in 10 Theile getheilt, wie in der Figur zu sehen ist. Die Theilpuncte werden durch die Transversalen 1D, 2—1, 3—2 ꝛc. zusammen gezogen. Hiedurch ist die Linie B1 in 10 Theile, folglich BA in 100 Theile getheilt worden. So ist z. B. ab = 1; mn = 3; qr = 88 solcher Theile; und ur = 188; vr = 288. Verlängert man die Parallelen AG, 8w, C300, bis sie 10mal AB sind, so hat man einen tausendtheiligen Maaßstab; die Zahlen 1, 2, 3, 4 ꝛc. auf AB und CD bedeuten also 10, 20, 30, 40, 50 ꝛc. und die auf den Linien CA und DB die einzelnen Theile. Will man z. B. eine Linie = 31 auf's Papier tragen, so öffne man den Zirkel von a bis p. — Der Gebrauch des Transporteurs und des Maaßstabes ist äußerst wichtig, wird Anfängern zuweilen schwer, und

die

die Übung damit müssen wir sehr empfehlen. Man thut wohl, wenn man seine Geschicklichkeit im Verfertigen derselben versucht.

7. Ein Winkelmaß, Winkelhaken, bildet an seiner äußern und innern scharfen Kante rechte Winkel, und ist bequem, Perpendikel und rechte Winkel zu errichten. Mit Hülfe eines Peripheriewinkels §. 196. Fig. 30., dessen Schenkel AD und DB auf dem Diameter stestehen, läßt sich das Winkelmaß prüfen und berichtigen.

Außer diesen unentbehrlichsten Werkzeugen enthalten gute Reißzeuge noch manche andere recht nützliche, als

8. einen hölzernen oder messingenen rechtwinklichten Triangel, welcher sehr bequem ist, Parallellinien zu ziehen. Man legt ihn zu diesem Zweck z. B. mit der großen Catheten an ein vestliegendes Lineal, und verschiebt ihn an demselben, dann werden alle an der Hypotenuse oder der kleinen Cathete beschriebene Linien mit einander parallel. Das Parallellineal, welches aus zwei mit Windungen versehenen Linealen besteht, die einander näher und entfernter gebracht werden können, dient zu gleichem Zweck.

9. Eine feine Punctirnadel; ein Bleistift zum Anschrauben an einen Zirkel, wenn sogenannte blinde (wieder auszulöschende) Linien gezogen werden sollen, gehören auch in ein gutes Reißzeug. — Gute Bleistifte bröckeln beim Anschneiden nicht ab, schneiden sich weich, erlauben feine Spitzen, und geben zarte, leicht wieder auszulöschende Linien.

10. Oft findet man auch in den Reißzeugen einen Compaß, der aber, wenn er brauchbar seyn soll, folgende Einrichtung haben muß.

Auf einer viereckigen rechtwinklichten Messingplatte abgd Fig. 81. ist eine runde Büchse, in deren Mittelpunct C auf einem feinen Stahlstift eine (wo möglich 3 bis 4 Zoll lange) sehr em=

empfindliche Magnetnadel schwebt. Am innern Umkreise der Büchse ist da, wo die Spitze der Nadel hintrifft, ein Kreis beschrieben, und in seine 360 Grade getheilt; aber 0° liegt allemal auf einer Linie, die mit einer Seitenfläche der Messingplatte parallel und durch ihren Mittelpunct c geht. Diese Linie SN heißt Meridian oder Mittagslinie. Nun weist die eine Spitze der Nadel bekanntlich beinahe nach Norden, jedoch hier nicht ganz, sondern 19° westlich, welchen Unterschied vom Nordpunct man ihre Abweichung nennt. Wenn man daher diese kennt, so stellt man die Messingplatte so auf eine Ebene, daß die Magnetnadel auf den Punct ihrer Abweichung einspielt, und zieht an einer Seitenfläche ad oder bg eine gerade Linie, welche die Mittagslinie, und eine andere ab oder dg, welche die Abend- und Morgenlinie ist. Hat man auf eine andere Weise eine Mittagslinie erhalten, so kann man mittelst derselben leicht die Abweichung der Magnetnadel finden, wenn man die Messingplatte an die Mittagslinie schiebt, und den Punct bemerkt, auf dem die Nadel stehen bleibt.

Ein solcher Compaß ist beim Anlegen der Grundrisse und Landcharten nicht nur, sondern auch zur Aufstellung der Sonnenuhren, ja selbst zum Winkelmessen sehr brauchbar, zu welchem letztern Zweck man ihn mit 2 Absehen (Dioptern) in N und S versehen muß. — Dieses Instrument gehört eigentlich nicht in ein Reißzeug.

Das Gelingen einer Zeichnung hängt zu sehr von der Güte der Reißgeräthschaften ab, als daß man das Verweilen bei denselben mißbilligen sollte. — Für den Preis von $3\frac{1}{2}$ Rthlr. erhält man vom Mechanikus Krafft in Halle sehr elegante Reißzeuge, die das Nothwendige, und für 5 bis 8 Rthlr. dergleichen, die alles Nützliche und Bequeme enthalten.

§. 393.

§. 393. Eine gegebene gerade Linie in zwei gleiche Theile zu theilen. Fig. 82.

Aufl. Öffne den Zirkel über die Hälfte der gegebenen Linie ab, und beschreib aus a und b über und unter der ab kleine Bogen in d und f, mit einerlei Zirkelöffnung; ziehe die Bogendurchschnitte d und f durch eine gerade Linie zusammen, dann ist ac = cb.

Wäre die Linie ab Fig. 83. am untern Rande einer Fläche, und daher unter ihr kein Bogendurchschnitt möglich, so beschreibe man über der ab aus a und b mit verschiedener Zirkelöffnung die kleinen Bogen f, d, g; eine gerade Linie durch diese Durchschnitte und zur ab verlängert, ist die fc, welche ab in c halbirt.

Oft pflegt man durch Versuche mit dem Zirkel die Theilung zu bewerkstelligen, wobei einige Übung manchmal schnell zum Ziele führt, ohne daß man eine Zeichnung durch Hülfslinien beschmutzt.

Die durch Hülfe der Bogen gefundene Linie cd steht allemal auf der Mitte der ab senkrecht.

(Man erhält, wenn man ad und bd Fig. 82. zusammenzieht, zwei völlig gleiche rechtwinklichte Dreiecke, und eben so viel unterhalb der ab. Vergl. §. 171.)

§. 394. Auf einer gegebenen Linie ab ein Perpendikel zu errichten.

Aufl. Es kommen verschiedene Fälle vor.

1. Soll das Perpendikel auf der Mitte der Linie stehen, so ist das Verfahren, wie in §. 393.
2. Soll das Perpendikel am Ende der Linie b Fig. 84. stehen, so setze den Zirkel in b, thue ihn ungefähr auf bis in c. Aus c ziehe den Kreis bde, und den Diameter dce; aus e aber die gerade Linie eb, so ist < dbe ein rechter Winkel, weil er ein Peripheriewinkel, dessen Schenkel auf dem Diameter stehen, und eb senkrecht auf ab in b.
3. Wenn das Perpendikel auf einem gegebenen Punct Fig. 85. der Linie ab in c stehen soll, so setze den Zirkel in c, ziehe die Bogen ef und gh,

gh, daß fc = ch werde. Aus den Durchschnitten beschreibe, wie in §. 393., die Bogen in d, ziehe dc zusammen, so ist dc das Perpendikel. Kann man sich auf die Richtigkeit des Winkelmaßes verlassen, so löst man alle diese Aufgaben mittelst desselben weit einfacher und schneller.

§. 395. Zu einer gegebenen Linie AB Fig. 86. eine Parallellinie zu ziehen.

Aufl. Mit der Öffnung des Zirkels, die dem Abstande der Parallelen gleich ist, beschreibe aus beiden Enden der AB, oder wo es sich sonst paßt, Bogen fg, hi, und lege ein Lineal so daran, daß es die Bogen berührt, so wird die Linie CD auf jedem Puncte von AB gleich weit abstehen.

Oder: errichte in A und B Perpendikel von gleicher Länge, und ziehe ihre Endpuncte CD zusammen.

Ist ein Punct P gegeben, durch welchen die Parallele gehen soll, so setze den Zirkel in P, öffne ihn bis er AB berührt, und beschreibe mit derselben Öffnung aus A und B Bogen, wie fg und hi, durch welche sich die Parallele ziehen läßt. Sehr bequem zieht man Parallelen mit Hülfe eines Parallellineals, oder körperlichen Dreiecks. Siehe §. 392, 8.

§. 396. Eine gegebene gerade Linie AB Fig. 87. in verlangte gleiche Theile zu theilen.

Aufl. Ist die Anzahl der Theile eine gerade Zahl, z. B. 12, so theile die AB erst in zwei Theile, jede Hälfte wieder in zwei Theile, so hat jeder so gefundene Theil noch $\frac{3}{12}$ in sich. Will man nun die Linie durch Hülfslinien oder Puncte nicht verletzen, so trage man $\frac{1}{4}$ von AB auf ein besonderes Blatt Fig. 87. nach ab, ziehe dazu die größere Parallele cd, und trage mit willkührlicher Zirkelöffnung 3 Theile auf cd. Ziehe dann durch die Endpuncte die geraden Linien cad und dbd, und von den Theilpuncten 1 und 2 die geraden Linien 1hd und 2gd, so wird ah = hg = gb, und also ab in 3 gleiche Theile getheilt seyn, welche man nun leicht auf die AB zwischen Ab, bC, Cg, gB tragen kann.

Daß

Daß aber ah = hg = gh ist, geht aus der Ähnlichkeit der Dreiecke adh und cdI u. s. w. hervor. Siehe §. 186.

Ist die Anzahl der Theile ungerade (oder eine durch 2 nicht theilbare Zahl, als 7 oder 11 ꝛc.), so muß man entweder durch vielerlei Versuche mit Zirkelöffnungen, oder durch eine größere Parallele cd, wie eben gezeigt, oder durch Rechnung die Theilung bewerkstelligen. Im letztern Fall mißt man AB mit dem Zirkel, hält diese Zirkelöffnung an einen tausendtheiligen Maaßstab, und sieht also, wie lang sie in diesen Theilen ist. Die Anzahl derselben theilt man, wie verlangt, durch Rechnung, und trägt den Quotienten mit dem Zirkel vom Maaßstabe auf die AB, so erhält man den Werth eines verlangten Theils, den man so oft, als man will, neben einander setzen kann.

§. 397. Auf einer gegebenen Linie ab Fig. 88. einen gleichseitigen Triangel zu beschreiben.

Aufl. Nimm die Weite ab mit dem Zirkel, und beschreib aus a und b die kleinen Bogen dd und ee. Von ihrem Durchschnitt ziehe die Linie fa und fb.

Daß △ afb gleichseitig sey, ergiebt sich aus der Construction; denn zöge man statt der kleinen Bogen ganze Kreise, so würden die Seiten des △ Radien derselben.

§. 398. Aus zwei gegebenen Linien ab und cd Fig. 89. einen gleichschenklichten Triangel zu beschreiben.

Aufl. Nimm eine der gegebenen Linien z. B. ab zur Grundlinie; mit der Länge cd beschreibe aus a und b kleine Bogen, und von ihrem Durchschnitt in c ziehe Linien nach a und b, so sind die Schenkel ca und cb einander gleich.

§. 399. Aus drei gegebenen Seiten ab, cd, fg Fig. 90. ein Dreieck zu bilden.

Aufl. Nimm eine der gegebenen Linien z. B. ab zur Grundlinie; mit cd beschreib von a aus einen Bogen;

gen; mit fg von b aus ebenfalls, und vom Durchschnitt h ziehe Linien nach a und b.

§. 400. Einen rechtwinklichten Triangel Fig. 91. zu beschreiben.

Aufl. Auf dem Ende einer Linie ab errichte ein Perpendikel ac, und ziehe cb zusammen.

Es bedarf wohl keiner Erinnerung, daß die Größe der ab und ac auch gegeben seyn könne. Wäre aber ab und bc (die Hypotenuse) gegeben, so würde man mit bc von b aus einen Bogen in c beschreiben, wodurch die Größe des in a errichteten Perpendikels bestimmt wird.

§. 401. Zu einem gegebenen Dreieck ein gleich großes zu zeichnen.

Aufl. Verfahre wie §. 399. gewiesen, denn alle drei Seiten sind bekannt.

§. 402. Ein Dreieck Fig. 92. in mehrere gleich große Dreiecke zu theilen.

Aufl. Theile eine Seite des Dreiecks in die verlangten gleichen Theile, z. B. in drei, und ziehe von den Theilpuncten d und e gerade Linien nach der gegenüberstehenden Winkelspitze C, so ist $\triangle$ ACd $=$ $\triangle$ dCe $=$ eCB, weil sie gleiche Grundlinien und Höhen haben.

§. 403. Auf einer gegebenen Linie ab Fig. 93. ein Quadrat zu errichten.

Aufl. Errichte das Perpendikel ac $=$ ab, und beschreibe mit derselben Zirkelöffnung aus c und b Bogen, die sich in d durchschneiden werden; ziehe cd und db, so ist abdc ein Quadrat.

§. 404. Aus zwei gegebenen Linien ab und cd Fig. 95. ein Rechteck zu bilden.

Aufl. Nimm ab zur Grundlinie; in a errichte ein Perpendikel $=$ cd, und beschreibe aus c mit der Zirkelöffnung ab, so wie aus b mit ac kleine Bogen, die sich in d schneiden. Ziehe cd und db zusammen. Oder errichte in a und b gleiche Perpendikel $=$ der

2ten

zten gegebenen Linie, und ziehe ihre Endpuncte zusammen, so ist acdb das verlangte Rechteck.

§. 405. Zu einer gegebenen Linie ab Fig. 94. und dem daran liegenden Winkel fae einen Rhombus zu zeichnen.

Aufl. Verlängere den Schenkel af bis c, daß ac = ab wird. Von c und b aus beschreibe mit der Zirkelöffnung ab die Bogen in d, und ziehe cd und db.

§. 406. Aus zwei gegebenen Linien ab und cd Fig. 96. einen Rhomboides zu zeichnen.

Aufl. Setze ab und cd spitzwinklicht zusammen. Mit ab beschreibe von d aus, und mit cd von b aus, Bogen, die sich in f schneiden werden. Ziehe fd und fb.

Es könnte auch ein Winkel dab, oder abf gegeben seyn. Im letztern Fall müßte Seite bf einen stumpfen Winkel mit ab machen. $<$ dab + $<$ abf = 2 rechten.

§. 407. Aus zwei gegebenen Linien ab und cd Fig. 97. ein Trapezium zu beschreiben.

Aufl. Setze die beiden gegebenen Linien parallel gegenüber, und ziehe ihre Endpuncte durch ca und db zusammen.

Wenn die Höhe des Trapeziums oder die gf gegeben ist, so muß man die Parallelen in diesem Abstande ziehen. Vergl. §. 395.

Es kann auch hier ein Winkel aed gegeben seyn; dann wird der Schenkel ca erst willkührlich lang, darauf das Perpendikel gf, und endlich ab und bd gezogen.

§. 408. Aus 4 ungleichen Seiten ab, cd, ef und gh einen Trapezoides zu bilden. Fig. 98.

Aufl. Nimm ab zur Grundlinie, setze cd schräg daran; von d aus beschreibe mit ef, und von b aus mit gh Bogen, die sich in g schneiden. Ziehe gd und gb. — Der $<$ bad kann gegeben seyn.

§. 409.

§. 409. Zu jeder geradlinigen Figur eine gleiche ähnliche zu zeichnen.

Aufl. Zerlege sie durch Diagonalen in Dreiecke, und zeichne eines nach dem andern, wie sie neben einander liegen, auch so wieder hin, so wird die zweite Figur der erstern gleich und ähnlich seyn.

§. 410. Einen Kreis zu beschreiben. Fig. 99.

Aufl. Setze den einen Zirkelfuß in den Mittelpunct c; öffne den Zirkel um die Größe des Radius, und bewege den andern Schenkel, an dem eine Reißfeder angeschraubt ist, um den ersten in c feststehenden, so wird die Reißfeder die krumme Linie abed beschreiben, welche Kreis, zuweilen auch, wiewol mit Unrecht, Zirkel, genannt wird.

§. 411. Eine Schlangenlinie Fig. 100. zu zeichnen.

Aufl. Ziehe die blinde Linie ab, setze den Zirkel in c, und beschreibe den Halbkreis ade; mache ef = ce; setze den Zirkel in f und beschreibe den Halbkreis egh; mache hi = fh, und beschreibe aus i den Halbkreis hkl. Dies Verfahren beliebig fortgesetzt, giebt die krumme Linie adeghkl, welche man Schlangenlinie nennt. — Vergleiche aber §. 388., wo die Zeichnung und Berechnung einer ähnlichen krummen Linie angegeben wird.

§. 412. Eine Schneckenlinie zu zeichnen. Fig. 101.

Aufl. Auf der blinden ab nimm die beiden Puncte c und d. Aus c beschreibe den Halbkreis def; aus d den Halbkreis fgh ɪc. so, daß alle Halbkreise über der ab aus c, und die unter der ab aus d beschrieben werden. Die Gestalt hängt von cd ab. — Eine Schneckenlinie höherer Ordnung ist die §. 381. beschriebene.

§. 413. Eine Linsenlinie Fig. 102. zu beschreiben.

Aufl. Aus a und b beschreibe zwei gleiche Kreise, die sich in e und d schneiden; ziehe die geraden Linien cae,

cae, daf, ebg, dbg. Setze nun den Zirkel in e, öffne ihn bis g und beschreibe den Bogen gc; setze ihn in d und beschreibe den Bogen hf, so legen sich die Bogen gc und hf an die Kreise an, und die krumme Linie cghf ist die Linsenlinie, welche mit der Ellipse, deren Zeichnung und Berechnung von §. 301. an gelehrt ist, Ähnlichkeit hat, ohne ihr an Schönheit gleich zu kommen.

§. 414. Eine Eierlinie zu beschreiben. Fig. 103.

Aufl. Mit ac beschreibe aus c einen Kreis, ziehe den Diameter ab, und den senkrechten Halbmesser cf. Durch f ziehe aus a die afh, und von b die bfg. Nun setze den Zirkel in a, öffne ihn bis b und beschreibe den Bogen bh; setze ihn in b und beschreibe den Bogen ag; setze ihn endlich in f, öffne ihn bis g, und ziehe den Bogen gh. Die so entstandene krumme Linie adbhg ist die Eierlinie (Ovale).

§. 415. Den Mittelpunct eines gegebenen Kreises zu finden.

Aufl. Ziehe willkührlich eine Sehne ab Fig. 104., theile sie in 2 Theile, und ziehe auf ihre Mitte die senkrechte ch, welche durch den Mittelpunct gehen muß (Siehe §. 191. und 192.). Theile ch in zwei gleiche Theile, so ist cm = mh, und m der Mittelpunct.

§. 416. Aus einem gegebenen Bogenstücke abc Fig. 106. den Mittelpunct des zugehörigen Kreises zu finden.

Aufl. Nimm den Punct b auf dem Bogenstücke willkührlich, und beschreibe aus demselben die Bogen r, v, t und z; mit gleicher Zirkelöffnung aus a die Bogen s und u; und aus c die Bogen w und x. Die Durchschnitte ziehe durch gerade Linien zusammen, welche sich im Mittelpunct m durchschneiden werden, aus welchem sich der Kreis vollenden läßt.

Hiedurch geschieht eigentlich weiter nichts, als daß auf der Mitte zweier Sehnen ab und bc Perpendikel errichtet werden, die sich, nach §. 415., im

Centro

Centro schneiden. — Drei, nicht in gerader Linie liegende Puncte a, b, c lassen sich also jedesmal in eine Kreislinie bringen.

§. 417. Um ein Dreieck cbc Fig. 105. einen Kreis zu beschreiben.

Aufl. Errichte auf der Mitte jeder Seite oder auch nur zweier Seiten Perpendikel fh, eh und dh, welche sich im Mittelpunct h schneiden. Aus h ziehe mit der Öffnung ha = hc = hb den Kreis.

Die Seiten des Dreiecks sind hier als Sehnen zu betrachten, und es gilt, was §. 191. und 192. gesagt ist.

§. 418. Einen Winkel cab Fig. 107. in zwei gleiche Theile zu theilen.

Aufl. Ziehe mit willkührlicher Zirkelöffnung ag einen Bogen durch beide Schenkel, ziehe gh durch eine gerade Linie zusammen, theile sie in 2 Theile, und ziehe durch ihre Mitte d die gerade Linie da, so ist $< y = < x$. Denn gh ist als Sehne, und Bogen gh als das Maaß des Winkels cab, folglich gd = dh, und ein halb so großer Bogen mißt nur einen halb so großen Winkel.

§. 419. Innerhalb eines Dreiecks einen Kreis, der alle Seiten berührt, zu beschreiben. Fig. 108.

Aufl. Theile zwei Winkel des △ in zwei gleiche Theile durch die Linien dc und bc, so wird der Durchschnitt das Centrum, und ein Perpendikel cp aus c nach einer Seite der Radius des zu beschreibenden Kreises seyn.

Anmerk. Hier sind die Seiten des ▽ als Tangenten des Kreises zu betrachten, die in ihn den Puncten p, m, n berühren, auf den Radien c aus senkrecht stehen, und es ist bp = bm; ap = an; dn = dm. Zöge man nun die Berührungspuncte p, m, n durch gerade Linien zusammen, so würden diese Chorden vorstellen, die durch dc und bc halbirt werden, und die Aufgabe wäre mit §. 417. einerlei.

§. 420

§. 420. Ein regelmäßiges Vieleck zu beschreiben.

Aufl. In jedem Kreise läßt sich sein Radius 6 mal herum tragen, folglich erhält man ein regelmäßiges Sechseck Fig. 109., wenn man $ab = bd = df = fg = gh = ha =$ Radius macht.

Man erhält ein gleichseitiges Dreieck adg, wenn man den ersten, dritten und fünften Theilpunct zusammenzieht.

Ein Viereck erhält man aus dem Kreise Fig. 110., wenn man zwei senkrechte Diameter ab und fd. und ihre Endpuncte durch gerade Linien zusammen zieht.

Man erhält ein Achteck, wenn man die Bogen $ad = db$ rc. halbirt, und nach den Theilpuncten die Linien ah, hd, dm, mb rc. zieht. Überhaupt zeichnet man jedes Vieleck mit Hülfe eines Kreises, den man mechanisch in so viele Theile theilt, als das Vieleck Seiten haben soll, und die Theilpuncte durch gerade Linien zusammen zieht. So erhält man z. B. das Fünfeck Fig. 111. durch fleißiges Probiren, bis sich eine Zirkelöffnung 5 mal im Kreise herum tragen läßt. Allein man kann auch die Theilpuncte 1, 2 rc. finden, wenn man $< x = 36°$, oder $< y = 72°$ macht, so wie auch durch Rechnung, wovon weiter unten.

§. 421. Wenn die Seite eines Vielecks gegeben ist, das Vieleck selbst zu zeichnen, z. B. auf ab Fig. 112. ein Fünfeck zu beschreiben.

Aufl. Mache $ad = ab$ und beschreibe aus a den Halbkreis dfg, hib, und theile ihn in so viel Theile, als das Vieleck Seiten haben soll, hier in 5. Von a ziehe eine gerade Linie nach dem 2ten Theilpunct von d an gerechnet, hier nach g, so hat man 2 Seiten ab und ag des Vielecks in richtiger Lage. Ein Perpendikel aus der Mitte einer jeden, wie kc und lc, giebt den Mittelpunct c, aus dem der Kreis, worin das Vieleck agmnb völlig beschrieben werden kann, sich ziehen läßt. ($<$ gad = Centriwinkel, $<$ gab = Polygonwinkel. Siehe §. 199.) Die Zeichnung

der

der Sieben-Neunecke u. s. w. ist jedem Anfänger ziemlich schwer, allein Übung macht alles leichter, daher ist sie auch hier recht sehr zu empfehlen.

§. 422. Einen Würfel oder Kubus zu zeichnen. Fig. 113.

Aufl. Beschreibe ein Quadrat abcd, dann die Linie be = ab unter einem spitzen Winkel x; ziehe damit parallel an, ch, do; und mit ab parallel die ne und ho, so daß jede dieser Linien = ab wird. Ziehe an, nh, ne blind, weil sie die dem Auge abgewendeten Seitenlinien des Würfels sind.

Das Parallelogramm chod ist die oberste, abcd die vorderste, beod die Seitenfläche, welche schattirt wird; aneb die Grundfläche; chna die andere Seiten-, und hoen die hinterste Fläche. — Der Winkel x hängt von der Stellung des Auges gegen den Würfel ab.

§. 423. Das Netz eines Würfels zu zeichnen.

Unter dem Netze eines Körpers verstehen wir die gesammte Oberfläche oder Umgebung. Das Netz des Würfels besteht in sechs gleichen Quadraten Fig. 114., die zwischen die Parallelen hh und oo sehr leicht gezeichnet werden können.

Man lege die 6 Quadrate so zusammen, daß abcd Vorderfläche, bdeo und achn Seitenflächen, nhoe Hinterfläche, und cdho die Decke wird, so bleibt aneb Grundfläche. —

(Gute Pappe ist sehr geschickt, die Netze der geometrischen Körper, welche beim Unterricht unentbehrlich sind, darzustellen. Des bessern Ansehens wegen überzieht man sie mit buntem Papier. Das Formen aus Pappe ist für Kinder eine eben so angenehme, als nützliche Beschäftigung.)

§. 424. Ein Parallelopipedon zu zeichnen. Fig. 115.

Aufl. Zeichne zum Rechteck abcd ein gleich großes hefg dessen Seiten mit denen des erstern parallel sind, und ziehe cg, df, be; aber ah, gh und he blind,

blind, weil sie die hintern Seitenlinien vorstellen. Schattire, wie in der Figur zu sehen ist.

Von der Lage des Körpers gegen das Auge hängt die Länge der be oder < x ab.

§. 425. Das Netz eines Parallelopipedons zu zeichnen. Fig. 116.

Aufl. Auf einer geraden Linie bb errichte ein Parallelogramm bacd, daneben das kleinere ahgc; Rechteck hefg = bacd und Rechteck ebdf = ahgc. Verlängere gh und fe oben und unten, bis gc = fd = eb = ha = der Breite des Rechtecks ahgc, und ziehe cd und ab. — Man erhält auf diese Weise dreierlei Rechtecke, die zusammengefügt den Körper einschließen. Wenn hegf Unterfläche, so sind ahgc und ebdf Seitenflächen; abeh Vorderfläche, gfdc Hinterfläche und bacd Oberfläche oder Decke.

§. 426. Ein Prisma, z. B. von 3 Seiten, zu zeichnen. Fig. 117.

Aufl. Auf jeder Spitze des △ acb errichte die senkrechten Linien ad = cr = be. Ziehe dr, re; die de blind, und schattire die dem Licht abgewendete Seite.

Man könnte auch erst das Rechteck deba, und dann die gleichen Dreiecke acb und dre zeichnen.

§. 427. Das Netz eines Prismas, z. B. von 3 Seiten, zu zeichnen. Fig. 118.

Aufl. Beschreibe ein Rechteck abdc, und theile es durch die Parallelen ge und fh in 3 gleiche Rechtecke, welche die 3 Seiten vorstellen. Die gleichseitigen Dreiecke hke und fgm bilden die Decke und den Boden. Legt man diese 5 Stücke so zusammen, daß kcd, und amb einander berühren, so erhält man ein 3seitiges Prisma.

Wenn das Prisma mehrere Seiten haben soll, so muß ab cd in so viel Rechtecke getheilt werden, als es Seiten giebt, und statt der Dreiecke hke und fgm, müssen 2 Vielecke von so viel Seiten, als das Prisma hat, stehen.

§. 428. Eine Piramyde, z. B. von 3 Seiten, zu zeichnen. Fig. 119.

Aufl. Beschreibe ein Dreieck abc; wähle senkrecht über der Mitte von ab, den Punct d, und ziehe von a, c und b gerade Linien nach d. Schattire die Seite bcd ganz, und acd ein wenig. — Sie heißt abgekürzt, wenn ein Stück dno daran fehlt. — Wenn der Punct p gegeben ist, so findet man die Lage des Puncts n oder o in einer solchen perspectivischen Zeichnung durch cd : ad = dp : dn.

§. 429. Das Netz einer Piramyde, z. B. einer dreiseitigen, zu zeichnen.

Aufl. Aus a beschreibe den Bogen bc Fig. 120. blind, und trage auf denselben die gleichen Sehnen bf, fg, gc. Von den Theilpuncten ziehe gerade Linien nach a, und auf fg errichte den gleichseitigen △ fgo, welcher die Grundfläche wird.

Bei der abgekürzten fehlt das Stück anm; an = ar = at = am. Sollte die Piramyde mehr Seiten, z. B. 6 erhalten, so müßten auf den Bogen bc 6 Sehnen getragen, und aus dem Dreieck fgo ein Sechseck gemacht werden, wovon fg eine Seite wäre. In allen Fällen wird man durch das Zusammenlegen der Triangelflächen an die Grundfläche eine Piramyde bekommen.

§. 430. Einen Kegel zu zeichnen. Fig. 121.

Aufl. Beschreibe einen Triangel abc, worin ba = bc; ac blind. Das Perpendikel bm ist seine Höhe, ac der Diameter der Grundfläche, die bei dem niedergelegten Kegel elliptisch erscheint. Mit beliebiger Zirkelöffnung af beschreibe aus f den Bogen aec, und aus dem Punct d auf der verlängerten Axe mit gleicher Öffnung den Bogen abc. Schattire ihn, wie die Figur zeigt.

Am abgekürzten Kegel fehlt das Stück bno.

§. 431. Das Netz eines Kegels zu zeichnen. Fig. 122.

Aufl. Mit dem Radius ba beschreibe aus b den Bogen ad, welcher so lang seyn muß, als die Peripherie der Grundfläche des Kegels (Fig. 123). Den Kreissector bad rolle man so zusammen, daß ab an

bd

bd streift, so hat man den Mantel, zu welchem die Grundfläche c Fig. 123. paßt.

Beim abgekürzten Kegel fehlt an dem Mantel das Stück bno.

§. 432. Einen Cylinder zu zeichnen Fig. 124

Aufl. Im Parallelogramm abdc ziehe ab und cd blmd. Nimm eine schickliche Zirkelöffnung, auf der Axe fm den Punct f und beschreibe den Bogen ab blnd; aus g den gleichen Bogen ab; thue dasselbe aus den Puncten h und m, und schattire, wie die Figur zeigt.

§. 433. Das Netz eines Cylinders zu zeichnen. Fig. 125.

Aufl. Zeichne ein Rechteck, in welchem ab = dem Umfange, und ac = der Höhe des Cylinders ist. Rolle nun abcd so zusammen, daß ac an bd streift; zeichne noch 2 Kreise n, n, deren Umfang = ab ist, die zu Boden und Decke dienen, und setze alles gehörig zusammen, so ist der Cylinder fertig.

§. 434. Eine Kugel oder Sphäre zu zeichnen. Fig. 126.

Aufl. Beschreibe mit dem Halbmesser der Kugel einen Kreis, und schattire ihn auf der dem Licht abgewendeten Seite.

§. 435. Das Netz einer Kugel zu zeichnen.

Aufl. Suche für den Diameter der Kugel den Umfang eines größten Kreises §. 226. Er ist Dp, wobei D = Diameter, p = 3,14.....; fasse die gefundene Länge mit dem Zirkel, und trag sie auf eine gerade Linie Fig. 127., wo AB den Umfang vorstellt. Theile nun AB in 12 gleiche Theile, und trage 11 solcher Theile noch von B nach Z, und von A nach x hin. Mit dem Radius AB beschreibe aus B durch A den Bogen MAN; aus F (dem 1sten Theilpunct neben B) den Bogen OPQ u. s. w. Ferner aus A ziehe den Bogen DBC; aus J den Bogen dmc; aus k den Bogen fgh 2c.

Auf diese Weise erhält man 12 gleiche Kugelstreifen, deren Spitzen in den beiden Polen der Kugel zusammen kommen, und deren Mitte AB der Äquator ist.

§. 436. Ein Tetraedrum zu zeichnen. Fig. 128.

Aufl. Zeichne einen gleichseitigen Triangel adb, wähle in der Mitte den Punct c, und ziehe aus jedem Winkel gerade Linien nach c. Schattire die dem Licht abgewendeten Seiten. Dieser Körper ist in 4 gleichseitige Dreiecke eingeschlossen.

§. 437. Das Netz eines Tetraeders zu zeichnen. Fig. 129.

Aufl. Theile jede Seite des gleichseitigen △ abc in zwei Theile, und ziehe die Theilpuncte d-g zusammen. Aus der Zusammenlegung der so erhaltenen 4 gleichen Dreiecke entsteht ein Tetraeder.

§. 438. Ein Octaedrum zu zeichnen. Fig. 130.

Aufl. Beschreibe ein Quadrat abdc, ziehe die Diagonalen ad und cb, und schattire zwei Seiten.

Dieser Körper ist in 8 gleichseitigen Dreiecken eingeschlossen.

§. 439. Das Netz eines Octaeders zu zeichnen. Fig. 131.

Aufl. Zeichne zwei gleichseitige Dreiecke abc und bgo; theile jede Seite in 2 Theile und ziehe die Theilpuncte durch gerade Linien zusammen, so erhält man 8 gleich große Dreiecke, die, gehörig zusammengelegt, das Octaeder bilden.

§. 440. Ein Dodecaedrum zu zeichnen. Fig. 152.

Aufl. Beschreibe ein gleichseitiges Fünfeck abcde, und und ziehe aus dem Mittelpunct r durch a die Linie raf, so daß af der halben Seite des Fünfecks gleich ist. Mit rf beschreibe einen Kreis, theile ihn in 5 Theile und ziehe die Theilpuncte f, g, h, i, k mit a, b, c, d, e zusammen. Theile die Bogen fg, gh, hi rc. noch einmal in 2 Theile, und ziehe fl, lg, gm, mh u. s. w.. Der Kreis ist Hülfslinie und wird

wie-

wieder ausgelöscht. Schattire die dem Licht abgewendeten Seiten des Dodecaeders, welches in 12 gleichen Fünfecken eingeschlossen ist.

§. 441. Das Netz eines Dodecaeders zu zeichnen. Fig. 133.

Aufl. An jede Seite des regulären Fünfecks abcde zeichne ein gleich großes Fünfeck, welches so mühsam nicht ist, als es scheint, wenn man nur die Seiten ba und de verlängert, die sich in f schneiden, wo die Spitze eines solchen Fünfecks liegt. Diese so gezeichneten 6 Fünfecke sind nur die Hälfte der Oberfläche; folglich ist noch eine solche Zeichnung von 6 Fünfecken nöthig, um aus ihrer Zusammenlegung ein Dodecaeder zu bilden.

§. 442. Ein Icosaedrum zu zeichnen. Fig. 134.

Aufl. Mit der einen Seite des gleichseitigen Dreiecks ors beschreibe aus seinem Mittelpunct a einen Kreis und theile ihn in 6 gleiche Theile. Von den Theilpuncten im Kreise ziehe nach den Spitzen des Dreiecks die Linien go, bo, co; cr, dr, er u. s. w., und schattire die dem Licht abgewendeten Seiten. Dieser Körper ist in 20 gleiche Dreiecke eingeschlossen.

§. 443. Das Netz eines Icosaeders zu zeichnen. Fig. 135.

Aufl. Beschreibe das gleichseitige Dreieck abc, und verlängere ac noch 4 mal, bis in e. Durch b lege eine Parallele bd $\pm$ ae; theile sie in 5 Theile, und ziehe durch die Theilpuncte gerade Linien ai, hg u. s. w., so wie nb, mi ꝛc., wodurch 20 gleich große Dreiecke entstehen, welche dieses Icosaeder einschließen.

§. 444. Einen steigenden Bogen zu zeichnen. Fig. 136.

Aufl. Dieser Bogen aqprsn ist mit dem Zirkel aus 5 Puncten d, c, t, z, k zu ziehen, die man also findet:

Zeichne ein Quadrat tvga und theile es durch kn und uw in 4 andere. ai = gh ist $\frac{1}{12}$ von ak; kb kb = hc = $\frac{1}{2}$ kt. Hierdurch ist der Punct c gefunden, woraus das Bogenstück iq gezogen wird.

Mache cl = fh und die senkrechte ld = cf, wodurch der Punct d gefunden ist, aus dem sich das Bogenstück qp ziehen läßt. Mache no = cf, ziehe oz parallel mit nk, und oz = gx, so wird z gefunden seyn; ziehe fr durch z, und aus l das Bogenstück pr, so wie aus z den Bogen rs; endlich aus k den Bogen sn.

In der Baukunst wird der steigende Bogen bei Gewölben, auf welchen steinerne Treppen ruhen, angewendet, und in r der Ruhepunct angelegt. Das Quadrat ist um $\frac{1}{6}$ höher, als der steigende Bogen. Wenn daher die Höhe des Bogens gegeben ist, so findet man die Höhe des Quadrats, indem man $\frac{1}{5}$ der Bogenhöhe zu derselben addirt.

Man erhält diesen Bogen beinahe, wenn man ak, nv, vp und pk jede in 8 Theile theilt, und die gleichnamigen Puncte durch gerade Linien zusammen zieht, wodurch aber die Figur etwas eckig wird. Die Theile werden von a nach k; von k nach p; von p nach v, und von v nach n hin gezählt.

§. 445. Einen steigenden Bogen anderer Art zu zeichnen. Fig. 137.

Aufl. In dem Quadrat abcd ziehe die Diagonale ac, und aus dem Punct c den Bogen bg.

Nimm ch = $\frac{1}{4}$ cb, und hf parallel mit dc, so giebt der Durchschnitt m den Mittelpunct für den Bogen gk. Nimm kn = ch = $\frac{1}{4}$ bc und ziehe aus n den Bogen kp, so ist bgkp der steigende Bogen, welcher etwas steiler, als der vorige, aber auch noch mehr geeignet ist, große Lasten besonders in k zu tragen. Vergl. §. 391.

Wie andere krumme Linien, als parabolische, elliptische, hyperbolische, so wie die Linien höherer Ordnungen und transcendenten zu zeichnen sind, ist an seinem Orte gewiesen. In der Baukunst werden Keller- und Thorwegsgewölbe, die viel Raum enthalten sollen, nach elliptischen Bogen; sollen große Lasten darauf ruhen, nach parabolischen oder hyperbolischen Bogen, wie in der go-

thi-

thischen Bauart, geformt. Der sogenannte gothische Bogen, dessen Zeichnung sehr leicht ist, wird in der Baukunst zu Fensterbogen, Gewölbebogen 2c. häufig angetroffen, und bei der Flächenmessung vorkommen. —

Hierüber ist nachzusehen:

Zeichnung der Parabel §. 296, 297 und 299,
— — der Ellipse §. 308, 329 und 343,
— — der Hyperbel §. 351, 360,
— — der Cissoide §. 378.
— — der Muschellinie §. 379 und 380,
— — der Spirallinie §. 381, 382 und 383,
— — der Radlinie §. 384 bis 386,
— — der logarith. Linie §. 387.
— — der Glocken- oder Schlangenlinie §. 388.
— — der Blattlinie §. 389.
— — der Quadratrix §. 390.

II. Linienmessung.

§. 446. Die Länge einer Linie wird nach Ruthen und deren Unterabtheilungen, oder im Großen nach Meilen gemessen. Die Preußische Ruthe hat 12 Fuß, wovon jeder 139,13 pariser Linien lang ist; 2000 Ruthen sind eine Preußische Meile. Mit Ellen (zu 2 Fuß $1\frac{1}{2}$ Zoll) mißt man nur im Handel; eine Klafter ist eine Linie von 6 Fuß, und heißt beim Seewesen Faden. Ein Lachter beim Bergbau enthält 80 Zoll, wird in Achtel zu 10 Lachterzolle, zu 10 Primen, jede zu 10 Sekunden getheilt. Alle diese Maaße der Längen sind leider in verschiedenen Ländern auch verschieden, und die Angaben der Schriftsteller oft so abweichend, daß ich eine Tabelle zur Vergleichung nicht mitzutheilen wage. Wer sie bedarf, wird in Vega's trigonometrischen Tabellen, und in andern Rechenbüchern sich einstweilen Raths erholen müssen, bis die Zeit kommt, da alle Deutsche nach einerlei Maaß, Gewicht und Münze messen, wägen und handeln.

§. 447.

§. 447. Wie kleine Linien von einigen Zollen, Füßen, Ellen u. s. w. gemessen werden, weiß jedermann; zur Messung größerer Linien, von welcher wir nun reden wollen, gehören einige Geräthschaften, die man Meßgeräthschaften nennt. Zu den gebräuchlichsten gehören folgende:

1. die Meßkette ist gemeiniglich 2 auch wol 5 Ruthen lang, hat an jedem Ende einen Ring, durch den ein spitzer Pfahl oder Stab gesteckt wird, um straff anziehen zu können, und Gelenke, jedes 1 Fuß lang, von starkem Drath.
2. Die Meßschnur ist eine hanfene Schnur, die wegen ihrer Leichtigkeit an 5 Ruthen lang, und auch an jedem Ende mit einem Ringe und Stabe versehen seyn kann. Die Abtheilung der Fuße und Ruthen an derselben geschieht durch kleine Bänder von verschiedener Farbe. Bei feuchtem Wetter quillt sie und wird kürzer, bei trocknem länger. Daher pflegt man sie mit Öl zu tränken, und vorsichtig vor und nach dem Gebrauch zu prüfen.
3. Die Meßstange giebt unstreitig ein sehr sicheres und brauchbares Maaß, ist aber nicht so bequem, als die Meßschnur, welche oft noch nöthig ist, um mit der Meßstange in gerader Linie zu bleiben.
4. Mit einem 6 Fuß langen in Zoll und Linien eingetheilten Stabe mißt man kleinere Entfernungen von einigen Fußen oder Zollen.
5. Eine hinlängliche Anzahl weißer, glatter, 1 bis 2 Zoll dicker, 4 bis 6 Fuß hoher, unten zugespitzter Stäbe, dienen dazu, in merkwürdigen Puncten senkrecht in der Erde befestigt zu werden, um darnach in beträchtlichen Entfernungen sehen zu können.
6. Einige Fahnen, die halb weiß und halb roth oder schwarz seyn können, und auf ziemlich hohen Stangen an den Endpuncten der Standlinien aufgerichtet werden.
7. Ein Senkblei, ein hölzerner Schlegel, um die Meßstäbe senkrecht in die Erde zu treiben.
8. Ein Compaß, die Himmelsgegenden beim Grundlegen zu bezeichnen.

9. Ein Winkelmesser, geometrisches Scheibeninstrument von Holz oder Messing, um die Neigung der Linien oder die Winkel zu messen.

§. 448. Das Wesentlichste an einem Winkelmesser ist folgendes:

Auf einer ebenen Fläche von 1 bis 2 Fuß im Geviert Fig. 138. ziehe aus dem Mittelpunct C einen 3fachen Kreis und theile ihn in 4 Quadranten, jeden wieder in 90°, den Grad in halbe, und wenn es die Deutlichkeit erlaubt, in Viertelgrade, oder von 5 zu 5 Minuten. An den Rand schreibe von 10 zu 10 Grad die Zahlen dabei. Im Mittelpunct C wird ein Stift bevestiget, um den sich ein hölzernes oder messingnes Lineal LN bewegen läßt. Die Mitte des Stifts liegt mit der Schärfe des Lineals in einerlei Linie. An beiden Enden des Lineals in L und N sind aufrechtstehende Messingbleche angebracht; in dem an L ist ein feines Loch, in dem an N ein Fenster, über welches zwei Haare kreuzweis so ausgespannt sind, daß der Kreuzpunct der Haare und das kleine Loch im Blech an L über der Schärfe des Lineals senkrecht stehen. Diese Bleche heißen Diopter (Absehen) und daher nennt man das Lineal LN Diopterlineal. Wenn man in unebenen Gegenden Winkel messen will, so müssen die Diopter 6 bis 8 Zoll hoch und auf beiden Seiten mit Spalten oder Ritzen versehen seyn, in denen ein Pferdehaar ausgespannt ist.

§. 449. Soll das Instrument die Winkel richtig angeben, so muß nicht nur die ganze Kreistheilung äußerst zart und genau gemacht seyn, sondern auch für die wagerechte Stellung gesorgt werden, welche vermittelst einer Sezwage, oder einer Libelle (Wasserwage), und eines passenden Stativs bewirkt wird. Dies Stativ ist Fig. 139. abgezeichnet.

Unter dem Punct C Fig. 138. befindet sich eine starke Messingscheibe von 3 bis 4 Zoll im Durchmesser, in deren Mitte eine cylindrische Röhre A Fig. 139. bevestigt ist, in welcher sich der Zapfen Z des dreibeinigen Stativs genau hineinpassen läßt. Die Schraube B dient zum

Veststellen des Zapfens, und die Schrauben s s zum Veststellen der beweglichen Füße, die nach Beschaffenheit des Bodens und des wagerechten Standes des Instruments enger und weiter aus einander gestellt werden können. D ist von Holz und rund, aber da, wo die Füße angeschraubt werden, dreieckig. (Stative mit einer sogenannten Nuß sind noch besser.)

§. 450. Beim Winkelmessen stellt man das Stativ zuerst nach dem Augenmaaß, löst alle Schrauben, und legt die viereckte Platte Fig. 138, woran unter C die Messingplatte mit 4 Schrauben (deren Plätze neben C Fig. 139 angedeutet sind), bevestigt ist, mit der cylindrischen Röhre auf den Zapfen Z, und zieht die Schraube B an; dann richtet man das Instrument mit der Setzwage gehörig ab, wobei man die Füße verrückt oder mehr in den Boden drückt, und endlich die Schrauben s s anzieht; so steht das Ganze vest. Löst man die Schraube B ein wenig, so ist der Kreis mit der Röhre A um den Zapfen Z horizontal beweglich, und nach Bedürfniß zu drehen und zu stellen.

§. 451. Die genaue Eintheilung der Grade und ihrer Unterabtheilungen ist bei jedem Winkelmesser ein Haupterforderniß. Daher wird es zweckmäßig seyn, dabei noch ein wenig zu verweilen. Gemeiniglich sehen Nichtkenner die Gradtheilung für sehr leicht an; allein die geübtesten Mechaniker gestehen, daß es ein sehr schwieriges Geschäft sey, einen Kreisbogen richtig in seine Grade zu theilen. Wir wollen eine Theilungsweise mittheilen, die sich unter allen durch Sicherheit und Leichtigkeit in der Ausführung auszeichnet, und sich auf den Satz gründet, daß die Tangente eines Winkels von 45° dem Radius gleich ist.

Man verfertige sich ein Lineal AB Fig. 140. von Holz oder Messing, das etwa 3 Fuß lang und so dick ist, daß es dem Werfen oder Krummwerden nicht leicht unterworfen ist. Auf dasselbe trage vom Punct b an die Tangententheile, wie sie in allen trigonometrischen Tafeln stehen, für den Radius ba = 1000 oder 10000, nach einem richtigen Maaßstabe.

stabe. (Man kann schon bei einem Radius ba von 3 Fuß einzelne Minuten bekommen.)

Soll nun ein Kreis, oder Kreisbogen od in Grade getheilt werden, so bringt man das Lineal AB mit der Gradtheilung, das wir die Tangente nennen wollen, in eine solche Entfernung vom Mittelpunct des Kreises, daß bc = ba, und ab mit bc einen rechten Winkel macht. Um das Centrum c des zu theilenden Kreises ist ein Lineal CD beweglich, und also auf AB verschiebbar. Stellt man nun z. B. CD über 15° auf der Tangente, so schneidet die Schärfe desselben einen Punct m im Kreise ab, der 15° von o entfernt ist; in der Lage 30° C theilt es in n auf dem Kreise auch 30° ab; ruht es in der Lage aC, so ist der Bogen od = 45°. So ist es leicht, alle Grade und ihre Theile auf den Kreis zu tragen, ohne ihn mit Hülfslinien zu verderben.

Ist der Octant od völlig abgetheilt, so dreht man den Kreis so, daß d nach o, und f nach d kommt, und verfährt wie vorher. — Die Tangententheile sind größer, als die Bogentheile; daher wird jeder Theilungsfehler der erstern auf dem Kreise immer kleiner und unmerklicher werden, welches ein wesentlicher Vorzug dieser Theilungsart ist.

§. 452. Wer in seine Messungen Genauigkeit zu bringen bemüht ist, wird seinen Instrumenten gern eine noch größere Vollkommenheit geben wollen, wozu folgende Winke dienen.

Die Diopter sind bei sehr entfernten Gegenständen nicht recht mehr brauchbar, und die Winkel sind mit dem unbewaffneten Auge nur höchstens bis auf 2 Minuten sicher zu bestimmen, welcher Umstand oft beträchtliche Fehler in die Messung bringt. Darum ist es gut, wenn man auf dem Diopterlineale AB einen Tubus TS Fig. 141. anbringt, in dessen Augenglases Brennpunct ein Fadenkreuz, oder ein Kreuzschnitt auf einem Planglase, befindlich ist. Es liegt wenig daran, wenn der Tubus nur 2 Gläser hat, und die Gegenstände verkehrt vorstellt, denn man gewöhnt sich bald daran. Beim Gebrauch vertritt der

der Kreuzschnitt im Tubus die Stelle des Diopters. Um ihn auch auf unebenem Boden benutzen zu können, ist an dem Diopter C ein verschiebbares Messingblech, worauf der Tubus liegt, und vermittelst dessen er höher gestellt werden kann. Vergrößert der Tubus z. B. 10 Mal, so kann man auch auf eine 10malige Verminderung der Fehler rechnen.

§. 453. Soll ein Winkel acb Fig. 138. mit dem Winkelmesser gemessen werden, so verfährt man also:

Nachdem der Kreis horizontal gestellt ist, drehe man ihn so, daß 0° oder die Linie co nach dem Gegenstand b gerichtet ist, und bevestige ihn in dieser Stellung. Darauf drehe das Diopterlineal um C und richte es so, daß das an das kleine Loch L gelegte Auge den Gegenstand a hinter dem Fadenkreuz im Diopter N sieht. Auf dem Bogen ON lassen sich dann die Grade des Winkels acb ablesen; und so wird es leicht seyn, die Winkel, welche alle im Horizont herum liegende Gegenstände mit der Linie cb machen, zu bestimmen, wenn man nur dafür sorgt, daß co immer nach b hin gerichtet bleibt.

§. 454. Eine brauchbare Setzwage muß 1 bis 2 Fuß hoch, und mit einer Bleikugel an einem Haar oder Silberfaden, so wie mit einer feinen Directionslinie versehen seyn. Bequem ist es, wenn ihre Grundfläche so breit ist, daß sie auf einer Ebene von selbst stehen bleibt, und die Bleikugel in einer Höhlung spielt, damit die Luft sie nicht so leicht bewege. — Man bedient sich auch einer genau runden Kugel statt der Setzwage; oder einer runden messingnen Büchse mit einer Glasdecke, deren Mittelpunct angedeutet ist. Die Büchse wird mit reinem Wasser, oder mit Spiritus ganz angefüllt, und durch eine seitwärts angebrachte Öffnung ein Tropfen wieder herausgelassen, wodurch eine Luftblase in die Büchse dringt, die dann immer über der Flüssigkeit schwebt und bei horizontaler Stellung gerade unter dem Mittelpunct der runden Glasscheibe stehen bleibt. Man nennt dies sehr brauchbare Instrument Wasserwage, und benutzt sie bei windiger Witterung mit weit mehr Sicherheit, als die Setzwage, jedoch muß sie nicht unter 4 Zoll Durchmesser haben, und sehr genau gearbeitet seyn.

§. 455. Zur Messung der Vertikal- oder Höhenwinkel bedient man sich der Quadranten, Sextanten u. s. w. Wir wollen nur die Einrichtung eines Instruments, das auch zum Tiefenmessen brauchbar ist, und des Sextanten beschreiben, und anmerken, daß alle dergleichen Instrumente ähnliche Einrichtungen haben.

Der Halbkreis Fig. 142. hat folgende Einrichtung:

Auf der Mitte des ebenen Brettes ag erhebt sich senkrecht ein zweites khc. Um den Punct c ist das eiserne Lineal ACB, an welchem ein messingner Halbkreis 90°, 0, 90°, beweglich. Wenn AB wagerecht steht, so muß der am Bogenstück JN angebrachte Zeiger JO, der in einer zarten Linie besteht, auf Null Grad zeigen, woraus folgt, daß der Halbkreis von Jo an nach beiden Seiten in 90° getheilt wird. Die senkrechte Stellung giebt ein Loth, das auf der andern Seite des Brettes khc angebracht seyn kann, und dessen Bleikugel in der Höhlung b zu sehen ist. Die Diopter D, d, können so eingerichtet werden, daß man von beiden Seiten abvisiren, und oben darauf einen Tubus anbringen kann. Das am Brett bevestigte Bogenstück JN kann als Nonius oder Vernier dienen, und muß bei jeder Stellung des Kreises genau anschließen.

§. 456. Der Nonius oder Vernier JN dient dazu, sehr kleine Gradtheile zu bestimmen, und muß zu dem Ende folgendermaßen eingerichtet werden:

Wenn der Halbkreis z. B. in Viertelgrade getheilt ist, so nehme man einen Bogen von 14 Viertelgraden auf dem Nonius, und theile diesen Bogen in 15 gleiche Theile, so wird, wenn sich der Halbkreis am Nonius wegschiebt, jeder Viertelgrad des Halbkreises durch die Theilung auf dem Nonius in 15 kleinere Theile getheilt, welche Minuten sind. Man sieht nämlich zu, welcher von den Theilstrichen, von J an gezählt, mit einem des Nonius zusammen trifft, und erfährt, wie viel Minuten über einen gewissen Viertelgrad der Winkel mißt. Es betrage z. B. ein Winkel $30\frac{3}{4}$ Grad und so viel, daß der 9te Theilstrich

strich des Nonius mit einem Theilstrich des Halbkreises zusammenträfe, noch darüber, so würde das Maaß desselben seyn: 30° 45′ + 9′ = 30° 54′. – Ist die Theilung gut, so trifft nur 1 Theilstrich mit dem des Nonius zusammen, es sey denn, daß der Winkel genau n Grade und 15′, 30′ oder 45′ ausmache, in welchem Falle der erste und letzte zusammentreffen.

Zum wagerechten Stellen des Halbkreises sind im Fußbrette ag an 3 Orten Schrauben angebracht, die durchgehen, und das auf eine Ebene (Tisch u. dgl.) gesetzte Instrument nach Verlangen höher oder tiefer heben.

§. 457. Der Sextant Fig. 143, welcher einen Bogen von 60° enthält, ist zum Höhenwinkelmessen gleichfalls sehr gebräuchlich, und auf mancherlei Weise eingerichtet. Eine sehr einfache Einrichtung ist folgende:

Aus dem Puncte C in dem gleichseitigen Dreieck ABC beschreibe den Bogen AB und theile ihn von A an in 60° und Unterabtheilungen. Die Seite AC theile in zwei Theile, und bevestige auf der Mitte d ein Messingblech als Diopter D, senkrecht, das in der Mitte ein Fensterchen mit einem Fadenkreuz und senkrecht darunter ein feines Loch hat. In B ist ein ähnliches Diopter, aber ohne Fenster, mit 2 kleinen Löchern in r und r (die Diopter sind seitwärts abgebildet in D und b), wodurch man sieht.

Wenn man den Sextanten um den Punct m vermittelst eines starken Metallstiftes, auf den eine Schraube s wirkt (und der an einem Stativ agC Fig. 142, in C bevestigt ist), beweglich macht, und ihn so dreht, daß Ba horizontal wird, so fällt das Loth Cp in Null-Grad auf CA. Folglich dienen die Diopter in B und d zum Visiren, und der Lothfaden Cp zum Anzeigen der Grade.

Man scheue sich nicht, den Sextanten von gutem, feinem, recht trocknem Holze machen zu lassen, und gebe ihm eine Größe von 2 Fuß im Radius, wodurch es schon möglich wird, die Winkel bis auf Minuten zu bestimmen, welches für Liebhaber bei irdischem Gebrauch genau genug ist.

Auf

Auf der Rückseite des Sextanten läßt sich ein Fernrohr in der Lage Bd anbringen, wodurch vielmehr Genauigkeit erhalten wird, als durch bloße Diopter. Zum Lothfaden muß man ein Menschenhaar, oder recht feinen Silberfaden nehmen.

§. 458. Das Stativ zum Sextanten kann eben so, wie das des Halbkreises seyn. Die Schrauben im Fußbrett können zugleich als Mikrometer dienen, d. h. Maaßstäbe für sehr kleine Bogentheile, als Sekunden, vorstellen, und deshalb folgendermaßen beschaffen seyn:

Am vorstehenden Ende der Schraube ist ein Zeiger, welcher beim Umdrehen derselben mit seiner Spitze einen Kreis beschreibt, den man in beliebige z. B. 100 Theile theilt. Hat man nun den Sextanten gehörig gestellt, so drehe man den Zeiger einmal herum, und sehe zu, um wie viel Minuten der Lothfaden seine Lage auf dem Bogen oder Limbus verändert hat. Gesetzt, ein ganzer Umgang des Zeigers verändere den Lothfaden um 6 Minuten, und man habe einen Winkel gemessen, wobei der Lothfaden 20° 15′ und noch etwas darüber gezeigt; um zu finden, wie viel über 15′ der Winkel betrage, drehe man den Zeiger rückwärts, bis der Lothfaden genau auf 15′ einspielt, und merke, vor wie viele Theile der Zeiger vorbei ging. Er sey vor 25 Theilen vorbei gerückt, so giebt die Proportion

$$100 : 6 = 25 : x \text{, und } \frac{6 \cdot 25}{100} = 1' \, 30'' = x.$$

Der gemessene Winkel betrug also 20° 15′ + 1′ 30″, d. i. 20° 16′ 30″.

§. 459. Wenn es bloß darauf ankommt, die Neigung zweier Linien zu bestimmen, ohne sie in Graden angeben zu wollen, so ist das Fig. 143. b angegebene Instrument wegen seiner großen Bequemlichkeit sehr zu empfehlen.

Auf dem geraden Stabe AB ist ein anderer CD rechtwinklicht verschiebbar, so daß CD näher an A und B gebracht, und überall festgestellt werden kann,

kann. In A ist ein Diopter, durch welches man sieht, in B ein anderes mit einem Fadenkreuz; auf dem Stabe CD ist gleichfalls ein Diopter verschiebbar. Um nun die Neigung zweier Linien AO und AG angeben zu können, halte man das Instrument so, daß der Gegenstand O durch die Diopter A und B, und der Gegenstand G durch die Diopter A und n gesehen wird, wobei man n auf CD nach Bedürfniß verschiebt. AB und CD sind mit einer feinen Scale versehen, die in Form eines tausendtheiligen Maßstabes eingerichtet seyn, und daher sehr kleine Theile angeben kann. Jetzt liest man ab, wie lang Am und mn, die beiden Catheten im rechtwinklichten Dreieck Amn sind, und trägt sie nach beliebigem Maaße auf das Papier, so giebt die Hypotenuse An den zweiten Schenkel des Winkels OAG.

Wird der Winkel OAG in Graden verlangt, so findet man ihn durch die Proportion

Am : Sin. tot. = mn : Tang. OAG (Siehe Tafel XII. im Anhang.)

Dividirt man mit mn in Am, so erhält man die natürliche Cotangente, welche in den trigonometrischen Tafeln aufgesucht, den Winkel immer bis auf Sekunden giebt. —

In m und o lassen sich Nonien anbringen, mit welchen man die kleinsten Theile sehr bequem ablesen kann.

Wir wollen dieses einfache und überall auch zum Höhenmessen brauchbare Instrument Neigungsmesser nennen, und uns seiner zur Auflösung verschiedener Aufgaben bedienen. Es kann mehrere Fuß lang, 1 bis $1\frac{1}{2}$ Zoll dick, und zum Auseinandernehmen eingerichtet seyn. Die beiden Diopter in A und n können auf kleinen runden drehbaren Säulen ruhen, welches bei großen Winkeln sehr nützlich ist, wie man bald bemerken wird. Beim Gebrauch legt man es auf eine Wand, einen Stamm, oder Meßstab 2c. oder schraubt es an einem Tische vest und hält es mit der Hand in A an's Auge. Weiß man den Abstand des Gegenstandes O vom Auge, so findet man, wenn G senkrecht über O liegt, wie es bei Höhen der Fall ist, die Höhe OG durch die leichte Regel de tri

$$Am : mn = AO : OG.$$

Und wenn die Höhe OG bekannt wäre, so findet man den Abstand AO durch

$$mn : Am = OG : AO,$$

denn die Dreiecke Amn und AOG sind unter der angenommenen Bedingung stets einander ähnlich, und deswegen die ähnlichen Seiten einander proportional.

Sehr brauchbar wird dies Instrument bei der Aufnahme des Details einer Gegend dadurch, daß man einen Stab von bekannter Höhe, z. B. 10 Fuß, in O senkrecht bevestigt, von A nach ihm visirt, und durch mn : Am = OG : AO seinen Abstand von A findet, darauf den Stab nach andern Puncten tragen läßt, und ihre Entfernung auf gleiche Weise bestimmt. Die Winkel, welche die horizontalen Linien von zwei Gegenständen an A machen, bestimmt man durch die horizontale Haltung des Instruments.

Anmerk. Herr Dr. Rommershausen hat einen Diastimeter (Entfernungsmesser) in Form eines Taschenfernrohrs erfunden, der ähnliche Einrichtung zu haben scheint, und sehr empfehlenswerth ist. Schade, daß dies Instrument nicht verbreiteter ist. Weil es hier auf Bestimmung sehr kleiner Theile ankömmt, so wird die Anfertigung desselben viel Genauigkeit erfordern.

§. 460. Eine gerade Linie zu messen.

Aufl. Nimm eine Meßkette, Meßschnur oder Meßstange und schlage sie auf der Linie so oft um, als es angeht; multiplicire die Umschläge mit der Länge der Meßkette, so erscheint im Product die Größe der Linie.

Beim Umschlagen der Meßkette müssen zwei Personen seyn, sie straff anziehen, die Stäbe senkrecht halten, und beständig nach den beiden Endpuncten der Linie sehen.

§. 461. Eine gerade Linie über einen Berg zu messen. Fig. 144.

Aufl. Es kommen drei Fälle vor. Entweder man mißt die Krümmungen oder Unebenheiten mit, und dann ist die Messung, wie auf der Ebene (man bekommt eine Linie auf dem Netz des Berges); oder man verlangt die Größe einer geraden Linie mn = ah; oder man sucht mx. Um ah zu messen, stecke man die Stäbe der Meßkette in a und b ein, und visire nach der Fahne in h, wobei man die am Stabe b verschiebbare Kette auf h richtet. Eben so verfahre bei jedem folgenden Umschlage. Aus der Summe der Umschläge ab, bd, df, fh ergiebt sich die Hypotenuse ah.

Will man aber den horizontalen Abstand des Puncts h von a, oder die mx finden, so sehe man darauf, daß bei jedem Umschlage die Meßkette in horizontaler Richtung ac, be, dg, fi sey, welches durch eine auf die Meßkette gehaltene Setzwage leicht erforscht werden kann. Die Summe von ac, be, dg, fi = mx.

Die Linie mx ist beim Grundlegen unentbehrlich. Aus ah und mx ergiebt sich die Höhe des Berges; denn $ah^2 - mx^2 = hx^2$, und $\sqrt{(ah^2 - mx^2)} = hx =$ der Höhe des Berges.

§. 462. Den Abstand zweier Puncte a und b, zu denen man nicht in gerader Linie kommen kann, zu messen. Fig. 145.

Miß von a bis d. In d setze einen rechten Winkel adc auf ad, bis zur Brücke; miß cf; mache < dcf und < cfg rechtwinklicht; miß gb, und addire die Linien ad + cf + gb, so erhält man ab. — In d, c, f und g werden Meßstäbe eingeschlagen.

§. 463. Einen rechten Winkel abzustecken. Fig. 146.

Nimm auf jeder Seite des Puncts a, wenn auf db in a das Perpendikel stehen soll, ba = ad. Befestige in b und d gleichlange Schnuren bc und dc; gehe mit den Endpuncten derselben so weit zurück, bis

bis die Schnuren gleich straff sind und in c zusammen fallen, so liegt c senkrecht über a, und $< cad = < cab =$ rechten Winkel, denn ad = ab, bc = dc, und ca gemeinschaftlich, also die Winkel an a gleiche Nebenwinkel.

§. 464. Zu einem gegebenen Winkel einen gleichgroßen abzustecken. Fig. 147.

Auf jedem Schenkel des gegebenen Winkels miß gleiche Stücke ad und ag, so wie auch die Sehne dg. — Nimm zwei Schnuren = ad und ag, und bevestige beide in a, so läßt sich das Ende g so halten, daß eine dritte Schnur, in d bevestigt, mit dem andern Endpuncte in g zusammen trifft. Der Winkel an a muß, von gleichen Schenkeln und gleicher Chorde eingeschlossen, nothwendig wieder so werden, als er war. — In a, g und d stehen Stäbe.

§. 465. Einen Winkel dag Fig. 147. in verlangte gleiche Theile zu theilen, z. B. in 2.

Mache die Schenkel ad und ag einander gleich, theile die Chorde dg in zwei Theile (durch Rechnung) und ziehe aus a durch den Theilpunct eine gerade Linie.

§. 466. Aus drei gegebenen Seiten bc, cd und db Fig. 146. einen Triangel zu bilden.

Bevestige in b an einem Stabe zwei Schnuren bc und bd, die den gegebenen Seiten gleich sind, und mache das Ende von bd in d eben so vest. An d bevestige nun auch die Schnur cd mit dem einen Ende in d, und gehe mit den Endpuncten so weit zurück, bis beide straff angezogene Schnuren in c zusammen kommen.

Reichen die Schnuren nicht, wie es mehrentheils der Fall ist, so mache den Winkel b = gleich dem gegebenen, und verlängere die Seiten bc und bd, bis auch sie den gegebenen gleich werden, so liegen die Endpuncte d und c in der richtigen Entfernung. Da sich jede geradlinigte Figur in Dreiecke zerlegen

 läßt,

läßt, so wird man sie auch auf dem Felde mit Hülfe der letzten 7 §§. darstellen können.

§. 467. Die Entfernung ab Fig. 148. zu finden, wenn ein Hinderniß dazwischen, aber von einem Puncte c nach a und b zu messen ist.

Aufl. I. Wähle den Standpunct c, miß cb und ca; nimm von jeder Linie einen gewissen Theil, als $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$ ꝛc. und trage ihn von c nach m und n, endlich miß mn. Dann sprich:

$$cm : mn = ca : ab,$$

denn die Dreiecke cmn und cab sind einander ähnlich. Z. B. Es sey ca $= 48$; cb $= 30$ Ruthen, und

cm $= \frac{1}{3}$ ca, also $= 16$; cn $= \frac{30}{3} = 10$; mn aber 18 Ruthen gefunden, so ist

$$16 : 18 = 48 : ab, \text{ und } ab = \frac{18 \cdot 48}{16} = 54 \text{ Ruthen.}$$

Diese Auflösungsweise wollen wir die arithmetische nennen.

Aufl. II. Miß die beiden Schenkel ca und cb, und mit einem Winkelmesser den Winkel z, so sind im $\triangle$ abc drei Stücke, zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel bekannt, wonach das Dreieck verjüngt auf's Papier zu tragen, und ab mit dem Zirkel und Maaßstabe zu messen ist.

Nämlich: trage mit Hülfe des Transporteurs den Winkel z auf das Papier, und verlängere seine Schenkel, bis sie nach dem verjüngten Maßstabe die gemessene Länge haben; ziehe dann die Endpuncte zusammen, so ist ab die gesuchte Linie, und mit dem Zirkel zu messen.

Die Neigung der beiden Linien ca und cb kann auch mit dem §. 459. beschriebenen Neigungsmesser leicht gefunden und auf's Papier getragen, übrigens, wie vorher verfahren werden.

Weil diese Auflösung mit Zirkel und Lineal zu bewerkstelligen ist, so heiße sie die geometrische.

Aufl.

Aufl. III. Durch eine trigonometrische Rechnung, wenn $< z$ in Graden bekannt ist. Es sind im $\triangle$ abc zwei Seiten und ihr eingeschlossener Winkel bekannt, daher ist die dritte Seite nach §. 244. 2, wo ein Exempel ausgerechnet ist, das hier paßt, folgendermaßen zu finden.

$(ac + bc) : (ac - bc) = \text{Tang.}\ \frac{1}{2}(a+b) : \text{Tang.}\ \frac{1}{2}(b-a)$, oder Differenzwinkels; und addirt man den gefundenen Winkel zur halben Summe der unbekannten Winkel, so erhält man $< b$, welcher der größten Seite gegenüber steht. Darauf

$$\text{Sin. } b : ac = \text{Sin. } z : ab.$$

Man bemerkt leicht, daß es bei allen solchen Aufgaben darauf ankommt, in einem Dreieck drei bekannte Stücke zu erhalten, woraus die übrigen auf mancherlei Art gefunden werden.

§. 468. Die Entfernung zweier Puncte bd Fig. 149. zu finden, zu deren einem b man nur kommen kann.

Aufl. I. Errichte in b auf bd einen rechten Winkel und verlängere den Schenkel bc beliebig bis in c. Miß cb, und nimm den Punct e willkührlich, etwa so, daß $ce = \frac{1}{3}\ cb$ sey. Darauf errichte in e das Perpendikel ef, so daß f mit c und d in gerader Linie steht; miß ef und sprich:

$$ce : ef = cb : bd.$$

Sollte sich in b kein rechter Winkel errichten lassen, so nehme man den Winkel x willkührlich, mache aber $< y = < x$, damit fe parallel bd wird, und die Dreiecke cef und cbd ähnlich bleiben.

Aufl. II. Erforsche, welche Stücke im $\triangle$ bcd bekannt sind, und zeichne einen ähnlichen $\triangle$ auf Papier. Nun sind aber außer bc auch noch die beiden Winkel x und z zu messen. Wenn man daher die bc verjüngt auf's Papier trägt, und die Winkel x und z daran setzt, so durchschneiden sich die Schenkel in d. Man messe mit dem Zirkel die bd, halte die Öffnung an den verjüngten Maaßstab, so giebt dieser dieser die Entfernung an.

Mit dem Neigungsmeſſer ſind gleichfalls die Winkel x und z zu meſſen.

Aufl. III. Außer der arithmetiſchen und geometriſchen Auflöſung führen wir noch die trigonometriſche an.

Zieht man nämlich $< x + < z$ von $180°$ ab, ſo bleibt $< d$. Und Sin. $d : bc =$ Sin. $z : bd$ giebt die Entfernung.

Wenn $< x$ ein rechter iſt: $r : bc =$ Tang. $z : bd$.

Z. B. Es ſey

$bc = 480$ Fuß.	log. Tang. $48° =$	$10{,}0455626$
$x = 90°$	— $480 =$	$2{,}6812412$
$z = 48°$	log. bd	$= \cancel{1}2{,}7268038 = 533{,}1$

folglich iſt die geſuchte Entfernung 533 Fuß 1 Zoll.

§. 469. Dieſe drei Auflöſungsweiſen halte ich von den vielen möglichen für die ſicherſten, einfachſten und überall anwendbarſten. Sind die Winkel gut gemeſſen, ſo iſt die trigonometriſche Auflöſung die genaueſte; die geometriſche iſt zwar ſehr leicht, und bei den meiſten Feldmeſſern die gewöhnlichſte, erfordert aber einen guten richtigen Maaßſtab und Transporteur, ſo wie ſehr genaue Zeichnung. Wenn mehrere Perſonen einerlei geometriſche Zeichnung machen, ſo ſtimmen ſehr ſelten die Reſultate vollkommeſn überein, woraus folgt, daß ein guter Geometer ohne Trigonometrie nicht beſtehen kann. Die arithmetiſche Auflöſung iſt ſo genau, als die trigonometriſche, wenn man ſich beim Viſiren eines Diopters bedient, die Stäbe ſenkrecht ſtellt, und ſich keine Nachläſſigkeiten im Abmeſſen der Linien zu Schulden kommen läßt. Überdies hat ſie den Vorzug, daß ſie mit Stäben und Meßſchnuren auf der Stelle auszuführen iſt. Nur bei ſehr großen Meſſungen, dergleichen die Aufnahme einer ganzen Landſchaft iſt, bleibt die trigonometriſche die einzig brauchbare.

§. 470. Weil das Meſſen und Auftragen der Winkel immer ſeine Schwierigkeiten hat, ſo ſann man auf Mittel, beides zu erſparen, und dennoch eine getreue Zeichnung von den betreffenden Linien zu erhalten. Spanne über ein Reißbrett rits Fig. 150. einen Bogen Papier, ſtelle

stelle es horizontal auf ein Stativ (Fig. 139.), und wähle auf dem Reißbrett den Punct c, lege an denselben das Diopterlineal, richte es nach dem Gegenstand B, und ziehe mit einer feinen Bleifeder an der Schärfe desselben die Linie cb. Bei vestſtehendem Reißbrett richte das Diopterlineal von c nach dem Gegenstand A, und ziehe die Linie ca, so ist der Winkel bca = < BCA. In c pflegt man der Bequemlichkeit wegen eine feine Nadel senkrecht zu bevestigen, um daran das Diopterlineal legen zu können.

Sind die Schenkel cB und cA gemessen, so trägt man ihre Größe verjüngt auf die Linien ca und cb, und zieht ab zusammen. Alsdann hat man auf dem Reißbrett ein Dreieck cab, welches dem großen cAB vollkommen ähnlich ist, und die Entfernung AB verjüngt auf dem Papier in der ab, welche sich mit dem Zirkel messen läßt. Dieses Instrument heißt Meßtisch oder Mensel und ist zur Auflösung vieler Aufgaben, besonders zum Grundlegen der Feldmarken äußerst bequem; sein Gebrauch erfordert aber auch Vorsichtsmaßregeln, zu denen vorzüglich eine völlige Ebenheit des übergespannten Papiers, horizontale Stellung, feine Linien, vester Stand, einerlei Temperatur der Atmosphäre, damit das Papier einerlei Spannung behalte, gehören. Wenn alle Vorsichtsmaßregeln angewendet werden, so kann auf keine andere Weise ein Winkel richtiger auf's Papier gebracht werden, als es mit dem Meßtisch geschieht, welcher daher unstreitig zu den besten und wohlfeilsten Meßgeräthschaften gehört.

§. 471. Eine Entfernung cd Fig. 151. zu finden, zu deren Endpuncten man nicht messen kann.

Aufl. I. Miß eine Standlinie ab; setze den Winkelmesser auf den Punct a, richte 0° nach b hin, und bevestige so den Kreis; dann miß den Winkel bad, und < bac; setze den Winkelmesser nun über b, richte ihn so, daß Null-Grad nach a hinsteht, und miß den Winkel abc und < abd. Trage alles Gemessene in eine Schreibtafel vorläufig ein.

Die

Die Zeichnung fange mit dem Auftragen der Standlinie ab an; setze an a die Winkel bad und bac; und an b setze die Winkel abc und abd, wie sie auf dem Felde gemessen worden sind, so werden sich die nach den Puncten c und d laufenden Schenkel in c und d schneiden. Miß mit dem Zirkel die Linie cd.

Z. B. Es sey ab = 150 Ruthen; $<$ bad = 50°; $<$ bac = 100°; $<$ abc = 45° 30′; $<$ abd = 101°. Trägt man diese Angaben gehörig auf's Papier, so findet man die Linie cd = 232 Ruthen. Auch die Linien ac, ad, bc und bd sind auf der Zeichnung verjüngt dargestellt, und mit dem Zirkel zu messen.

Aufl. II. Mit dem Fig. 143 b. abgebildeten Neigungsmesser kann man nicht nur die Neigung der Linien ad, ac ꝛc. gegen die Standlinie ab finden, sondern sie auch viel genauer, als mit dem Transporteur, auf's Papier tragen. Die Neigung zweier Linien wird dabei durch Am und mn bestimmt. Macht man nun ao (Fig. 151.) = Am; und og = mn, so ist ad in der richtigen Lage auf der Zeichnung. Die Lage der ac wird am besten nach ad zu bestimmen seyn, und auf ähnliche Weise auch bei b verfahren werden müssen. Aus den Durchschnitten der Schenkel ergeben sich die Puncte c und d, wie vorher.

Aufl. III. Trigonometrisch. Im △ abc sind die beiden Winkel an der Standlinie, folglich auch der dritte $<$ acb bekannt, also gilt

$$\text{Sin.} < acb : ab = \text{Sin.} < cab : cb.$$

Im △ adb sind bekannt $<$ dab, $<$ abd, also auch $<$ adb; daher

$$\text{Sin.} < adb : ab = \text{Sin.} < dab : db.$$

Nun sind im △ cdb zwei Seiten cb, db und der von ihnen eingeschlossene Winkel cbd bekannt, woraus sich die Seite cd finden läßt. Nämlich

$$cb + bd : cb - bd = \text{Tang.}\ \tfrac{1}{2}\,(< bcd + cdb) : \text{Tang. des Differenzwinkels.}$$

Der

Der Ausdruck $\frac{1}{2}$ ($<$ bcd + $<$ cdb ist $= \dfrac{180° - < cbd}{2}$ = der halben Summe der beiden unbekannten Winkel. Addirt man den Differenzwinkel zur halben Summe der unbekannten Winkel, so erhält man den Winkel cdb, welcher der größten Seite gegenüber steht; subtrahirt man den Differenzwinkel von jener halben Summe, so bekommt man $<$ bcd. Weil nun im △ cdb alle Winkel und 2 Seiten bekannt sind, so findet man endlich die cd durch

Sin. $<$ bdc : bc = Sin. $<$ cbd : cd.

Es sey, wie vorher, die Standlinie ab = 150 Ruthen; $<$ bad = 50°; $<$ bac = 100°; $<$ abc = 45° 30′; $<$ abd = 101°;

so ist $<$ bac = 100°
+ $<$ abc = 45° 30′
180° — 145° 30
= $<$ acb = 34° 30′

Sin. 34° 30′ : 150 = Sin. 100° : cb
= Sin. 80°
log. Sin. 80° = 9,9933515
— 150 = 2,1760913
12,1694428
— 34° 30′ = 9,7531280
log. cb = 2,4163148
= 260,8 = cb.

Ferner um db zu finden: $<$ abd = 101°
$<$ bad = 50
180° — 151
= $<$ adb = 29°.

Sin. 29° : 150 = Sin. 50° : db.
log. Sin. 50° = 9,8842540
— 150 = 2,1760913
12,0603453
log. Sin. 29° = 9,6855712
log. db = 2,3747741 = 237,02 = db.

Nun ist cb = 260,8	und $<$ abd = 101°	und 180°
bd = 237,02	— $<$ abc = 45° 30′	— 55° 30′
Summe = 497,82	= $<$ cbd = 55° 30′	Sume 124° 30′
Untersch. = 23,78		halbe Summe = 62° 15′

$497,82 : 23,78 = \text{Tang. } 62^\circ\, 15' : \text{Tang.}$ des Differenzw.

$$\begin{aligned}
\log.\ \text{Tang. } 62^\circ\, 15' &= 10,2789107 \\
\log.\ 23,78 &= \underline{\ 1,3762119\ } \\
& \quad\ 11,6551226 \\
\log.\ 497,82 &= \underline{\ 2,6970723\ } \\
\log.\ \text{Tang.} &= \ 8,9580503 = 5^\circ\, 11'\, 10'' = \text{Diff.w.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{halbe Summe } & 62^\circ\ 15' \\
\pm\ & \ \ 5^\circ\ 11' \\
\hline
\angle cdb = & \ 67^\circ\ 26' \\
\angle bcd = & \ 57^\circ\ \ 4'
\end{aligned}$$

Daher $\text{Sin. } 57^\circ\, 4' : bd = \text{Sin. } 55^\circ\, 30' : cd$

$$\begin{aligned}
\log.\ \text{Sin. } 55^\circ\, 30' &= \ 9,9159937 \\
\log.\ bd = 237,02 &= \underline{\ 2,3747741\ } \\
& \quad 12,2907678 \\
\log.\ 57^\circ\, 4' &= \underline{\ 9,9239191\ } \\
\log.\ cd &= \ 2,3668487 = 232,72 = cd.
\end{aligned}$$

Die gesuchte Entfernung ist also = 232 Ruthen, 7 Fuß, 2 Zoll.

Im Verfolg der Rechnung fanden wir

bc = 260 Ruthen 8 Fuß

und db = 237 Ruthen 0 Fuß 2 Zoll.

Die Linie ac giebt die Proportion:

$$\text{Sin. } acb : ab = \text{Sin. } abc : ac.$$

und die Linie ad

$$\text{Sin. } adb : ab = \text{Sin. } abd : ad.$$

Obgleich eine solche Rechnung etwas mühsam ist, so belohnt doch die große Genauigkeit den darauf verwendeten Fleiß reichlich. Der Lehrer wird sie oft bedürfen, um die verschiedenen Resultate der Zeichnungen seiner Schüler zu berichtigen.

Aufl. IV. Mit dem Meßtisch ist das Geschäft viel einfacher. Setze ihn über den Punct a und bezeichne auf dem Meßtisch ghki Fig. 152. den Punct a; richte nun das Diopterlineal auf b, auf d und c, und ziehe die dazu gehörigen Linien ab, am, az.

Setze

Setze nun den Meßtisch in b, drehe ihn so, daß a nach a hinsteht, trage die Standlinie verjüngt auf ab, leg das Diopterlineal an b und richte es nach c und d, und ziehe über den Meßtisch Linien bz und bm. Jetzt ist die Zeichnung zmba auf dem Meßtisch der Figur cdba vollkommen ähnlich, und die Entfernung cd verjüngt in der zm zu messen.

§. 472. Eine Gegend aufzunehmen oder in den Grund zu legen. Fig. 153.

Aufl. I. Unter Grundlegen versteht der Geometer die Zeichnung einer Charte von einer Gegend (Grundriß), wobei alle Entfernungen im richtigen verjüngten Verhältniß stehen. Wenn c, d, e, g, h, k, l hervorstehende Puncte einer Gegend sind, so wähle in einer passenden Lage die Standlinie ba und miß sie. Setze den Winkelmesser in b, richte 0° auf a, bevestige ihn, und miß nun die Winkel cba, dba, eba, gba, hba, kba, lba. Setze nun das Instrument in a, richte 0° auf b, bevestige es, und miß die Winkel cab, dab, eab, gab, hab, kab, lab. Notire das Maaß aller Winkel vorläufig in der Schreibtafel.

Die Zeichnung beginne mit dem Auftragen der Standlinie ab. Setze an b mit dem Transporteur die dahin gehörigen Winkel, und eben so an a, so durchschneiden sich die nach einerlei Punct gehenden Linien in c, d, e, g, h, k, l, und diese Puncte sind in der richtigen Lage, und ihre Abstände mit dem Zirkel zu messen. Die minder wichtigen Puncte, die sich im Umfange der Gegend befinden, werden aus freier Hand gezeichnet, oder durch Ordinaten, Perpendikel auf geraden Linien bestimmt.

Aufl. II. Jeder der gemessenen Puncte macht mit der Standlinie ab ein Dreieck, in welchem die beiden Winkel an derselben (folglich auch der dritte) bekannt sind; und man kann daher leicht die Entfernungen der Puncte c, d ꝛc. von dem Puncte a, oder b, trigonometrisch finden. So ist z. B. die Entfernung gb durch

$$\text{Sin. } g : ba = \text{Sin.} < gab : bg$$

und $\text{Sin. } g : ba = \text{Sin.} < gba : ag$ zu finden.

Wie

Wie die Abstände ge, ed, dc u. s. w. zu finden sind, ist in der vorigen Aufgabe schon vorgekommen.

Aufl. III. Mit dem Meßtisch. Setze ihn in a, wähle auf demselben einen (über a liegenden) schicklichen Punct a, und ziehe eine nach b hin gehende Linie mit der Bleifeder, welche die Standlinie ab verjüngt vorstellt. Richte nun das Diopterlineal von a aus nach den Gegenständen g, f, e, d, c rc. und ziehe jedesmal eine Linie willkührlich lang über den Meßtisch nach dem betreffenden Puncte.

Setze nun den Meßtisch in b, richte den Punct a auf dem Papier nach dem Endpunct a der Standlinie, und das Diopterlineal von b aus nach den genannten Puncten, so schneidet die Schärfe desselben auf den zugehörigen Linien Puncte g, e, d, c, l, k, h ab, welche im richtigen verjüngten Verhältniß liegen. Diese Puncte werden bezeichnet, die Hülfslinien ausgelöscht, und so bekommt man die Hauptpuncte einer Gegend richtig auf's Papier, ohne Winkel zu messen, oder zu rechnen.

Zur Bezeichnung der Himmelsgegenden setze den Compaß an die Standlinie auf dem Meßtisch, drehe ihn so, daß er in seine Abweichung einspielt, und ziehe an der Seite desselben die Mittagslinie.

§. 473. Die Boussole, deren sich manche Feldmesser, die es mit der Genauigkeit nicht strenge nehmen, bei ihren Arbeiten bedienen, ist ein mit bequemen Dioptern und passendem Stative versehener Compaß. Sobald man sie nur zum Auftragen gemessener Linien, zur Bestimmung der Himmelsgegend, und zu oberflächlichen Entwürfen benutzt, leistet sie gute Dienste; allein bei geforderter größerer Genauigkeit ist sie deshalb nicht als Winkelmesser zu empfehlen, weil man höchstens nur bis auf Viertelgrade die Winkel genau damit angeben kann, und sie also eben nicht mehr leistet, als der gemeine Transporteur. Weil aber alle Winkel, die mit der Boussole gemessen werden, sich auf die magnetische Mittagslinie beziehen, so hat auch dieses Instrument seine eigenen Vorzüge, zu denen folgender gehört:

Es sey Fig. 154. die Lage und Entfernung ab bekannt, und man befinde sich mit der Boussole in c, so läßt sich der Punct c finden. Denn $< p$, welchen die Mittagslinie cM mit cN macht, ist $= < o$; und $< r = < q$, weil es Wechselswinkel sind. Legt man daher an a und b (auf der Zeichnung) Mittagslinien ag und bh, und die Winkel q und o = r und p, so durchschneiden sich die Schenkel in c.

Ferner ist die Boussole in Waldungen, wo man nicht weit um sich sehen kann, sehr vortheilhaft zu gebrauchen.

Die Aufnahme einer Gegend mit der Boussole von den Standpuncten a und b Fig. 153. geschieht am leichtesten dadurch, daß man mittelst derselben den Winkel bestimmt, den eine Linie ac oder ad mit der magnetischen Linie in a, und dann in b macht. Darauf trägt man die Standlinie auf's Papier, setzt in a und b Mittagslinien, und daran die im Felde gemessenen Winkel, so erhält man in den Durchschnitten c, d 2c. die gesuchten Puncte.

Anmerk. Siehe hierüber: Große Korollarien zur practischen Geometrie. S. 26 2c.

§. 474. Einen Wald, oder eine Stadt, ein Dorf, Gewässer u. dgl. in den Grund zu legen. Fig. 155.

Aufl. Da man innerhalb der bezeichneten Puncte a, b, c, d 2c. keine Standlinie wählen kann, so setze man den Winkelmesser in a, miß den $< iab$, die Linien ia und ab; setze das Instrument in b, miß $< abc$ und die Linie bc; setze es in c, miß $< dcb$, und Linie cd; in d miß $< cde$ und de; in e miß $< fed$; in f miß $< gfe$, und jedesmal die folgende Linie, bis endlich wieder nach a.

Trägt man nun sowol Linien als Winkel so auf's Papier, wie sie auf dem Felde gemessen worden, so erhält man die Puncte a, b, c, d, e, f, g, h, i in übereinstimmiger Lage auf dem Papier.

Sind Straßen, Alleen u. dgl. wie mf mit aufzuzeichnen, so bestimmt man am Umfange die Endpuncte derselben, und mißt hervorstehende Puncte, als Ecken, Plätze 2c. eben so, wie vorher.

Wenn

Wenn man mit diesem Verfahren nicht die größte Genauigkeit verbindet, so pflegt die Figur am Ende nicht zu schließen, ein Umstand, der dem Feldmesser oft begegnet, und den er dadurch beseitigt, daß er hie und da etwas verändert, bis die Figur schließt. — Mit dem Meßtisch erhält man die Zeichnung, wenn man ihn über a setzt, ab mißt, verjüngt aufträgt; ihn über b setzt, ba nach a richtet, aus b nach c visirt, cb mißt und aufträgt u. s. w. Die Winkel erhält man völlig genau, ohne sie in Graden angeben zu können, und daher schließt auch die Figur, wenn man nach i kommt. — Oft aber soll die Zeichnung (der Grundriß) größer seyn, als die Oberfläche des Meßtisches seyn kann, dann ist entweder ein frischer Bogen Papier über den Meßtisch zu spannen, oder der Winkelmesser nothwendig. — Die Boussole leistet auch hierbei gute Dienste, besonders wenn man Gewandheit im Auftragen der Declinationen besitzt.

Trigonometrisch findet man zwar auch alle diese Linien, allein eine solche Rechnung wird zweckmäßiger angewendet werden können, unzugängliche Puncte, dergleichen Thürme, Bäume rc. u. s. w. darbieten, zu bestimmen, wozu man sich außerhalb der Stadt eine passende Standlinie wählt.

§. 475. Eine Zeichnung zu copiren.

Aufl. Jede erste Zeichnung (Original) wird wegen der vielen Hülfslinien selten recht sauber gerathen, daher vervielfältigt man sie bequem auf folgende Art.

Lege die Originalzeichnung auf ein feines ebenes Papier, und bevestige sie am Rande mit Mundlack oder Stecknadeln; dann stich mit einer feinen englischen Nähnadel durch alle bemerkenswerthe Puncte so, daß die Nadel auch das darunter liegende Papier mit trifft. Nimm nun die Zeichnung ab, so lassen sich alle auf dem reinen Papier befindlichen Puncte ohne Hülfslinien zusammen ziehn, wie es nach der Originalzeichnung verlangt wird. Kann das Durchstechen nicht angehen, so müssen zuerst die wichtigsten Puncte mit dem Zirkel gemessen, und auf die

Weise, wie bei der Dreieckconstruction gezeigt ist, auf das reine Blatt gebracht, und dazwischen die übrigen Puncte und Linien eben so getragen werden.

§. 476. Eine gegebene Zeichnung zu reduziren, oder zu verkleinern.

Aufl. I. Theile die Zeichnung durch Bleistift-Linien in kleine Quadrate oder Rechtecke. Theile die Fläche, worauf die verkleinerte Zeichnung kommen soll, in eben so viele, aber kleinere Quadrate oder Rechtecke, die jenen ähnlich sind, und das Verhältniß der Verkleinerung haben. Numerire die Quadrate durch leicht verlöschbare Zahlen; und zeichne nun in jedes der kleinern Rechtecke das, was in dem gleichnamigen Rechtecke auf der größern Zeichnung enthalten ist, wobei Genauigkeit zu empfehlen ist.

Die Größe der kleinern Zeichnung ergiebt sich aus dem gegebenen Reductionsverhältniß nach §. 188. Es sey eine Zeichnung, die 12 Zoll lang, und 10 Zoll breit ist, auf eine Fläche zu bringen, die nur $\frac{3}{5}$ der erstern enthält. Wie lang und breit muß letztere seyn?

Der Quadratinhalt der großen Zeichnung ist $= 120$; der der kleinern $= \frac{3}{5} \cdot 120 = 72$ Quadratzoll; nach §. 188. gilt

$$120 : 72 = 12^2 : l^2; \text{ und } l = \sqrt{\frac{72 \cdot 144}{120}} = 9{,}3 \text{ Zoll}$$

$$= 5 : 3 = 144 : l^2 \qquad \text{in der Länge.}$$

Und um die Breite zu finden:

$$5 : 3 = 10^2 : b^2, \text{ und } b = \sqrt{\frac{3 \cdot 100}{5}} = 7{,}74 \text{ Zoll}$$

in der Breite.

Aufl. II. Mit Hülfe eines Reducirlineals. Fig. 156. Das Lineal AB ist um die Nadel in C beweglich; der Theil CA ist von C aus in 100 oder 1000 Theile, der Theil CB in eben so viel, aber kleinere Theile getheilt, die an der abgedachten Kante des Lineals scharf auslaufen. Die Zeichnung abcd lege unter den Theil des Lineals, auf dem die größern Theile, das

das Papier fghm unter den, auf dem die kleinern befindlich sind, und beide Zeichnungen so, daß Null an cd, und unterhalb 'c Null an fg trifft; cd aber fg parallel bleibt; und bevestige die Zeichnungen in dieser Lage.

Soll nun z. B. der Punct P von der großen Zeichnung auf die kleinere gebracht werden; so schiebe das Lineal auf P und zähle den Abstand CP nach den Theilen auf CA; es mag hier CP = 75 seyn, zähle darauf auf CB ebenfalls 75 Theile = cp ab, und bezeichne p mit einem Punct. Der Punct N wird nach n kommen u. s. w.

Man muß zwar für jedes geforderte Reductionsverhältniß ein anderes Lineal haben; allein das Geschäft ist auch dafür äußerst schnell und genau zu vollenden, welches für diejenigen, die dergleichen Reductionen zu machen haben, ein wichtiger Umstand ist.

Aufl. III. Das Verjüngen und Vergrößern einer Zeichnung nach dem Maßstabe ist mühsam und erfordert für jeden überzutragenden Punct eine kleine Rechnung. Man muß nämlich den Abstand eines Puncts N von ab und bp messen, denselben mit dem gegebenen Verhältniß multipliciren, das Erhaltene als Abstand von fg und fh ansehen, und so auf die neue Zeichnung bringen.

§. 477. Eine gegebene Zeichnung zu vergrößern.

Aufl. Alle drei im vorigen §. mitgetheilte Auflösungsweisen sind dabei ebenfalls anwendbar, wie man ohne Erinnern bemerken wird; allein man verbinde die größte Genauigkeit mit diesem Geschäft, weil geringe Fehler im Vergrößerungsverhältniß auf der neuen Zeichnung wachsen.

§. 478. Geometrische Zeichnungen zu illuminiren, oder auszumalen.

Aufl. Hiezu sind Tuschfarben nöthig: Carmin, das schönste Roth, wird mit etwas Gummi oder Zucker oder Citronensaft auf Glas oder Tuschnäpfchen gen gerieben. Gummigutt, eine sehr sanfte, unendlich theilbare, gelbe Farbe, wird mit reinem Wasser aufgerieben. Nußbraun, Liliengrün, Grünspan werden mit reinem Wasser, oder besser mit Essig abgerieben. Berlinerblau am besten mit Gummiwasser; Hellblau, mit reinem oder Gummiwasser; Zinnober, mit Branntwein oder Gummiwasser aufgerieben; schwarze Tusche. Alle diese Tuschfarben sind dann am besten, wenn sie sich leicht abreiben und, naß gemacht, und auf die Hand gestrichen, reine Striche geben. Durch Vermischung derselben erhält man alle mögliche Farben, z. B. Violett entsteht aus Carmin und Blau; alle Sorten von Grün aus der Vermischung der gelben und blauen Farbe. Aschgrau ist dünne schwarze Tusche. Das Anstreichen einer Fläche mit Farbe heißt Auftragen. Wenn das Auftragen gut gelingen soll, so müssen alle Farben sehr dünn oder recht flüssig seyn; will man die Farbe hervorstechender haben, so überstreiche man sie mehr, als einmal. Zum Schattiren gebraucht man jederzeit etwas dunklere Farbe, z. B. zur Schattirung des Gelben nimmt man Braun, des Hellblauen das Dunkelblaue, des Hellgrünen das Dunkelgrün, des Hellrothen das Dunkelrothe 2c. Die Lage der Schatten ist allemal bei geometrischen Zeichnungen auf der rechten Seite, weil das Licht von der linken herkommt, folglich haben Vertiefungen ihren Schatten auf der linken Seite.

Zum Auftragen der Farben nehme man einen nicht zu kleinen Pinsel, der die feinen Haare in eine Spitze vereinigt, viele Flüssigkeit faßt, und egale Striche macht; sehe sich vor, daß man mit dem Pinsel nicht wieder zurück in die schon rein aufgetragene Farbe komme, weil dadurch eine Ungleichheit in ihrer Stärke entsteht; und wenn sich etwa die Farbe auf einem Orte mehr anhäufen sollte, drücke man den Pinsel aus, und halte ihn an die angehäufte Farbe, so wird er sie wieder einziehen.

Alle Grundrisse stellen das Bild einer Gegend oder eines Platzes so vor, wie es erscheinen würde, wenn sich das Auge in unendlicher Ferne senkrecht darüber befände.

---

§. 479. Zur Linienmessung gehört die Altimetrie oder Höhenmessung, welche gleichfalls auf dem Grundsatze, daß die ähnlichen Seiten ähnlicher Figuren einander proportional sind, beruht. Es kommen dabei mehrere Fälle, und allerlei Auflösungsweisen vor, wovon wir die vornehmsten anführen wollen. Ist eine Höhe so beschaffen, daß man vom höchsten Punct derselben eine Schnur senkrecht herab lassen kann, so giebt das Maaß dieser Schnur die Höhe an. Dies würde z. B. anwendbar seyn, die Tiefe eines Brunnens zu erforschen.

§. 480. Eine Höhe zu finden, zu deren unterstem Punct man kommen kann. Fig. 157.

Aufl. I. Nimm zwei Stäbe von verschiedener, aber bekannter Länge ba und dc, und stelle sie senkrecht so hinter einander, daß das Auge in a den höchsten Punct der Höhe BA über dem Stabe dc in gerader Linie erblickt. Dann sind die Dreiecke age und aDA einander ähnlich; daher gilt:

$ag : cg = aD : DA$, wozu noch $DB = ab$ addirt wird.

In Worten: der Abstand der beiden Stäbe von einander verhält sich zu ihrem Unterschiede in der Länge, wie der Abstand des kleinen Stabes von der Höhe zur Höhe selbst.

Es sey $ab = 3$; $cd = 8$, $ag = 4$, $aD = 16$ Fuß; so ist

$$4 : 5 = 16 : DA, \text{ und } DA = \frac{5 \cdot 16}{4} = 20 \text{ Fuß.}$$

Hiezu DB oder $ab = 3$ —

Gesuchte Höhe 23 Fuß.

Diese arithmetische Auflösung ist genau, wenn die Stäbe nicht zu kurz im Verhältniß zur Höhe AB sind, und man in a ein Diopter hält, um die Nebensicht (Parallaxe) des Auges zu vermeiden.

Hal

Hat man nur einen Stab cd, so lege man das Auge da in R an die Erde, wo die Linie Ac verlängert hintrifft, und schließe:

$$Rd : dc = RB : BA.$$

Aufl. II. Mit dem Neigungsmesser läßt sich diese Aufgabe ebenfalls sehr genau lösen. Lege ihn auf den Stab dg so, daß das Auge in a am Diopter desselben ruht, die aufrechtstehende Cathete gc (am Instrument mn) senkrecht steht, und das verschiebbare Diopter in c mit a und A in einer Linie ist, so läßt sich ag und gc am Instrument ablesen, und aD = bB messen. Darauf schließe auch hier

$$ag : gc = aD : DA.$$

Es sey ag = 15 Zoll, gc = 18 Zoll 7 Linien 5 Scrupel = 1,875 Fuß, so wird 15 Zoll ($1\frac{1}{2}$) = 1,5 Fuß : 1,875 Fuß = 16 Fuß : DA und

$$DA = \frac{1,875 \;.\; 16}{1,5} = 20 \text{ Fuß gefunden.}$$

Die senkrechte Stellung der Cathete mn am Instrument kann sehr leicht durch einen feinen Faden, an dem eine Bleikugel hängt, erhalten werden.

Anmerk. Um ihm die sanfteste Bewegung zu geben, bringe man in S eine Schraube (oder Wirbel) an, um welche sich eine mit CD verbundene Saite wickelt.

Aufl. III. Auch mit einem Spiegel kann man diese Höhe finden. Es sey Fig. 158. BA die zu messende Höhe, so lege in einer schicklichen Entfernung BS den Spiegel S wagerecht auf die Erde, und halte den Stab ba senkrecht so weit zurück, bis das an a gehaltene Auge die Spitze des Gegenstandes BA im Spiegel an einem darüber gelegten Faden erblickt. Weil nun nach optischen Grundsätzen der Zurückstrahlungswinkel aSb dem Einfallswinkel ASB gleich ist, und in beiden Dreiecken abS und ABS rechte Winkel, also die △ einander ähnlich sind, so gilt auch hier die Proportion Sb : ba = SB : BA.

Aufl. IV. Geometrisch. Nimm in einiger Entfernung den Standpunct S Fig. 158., miß mit einem

nem Sextanten oder Halbkreise (Fig. 142.) den Winkel BSA und den Abstand BS.

Trage nun BS verjüngt auf's Papier, errichte in B ein Perpendikel, und setze an S den gemessenen Winkel, so muß der Schenkel SA das Perpendikel BA in A durchschneiden, und BA mit dem Zirkel sich messen lassen. Zur so gefundenen Höhe addirt man alsdann noch die des Winkelmessers, oder des Statives, weil der Punct B in gleicher Höhe mit den horizontalgestellten Dioptern Dd (Fig. 142.) angenommen werden muß.

Wenn der $< ASB = 50°$, und der Abstand $BS = 70$ Fuß gemessen ist, so giebt eine geometrische Construction die $AB = 83$ Fuß.
+ 4 — Höhe d. Instruments,
Summe 87 Fuß.

Aufl. V. Trigonometrisch. Im rechtwinklichten Dreieck ABS sind alle Winkel und die Seite BS bekannt, daher findet man BA durch

Sin. tot. : 70 = Tang. 50° : AB

$$
\begin{aligned}
\text{log. Tang } 50° &= 10{,}07618\\
-\ \ 70 \text{ Fuß} &= \underline{\ 1{,}84509}\\
&\ \ \ \ 1{,}92127 = 83{,}42\\
\text{dazu Höhe des Statives} &= \underline{\ \ 4\ \ }\\
\text{Höhe des Gegenstandes} &\ \ 87{,}42 \text{ Fuß.}
\end{aligned}
$$

Nennt man den Abstand $BS = a$, den Winkel $BSA = w$ und die gesuchte Höhe $= H$, so hat man die allgemeine Formel $\frac{a . \text{Tang.} w}{\text{Sin. tot.}} = H$, welche für alle solche Fälle gilt.

Wie man die Höhe eines Gegenstandes aus seiner Schattenlänge finden könne, wird in der Lehre vom Licht §. 666. vorkommen.

§. 481. Eine Höhe zu messen, zu deren unterstem Puncte man nicht kommen kann. Fig. 159.

Aufl. I.

Aufl. I. Geometrisch. Miß in einiger Entfernung eine Standlinie cd, und mit einem Winkelmesser in c den Winkel m, und in d den Winkel n.

Trage nun die Standlinie verjüngt auf's Papier, setze an c den Winkel m, an d den $< n$, und verlängere die Schenkel, bis sie sich in A schneiden. Von A fälle ein Perpendikel auf die verlängerte Standlinie, so ist dies Perpendikel = der gesuchten Höhe.

Die Neigung der Linien cA und dA kann auch mit dem Neigungsmesser gemessen, und auf die bekannte Weise auf's Papier getragen werden, wobei sich eine hohe Genauigkeit erreichen läßt.

Aufl. II. Trigonometrisch. Im $\triangle$ cAd ist $< m$, $< o$ als Ergänzung zu 180° von n, folglich auch $< p$, und cd bekannt. Daher gilt Sin. p : dc = Sin. m : dA.

Im rechtwinklichten $\triangle$ ABd ist nun Seite dA und $< n$ bekannt, folglich

$$\text{Sin. tot} : dA = \text{Sin. } n : AB.$$

Daraus ergiebt sich, daß man AB geradezu durch folgendes Formular finden können:

$$AB = \frac{dc \,.\, \text{Sin. } m \,.\, \text{Sin. } n}{\text{Sin. } (n - m)}.$$

Von der Kennziffer des kommenden Logarithmen werden die Zehner abgestrichen, weil eigentlich noch mit Sin. tot. dividirt werden sollte.

Es sey die Standlinie cd = 76 Fuß, $< m = 40°$, $< n = 56°$, dann ist $n - m = 56 - 40 = 16°$, und

$$\begin{array}{rl} \text{log. } dc = 76 = & 1,88081 \\ -\ \text{Sin. } m = 40° = & 9,80806 \\ -\ \text{Sin. } n = 56° = & 9,91857 \\ \hline & 21,60744 \\ \text{log. Sin. } (n - m) = 16° = & 9,44033 \\ \hline \text{log. } AB = & \cancel{1}2,16711 = 146,9 \text{ Fuß} \\ \text{Höhe des Statives} = & +3 \\ \hline \text{Höhe des Gegenstandes} = & 149 \text{ Fuß } 9 \text{ Zoll.} \end{array}$$

Aufl.

Aufl. III. Mit dem Neigungsmesser. Da wir hiemit die Neigung der Linien nach dem Abstand des verschiebbaren Stabes CD und des Diopters n (Fig. 143. b) bestimmen, so heiße der Kürze wegen $Am = b$ und $mn = c$, und wenn man auf dem zweiten Standpuncte mißt, mögen diese Abstände b' und c', die Standlinie $= a$, die Linie AB Fig 159. vom 2ten Standpuncte bis zur Höhe aber $= x$, und die Höhe $= y$ heißen, weil diese letztern beiden Linien unbekannt sind.

Nachdem man das Instrument horizontal gelegt, und alles gehörig gemessen hat, schließt man:

$$b : c = a + x : y, \text{ und } x = \frac{by - ac}{c};$$

auf dem zweiten Standpunct schließt man:

$$b' : c' = x : y, \text{ und } y = \frac{b'y}{c'}.$$

Die beiden abgesonderten Werthe von x sind sich gleich, und darum ist aus der Gleichung

$$\frac{by - ac}{c} = \frac{b'y}{c'} \text{ die y, oder Höhe BA zu finden}$$

$$\frac{bc'y - acc'}{c} = b'y \quad (c'$$

$$bc'y - acc' = b'cy \quad (c$$

$$bc'y - b'cy = acc'$$

$$(bc' - b'c)y = acc', \text{ und } y = \frac{acc'}{bc' - b'c} = BA.$$

Nimmt man $c = c'$, was sehr wohl angeht, indem man den Stab CD am Instrument nur allein verschiebt, bis das Diopter n gehörig mit dem Auge und dem höchsten Punct der Höhe in gerader Linie steht, so ist die

beständige Formel für jede Höhe $= \dfrac{ac}{b - b'}$.

Will man mit zwei Stäben diese Aufgabe lösen, so bedeutet c den Unterschied ihrer Länge, b den Ab-

Abstand beider Stäbe am ersten, und b′ den Abstand beider Stäbe am zweiten Standpunct; a gleichfalls die Standlinie.

§. 482. Eine Höhe AB von zwei Standpuncten a und b, die nicht in einer wagerechten Linie liegen, zu messen. Fig. 160.

Aufl. I. Geometrisch. Untersuche, wie viel der zweite Standpunct b tiefer, als a liegt. Der Unterschied sey hier db = ac. Nachdem die Standlinie ab, Winkel m bei a, und < n bei b gemessen, ziehe auf dem Papiere eine wagerechte Linie aB; und in dem Abstand db = ac eine Parallele cG; dann trage die Standlinie von a nach b.

Den Winkel m setze in a auf die Linie aB; < n aber in b auf die Linie cG; denn die gemessenen Höhenwinkel beziehen sich auf horizontale Linien.

Die Schenkel der Winkel m und n durchschneiden sich in A; und ein Perpendikel von A auf aB oder cG giebt die gesuchte Höhe.

Aufl. II. Trigonometrisch. Wäre die Standlinie = ag, und < n in g gemessen worden, so würde die Rechnung, wie im vorigen §. 481. seyn. Man muß also untersuchen, welche Standlinie für die gemessenen Winkel m und n gehört, wenn sie horizontal läge, und = ag wäre. Die ag kann im △ abg, wo wir ab schon kennen, aus dieser und < gab und gba gefunden werden.

Es ist nun im rechtwinklichten △ acb die ab, und ac bekannt, folglich ab : Sin. tot. = ac : Sin. abc; und < abc = < gab; und 180° — (< n + < abc) = < gba.

Im △ gab sind jetzt zwei Winkel (folglich auch der 3te) und die Seite ab bekannt; daher

$$\text{Sin.} < agb : ab = \text{Sin.} < gba : ga.$$

Nun bringe man anstatt der ab die ag in die Rechnung, und verfahre wie §. 481; nämlich

$$AB = \frac{ga \,.\, \text{Sin. m} \,.\, \text{Sin. n}}{\text{Sin.} (n - m)}.$$

§. 483. Die Höhe eines auf einem unzugänglichen Felsen befindlichen Gegenstandes AB zu messen. Fig. 161.

Aufl. I. Miß eine Standlinie ab, und in a die Winkel m und n, welche die Gesichtslinien aA und aB mit der Horizontallinie aD machen, so wie in b die Winkel o und p.

Trage nun die Standlinie verjüngt auf's Papier, setze an a die Winkel m und n; an b aber die Winkel o und p, so werden sich die Schenkel in A und B schneiden. Der Abstand der Durchschnitte ist die Höhe des Gegenstandes, und das Perpendikel BD die Höhe des Berges.

Aufl. II. Trigonometrisch.

$$DA = \frac{ab \,.\, \text{Sin.}\, m \,.\, \text{Sin.}\, o}{\text{Sin.}\,(o-m)};$$

$$DB = \frac{ab \,.\, \text{Sin.}\, n \,.\, \text{Sin.}\, p}{\text{Sin.}\,(p-n)}$$

und $DA - DB = AB$; wobei $< m = AaD$, und $< o = AbD$.

Es ist leicht einzusehen, daß die im §. 482. und 483. gegebenen Aufgaben auch mit dem Neigungsmesser oder zwei Stäben (wie §. 481. Aufl. III.) gelöst werden können.

§. 484. Aus zwei Fenstern a und b Fig. 162. die Höhe des Gegenstandes DC zu messen.

Aufl. I. Miß den Abstand der Beobachtungspuncte b und a in den Fenstern, und in jedem den Winkel, den die horizontale Linie aF oder bE mit der Gesichtslinie nach der Spitze C macht, also $< m$ und $< n$.

Trage nun die Linie ab verjüngt auf Papier, errichte in a und b die Perpendikel aF und bE, und setze in a den $< m$, und in b den $< n$ an, so werden sich die Schenkel in C schneiden. Von C fälle auf Fa oder Eb ein Perpendikel; miß mit dem Zirkel nach dem verjüngten Maßstabe die CF oder CE. Addirt man dazu $ED = bd$, so giebt die Summe die DC.

Aufl. II.

Aufl. II. Trigonometrisch. Im $\triangle$ baC ist $< baC = 90^\circ + m$ und $< abC = 90^\circ - n$, folglich auch $< o$, und Seite ab bekannt. Daher gilt $Sin. o : ab = Sin. < baC : bC$, wodurch im rechtwinklichten Dreieck EbC die Seite bC, und $< n$ bekannt sind, und also $Sin. tot : Cb = Sin. n : CE$; und $CE + bd = CD$ gefunden wird.

Aufl. III. Mit dem Neigungsmesser. Nennen wir hier, wie §. 481. Aufl. III., die beständige Linie (ab) $= a$; den Abstand des verschiebbaren Stabes vom Auge $= b$ und b' in beiden Endpuncten der Standlinie; die Höhe des Gegenstandes $y = FC$: so finden wir für y auf eine ähnliche Weise, wie §. 481, die sehr bequeme Formel:

$$\frac{b'a}{b-b'} = FC; \text{ und } FC + ad = DC.$$

Nämlich im Fenster a gilt: $b : c = x : y$, und $x = \frac{b \cdot y}{c}$ und im Fenster b gilt: $b' : c = x : y + a$, und $x = \frac{b' \cdot y + b' \cdot a}{c}$, also ist $\frac{b \cdot y}{c} = \frac{b' \cdot y + b' \cdot a}{c}$, und daraus $y = \frac{b' \cdot a}{b - b'}$, wozu noch die Höhe da addirt wird, um DC zu erhalten.

§. 485. Die Tiefe eines Thales adb Fig. 163., dessen tiefster Punct d ist, zu messen.

Aufl. I. Miß von b aus eine passende Standlinie bc in's Thal hinab, und mit einem Halbkreis, oder andern zum Tiefenmessen schicklichen Instrumente, die Winkel x, y und w, indem man Nullgrad auf der senkrechten bg annimmt, und nach a und d visirt. In a kann $< o$ eben so gemessen werden.

Unter einem Winkel $m = n$ trage nun die Standlinie bc auf's Papier, lege in b den $< x$, in c den Winkel y an, so durchschneiden sich die Schenkel in a, folglich hat man hiedurch die Breite des Thales. Setze in a den Winkel o an, so schneidet der Schen-

kel

kel ad die bd in d. Ein Perpendikel aus d auf ab, hier dp, ist die Tiefe des Thales.

Aufl. II. Trigonometrisch. Im △ abc ist Sin. z : bc = Sin. x : ac; oder Sin. z : bc = Sin. y : ab.

Im △ abd gilt Sin. adb : ab = Sin. dab : bd. und < o + z = < dab; und < o + z + x von 180° abgezogen, giebt < adb.

Die Tiefe pd giebt die Porportion:

Sin. tot. : bd = Sin. x : pd.

III. Flächenmessung.

§. 486. Die Flächen sind entweder von geraden oder krummen Linien, oder von beiden zugleich eingeschlossen. In allen Fällen suche man sie in regelmäßige geometrische Figuren zu zerlegen, welches durch Hülfslinien, Diagonalen ꝛc. geschieht, und bei einem nur einigermaßen geübten Scharfblick nicht schwer wird. Zu den regelmäßigen Figuren gehören Parallelogramme, Triangel, gleichseitige Vielecke, Trapezia, Kreise, Parabeln, Ellipsen und andere krumme Linien. Wir beschäftigen uns nun damit, die Flächen der regelmäßigen Figuren zu berechnen, und Formeln dazu zu geben. Vergleiche §. 190., wo vom Flächenmaaß das Nöthigste gesagt ist.

§. 487. Den Flächenraum eines Quadrats zu finden.

Aufl. Multiplicire eine Seite (= l) mit sich selbst. Der Flächenraum (= F) ist = l^2 odee l . l.

Z. B. Es sey eine Seite 12,5 Fuß, so ist F = 12,5 . 12,5 = 156,25 Quadratfuß; oder (weil 100 Quadratfuß = 1 Quadratruthe) = 1 Quadratruthe, 56 Quadratfuß, 25 Quadratzoll. Der Kürze wegen werden wir schreiben □ Rth. □ F. □ Z.

§. 488. Die Fläche eines Rechtecks zu finden.

Aufl.

Aufl. Multiplicire die Länge mit der Breite; daher ist F = l . b.

Z. B. Es sey ein Garten 15 Ruthen lang und 4 Ruthen breit, so ist sein Flächenraum = 15 . 4 = 0 □ Ruthen.

§. 489. Die Fläche eines jeden Parallelogramms zu finden.

Aufl. Nimm eine der 4 Seiten zur Grundlinie (= g), errichte auf dieser ein Perpendikel bis zur gegenüberstehender Seite, welches die Höhe der Figur (= h) angiebt, und multiplicire Grundlinie und Höhe mit einander. Formel F = g . h.

Diese Regel gilt für das Quadrat, in welchem h = g ist, für das Rechteck, in dem die Höhe oder Breite das Perpendikel ist, für den Rhombus und Rhomboides Fig. 19 und 20, in denen der senkrechte Abstand der Parallelen = dem Perpendikel.

§. 490. Den Flächenraum eines Trapeziums zu finden. Fig. 17.

Aufl. Addire die beiden parallelen Seiten ab und cd und halbire die Summe; multiplicire das, was kommt, mit dem senkrechten Abstande. Das ist $\left(\frac{ab + cd}{2}\right) . ac$; und wenn wir allgemein die Parallelen G und g, ihren Abstand h nennen, so kommt die Formel $F = \frac{(G + g) . h}{2}$.

Es sey ab = G = 12′; cd = g = 8′, und ac = h = 6′, so ist die Fläche $= \frac{(12 + 8) . 6}{2}$ $= \frac{20 . 6}{2} = \frac{120}{2} = 60$ □ Fuß.

§. 491. Die Fläche eines jeden Dreiecks zu finden. Fig. 6, 7 und 8.

Aufl. I. Nimm eine Seite zur Grundlinie, fälle aus der gegenüberstehenden Winkelspitze ein Perpendikel auf die, nöthigenfalls verlängerte, Grundlinie, und mul-

multiplicire Grundlinie und Perpendikel, oder Grundlinie und Höhe mit einander; endlich dividire das Product durch 2. Formel $F = \frac{g \cdot h}{2}$.

Es sey Fig. 8. die $ac = g = 12'$; die $bp = h = 6',2$, so ist die Fläche $= \frac{12 \cdot 6,2}{2} = \frac{74,4}{2} = 37,2$ □ Fuß.

Im rechtwinklichten Dreieck ist die eine Cathete die Grundlinie und die andere die Höhe.

Aufl. II. Wenn alle drei Seiten des Dreiecks bekannt sind, und a, b, c heißen, so giebt folgendes Formular den Flächenraum

$$F = \frac{\sqrt{(a+b+c) \cdot (a+c-b) \cdot (a+b-c) \cdot (b+c-a)}}{4}$$

Es sey Seite $a = 6$, so sind die 4 Factoren $6+5+4 = 15$

$b = 5$ $\quad 6+4-5 = 5$

$c = 4$ $\quad 6+5-4 = 7$

$5+4-6 = 3$

und $15 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 3 = 1575$; $\sqrt{1575} = 39,68$; und $\frac{39,68}{4} = 9,92$ □ Maaß.

Sind die Seiten groß, so verrichtet man die Multiplication und Ausziehung der Wurzel sehr bequem mit Logarithmen.

§. 492. Die Fläche jeder geradlinichten Figur zu finden.

Aufl. Zerlege die Figur durch Diagonalen in Dreiecke, berechne jedes besonders, und addire alle Dreiecke zusammen, so ist die Summe = dem Flächenraum.

§. 493. Den Flächenraum einer in einem Kreise beschriebenen gleichseitigen Figur zu finden.

Aufl. Im Kreise lassen sich gleichseitige Drei- Vier- Fünf- Sechs- und andere Vielecke zeichnen, deren Flächen dann vom Radius des Kreises, worin sie beschrieben sind, abhängen.

Es

Es sey das Vieleck, welches es wolle, so läßt es sich durch Diagonalen in Dreiecke zerlegen, und berechnen. Allein durch algebraische und trigonometrische Kunstgriffe kann man aus einer Seite und der Anzahl derselben den Flächenraum viel genauer und ohne Zeichnung finden. Sucht man aus Fig. 188., worin DF eine Seite eines Vielecks $= m$, $GD = \frac{1}{2} m$; $< x = \frac{1}{2}$ Centriwinkel; $< y = \frac{1}{2}$ Polygonwinkel, Werthe für GD und CG, aus deren Multiplication der Flächenraum des $\triangle$ DCF hervorgeht, so findet man Sin. tot. : $\frac{1}{2} m =$ Tang. $< y$: CG; und

$$CG = \frac{\frac{1}{2} m \,.\, \text{Tang.} < y}{\text{Sin. tot.}}$$, und multiplicirt man dies

mit $DG = \frac{1}{2} m$, so kommt $\frac{\frac{1}{4} m^2 \,.\, \text{Tang.} < y}{\text{Sin. tot.}}$

$$= \frac{m^2 \,.\, \text{Tang.} \frac{1}{2} \text{Polygonwinkel}}{4 \text{ Sin. tot.}}$$; und also ist Fläche

eines Vielecks von n Seiten $= \frac{m^2 . n . \text{Tang.} \frac{1}{2} p}{4 \text{ Sin. tot.}}$,

worin $m =$ einer Seite, $n =$ Anzahl der Seiten, und $p =$ Polygonwinkel. Den Polygonwinkel p findet man, indem man mit der Anzahl der Seiten in 360° dividirt, und den Quotienten von 180° abzieht. Also ist $p = 180° - \frac{360}{n}$.

Daraus entsteht folgende Tafel für die Flächen der Vielecke, deren Seiten bekannt sind.

Fläche des Dreiecks $= \frac{m^2 \,.\, 3 \,.\, \text{Tang. } 30°}{4 . \text{Sin. totus}}$,

des Vierecks $= \frac{m^2 . 4 . \text{Tang. } 45°}{4 . \text{Sin. tot.}} = m^2$,

denn Tang. 45° = Sin. tot.

des Fünfecks $= \frac{m^2 \,.\, 5 \,.\, \text{Tang. } 54°}{4 \,.\, \text{Sin. tot.}}$,

des Sechsecks $= \frac{m^2 \,.\, 6 \,.\, \text{Tang. } 60}{4 \,.\, \text{Sin. tot.}}$,

Fläche

$$\text{Fläche des Siebenecks} = \frac{m^2 \cdot 7 \cdot \text{Tang. } 64^\circ 17'}{4 \cdot \text{Sin. tot.}},$$

$$\text{des Achtecks} = \frac{m^2 \cdot 8 \cdot \text{Tang. } 67^\circ 30'}{4 \cdot \text{Sin. tot.}},$$

$$\text{des Neunecks} = \frac{m^2 \cdot 9 \cdot \text{Tang. } 70^\circ}{4 \cdot \text{Sin. tot.}},$$

$$\text{des Zehnecks} = \frac{m^2 \cdot 10 \cdot \text{Tang. } 72^\circ}{4 \cdot \text{Sin. tot.}} \text{ u. s. w.}$$

Z. B. Es sey die Seite eines Fünfecks $= 4{,}312$ Fuß $= m$, so ist $n = 5$, und das Formular

$$= \frac{4{,}312^2 \cdot 5 \cdot \text{Tang. } 54^\circ}{4 \cdot \text{Sin. tot.}}.$$

Nun ist log. Tang. $54^\circ = 10{,}1387390$
log. $5 = 0{,}6989700$
log. $4{,}312^2 = 1{,}2695184$

$12{,}1072274$
log. $4 = 0{,}6020600$
log. Sin. tot. $= 10,$

log. der Fläche $= 1{,}5051674 = 32$ □ Fuß.
(Der log. 4 Sin. tot. ist beständig $= 10{,}6020600$).

§. 494. Will oder kann man nicht mit Logarithmen rechnen, so dient folgende bequeme Tafel, in welcher die Zahl mit dem Decimalbruch nichts anders ist, als die Tangente des halben Polygonwinkels, und m die gegebene Seite.

$$\text{Fläche des Dreiecks} = \frac{m^2 \cdot 3 \cdot 0{,}5773}{4},$$

$$\text{des Vierecks} = m^2,$$

$$\text{des Fünfecks} = \frac{m^2 \cdot 5 \cdot 1{,}376}{4},$$

$$\text{des Sechsecks} = \frac{m^2 \cdot 6 \cdot 1{,}732}{4},$$

$$\text{des Siebenecks} = \frac{m^2 \cdot 7 \cdot 2{,}0763}{4},$$

$$\text{des Achtecks} = \frac{m^2 \cdot 8 \cdot 2{,}4142}{4},$$

Fläche

Fläche des Neunecks $= \frac{m^2 \,.\, 9 \,.\, 2{,}7475}{4}$,

des Zehnecks $= \frac{m^2 \,.\, 10 \,.\, 3{,}0777}{4}$,

des Zwölfecks $= \frac{m^2 \,.\, 12 \,.\, 3{,}732}{4}$,

des Funfzehnecks $= \frac{m^2 \,.\, 15 \,.\, 4{,}7046}{4}$,

des Sechzehnecks $= \frac{m^2 \,.\, 16 \,.\, 5{,}0273}{4}$.

Z. B. Es sey die Seite m eines Achtecks $= 2$ Fuß, so ist seine Fläche $= \frac{2^2 \,.\, 8 \,.\, 2{,}4142}{4} = \frac{4 \,.\, 8 \,.\, 2{,}4142}{4}$ $= 8 \,.\, 2{,}4142 = 19{,}3136$ d. i. 19 □ Fuß, 31 □ Zoll, 36 □ Linien.

§. 495. Es ist ein Kreis gegeben, man sucht die Seite eines in demselben beschriebenen Vielecks. Fig. 188.

Aufl. Wenn DF die Seite m des Vielecks, so ist $CD = CF = R$; $< x = \frac{1}{2}$ Centriwinkel $= \frac{1}{2} c$; und

Sin. tot. : CD = Sin. x : DG
= Sin. tot. : R = Sin. $\frac{1}{2}$ c : $\frac{1}{2}$ m; also $\frac{1}{2}$ m
$= \frac{R \,.\, \text{Sin.}\, \frac{1}{2} C}{\text{Sin. tot.}}$.

Weil nun der Sin. tot. $= 1$, so ist die allgemeine Formel $= m = 2\,R \,.\, \text{Sin.}\, \frac{1}{2} C$; und $C = \frac{360^\circ}{n}$, wenn n = Anzahl der Seiten.

Daraus entsteht folgende kleine Tafel, welche angiebt, wie groß die Seite eines Vielecks, wenn der Halbmesser = R gegeben ist. Die Zahl 2 R = D = Diameter, und Sin. $\frac{1}{2}$ c = dem Decimalbruch.

Die Seite des Dreiecks $= D. 0{,}866$, oder $\sqrt{3 R^2}$,
des Vierecks $= D. 0{,}7071$ oder $\sqrt{2 R^2}$,
des Fünfecks $= D. 0{,}5878$ oder $\sqrt{(R^2 + \frac{6}{4} R^2 - R \sqrt{\frac{5}{4} R^2})}$

Die

Die Seite des Sechsecks $=$ D. 0,5 oder R,
des Siebenecks $=$ D. 0,4339,
des Achtecks $=$ D. 0,3827 oder $\sqrt{(2R^2 - 2R\sqrt{\frac{1}{2}R^2})}$,
des Neunecks $=$ D. 0,342,
des Zehnecks $=$ D. 0,309 oder $\sqrt{\frac{5}{4} . R^2} - \frac{1}{2}R$,
des Eilfecks $=$ D. 0,2818,
des Zwölfecks $=$ D. 0,2588,
des Funfzehnecks $=$ D. 0,2079,
des Sechzehnecks $=$ D. 0,1994,
des Vierundzwanzigecks $=$ D. 0,1305.

Z. B. Man sucht die Seite eines Neunecks in einem Kreise, dessen Diameter $= 4$, so giebt die Tafel $4 . 0,342 = 1,368$ als die Größe derselben an. — Die Seite eines Dreiecks in demselben Kreise $= 4 . 0,866 = 3,464 = m$.

§. 496. Den Flächenraum eines Vierecks zu finden, in welchem nur 1 rechter Winkel ist, und dessen sämmliche Seiten bekannt sind. Fig. 164.

Aufl. Die Seiten heißen a, b, c, d; bei A ist der rechte Winkel; BD eine Diagonale $= f$.

Die $f = \sqrt{(d^2 + a^2)}$, nach dem pythagorischen Lehrsatz; die Fläche des $\triangle$ BAD $= \frac{ad}{2}$; und weil nun im $\triangle$ BCD alle Seiten bekannt sind, so ist der Inhalt nach §. 491. zu finden. Die Fläche vom ganzen Viereck ist also

$$= \frac{ad}{2} + \tfrac{1}{4}\sqrt{(b+c+f).(b+c-f).(b+f-c).(f+c-b)}.$$

§. 497. Die Fläche eines Kreises zu finden.

Aufl. Multiplicire den Halbmesser mit sich selbst und mit der Zahl 3,14159 (oder bei weniger Genauigkeit nur mit 3,14), welche wir stets, wenn vom Kreise die Rede ist, mit p benennen wollen. Im Formular ist $F = r^2p$, wo $r =$ Radius ist, oder $F = \frac{d^2p}{4}$, wo $d =$ Diameter ist.

Es

Es sey der Durchmesser d eines Kreises $= 6$ Zoll, also der Radius $= 3$ Zoll $= r$; und $r^2 = 3^2$, folglich $r^2 . p = 9 . 3,14 \ldots = 28,26$ d. i. 28 □ Zoll 26 □ Linien. Nach dem 2ten Formular ist $\frac{d^2 p}{4} = \frac{6^2 . 3,14 \ldots}{4} = \frac{36 . 3,14}{4} = 28,26$, wie vorher.

§. 498. Die Fläche eines Kreissectors zu finden.

Aufl. Ist die ganze Kreisfläche $= r^2 p$; so ist die Fläche eines Halbkreises $= \frac{r^2 p}{2}$; eines Quadranten $= \frac{r^2 p}{4}$; eines Sextanten $= \frac{r^2 p}{6}$; eines Octanten $= \frac{r^2 p}{8}$ u. s. w. Überhaupt aber ist der Bogen jedes Sectors als die Grundlinie eines Dreiecks, dessen Höhe der Halbmesser ist, anzusehen, wobei der Bogen $= b$, der gewöhnlich in Graden gegeben wird, in Theilen des Radius gesucht werden muß. Nun ist die ganze Kreislinie $= d . p$ (siehe §. 202.); also für n Grade

$360° : d . p = n : b$, und der Bogen $b = \frac{d . p n.}{360}$

Multiplicirt man den Bogen mit $\frac{r}{2}$, so kommt $\frac{d . p . n . r}{2 . 360}$, und (weil $d = 2r$) $= \frac{r^2 . p . n}{360} =$ Fläche jedes Sectors von n Graden.

Z. B. Es sey der Radius $= 3 = AC$, Fig. 165.; und der Bogen $AB = n = 60°$, so ist

Fläche des Sectors $BCA = \frac{3^2 . 314 . 60}{360} = 4,71$.

§. 499. Die Fläche eines Sehnenabschnitts AnBs zu finden. Fig. 165.

Aufl. Berechne den Flächeninhalt des Sectors AnBC, und ziehe davon den Inhalt des △ ABC ab, so bleibt der Inhalt vom Abschnitt AnBsA.

$\triangle$ ABC hat zur Grundlinie AC $=$ r, und zur Höhe GB, welche gefunden wird durch

$$\text{Sin. tot.} : \text{CB} = \text{Sin. x} : \text{GB},$$

d. i. $\text{Sin. tot.} : r = \text{Sin. n} : \text{GB}$, und $\text{GB} = \frac{r \cdot \text{Sin. n}}{\text{Sin. tot.}}$;

Fläche des $\triangle$ BCA $= \frac{r^2 \cdot \text{Sin. n}}{2 \cdot \text{Sin. tot.}}$

Fläche des Sehnenabschnitts AnBsA

$$= \frac{r^2 \cdot p \cdot n}{360} - \frac{r^2 \cdot \text{Sin. n}}{2\ \text{Sin. tot.}}$$

Z. B. Es sey, wie vorher, $r = 3$; $n = 60^\circ$, so war $\frac{r^2 \cdot p \cdot n}{360} = 4{,}71$ nach §. 498.; und $\frac{r^2 \cdot \text{Sin. n}}{2\,\text{Sin. tot.}}$ $= \frac{3^2 \cdot \text{Sin. } 60^\circ}{2\ \text{Sin. tot.}}$, und $\log. 3^2 = 0{,}9542425$

$$\text{Sin. } 60^\circ = 9{,}9375306$$

$$10{,}8917731$$

$$\begin{array}{r} \log. 2 \\ \text{Sin. tot.} \end{array} = \left\{ \begin{array}{l} 0{,}3010300 \\ 10 \end{array} \right.$$

$$\log. \triangle \text{ACB} = 0{,}5907431$$

Fläche ACB $= 3{,}8971$.

Aber 4,71 $=$ Fläche des Sectors
und 3,8971 $=$ Fläche des $\triangle$ ACB
bleibt 0,8129 $=$ Fläche des Sehnenabschnitts AnBsA.

§. 500. **Die Fläche eines Kreisabschnitts ABED Fig. 166. zu finden.**

Aufl. Ziehe die Radien CD, CE, und die Perpendikel DH und GC; alsdann besteht das Kreisstück ABED aus den beiden gleichen Sectoren ACD und BCE, und dem $\triangle$ DCE, dessen halbe Grundlinie DG $=$ HC, und dessen Höhe CG ist.

Im rechtwinklichten $\triangle$ HCD, in welchem $<$ n und Seite CD $=$ r bekannt sind, findet man durch

$$\text{Sin. tot.} : r = \text{Cos. n} : \text{HC oder DG}$$

und $\text{Sin. tot.} : r = \text{Sin. n} : \text{DH oder CG}$.

Nun ist DG . CG = Fläche des $\triangle$ DCE, d. h. $\frac{r^2 . \text{Sin. } n . \text{Cos. } n}{\text{Sin. tot. Sin. tot.}}$ und die Fläche eines Sectors ACD $= \frac{r^2 . p . n}{360}$.

Aber 2 . ACD + $\triangle$ DCE = ABED; in vorigen Zeichen ist

$$\text{Fläche ABED} = \frac{2 r^2 . p . n}{360} + \frac{r^2 . \text{Sin. } n . \text{Cos. } n}{\text{Sin. tot. Sin. tot.}}$$

Z. B. Es sey r = 96; n = 30°; so ist Sector

$$\text{ACD} = \frac{96^2 . 3{,}14 . 30}{360} = 2412{,}7 \text{ Fläche.}$$

$$\text{Fläche des } \triangle \text{ DCE} = \frac{96^2 . \text{Sin. } 30^\circ . \text{Cos. } 30^\circ}{\text{Sin. tot. Sin. tot.}}$$

log. 96^2 =	3,9645424	
— Sin. 30° =	9,6989700	
— Cos. 30° =	9,9375306	
	23,6010430	
Sin. tot. =	10	abgezogen
Sin. tot. =	10	
	3,6010430 = 3990,7 = $\triangle$ DCE.	

Sector ACD	= 2412,7
Sector BCE	= 2412,7
Dreieck DCE	= 3990,7
Fläche des Kreisstücks	= 8816,1 □ Maaß.

Das Stück

AHD = Sector ACD — $\triangle$ HCD.

und

ACGD = Sector ACD + $\triangle$ CGD.

§. 501. Aus dem gegebenen Sehnenabschnitt FBEM Fig. 167. den Durchmesser AB eines zugehörigen Kreises zu finden.

Aufl. Ziehe die Linien FB und BE nach der Mitte des gegebenen Bogens FE, so geht die gerade Linie BMA durch das Centrum und die Mitte der Sehne FE. Ziehe in Gedanken die EA; dann sind die Dreiecke

Dreiecke MBE und BEA einander ähnlich. Daher gilt

$$MB : ME = ME : MA, \text{ und } MA = \frac{ME^2}{MB}$$

$$\text{und der Diameter } BA = \frac{ME^2}{MB} + MB.$$

Z. B. Es sey $MB = 10$; $ME = 50$, so ist $MA = \frac{50^2}{10} = \frac{2500}{10} = 250$, und $BA = 250 + 10 = 260$.

Der Bogen BE kann auch in Graden gefunden werden; denn er ist $= 2 < n$, weil n ein Peripheriewinkel, dessen Maaß bekanntlich der halbe Bogen BE ist.

$$MA : \text{Sin. tot.} = ME : \text{Tang. } n; \text{ und } 2n = BE \text{ in Graden.}$$

§. 502. Die Fläche eines Ringes gggg Fig. 168 zwischen zwei concentrischen Kreisen zu finden.

Aufl. Ziehe die Fläche des kleinern Kreises, dessen Radius CD, von der Fläche des größern, dessen Radius CA ist, ab. Der Rest ist die Fläche des Ringes.

Wenn R und r die Halbmesser, $p = 3,14\ldots$, bedeutet, so ist das allgemeine Formular für jede Ringfläche

$$F = (R^2 - r^2) . p.$$

Z. B. Es sey $CD = r = 30$; $CA = R = 40$, so ist $(40^2 - 30^2) . 3,14 = (1600 - 900) . 3,14 = 700 . 3,14 = 2198$ □ Maaß Fläche.

§. 503. Die Fläche zu berechnen, welche von den gothischen Bogen AC und BC und deren Radius AB eingeschlossen wird. Fig. 169.

Aufl. In der gothischen Bauart findet man diesen Bogen recht häufig zu Fenster= Thür= und andern Gewölbebogen angewendet. Mit dem Radius AB wird aus A und B der Bogen BC und AC beschrieben; folglich ist $\triangle$ ACB gleichseitig, und $< n = < m = 60°$, der Anzahl Grade des Bogens.

Die Fläche, welche die beiden Bogen und der Radius AB einschließen, besteht aus dem Sector BAGCHB, und dem Sehnenabschnitt AJCGA; oder auch aus zwei gleichen Sectoren, weniger dem △ ACB. Daher paßt das allgemeine Formular $\frac{2 \cdot r^2 \cdot n \cdot p}{360} - \frac{r^2 \cdot 3 \cdot 0{,}5773}{4} = F$, wobei $r = AB$; $n = 60°$; $p = 3{,}14$ ist, und weil n beständig $= 60°$, so erhält man das Formular etwas abgekürzter

$$F = \frac{2 \cdot r^2 \cdot p}{6} - \frac{r^2 \cdot 3 \cdot 0{,}5773}{4} = r^2 \cdot 0{,}61422.$$

z. B. Wenn $AB = 5$ Fuß $= r$, so ist

$$\frac{2 \cdot 5^2 \cdot 3{,}14 \ldots}{6} = 26{,}1797$$

und $$\frac{5^2 \cdot 3 \cdot 0{,}5773 \ldots}{4} = -\ \underline{10{,}8243}$$

Fläche des Bogens 15,3556,

d. h. 15 □ Fuß, 35 □ Zoll, 56 □ Linien.

(Vergl. §. 494. und §. 498.).

§. 504. **Die Fläche CABD Fig. 170, die von 2 krummen und 2 geraden Linien eingeschlossen ist, zu berechnen.**

Aufl. In kurzen Entfernungen miß die Stücke cb, bf, fh, so wie ba, fd, hg 2c., wodurch die Trapezia cbaD, bfda, fhgd u. s. w. entstehen, worin die krummen Seiten für gerade gelten können, und zerlege sie durch Diagonalen ca, bd, fg in Dreiecke, so läßt sich jedes leicht berechnen, und ihre Summe finden, welche = der sich schlängelnden Fläche ist.

Von dieser Beschaffenheit sind viele Ackerstücke auf einer Feldmark, das Bette eines Stroms u. dgl.

§. 505. **Die Fläche, welche ein parabolischer Bogen CGAHB Fig. 55. einschließt, zu finden.**

Aufl. Multiplicire die Höhe DA mit der halben Breite DB, und nimm das Product $\frac{4}{3}$ mal. Im

allge-

allgemeinen Formular $= \frac{b \cdot h \cdot 2}{3}$, worin b $=$ Breite CB; und h $=$ DA $=$ Höhe.

Z. B. Es sey b $= 134$; h $= 150$; dann ist $\frac{134 \cdot 150 \cdot 2}{3} = 13400$ Quadratmaaß.

Zu Gewölbebogen, auf denen große Lasten ruhen, ist der parabolische Bogen sehr zu empfehlen.

§. 506. Eine elliptische Fläche zu berechnen.

Aufl. Multiplicire die große Axe $=$ A mit der kleinen Axe $=$ a, und mit p $= 3,1415\ldots$; dividire das Product durch 4.

Formular. $F = \frac{A \cdot a \cdot p}{4}$.

Z. B. Es sey die große Axe A $= 145$; die kleine a $= 105$ Zoll, so ist $\frac{145 \cdot 105 \cdot 3,1415\ldots}{4}$ $= 11955,431$ □ Zoll, d. h. 1 □ Ruthe, 19 □ Fuß, 55 □ Zoll, 43 □ Linien, 1 □ Scrupel Decimalmaaß; nach zwölftheiligem Maaße müßte 11955 □ Zoll durch 144 zu □ Fußen, diese wieder durch 144 zu □ Ruthen gemacht werden.

Vielerlei Anwendung der Ellipse findet man in der Baukunst, bei Gefäßen, als Bottichen, Wannen, Becken ꝛc.

§. 507. Die Fläche der Eierlinie Fig. 100. zu finden.

Aufl. Diese Fläche besteht

1. in dem Halbkreis adcb, dessen Fläche $= \frac{R^2 \cdot p}{2}$,
2. in dem Sector abg, dessen Radius ab $=$ D, dessen Fläche $= \frac{D^2 \cdot p}{4}$,
3. in dem Sector bah, der dem vorigen gleich ist,
4. in dem Quadranten gfh, dessen Radius fg $=$ r, dessen

dessen Fläche $\frac{r^2 p}{4}$; $(r = D - \sqrt{2R^2}$, weil bf Hypotenuse, und $cb = cf = R)$.

Von der Summe dieser Flächen muß das $\triangle$ abf, dessen Fläche $= R^2$ abgezogen werden, weil sie zweimal mit gerechnet worden.

Wenn man diese verschiedenen Flächen zusammen setzt, und möglichst einfach ausdrückt, so erhält man folgendes

Formular $\frac{3R^2 . p}{2} + \frac{r^2 . p}{4} - R^2 =$ Fläche.

Z. B. Es sey $ab = 200 = D$; $R = cb = 100$; dann ist $r = 200 - \sqrt{2 . 100^2} = 200 - \sqrt{20000}$ $= 200 - 141,42 = 58,58$.

und $\frac{3 . 100^2 . 3,14 \ldots}{2} + \frac{58,58^2 . 3,14}{4} - 100^2 =$ Fläche $= 47100 + 2694 - 10000$; $= 49794 - 10000$ $= 39794$ Quadratmaaß.

§. 508. Den Flächenraum, den die Schneckenlinie §. 411. Fig. 101 einschließt, zu finden.

Aufl. Es sey $r = cd =$ Radius des kleinsten Halbkreises, so ist der Radius des untern Halbkreises tgh $= 2r$; des obern Halbkreises him $= 3r$; des untern mka $= 4r$; des obern alb $= 5r$. Aber vom Halbkreis mih muß def; von mka muß tgh; und von alb muß him abgezogen werden. Hiernach ist die Fläche des

$$1\text{sten Halbkr.} = \frac{r^2 p}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad = \frac{r^2 p}{2}$$

$$2\text{ten Halbkr.} = \frac{2^2 r^2 p}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad = \frac{4r^2 p}{2}$$

$$1.\text{Halbrings} = \frac{3^2 r^2 p}{2} = \frac{9r^2 p}{2} - \frac{r^2 p}{2} \;.\; = \frac{8r^2 p}{2}$$

$$2.\text{Halbrings} = \frac{4^2 r^2 p}{2} = \frac{16r^2 p}{2} - \frac{4r^2 p}{2} = \frac{12r^2 p}{2}$$

$$3.\text{Halbrings} = \frac{5^2 r^2 p}{2} = \frac{25r^2 p}{2} - \frac{9r^2 p}{2} = \frac{16r^2 p}{2}$$

$$\text{Summe} = \frac{41r^2 p}{2} = \text{Fläche.}$$

Man bemerkt leicht, daß die ersten Glieder in dieser Reihe allemal Halbkreise, die folgenden aber Halbringe sind; und daß die Werthe in der Progression 4, 8, 12, 16 rc. beständig zunehmen, wornach für jeden vorkommenden Fall die Anwendung leicht zu machen ist.

Diese Schneckenlinie ist von der des Archimedes §. 382. verschieden.

§. 509. Die Fläche jeder Figur, sie mag von geraden oder krummen Linien begränzt seyn, zu finden.

Aufl. Zerlege durch Hülfslinien die Figur in bekannte geradlinichte oder krummlinichte Figuren, berechne jede einzeln, und addire dieselben.

Wenn die Krümmung sich auf keine der bekannten krummen Linien bringen lassen will, so zerlege man sie in sehr kleine Dreiecke und berechne sie. Denn alsdann kann der Theil, der in einen solchen Triangel fällt, ohne großen Irrthum für geradlinicht gelten. Dabei ist zu vergleichen, was über die krummen Linien höherer Ordnungen gesagt worden ist.

IV. Vermischte Aufgaben über Linien- und Flächenmessung.

§. 510. Über einer gegebenen Linie AB Fig. 171. ein rechtwinklichtes Dreieck zu zeichnen, in welchem der rechte Winkel der gegebenen Seite gegenüber steht, und dessen Fläche einem gegebenen Quadrat Q gleich ist.

Aufl. Aus der Mitte der AB beschreibe einen Halbkreis, so wird jeder Peripheriewinkel ACB die verlangte Eigenschaft haben. Allein der Punct C ist hier zu finden, durch welchen die Höhe des Dreiecks bestimmt wird, Nennt man die Seite des Quadrats a; AB $=$ b; die Höhe des Dreiecks $=$ z, so soll nach der Bedingung $\frac{bz}{2} = a^2$; also $bz = 2a^2$, und

$z = \frac{2a^2}{b} = AD$. Von AD ziehe eine Parallele mit AB, so wird der Durchschnitt mit dem Kreise den Punct C geben; und $CP = z =$ Höhe seyn. Den Abstand $AP = v$ findet man also:

Nach der Gleichung für den Kreis ist $AP : PC = PC : PB$, oder

$$v : z = z : b - v;\ z^2 = bv - v^2$$

$$v^2 - bv = -z^2$$

$$v^2 - bv + \frac{b^2}{4} = \frac{b^2}{4} - z^2$$ Siehe quadrat. Gleich. §. 147. u. f.)

$$\surd)\quad v - \frac{b}{2} = \surd\left(\frac{b^2}{4} - z^2\right)$$

$$AP = v = \frac{b}{2} \mp \surd\left(\frac{b^2}{4} - z^2\right).$$

Um die Seite x zu finden: $v^2 + z^2 = x^2$, und $x = \surd(v^2 + z^2)$. Weil $y \cdot x = a^2$, so ist $y = \frac{a^2}{x}$.

Z. B. Es sey $a = 4$, $b = 10$; so ist $z = \frac{2 \cdot 4^2}{10} = \frac{32}{10} = 3{,}2$; $v = \frac{10}{2} - \surd\left(\frac{10^2}{4} - 3{,}2^2\right) = 5 - \surd(25 - 10{,}24) = 5 - \surd(14{,}76) = 5 - 3{,}84 = 1{,}16 = v$.

§. 511. **Wenn in einem rechtwinklichten △ ABC Fig. 172. die eine Seite AC = b, und der Unterschied der beiden andern = d bekannt ist, die Cathete BC = x und die Hypotenuse zu finden.**

Aufl. Mit BC beschreibe aus B den Bogen CD, so ist $BD = BC = x$, und $AB = x + d$.

Nun

Nun ist nach dem pythagorischen Lehrsatz:

$$AC^2 + CB^2 = AB^2$$

$$\text{d. i.} = b^2 + x^2 = (x+d)^2$$

$$b^2 + x^2 = x^2 + 2dx + d^2$$

$$b^2 = d^2 + 2dx$$

$$b^2 - d^2 = 2dx$$

$$\frac{b^2 - d^2}{2d} = x = BC$$

$$\text{und } d + \frac{b^2 - d^2}{2d} = \frac{d^2 + b^2}{2d} = AB.$$

Es sey $b = 9$; $d = 4$; so ist $\frac{9^2 - 4^2}{8} = 8{,}125 = x$

$$\begin{array}{r} +4 \quad = d \\ \hline 12{,}125 = AB. \end{array}$$

§. 512. Aus der Hypotenuse im $\triangle$ ABC Fig. 173. und dem Unterschiede der beiden Catheten $AC - BC = d$, die Seite $AC = x$ und $BC = y$ zu finden.

Aufl. Nenne die Hypotenuse $AB = c$, und mache $CD = CB$, so ist $d = x - y$. Nun ist $AB^2 = AC^2 + BC^2$, d. i. $c^2 = x^2 + y^2$, und $x^2 = c^2 - y^2$. Aber $d = x - y$, also $x = d + y$

$$\text{und } x^2 = d^2 + 2dy + y^2$$

diese beiden Werthe von x^2 geben eine neue Gleichung:

$$c^2 - y^2 = d^2 + 2dy + y^2$$

$$c^2 = d^2 + 2dy + 2y^2 \quad (:2$$

$$\frac{c^2 - d^2}{2} = dy + y^2$$

$$\frac{c^2 - d^2}{2} + \frac{d^2}{4} = y^2 + dy + \frac{d^2}{4}$$

$$\sqrt{\frac{c^2}{2} - \frac{d^2}{2} + \frac{d^2}{4}} = \frac{c^2}{2} - \frac{d^2}{4} = y^2 + dy + \frac{d^2}{4}$$

$$\sqrt{\left(\frac{c^2}{2} - \frac{d^2}{4}\right)} - \frac{d}{2} = y = BC.$$

Z. B. Es sey $c = 36$; $d = 10$, so ist BC

$$= \sqrt{\left(\frac{36^2}{2} - \frac{10^2}{4}\right)} - \frac{10}{2} = \sqrt{(648 - 25)} - 5$$

$= 25 - 5 = 20 = y$, und $AC = d + y = 30$.

§. 513. Aus der Hypotenuse $AB = d$ Fig. 174., und der senkrechten $CD = p$, die auf der Hypotenuse abgeschnittenen Stücke x und y, so wie beide Catheten zu finden.

Aufl. Weil sich durch die 3 Puncte ACB ein Kreis ziehen läßt, worin $AB = d =$ Diameter, so ist $DB = d - x$, und

$x : p = p : y$ od. $d - x$; und $p^2 = dx - x^2$

$$x^2 - dx = -p^2$$

das Quadrat ergänzt $x^2 - dx + \frac{d^2}{4} = \frac{d^2}{4} - p^2$

$$\sqrt{}$$

$$x - \frac{d}{2} = \sqrt{\left(\frac{d^2}{4} - p^2\right)}$$

$$AD = x \quad = \frac{d}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{d^2}{4} - p^2\right)}.$$

Es sey $AB = d = 36$

$CD = p = 16,8$; so ist $\frac{36}{2} - \sqrt{\left(\frac{36^2}{4} - 16,8^2\right)}$

$= 18 - \sqrt{(324 - 282)} = 18 - \sqrt{42}$

$= 18 - 6,5 = 11,5 = x = AD$

und $18 + 6,5 = 24,5 = y = DB$.

Die Catheten ergeben sich leicht, denn die durch das Perpendikel entstandenen 3 Triangel sind einander ähnlich; und

$d : AC = AC : x$, folglich ist $AC = \sqrt{dx}$

und $d : CB = CB : y$, daher ist $CB = \sqrt{dy}$.

Man wird nach vorigen Werthen die $AC = 20,3$ und die $CB = 29,7$ finden.

§. 514. Wenn außer der Hypotenuse $AB = c$ Fig. 175. das Verhältniß der beiden Catheten $AC : CB = m : n$ gegeben ist, die beiden Catheten zu finden.

Aufl.

Aufl. Nenne die gesuchten Catheten x und y, und suche auch hier aus den Umständen 2 Gleichungen zu bekommen, woraus sich dann jede unbekannte Größe wird absondern lassen.

Nach der Bedingung ist $x^2 = c^2 - y^2$, weil $\triangle$ ABC rechtwinklicht; und

$$x : y = m : n$$

$$xn = yn$$

$$x^2n^2 = y^2 m^2 \quad \text{die Gleichung in's Quadrat erhoben;}$$

$$x^2 = \frac{y^2 m^2}{n^2}; \quad \text{nun die Werthe für } x^2 \text{ in die Gleichung gebracht.}$$

$$c^2 - y^2 = \frac{y^2 m^2}{n^2}$$

$$c^2n^2 - y^2n^2 = y^2m^2; \quad c^2n^2 = y^2m^2 + y^2n^2$$

$$c^2n^2 = (m^2 + n^2)\, y^2$$

$$\frac{c^2n^2}{m^2+n^2} = y^2$$

$$\text{die Cathete BC} = \sqrt{\frac{c^2 n^2}{m^2+n^2}} = y = \frac{cn}{\sqrt{(m^2+n^2)}}.$$

Sondert man aus den beiden Hauptgleichungen für y^2 die Werthe ab und setzt sie gleich, so findet sich

$$x = \frac{cm}{\sqrt{(m^2+n^2)}} = AC.$$

Es sey $c = 36$; $m = 3$; $n = 2$; so ist

$$\frac{36 . 2}{\sqrt{(3^2+2^2)}} = \frac{72}{3,6} = 20 = BC$$

$$\text{und } \frac{36 . 3}{\sqrt{(3^2+2^2)}} = \frac{108}{3,6} = 30 = AC.$$

§. 515. Die Hypotenuse AB = c Fig. 175. und die Summe der Catheten sind gegeben; man will die Catheten x und z selbst finden.

Aufl.

Aufl. Im rechtwinklichten △ABC ist $c^2 = y^2 + z^2$;
also $c^2 - z^2 = x^2$.
und nach der Bedingung $x + z = a$ (Summe):
also $a - z = x$
und $(a - z)^2 = x^2$,

woraus die Gleichung entsteht:

$$c^2 - z^2 = a^2 - 2az + z^2$$

$$c^2 = a^2 - 2az + 2z^2 \quad (:2$$

$$\tfrac{1}{2}c^2 - \tfrac{1}{2}a^2 = z^2 - az$$

$\tfrac{1}{4}a^2$ addirt. $$\tfrac{1}{2}c^2 - \tfrac{1}{2}a^2 + \tfrac{1}{4}a^2 = z^2 - az + \tfrac{1}{4}a^2$$

$$\tfrac{1}{2}c^2 - \tfrac{1}{4}a^2 = z^2 - az + \tfrac{1}{4}a^2$$

$\surd$ $$\sqrt{\left(\tfrac{1}{2}c^2 - \tfrac{1}{4}a^2\right)} = z - \tfrac{1}{2}a$$

$$\tfrac{1}{2}a \mp \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}c^2 - \tfrac{1}{4}a^2\right)} = z = BC$$

und $\tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}c^2 - \tfrac{1}{4}a^2\right)} = x = AC$.

Nimmt man $a = 50$; $c = 36$, so erhält man $z = 20{,}2$, und $x = 29{,}8$.

§. 516. Aus dem gegebenen Flächeninhalt $= a$ eines rechtwinklichten Dreiecks Fig. 176., und der Summe seiner Seiten, oder dem Perimeter $= p$, seine Seiten zu finden.

Aufl. Inh. des Dreiecks $= 2a = xz$, und $4a = 2xz$
und weil das Dreieck rechtwinklicht, so ist $y^2 = x^2 + z^2$

beide Gleichungen addirt $4a + y^2 = x^2 + 2xz + z^2$

Nach der Aufgabe ist $x + y + z = p$

$$x + z = p - y$$

in's Quadrat erhoben $x^2 + 2xz + z^2 = p^2 - 2py + y^2$.

Da in zwei Gleichungen zwei Seiten einander gleich sind, so müssen es die andern auch seyn; daher

$$4a + y^2 = p^2 - 2py + y^2$$

$$4a = p^2 - 2py$$

$$4a - p^2 = -y2p$$

$$y2p = p^2 - 4a$$

$$y = \frac{p^2 - 4a}{2p} = AC.$$

Um

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Um die Catheten zu finden, nehme $p - y = m$, so ist

$$m = x + z, \quad \text{und die } x \cdot z = 2a, \text{ also } x = \frac{2a}{z}$$

$$m = \frac{2a}{z} + z \qquad (z$$

$$mz = 2a + z^2$$

$$-2a = z^2 - mz$$

$$\tfrac{1}{4}m^2 - 2a = z^2 - mz + \tfrac{1}{4}m^2$$

$$\surd \quad \sqrt{(\tfrac{1}{4}m^2 - 2a)} = z - \tfrac{1}{2}m$$

$$\tfrac{1}{2}m + \sqrt{(\tfrac{1}{4}m^2 - 2a)} = z = BC,$$ wenn das Minuszeichen;

und $= x = AB$, wenn das Pluszeichen gilt.

Z. B. Wenn die Fläche $a = 6$; die Summe aller Seiten $p = 12$; so findet man $y = 5$; also $p - y = m = 7$; $x = 4$; $z = 3$.

§. 517. In dem Catheten BA des rechtwinklichten Dreiecks CAB Fig. 177 soll der Punct D gefunden werden, auf welchem die senkrechte DE die mittlere Proportionallinie zwischen den abgeschnittenen Stücken $BD = x$ und DA ist.

Gegeben sind beide Catheten $BA = a$ und $AC = b$.

Es soll sich verhalten $x : DE = DE : a - x$

also ist $DE^2 = ax - x^2$

Und in den ähnlichen Dreiecken gilt $x : DE = a : b$

also $DE = \dfrac{bx}{a}$

und $DE^2 = \dfrac{b^2x^2}{a^2}$

Diese beiden Werthe für DE^2 geben die Gleichung:

$$ax - x^2 = \frac{b^2x^2}{a^2}$$

$$a^3x - a^2x^2 = b^2x^2$$

$$a^3 - a^2x = b^2x \quad (:x$$

$$a^3 = b^2x + a^2x = (b^2 + a^2)x$$

$$\frac{a^3}{b^2 + a^2} = x = BD.$$

§. 518. Der Flächeninhalt eines schiefwinklichten △ ABC Fig. 178, die senkrechte Höhe CD = h, und das Stück BD = d ist gegeben; man sucht die Seiten.

Aufl. Weil die Auflösung nur leicht, so setzen wir nur die Resultate her. Der Flächeninhalt = a genommen.

$$BC = \sqrt{(d^2 + h^2)}$$

$$AB = \frac{2a}{h}; \text{ und } x = AB - d$$

$$AC = \sqrt{(x^2 + h^2)}.$$

§. 519. Aus zwei Seiten eines Dreiecks und dem eingeschlossenen Winkel den Flächenraum zu finden. Fig. 180.

Aufl. Gegeben ist AB = a; AC = b; < BAC = m.

$$\text{Sin. tot.} : a = \text{Sin. m} : BD; \text{ und } BD = \frac{a . \text{Sin. m}}{\text{Sin. tot.}}$$

$$\text{Der Flächenraum} = \frac{AC . BD}{2} \text{ oder } \frac{a . b . \text{Sin. m}}{2}.$$

Wenn nun in einem andern Dreiecke die nämlichen Stücke A, B, M heißen, so ist auch seine Fläche

$$= \frac{A . B . \text{Sin. M}}{2} \text{ und } \triangle : \triangle' = \frac{a . b . \text{Sin. m}}{2} : \frac{A . B . \text{Sin. M}}{2},$$

und wenn m = M, so ist △ : △′ = a . b : A . B,

d. h.

d. h. die Inhalte zweyer Dreiecke oder Parallelogramme, die einen gleichen Winkel haben, verhalten sich zu einander, wie die Producte aus den Seiten, die den gleichen Winkel einschließen.

§. 520. Das Dreieck ABC. Fig. 181 soll aus dem Puncte D durch die Linie DE so getheilt werden, daß sich das ganze Dreieck zum abgeschnittenen Theil, wie m : n verhalte.

Aufl. Da die △ ABC, und DBE einen gleichen Winkel B haben, so gilt nach vorigem §.

$$m : n = AB \,.\, BC : DB \,.\, BE$$
$$= a \cdot d : d \,.\, x$$

$$\text{und} \quad \frac{a \,.\, b \,.\, n}{d \,.\, m} = x = BE.$$

Wenn BE größer würde, als BC, so fiele DE auf AC.

Z. B. nach DF. Dann nenne man $AF = z$; $AC = c$; $AB = a$; $DB = d$, und $z = AE$

$$= \frac{(m - n) \,.\, a \,.\, c}{m \,.\, (a - d)}.$$

§. 521. Das Dreieck ABC Fig. 182. nach einem gegebenen Verhältniß m:n so zu theilen, daß die Theilungslinie de mit einer Seite parallel bleibt.

Aufl. Weil hier immer ähnliche △ bleiben, so kommt es nur darauf an, die Bd zu finden.

$$\triangle ABC : \triangle dBe = AB^2 : Bd^2$$

d. i. $m \;:\; n = AB^2 : Bd^2$; und Bd

$$= \sqrt{\frac{n \,.\, AB^2}{m}} = AB \,.\, \sqrt{\frac{n}{m}}.$$

Soll das Dreieck in mehrere Theile getheilt werden, so wird nur n sich ändern, und für jedes n ein anderer Abstand Bd gefunden.

Z. B. Ein Ackerstück, welches die Form eines Dreiecks hat, solle durch Parallelen in 5 gleich große Theile

Theile getheilt werden. Der Flächenraum betrage 120 Quadratruthen, folglich $\frac{1}{5} = 24$ □ Ruthen; die Seite $AB = 12$ Ruthen.

Wendet man nun das Formular $AB \cdot \sqrt{\frac{n}{m}}$ an, so ist bei der ersten Parallele de die $n = 24$; m immer $= 120$, also $12 \cdot \sqrt{\frac{24}{120}} = 12\sqrt{\frac{1}{5}} = 12 \cdot \sqrt{\frac{1}{5}}$,

$= \frac{12}{\sqrt{5}} = 5{,}36 = Bd$,

und $12\sqrt{\frac{48}{120}} = 7{,}6\ldots\ Bf$, wobei $n = 48$,

und $12\sqrt{\frac{72}{120}} = 9{,}3\ldots\ Bh$, wobei $n = 72$,

und $12 \cdot \sqrt{\frac{96}{120}} = 10.7\ldots\ Bk$, wobei $n = 96$.

Oder durch die Proportionen:

$5 : 1 = 12^2\ (= 144) : Bd^2$, und $Bd = \sqrt{\frac{144}{5}}$,

$5 : 2 = 144 \qquad : Bf^2$, und $Bf = \sqrt{\frac{2 \cdot 144}{5}}$,

u. s. w. $\qquad Bh = \sqrt{\frac{3 \cdot 144}{5}}$,

$Bk = \sqrt{\frac{4 \cdot 144}{5}}$.

§. 522. Von einem Trapezium ABEF Fig. 183. mit zwei parallelen Seiten ein Stück FECD von gegebenem Inhalt $= m$ abzuschneiden.

Nenne $AB = a$; $EF = b$; $DC = y$; die senkrechte Höhe $FG = h$. Es kommt darauf an, die $FJ = x$, oder den Punct J zu finden, durch welche die Parallele gelegt werden muß. Daher ziehe man nach FH parallel mit EB; und dann gilt in ähnlichen △

$$AH : DK = FH : FK, \text{ oder wie } FG : FJ$$

d. i. $a - b : y - b = h : x$.

$$\frac{(y-b) \cdot h}{a-b} = x.$$

Nun ist die Fläche DFEC bekanntlich $= \frac{b+y}{2} \cdot x = m$

und $x = \frac{2m}{b+y}$.

Diese Werthe von x geben eine neue Gleichung, woraus $y = \sqrt{\left(\frac{2m(a-b)}{h} + b^2\right)}$; und $x = \frac{2m}{y+b}$ gefunden wird.

Es sey $h = 93$, $a = 162$, $b = 86$, $m = 3844$; dann kommt für $y = DC = 117$ und für $x = FJ = 37{,}87$.

§. 523. Vom Trapezium ABCD Fig. 184., worin 2 parallele Seiten, soll aus dem Puncte T durch die Linie TE ein Stück von gegebenem Inhalt $= n$ abgeschnitten (also der Punct E oder die BE $= x$) gefunden werden.

Nenne $AD = a$, $BC = b$, $AB = c$, $CD = d$, $AT = f$, $BE = x$, Höhe $= H$.

Inhalt des Trapeziums ABCD $= \frac{(a+b)}{2} \cdot H = m$.

Inhalt des Trapeziums ABET $= \frac{f+x}{2} \cdot H$,

und nach der Bedingung ist

$$\frac{a+b}{2} \cdot H : \frac{f+x}{2} \cdot H = m : n$$

$$a + b : f + x = m : n$$

$$\frac{(a+b) \cdot n}{m} = f + x; \text{ und } \frac{(a+b) \cdot n}{m} - f = x,$$

Wenn

Wenn $x = 0$ oder $= b$ wird, so fällt E in B oder in C; wird x negativ, oder größer als b gefunden, so fällt die Theilungslinie auf BA oder CD, und das abzuschneidende Stück ist ein Dreieck, entweder AFT, oder TDG; wobei AF oder DG zu suchen ist. Man wird für

$$AF = \frac{(a+b)\,nc}{fm}; \text{ und } DG = (m-n)\frac{(a+b)\,d}{(a-f)\,m} \text{ finden.}$$

Z. B. Wenn $a = 162$, $b = 86$, $c = 98$, $f = 29$, $h = 93$, $m = 3$, $n = 1$	so ist $x = \frac{(162+86)\,.\,1}{3} - 29 = 53{,}6 = BE$. Nimmt man $m = 20$, und $n = 1$, so findet man die $AF = 41{,}9$. Wenn $n = 15$ genommen wird, und $m = 20$ bleibt, so ist $DG = 45{,}7$.

§. 524. Jedes Trapezium (Fig. 185.) durch eine gerade Linie aus einem gegebenen Puncte auf einer seiner Seiten nach einem gegebenen Verhältnisse $m : n$ zu theilen.

Im Trapezium ABCD sey E der Theilungspunct, durch den die Linie EF so gelegt werden soll, daß

$$ABCD : CDEF = m : n.$$

Man bestimme auf irgend eine Weise die $AG = a$, $BG = b$, $DG = c$, $CG = d$, und nenne $EG = f$; der Punct F wird gesucht, oder sein Abstand $GF = x$.

Nach §. 519. gilt:

$$\triangle ABG : \triangle CDG = AG\,.\,BG : DG\,.\,CG$$
$$= a\,.\,b : c\,.\,d$$

daher $\triangle ABG - \triangle CDG : \triangle CDG = a.b - c.d : c.d$

d. i. $ABCD : \triangle CDG = a.b - c.d : c.d$

Und $\triangle EFG : \triangle CDG = f.x : c.d$

$$\triangle EFG - \triangle CDG : \triangle CDG = fx - cd : cd$$

$$= CDEF : \triangle CDG = fx - cd : cd$$

Also $ABCD : CDEF = ab - cd : fx - cd$

$$= \quad m \quad : \quad n$$

folglich $ab - cd : fx - cd = m : n$, woraus x zu finden.

$$(ab - cd)\,n = (fx - cd)\,m$$

$$\frac{(ab - cd)\,n}{m} + cd = fx$$

$$\frac{(ab - cd)\,n}{fm} + \frac{cd}{f} = x = GF.$$

§. 525. Eine gerade Linie $AB = a$, in G so zu theilen, daß das Rechteck aus den Stücken AG und GB einem gegebenen Quadrat gleich sey. Fig. 186.

$AB = a$
$AG = x$
$BG = a - x$
Seite des Quadrats $= b$.

Nach der Bedingung soll $(a - x) \,.\, x = b^2$

$$x^2 - ax = b^2$$

$$a^2 - ax + \frac{a^2}{4} = b^2 + \frac{a^2}{4}$$

$$\sqrt{} \quad x - \tfrac{1}{2}a = \sqrt{(b^2 + \tfrac{1}{4}a^2)}$$

$$x = \tfrac{1}{2}a + \sqrt{(b^2 + \tfrac{1}{4}a^2)}.$$

§. 526. Der Inhalt eines gleichseitigen Dreiecks ist gegeben $= a$; man sucht eine Seite $= x$, das Perpendikel $= p$. Fig. 187.

Aufl. Im gleichseitigen Dreieck (nach §. 495.) verhält sich eine Seite zum Perpendikel, wie

$$1 : 0{,}866 = x : p$$

Also ist $x = \frac{p}{0{,}866}$

und $p = x \,.\, 0{,}866$.

Del

Der Inhalt des Dreiecks $= \frac{x \cdot p}{2} = a$; und $x = \frac{2a}{p}$

und $p = \frac{2a}{x}$.

Nimmt man nun die Werthe für $x = \frac{p}{0{,}866} = \frac{2a}{p}$

so findet man das Perpend. $= p$. $\begin{cases} p^2 = 2 \cdot a \cdot 0{,}866 \\ p = \sqrt{(2a \cdot 0{,}866)}. \end{cases}$

Auf gleiche Weise ergiebt sich x, wenn man die Werthe für p in eine Gleichung setzt. Nämlich:

$$x \cdot 0{,}866 = \frac{2a}{x}$$

$$x^2 = \frac{2a}{0{,}866}.$$

Z. B. Es sey der Inhalt $a = 32$ □ Fuß gegeben, so muß jede Seite

$$x = \sqrt{\frac{2 \cdot 32}{0{,}866}} = \sqrt{73{,}9} = 8{,}6$$

$$p = \sqrt{(2 \cdot 32 \cdot 0{,}866)} = \sqrt{55{,}424} = 7{,}447$$

$=$ dem Perpendikel.

§. 527. Zwei Linien (x und y) zu finden, deren Quadrate zusammen genommen einem gegebenen Quadrate $= a^2$, und deren Rechteck einem gegebenen Rechteck $= b \cdot c$ gleich sind.

Aufl. $\frac{y^2 + x^2 = a^2}{x^2 = a^2 - y^2}$; und $\frac{x \cdot y = bc}{x = \frac{bc}{y}}$, u. $x^2 = \frac{b^2c^2}{y^2}$

$$a^2 - y^2 = \frac{b^2c^2}{y^2}$$

$$a^2y^2 - y^4 = b^2c^2 = y^4 - a^2y^2 = -b^2c^2$$

$$y^4 - a^2y^2 + \tfrac{1}{4}a^4 = \tfrac{1}{4}a^4 - b^2c^2$$

$$\sqrt{} \quad y^2 - \tfrac{1}{2}a^2 = \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^4 - b^2c^2)}$$

$$y^2 = \tfrac{1}{2}a^2 + \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^4 - b^2c^2)}$$

$$y = \sqrt{(\tfrac{1}{2}a^2 \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^4 - b^2c^2)})}$$

Die x hat das -- Zeichen vor $\sqrt{}$, und gleiches Formular.

§. 528. Diese Beispiele mögen hinreichend seyn, zu zeigen, wie man bei ähnlichen Aufgaben zu verfahren habe. Es kommt hier, wie bei jeder algebraischen Aufgabe, hauptsächlich darauf an, daß man das Gegebene und Gesuchte gehörig unterscheide, aus den Umständen so viel Gleichungen herleite, als unbekannte Größen darin vorkommen, und einige Gewandheit in Auflösung der Gleichungen besitze. Wer sich aber in der Entwickelung solcher Aufgaben, in welchen die Algebra auf die Geometrie zweckmäßig angewandt ist, gefällt, dem ist zu empfehlen:

Thomas Bugge Anleitung zur mathematischen Geometrie, Trigonometrie und höheren Geometrie; übersetzt von Tobiesen. 436 Seiten, 4 Kupfertafeln. Preis 1 Rthlr. 16 Gr.

aus welchem trefflichen Werke die vorstehenden Aufgaben genommen sind.

Weil es im gemeinen Leben oft vorkommt, Flächen von bekannter Größe in andere geometrische Figuren zu verwandeln, so wollen wir darüber in dem folgenden Abschnitte noch die nothwendigsten Formeln mittheilen, mittelst deren jede dahin gehörige Aufgabe leicht zu lösen ist.

V. Verwandlung der Figuren.

§. 529. Unter Verwandlung einer Figur verstehen wir die Veränderung, die sich mit der Form oder Umfassung einer Fläche machen läßt, ohne ihren Quadratinhalt zu vermehren oder zu vermindern. Die zu verändernde Fläche ist allemal bekannt; und von derjenigen, in welche sie verwandelt werden soll, ist die eine Bedingung, oder eine Größe gegeben, und die andere durch Rechnung oder Zeichnung zu finden. Das Aufsuchen der unbekannten Größe durch Zeichnung ist oft sehr weitläufig und nicht einmal bei allen Figuren möglich; mittelst der Rechnung aber findet man sie nicht nur sehr bald, sondern

dern auch viel genauer. — Bei dieser Verwandlung beobachte man folgende Regel: Auf die eine Seite einer Gleichung schreibe man den gegebenen Flächeninhalt $= F$, oder die Größen, woraus er besteht; auf die andere Seite schreibe man die Formel für den Flächenraum derjenigen Figur, in welche die Verwandlung geschehen soll; lege dann den bekannten Größen ihre Werthe unter, und sondere die unbekannten gehörig ab. Z. B.

Ein Garten von 120 □ Ruthen, der sehr winklicht ist, und daher viel Umzäunung braucht, soll in ein Rechteck verwandelt werden, dessen eine Seite 10 Ruthen ist; so ist

Gegebener Inhalt = Formel für das Rechteck (s. §. 488.)

$$120 = l \,.\, b$$

Man fragt, wie lang muß der Garten werden, wenn er 10 Ruthen breit ist? und sucht also l, oder die Länge.

Jetzt ist $120 = l \,.\, 10$ und l abgesondert

$$\frac{120}{10} = 12 = l$$

d. h. der Garten muß bei einer Breite von 10 Ruthen 12 Ruthen lang werden.

Die folgenden Formulare sind auf diese Weise gefunden, und für diejenigen, die nicht selbst die Gleichung lösen können oder wollen, als eine Hülfstafel anzusehen.

§. 530. Den Flächenraum F zu verwandeln

in ein Quadrat. Formel $\sqrt{F} = a$.

Die Quadratwurzel aus dem gegebenen Flächenraum ist die Größe einer Seite des Quadrats.

§. 531. in ein Rechteck. Formel. $\frac{F}{a} = b$.

Mit der gegebenen oder gewählten Seite a des Rechtecks dividire den gegebenen Flächenraum, so ist der Quotient die andere gesuchte Seite b.

§. 532. in einen Rhombus oder Rhomboides. Formel $\frac{F}{g} = h$; $\frac{F}{h} = g$.

Mit der gegebenen Seite g dividire in den Flächenraum, so erhält man die senkrechte Höhe h; dividirt man mit der Höhe, so kommt die Grundlinie g.

§. 533. in ein rechtwinklichtes Dreieck. Formel: $\frac{2F}{g} = h$; und $\frac{2F}{h} = g$.

Dividire die doppelt genommene Fläche mit der Grundlinie g, so giebt der Quotient die Höhe h, oder die andere Cathete; dividirt man aber mit der Höhe, so ist der Quotient $= g =$ der Grundlinie.

§. 534. in ein schiefwinklichtes Dreieck. Form: $\frac{2F}{g} = h$; und $\frac{2F}{h} = g$.

Verfahre, wie vorher §. 533., und bemerke, daß h immer die Größe des aus der gegenüberstehenden Winkelspitze auf die Grundlinie gefällten Perpendikels bedeutet.

§. 535. in ein Trapez, mit 2 Parallelen G und g. Form: $G + g = \frac{2F}{h}$ und $h = \frac{2F}{G+g}$; ferner $G = \frac{2F}{h} - g$; und $g = \frac{2F}{h} - G$.

Dividire die doppelte Fläche durch die Höhe, so ist der Quotient $=$ der Summe der beiden Grundlinien; dividirt man mit dieser Summe $G + g$ die doppelte Fläche, so erscheint die Höhe h.

Wenn eine der Grundlinien unbekannt ist, so wird sie gefunden, indem man die doppelte Fläche durch die Höhe dividirt, und vom Quotienten die gegebene Grundlinie abzieht.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

§. 336. in ein jedes Vieleck von n Seiten.

Formeln. Die Seite $m = \sqrt{\left(\frac{2F \,.\, 2 \,.\, \mathrm{Sin.}\, \frac{1}{2} c}{n \,.\, \mathrm{Cos.}\, \frac{1}{2} c}\right)}$,

das Perpendikel $p = \sqrt{\left(\frac{2F \,.\, \mathrm{Cos.}\, \frac{1}{2} c}{n \,.\, 2 \,.\, \mathrm{Sin.}\, \frac{1}{2} c}\right)}$,

der Halbmesser $r = \sqrt{\left(\frac{1}{4} m^2 + p^2\right)}$.

Multiplicire den doppelten Flächenraum mit dem doppelten Sinus des halben Centriwinkels c; dividire dies Product durch die Anzahl der Seiten, die mit dem Cosinus des halben Centriwinkels multiplicirt sind; ziehe nun aus dem Quotienten die Quadratwurzel, so erhält man die Seite m des Vielecks.

Der Centriwinkel wird gefunden, wenn man mit der Anzahl der Seiten in 360° dividirt; oder $c = \frac{360}{n}$.

Die Seite eines Vielecks = dem doppelten Sin. des halben Centriwinkels; der Cosinus desselben Winkels = dem Perpendikel p. Und die Fläche eines Vielecks $= \frac{m \,.\, p \,.\, n}{2} = F$; also ist $\frac{2F}{n} = mp$; und $\frac{2F}{m.n} = p$. Ferner $p : \frac{1}{2} m = \mathrm{Cos.}\, \frac{1}{2} c : \mathrm{Sin.}\, \frac{1}{2} c$; d. i. $p : m = \mathrm{Cos.}\, \frac{1}{2} c : 2\, \mathrm{Sin.}\, \frac{1}{2} c$, folglich ist $p = \frac{m \,.\, \mathrm{Cos.}\, \frac{1}{2} c}{2 \,.\, \mathrm{Sin.}\, \frac{1}{2} c}$. Setzt man diese Werthe von p in eine Gleichung, so hat man

$$\frac{2F}{m \,.\, n} = \frac{m \,.\, \mathrm{Cos.}\, \frac{1}{2} c}{2 \,.\, \mathrm{Sin.}\, \frac{1}{2} c},$$

$$2F \,.\, 2 \,.\, \mathrm{Sin.}\, \tfrac{1}{2} c = m^2 \,.\, n \,.\, \mathrm{Cos.}\, \tfrac{1}{2} c$$

$$\sqrt{\left(\frac{2F \,.\, 2 \,.\, \mathrm{Sin.}\, \frac{1}{2} c}{n \,.\, \mathrm{Cos.}\, \frac{1}{2} c}\right)} = m.$$

Auf gleiche Weise sind die andern beiden Formulare für p und r gefunden.

In einem bestimmten Vielecke sind Sin. ½ c und Cos. ½ c beständige Größen. Z. B. in allen Zwölf-
ecken

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

ecken ist der doppelte Sin. $\frac{1}{2}$ c $=$ 0,5176; und Cos. $\frac{1}{2}$ c $=$ 0,9659. Daher läßt sich eine Tafel geben, in welcher man diese Größen findet, und die bei solchen Verwandlungen besonders bequem ist, wenn man keine logarithmische Tafeln hat.

Im Dreieck ist n $=$ 3;	2. Sin. $\frac{1}{2}$ c $=$	1,732;	Cos. $\frac{1}{2}$ c $=$ 0,5
Viereck — 4;	— —	1,4142	— — 0,7071
Fünfeck — 5;	— —	1,1755	— — 0,809
Sechseck — 6;	— —	1,	— — 0,866
Siebeneck — 7;	— —	0,8678	— — 0,901
Achteck — 8;	— —	0,7653	— — 0,9239
Neuneck — 9;	— —	0,684	— — 0,9397
Zehneck — 10;	— —	0,618	— — 0,951
Eilfeck — 11;	— —	0,5635	— — 0,9595
Zwölfeck — 12;	— —	0,5176	— — 0,9659
Sechzehneck — 16;	— —	0,3901	— — 0,9808
Zwanzigeck — 20;	— —	0,3128	— — 0,9876
24eck — 24;	— —	0,261	— — 0,9914

(Das Drei- und Viereck sind deshalb hier mit aufgenommen worden, weil sie wie Vielecke im Kreise beschrieben werden können.)

Der Gebrauch dieser Tafel ist leicht zu fassen. In das allgemeine Formular trägt man die in der Tafel befindlichen Werthe, und rechnet damit, wie es die Vorschrift fordert. Z. B. Es sey der Flächenraum 32 □ Fuß in ein reguläres Fünfeck zu verwandeln; man fragt: wie groß ist eine Seite, das Perpendikel aus dem Centro auf die Seite, und der Radius des Kreises, worin es beschrieben werden kann?

Allgemeines Formular.

$$m = \sqrt{\left(\frac{2F \,.\, 2 \,.\, \text{Sin.} \frac{1}{2} c}{n \,.\, \text{Cos.} \frac{1}{2} c}\right)},$$

Besonderes Formular.

mit besondern Werthen $= m = \sqrt{\left(\frac{2 \,.\, 32 \,.\, 1{,}1755}{5 \,.\, 0{,}809}\right)}$

$$= \sqrt{\frac{75{,}232}{4{,}045}} = 4{,}3128 =$$ einer Seite des Fünfecks.

p $=$

$$p = \sqrt{\left(\frac{2 \cdot F \, \text{Cos.} \, \frac{1}{2} c}{n \cdot 2 \, \text{Sin.} \, \frac{1}{2} c}\right)},$$ d. i., nachdem die besond. Werthe untergelegt, $$= \sqrt{\left(\frac{2 \cdot 32 \cdot 0{,}809}{5 \cdot 1{,}1756}\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{51{,}776}{5{,}878}\right)} = 2{,}9682 = p.$$

$r = \sqrt{(\frac{1}{4} m^2 + p^2)}$, oder durch die Proportion
$\text{Cos.} \, \frac{1}{2} c : 1 = p : r = 0{,}809 : = 2{,}9682 : r;$

$$= \frac{2{,}9682}{0{,}809} = 3{,}6687.$$

Der Radius, worin das Fünfeck gezeichnet werden muß, ist also $= 3$ Fuß, 6 Zoll, 6 Linien, $8\frac{7}{10}$ Scrupel.

Wollte man nun den Flächenraum 32 □ Fuß in ein gleichseitiges Dreieck verwandeln, so wäre das Formular

für die Seite $m = \sqrt{\left(\frac{2 \cdot 32 \cdot 1{,}732}{3 \cdot 0{,}5}\right)}$

$$= \sqrt{\frac{4}{3} \cdot 32 \cdot 1{,}732}$$ u. s. w.

Anmerk. Im gleichseitigen Dreieck fällt das Perpendikel p auf die Mitte von m, folglich ist

erstlich $\frac{p \, m}{2} = F$, und $p = \frac{2F}{m}$,

zweitens $p^2 = m^2 - \frac{m^2}{4}$ nach dem pythag. Lehrsatz

$$= p^2 = \frac{3m^2}{4} = \frac{m^2}{4} \cdot 3$$

$$p = \frac{m}{2} \cdot \sqrt{3}$$

Nun war p auch gleich $\frac{2F}{m} = \frac{m}{2} \cdot \sqrt{3}$ (.m

$$2F = \frac{m^2}{2} \sqrt{3} \quad (.2$$

$$4F = m^2 \cdot \sqrt{3}$$

$$\frac{4F}{\sqrt{3}} = m^2$$

$\sqrt{\left(\frac{4F}{\sqrt{3}}\right)} = m =$ der Seite des gleichseitigen Dreiecks

§. 537. in ein Rechteck, in welchem sich die Grundlinie zur Höhe verhält, wie m : n z. B. wie 5 : 3. Formulare: $g = \sqrt{\frac{mF}{n}}$; $h = \sqrt{\frac{nF}{m}}$.

Nach der Bedingung $\dfrac{g : h = m : n}{g = \frac{hm}{n}}$; und $h = \frac{gn}{m}$

Fläche $= \dfrac{g \cdot h = F}{g = \frac{F}{h}}$ und $h = \frac{F}{g}$. Setzt man nun die gleichen Werthe für g oder h in eine Gleichung, so bekommt man die gegebenen Formeln. Z. B. für $h = \frac{gn}{m} = \frac{F}{g}$, $g^2 n = mF$, $g^2 = \frac{mF}{n}$, $g = \sqrt{\frac{mF}{n}}$.

Wenn $F = 60$ □ Fuß; $m = 5$; $n = 3$, so findet man für g den Werth $= \sqrt{\frac{5 \cdot 60}{3}} = \sqrt{100} = 10$ Fuß $=$ Grundlinie; und für $h = \sqrt{\frac{3 \cdot 60}{5}} = \sqrt{36}$ $= 6$ Fuß Höhe.

§. 538. in ein Dreieck, dessen Grundlinie sich zur Höhe verhält, wie m : n.

Formulare: $g = \sqrt{\left(\frac{m \cdot 2F}{n}\right)}$; in Zahlen, wie vorher,

$$\sqrt{\left(\frac{5 \cdot 2 \cdot 60}{3}\right)} = \sqrt{200} = 14{,}142,$$

und $h = \sqrt{\left(\frac{n \cdot 2F}{m}\right)}$ in Zahlen, $= \sqrt{\left(\frac{3 \cdot 2 \cdot 60}{5}\right)}$ $= \sqrt{72} = 8{,}485$.

§. 539. in ein Dreieck, dessen 3 Seiten sich wie m : n : p verhalten.

Man berechne den Inhalt des Dreiecks, dessen Seiten m, n, p sind, und nenne ihn = f.

Weil sich nun die Flächen ähnlicher Figuren zu einander verhalten, wie die Quadrate der ähnlichen

Sei-

Seiten, so findet man die Seiten x, y, z des gesuchten Dreiecks durch die Proportionen

$f : F = m^2 : x^2$, und $x = \sqrt{\frac{m^2 . F}{f}}$, wobei F = der gegebenen Fläche

$f : F = n^2\ y^2$, und $y = \sqrt{\frac{n^2 . F}{f}}$

$f : F = p^2 : z^2$, und $z = \sqrt{\frac{p^2 . F}{f}}$.

Z. B. Es sey der Flächenraum 50 = F in ein Dreieck zu verwandeln, dessen Seiten sich wie 6, 7 und 10 verhalten. Der Inhalt des $\triangle = f$ ist

$$\frac{\sqrt{(6+7+10).(6+10-7).(6+7-10).(7+10-6)}}{4}$$

$$\begin{array}{rrrr} 6 & 6 & 6 & 7 \\ 7 & 10 & 7 & 10 \\ 10 & -7 & -10 & -6 \\ \hline 23 & 9 & 3 & 11 \end{array}$$ und 23 . 9 . 3 . 11 = 6831, und

$\frac{\sqrt{6831}}{4} = \frac{82,649}{4} = 20,662 =$ Fläche $= f$.

Nun ist $x = \sqrt{\frac{F . 6^2}{f}} = \frac{50 . 36}{20,662} = \sqrt{87,164}$ $= 9,333$ ersten Seite; die zweite Seite y findet man entweder nach dem Formular $y = \sqrt{\frac{n^2 . F}{f}}$ oder auch durch $m : n = x : y$, $y = \frac{nx}{m}$ d. i. $\frac{7 . 9,333}{6}$ $= \frac{65,331}{6} = 10,888 = y =$ der zweiten Seite; die dritte Seite $z = \sqrt{\frac{p^2 . F}{f}}$, oder $m : p = x : z$, und $z = \frac{p . x}{m}$ d. i. $= \frac{10 . 9,333}{6} = \frac{93,33}{6} = 15,555$ $= z =$ der dritten Seite.

Die

Die gefundenen Seiten $x = 9{,}333$ | $y = 10{,}888$ | $z = 15{,}555$ } haben das gefundene Verhältniß 6, 7, 10.

§. 540. Ein Quadrat zu verdoppeln. Formel $\sqrt{2F} = a$.

Aus dem doppelten Flächenraum ziehe die Quadratwurzel, welche die Seite des doppelt so großen Quadrats ist.

Die Seite eines dreifachen $= \sqrt{3F} = a$

Die Seite eines halb so großen $= \sqrt{\frac{F}{2}} = a$

eines nfachen $= \sqrt{nF} = a$.

§. 541. Ein Rechteck zu verdoppeln, oder nmal zu vermehren, so daß sich die Seiten beider Rechtecke proportional bleiben.

Inhalt $= F$ des gegebenen Rechtecks; g und h seine Seiten.

und nF des gesuchten Rechtecks Inhalts; x und y seine Seiten.

Dann gilt $F : nF = g^2 : x^2$, und $x = \sqrt{\frac{nFg^2}{F}} = \sqrt{ng^2}$

und $F : nF = h^2 : y^2$, und $y = \sqrt{nh^2}$.

In Zahlen. Wenn $g = 8$ und $h = 4$, also $F = 32$, und $n = 3$, so ist $x = \sqrt{3 \cdot 8^2} = \sqrt{192} = 13{,}8564$

$y = \sqrt{3 \cdot 4^2} = \sqrt{48} = 6{,}9282$.

Soll die Figur vermindert oder kleiner, als die gegebene, werden, so ist n ein ein Bruch. Wenn z. B. die Figur 3 mal kleiner seyn sollte, so wäre $n = \frac{1}{3}$, und $x = \sqrt{(\frac{1}{3} g^2)}$

Diese Formeln gelten bei jeder Vergrößerung oder Verkleinerung der Parallelogramme oder Triangel, die proportionale Seiten behalten sollen.

§. 542. Eine gegebene Fläche F in einen Kreis zu verwandeln.

Der Kreis ist bestimmt, wenn sein Radius $= r$ bekannt

kannt ist. Formel: $\sqrt{\frac{F}{p}} = r$, wobei $p = 3{,}1415\ldots$ bedeutet.

Z. B. eine Fläche von 28,2735 □ Zoll in einen Kreis zu bringen, wird $\sqrt{\frac{28{,}2735}{3{,}1415}} = \sqrt{9} = 3$ Zoll = Radius.

§. 543. **Eine gegebene Fläche F in eine Ellipse zu verwandeln.**

1. Wenn eine von beiden Axen gegeben ist.

Die große Axe $A = \frac{4F}{a \cdot p}$, wobei p die Zahl 3,14... bedeutet.

Die kleine Axe $a = \frac{4F}{A \cdot p}$.

2. Wenn keine von beiden Axen gegeben ist,

$$A \cdot a = \frac{4F}{p}.$$

Zerlegt man die Zahl, die $\frac{4F}{p}$ giebt, in zwei Factoren, so erhält man in denselben die beiden Axen.

3. Wenn das Verhältniß der Axen m : n gegeben ist;

die große Axe $A = \sqrt{\left(\frac{4mF}{n \cdot p}\right)}$,

die kleine Axe $a = \sqrt{\left(\frac{4 \cdot n \cdot F}{m \cdot p}\right)}$.

§. 544. **Eine gegebene Fläche in einen parabolischen Abschnitt zu verwandeln.**

Fläche der Parabel $= \frac{4x \cdot y}{3}$, wobei x = Abscisse, y = Ordinate.

Formeln: $x = \frac{3F}{4y}$; und $y = \frac{3F}{4x}$.

Wenn

Wenn weder x noch y gegeben, so ist die Größe $\frac{3F}{4}$ in zwei beliebige Factoren, die x und y vorstellen, zu zerlegen.

Wenn das Verhältniß $x : y = m : n$ gegeben ist, so ist $x = \sqrt{\frac{3 \cdot m \cdot F}{4n}}$; und $y = \sqrt{\frac{3 \cdot n \cdot F}{4m}}$.

Der Parameter p, mit dem die Parabel gezeichnet werden kann $= \frac{y^2}{x}$.

VI. Ausmessung der Körper.

§. 545. Obgleich der regelmäßig gestalteten Körper nur wenige sind, so weiß sich der Geometer doch dadurch zu helfen, daß er die unregelmäßigen durch Ebenen in regelmäßige verwandelt, zerlegt und berechnet. Wie dies am besten geschehen könne, muß dem Scharfblick eines jeden überlassen bleiben, denn alle mögliche Fälle berühren zu wollen, ist bei der unendlichen Verschiedenheit der natürlichen und künstlichen Formen der Körper nicht thunlich. Wer die regelmäßig gestalteten Körper berechnen kann, wird beim Anblick eines Körpers bald einsehen, welche Theile desselben nach diesem oder jenem Formulare berechnet werden müssen.

Zur deutlichen Anschauung der geometrischen Körper gehört das Vorzeigen und Bilden derselben, wozu der Abschnitt I. §. 422. u. f. Anleitung gab.

§. 546. Der Raum, welchen ein Körper ausfüllt, heißt sein kubischer, oder körperlicher Inhalt, oft auch bloß Inhalt, welchen wir beständig mit J bezeichnen wollen. Er wird mit dem Würfel oder Kubus gemessen.

1 Kubikruthe = 1000 Kubikfuß; dieser = 1000 Kubikzoll; dieser = 1000 Kubiklinien, und diese = 1000 Kubikscrupel. Will man daher kleinere Theile, als z. B. Scrupel zu Linien rc. machen, so schneidet man von der

Zahl derselben nur die 3 niedrigsten Stufen ab. So sind 1358906 Kubikscrupel $= 1''358'''906''''$ d. i. 1 Kubikzoll, 358 Kubiklinien, 906 Kubikscrupel; und bei zwölftheiligem Maaße muß eine solche Division durch die Zahl 1728 geschehen, denn 1 Kubikruthe ist dann $= 1728$ Kubikfuß, zu 1728 Kubikzoll, zu 1728 Kubiklinien rc.

§. 547. Bei Ausmessung der Gefäße bedient man sich im bürgerlichen Leben des zwölftheiligen Maaßstabes, und man thut wohl, wenn man die ganze Rechnung in Zollen und deren Decimaltheilen führt. Die durch die Rechnung erhaltenen Ganze sind alsdann Kubikzolle Duodecimalmaaß, und leicht in Scheffel, Metzen, Quart u. s. w. zu verwandeln, wenn man weiß, wie viel deren auf den Kubikinhalt dieser Gefäße gerechnet wird. In den Königl. Preuß. Ländern enthält 1 Scheffel 3072 Kubikzoll, eine Metze ($\frac{1}{16}$ Scheffel) 192 Kubikzoll oder 3 Quart, das Quart 64 Kubikzolle des zwölftheiligen Maaßes.

§. 548. Den körperlichen Inhalt eines Würfels zu finden.

Aufl. Miß eine Seitenlinie und multiplicire sie 2 mal mit sich selbst, oder erhebe sie in die dritte Potenz.

Formel. $J = l^3$, wobei $J =$ Inhalt, und $l =$ Seitenlinie.

Z. B. Es sey eine Seitenlinie $= 3'$, so ist $J = 3 . 3 . 3 = 27$ Kubikfuß.

Die Oberfläche eines Würfels ist in 6 gleichen Quadraten enthalten.

Formel: $O = 6l^2$.

Wenn $l = 3'$, so ist $6l^2 = 6 . 3^2 = 6 . 9 = 54$ Quadratfuß $=$ Oberfläche.

§. 549. Den Inhalt eines Parallelepipedon zu finden.

Aufl. Multiplicire Länge $= l$, Breite $= b$; und Höhe $= h$ mit einander; oder auch die Grundfläche mit der Höhe.

Formel: $J = l . b . h$.

Die Oberfläche besteht nach Fig. 116. in 6 Parallelogrammen, wovon die beiden gegenüberstehenden einander gleich sind.

Formel. $O = 2 . l . b + 2 . l . h + 2 . b . h.$

Z. B. Es sey eine kupferne Pfanne 6 Fuß lang, 4 Fuß breit, 3 Fuß hoch, so ist ihr Inhalt $= 6 . 4 . 3 = 72$ Kubikfuß, oder $72 . 1728$ Kubikzoll $= 124416$ Kubikzoll; dividirt man diese Zahl durch 3072, so bekommt man $40\frac{1}{2}$ Scheffel; und dividirt man 124416 durch 64, so erhält man 1944 Quart, oder 19 Tonnen 44 Quart für den Inhalt.

§. 550. **Den Inhalt eines prismatischen Körpers zu finden.**

Formel. $J = g . h.$

Multiplicire seine Grundfläche mit der senkrechten Höhe, d. h. g . h.

(Im dreiseitigen Prisma ist die Grundfläche ein Dreieck, im Würfel und Parallelepipedum ein Viereck, in jedem Prisma, das mehr, als 4 Seiten hat, ein Vieleck. Gemeiniglich kann man nur die Seiten der Grundfläche messen, alsdann aber eine Zeichnung davon entwerfen, und den Flächenraum nach der in der Flächenmessung gegebenen Formel finden. Sind die Seitenlinien an der Grundfläche einander gleich, so ist die Rechnung bald gemacht; sind sie ungleich, so zerlege man die Grundfläche durch Diagonalen in Dreiecke.)

Es sey die Grundfläche ein gleichseitiges Siebeneck, eine Seite 8″, die Höhe 24″, so ist

$$g = \frac{8^2 . 7 . 2{,}0763^{*)}}{4} = 232{,}545 = \text{Grundfläche}$$

$$\underline{\text{mal } 24 = \text{Höhe}}$$

körperlicher Inhalt $= 5581{,}094$ Kubikzoll.

Das Netz des Prisma Fig. 118. besteht in so viel Rechtecken, als es Seiten hat, und zwei gleichen Grundflächen.

For=

*) Die Zahl 2,0763 ist Tangente $\frac{1}{2}$ Polygonwinkel. S. §. 494.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Formel. $O = l \cdot h \cdot n + 2g$.

Im vorigen Beispiel ist $l = 8''$, $h = 24''$; $n = 7$ = Anzahl der Seiten; und $g = 232,545$ □ Zoll; also

Oberfläche $= 8 \cdot 24 \cdot 7 + 465,09 = 1809,09$ Quadratzoll.

§. 551. Den Inhalt eines Cylinders zu finden. Fig. 124.

Formel. $J = r^2 p \cdot h$, oder auch $g \cdot h$, denn $r^2 p = g$.

Multiplicire das Quadrat des Halbmessers r^2 mit der Zahl $p = 3,14 \ldots$ und mit der Höhe h.

Die krumme Oberfläche ist = dem Umfang mit der Höhe multiplicirt.

Formel. $O = D \cdot p \cdot h$; mit Boden und Decke $= D \cdot p \cdot h + 2r^2 p = (2r \cdot h + 2r^2)\, p$ = Netz Fig. 125.

Z. B. Ein cylindrisches Gefäß habe 4 Zoll im Radius, 12 Zoll in der Höhe, so ist sein Inhalt $= 4^2 \cdot 3,14 \cdot 12 = 602,88$ oder 602 Kubikzoll, 880 Kubiklinien.

Das Netz $= (2 \cdot 4 \cdot 12 + 2 \cdot 4^2) \cdot 3,14 = 401,92$ oder 401 □ Zoll, 92 □ Linien.

§. 552. Den körperlichen Inhalt einer cylindrischen Röhre zu finden.

Formel. $J = (R^2 - r^2)\, p \cdot h$.

Von dem Quadrat des Radius (R^2) der ganzen Röhre ziehe das Quadrat des Radius (r^2) der Höhlung ab, multiplicire den Rest mit 3,14... und mit der Höhe h.

§. 553. Den Inhalt einer prismatischen Röhre zu finden.

Formel. $J = (G - g) \cdot h$.

Von der ganzen Grundfläche G ziehe die Grundfläche g der Höhlung ab, und multiplicire den Rest mit der Höhe h. Oder man berechne die Röhre als einen vollen Körper, und ziehe davon denjenigen ab, der darin stecken könnte, so giebt der Rest den körperlichen Inhalt oder die Masse der Röhre.

§. 554. Den Inhalt einer Piramyde zu finden.

Formel: $J = \frac{g \cdot h}{3}$.

Multiplicire die Grundfläche mit der senkrechten Höhe, und dividire dies Product durch 3.

Z. B. Es sey die Piramyde gleichseitig und sechseckig, jede Seite = 8 Fuß, ihre senkrechte Höhe = 50 Fuß, so ist nach §. 494. die Grundfläche $g = 166,27$ □ Fuß, und $\frac{g \cdot h}{3} = \frac{166,27 \cdot 50}{3}$ $= 2771,17$ d. i. 2771 Kubikfuß, 170 Kubikzoll.

Die Seitenflächen der Piramyde sind Dreiecke, deren Grundlinien die Seiten der Grundfläche, und deren Höhe die schiefe äußere Höhe ist. Fällt man aus dem Centrum der Grundfläche ein Perpendikel auf eine Seite, so giebt dies den Abstand = a der Grundlinie vom Centrum an, und

$$a = \frac{\frac{1}{2} l \cdot \text{Sin. } p}{\text{Sin. } c}, \text{ oder } \frac{\frac{1}{2} l \cdot \text{Cos. } c}{\text{Sin. } c},$$

wobei l = Seite,
p = halber Polygonwinkel,
c = halber Centriwinkel.

Nennt man die schiefe äußere Höhe = A, so ist $A = \sqrt{(a^2 + h^2)}$, wobei h die senkrechte Höhe bedeutet. Endlich giebt die Fläche eines Dreiecks an der Piramydenoberfläche die

Formel $F = \frac{A \cdot l}{2}$,

welche man mit der Anzahl der Seiten zu multipliciren hat.

Z. B.

Z. B. Es sey, wie oben $l = 8$, Seiten $= 6$, $p = 60^\circ$, $c = 30^\circ$, $\frac{1}{2} l = 4$, $h = 24$

so ist log. $4 = 0{,}6020600$
log. Sin. $60^\circ = 9{,}9375306$
$10{,}5395906$
log. Sin. $30^\circ = 9{,}6989700$
log. $a = 0{,}8406206$ (. 2
und log. $a^2 = 1{,}6812412 - 48.$

Nun ist $a^2 = 48$
und $h^2 = 576$
und $\sqrt{624} = 24{,}98 = A$
$8 = l$

$199{,}84$
2) $99{,}92$ = Fläche einer Seite.
$6 = n$

$599{,}52$ = Fläche der 6 Seiten.
Hiezu $166{,}27$ = Grundfläche,
$765{,}79$ = Netz der Piramyde.

Kann man die schiefe Höhe A messen, so ist die Rechnung viel leichter und ganz ohne Logarithmen zu führen. Auch durch eine Zeichnung läßt sich A finden.

§. 555. Den Inhalt einer abgekürzten Piramyde zu finden.

Formel: $\left(\frac{G + g + \sqrt{(G \cdot g)}}{3}\right) \cdot h = J.$

Hiebei ist G = der Grundfläche; g = der entgegenstehenden Decke; h = senkrechten Höhe.

Z. B. Es sey G = 16; g = 9 □ Fuß; h = 7 Fuß; so ist

$$\frac{16 + 9 + \sqrt{(16 \cdot 9)} \cdot 7}{3} = \frac{25 + \sqrt{144}}{3} \cdot 7$$

$$= \frac{25 + 12}{3} \cdot 7 = \frac{37 \cdot 7}{3} = \frac{259}{3} = 86\tfrac{1}{3} \text{ Kubikfuß.}$$

Die Seitenflächen der abgekürzten Piramyde sind Trapezia, und der Abstand der beiden Parallelen ist

ist die schiefe Höhe $= A$, welche gemessen, oder aus dem Unterschied ($= d$) der beiden Abstände der Seitenlinien von der Axe, und der Höhe $= h$ durch

$$A = \sqrt{(d^2 + h^2)}$$ gefunden wird.

Wenn L und l Seiten an der Grund- und Durchschnittsfläche, und n die Anzahl derselben bedeuten, so giebt die Formel $\left(\frac{L + l}{2}\right) . A . n$ die Oberfläche der abgekürzten Piramyde; werden hiezu die beiden Grundflächen $G + g$ addirt, so ist die Summe $=$ dem Netz.

§. 556. Den Inhalt eines Tetraeders zu finden.

Formel: $\frac{G . h}{3} = J.$

Multiplicire die Grundfläche, welche ein gleichseitiges Dreieck ist, mit der senkrechten Höhe, und dividire das Product durch 3.

§. 557. Den Inhalt eines Octoeders zu finden.

Formel: $\frac{G . h 2}{3} = J.$

Multiplicire den Flächeninhalt des Quadrats Fig. 130. $= G$, als der gemeinschaftlichen Grundfläche beider Piramyden, woraus das Octoeder besteht, mit $\frac{1}{3}$ der Höhe einer Piramyde, und nimm das Product doppelt.

§. 558. Den Inhalt eines Dodecaeders zu finden.

Formel. $G . h . 2 = J.$

Suche den Quadratinhalt eines Fünfecks, als einer Grundfläche $= G$, und multiplicire denselben mit $\frac{1}{3}$ der Höhe des halben Körpers. Das Product ist der Inhalt einer der 12 Piramyden, woraus er besteht, welches das Formular $\frac{G . h . 12}{6} = G . h . 2$ giebt,

wo-

wobei h die Höhe des ganzen Dodecaeders anzeigt.

§. 559. Den Inhalt eines Icosaeders zu finden.

Formel: $\frac{G \cdot h\ 20}{6} = J.$

Multiplicire den Flächenraum einer Seite mit $\frac{1}{6}$ der Höhe des Körpers, und noch mit 20.

§. 560. Den Inhalt eines Kegels zu finden.

Formel: $\frac{r^2 \cdot p \cdot h}{3} = J$, oder $\frac{g \cdot h}{3}$, wobei

$p = 3,14 \ldots$, $r =$ Radius.

Multiplicire die Grundfläche mit der senkrechten Höhe, und dividire das Product durch 3.

Es sey der Radius eines Kegels $= 4$ Zoll, die Höhe $= 24$ Zoll, so ist $\frac{4^2 \cdot 3,14 \cdot 24}{3} = 401,94$

d. i. 401 Kubikzoll, 940 Kubiklinien.

Die krumme Oberfläche des Kegels bildet einen Sector Fig. 122, an welchem das Bogenstück = der Peripherie der Grundfläche, und die geraden Linien von ihr zur Spitze = Radien sind. Eine solche Linie ist die schiefe Höhe = A, die sich messen, oder berechnen läßt, denn $A = \sqrt{(r^2 + h^2)}$, und die krumme Oberfläche giebt daher die

Formel: $O = \frac{D \cdot p \cdot A}{2}$, oder $\frac{D \cdot p \cdot \sqrt{(r^2 + h^2)}}{2}$,

wobei $D =$ Diameter der Grundfläche oder $= rp \cdot A$.

Es sey $r = 4$, $D = 8$, $h = 24$, so ist $O = 4 \cdot 3,14 \cdot \sqrt{(4^2 + 24^2)} = 12,56 \cdot 24,33 = 305,58$, d. i. 305 □ Zoll, 58 □ Linien.

§. 561. Den Inhalt eines abgekürzten Kegels zu finden.

Formel: $\frac{(R^2 + r^2 + r \cdot R) \cdot p \cdot h}{3} = J$,

wobei

wobei $R =$ Radius der Grundfläche, $r =$ Radius der Durchschnittsfläche ist.

Addire die Quadrate der Radien und ihr Product zusammen, multiplicire die Summe mit 3,14, und mit der senkrechten Höhe $= h$; dividire alles durch 3.

Z. B. Es sey $R = 12''$; $r = 5''$; $h = 16''$, so ist

$$\frac{(12^2 + 5^2 + 5 \cdot 12) \cdot 3{,}14 \cdot 16}{3} = \frac{(144 + 25 + 60) \cdot 50{,}24}{3}$$

$$\frac{229 \cdot 50{,}24}{3} = \frac{11504{,}96}{3} = 3834{,}98$$ Kubikzoll, oder 3 Kubikfuß, 834 Kubikzoll, 980 Kubiklinien.

Die krumme Oberfläche des abgekürzten Kegels giebt die

Formel $(R + r) \cdot p \cdot A$,

wobei die krumme Oberfläche $=$ Trapez, dessen Parallelen die beiden Bogen Rp und rp, und deren Abstand $A =$ der schiefen Höhe. Die schiefe Höhe A findet sich durch: $A = \sqrt{(d^2 + h^2)}$, wobei $d = R - r =$ dem Unterschied der beiden Halbmesser.

Es sey wie vorher $R = 12''$; $r = 5''$, $h = 16''$, so ist $R - r = d = 7$;
und $\sqrt{(d^2 + h^2)} = \sqrt{(7^2 + 16^2)} = 17{,}46 = A$;
folglich $(R + r) \cdot p \cdot A = (12 + 5) \cdot 3{,}14 \cdot 17{,}46$ $= 17 \cdot 3{,}14 \cdot 17{,}46 = 932{,}0148$, oder 9 □ Fuß, 32 □ Zoll, 1 □ Linie, 48 □ Scrupel $=$ der krummen Oberfläche des abgekürzten Kegels.

Rechnet man dazu die beiden Grundflächen $R^2 p$ und $r^2 p$, so erhält man die

Formel $\big((R+r) \cdot A + (R^2 + r^2)\big) \cdot p =$ dem Netz.

Die Höhe des ganzen Kegels findet man durch

$$R - r : h = R : H$$
$$12 - 5 : 16 = 12 : 27{,}43$$

und die Höhe des fehlenden Stückes $= h' = H - h$
$= 11{,}43 = 27{,}43 - 16.$

§. 562.

§. 562. Den Inhalt schiefer Körper zu finden.

Fälle aus ihrer höchsten Spitze ein Perpendikel auf ihre (nöthigenfalls verlängerte) Grundfläche, nimm dasselbe zur senkrechten Höhe = h an, und gebrauche übrigens die gegebenen Formeln.

Allein die Oberflächen schiefstehender Körper bedürfen weitläufigerer Rechnungen, die sich nach den Umständen allezeit verändern, und der Beurtheilungskraft eines jeden überlassen bleiben.

§. 563. Den Inhalt solcher Gefäße zu finden, die elliptische Grundflächen haben.

Formel: $\frac{A \cdot a \cdot p \cdot h}{4}$.

Multiplicire beide Durchmesser oder Axen A und a mit 3,14 ... und mit der Höhe h, und dividire dies Product durch 4.

Z. B. ein Bottich sey 8 Fuß lang, 6 Fuß breit, 3 Fuß hoch und elliptisch; wie viel Tonnen oder Quart enthält er?

Hier ist $8' = A = 96$ Zoll,
$6' = a = 72$ Zoll,
$3' = h = 36$ Zoll,

und $\frac{96 \cdot 72 \cdot 3{,}14 \cdot 36}{4} = \frac{781032{,}48}{4} = 195258{,}12$

Kubikzoll. Dividirt man diese Zahl mit 64, so erhält man $3050\frac{9}{10}$ Quart, oder 30 Tonnen $50\frac{9}{10}$ Quart.

Zusatz. Sind die elliptischen Flächen an einem Gefäße verschieden, z. B. wie an einer Badewanne, wo gemeiniglich die untere Fläche oder der Boden kleiner ist, als die obere offene Fläche, so dient folgende Formel

$$\frac{G + g + \sqrt{(G \cdot g)}}{3} \cdot h,$$

wobei G die größere, g die kleinere Grundfläche, h die senkrechte Höhe bedeutet.

§. 564. Den Inhalt eines Fasses zu finden.

Formel: $\frac{(R^2 + r^2) \cdot p \cdot h}{2} = z =$ mittlerm Cylinder.

Formel zur Verbesserung $= \frac{z \cdot D - d}{3D} = c =$ Correction und $z + c = J =$ Inhalt des Fasses.

Addire zum Quadrat des Bauchhalbmessers $= R^2$ das Quadrat des Bodenhalbmessers $= r^2$, multiplicire diese Summe mit 3,14... und mit der Länge $= h$, und dividire alles durch 2, so erhält man z oder den mittlern Cylinder.

Dieser mittlere Cylinder ist etwas zu klein, weil die Stäbe des Fasses Bogenstücke sind. Daher multiplicire man denselben mit dem Unterschied der beiden Diameter D — d und dividire durch den dreyfachen Bauchdurchmesser, so erhält man c oder die Verbesserung.

Die Summe des mittleren Cylinders und der Correction, oder z + c, ist der Inhalt des Fasses.

Z. B. Ein Faß, Fig. 189., habe
im Bauche ad $= D = 20$ Zoll, so ist $R = 10$,
im Boden cb $= d = 16$ — — $r = 8$,
in der Länge hk $= h = 40$ — — $h = 40$,

so ist $z = \frac{(10^2 + 8^2) \cdot 3{,}14 \cdot 40}{2} = \frac{164 \cdot 3{,}14 \cdot 40}{2}$ $= 10299{,}2 =$ dem mittleren Cylinder.

Nun ist $D - d = 20 - 16 = 4$; und $3D = 3 \cdot 20 = 60$; folglich die Correction

$$c = \frac{10299{,}2 \cdot 4}{60} = \frac{41196{,}8}{60} = 686{,}61;$$

dazu den mittlern Cylinder $= 10299{,}2$

Inhalt des Fasses $= 10985{,}81$ Kubikzoll.

Dividirt man diesen Inhalt durch 64, so erhält man $171\frac{65}{100}$ Quart, oder 1 Tonne $71\frac{3}{4}$ Quart.

§. 565. **Die Länge und beide Durchmesser eines Fasses, das 1 Tonne oder 100 Quart hält, zu finden.**

Der Inhalt ist 100 . 64 = 6400 Kubikzoll. Nun sind zwar sehr vielerlei Gestalten der Fässer denkbar, wovon jedes den verlangten Inhalt hat; allein da im Preußischen von den Accisebedienten die sogenannten Kreuzvisirstäbe zur leichtern Ausmessung der Fässer vorschriftsmäßig gebraucht werden, und diese nur dann richtig angeben, wenn die Länge eines Fasses doppelt so viel beträgt, als der Durchmesser des mittlern Cylinders, so ist die Gestalt nicht mehr willkührlich.

Der Kreuzvisirstab ist in Fig. 189. die Linie ab; er wird durch das Spundloch a nach dem entgegengesetzten Ende des Bodendiameters gehalten, und der Inhalt des Fasses nach Quart auf demselben abgelesen. Die ab hat in allen ähnlich gebauten Fässern zur Länge und zu den beiden Diametern einerlei Verhältniß.

Wird die Correction mit berücksichtigt, so finde ich für die gebräuchlichsten Fässer folgende Abmessungen:

	im Bauche.	im Boden	in der Länge	Länge des Visirstabs
eine Tonne hat .	17,6 Zoll	14 Zoll	30,2 Zoll	21,85 Zoll
eine halbe Tonne	14	11,1	24	17,33
ein Eimer, 60 Quart	14,84	11,8	25,47	18,43
ein Anker, 30 Quart	11,78	9,37	20,22	14,63
ein halber Anker	9,35	7,44	16,045	11,61

Weil sich die Inhalte ähnlicher Körper zu einander verhalten, wie die Würfel der ähnlich liegenden Seiten, so findet man aus dem Verhältniß der Theile einer Tonne alle Abmessungen der Fässer von jedem Inhalt.

Z. B. die Länge und Durchmesser eines Fasses zu finden, das 1 Quart hält; schließt man:

$$100 : 1 = 17{,}6^3 : D^3; \text{ und } \sqrt[3]{\frac{17{,}6^3}{100}} = 3{,}79 = D,$$

$$100 : 1 = 14^3 : d^3; \text{ und } \sqrt[3]{\frac{14^3}{100}} = 3{,}016 = d,$$

$$100 : 1 = 30{,}2^3 : h^3; \text{ und } \sqrt[3]{\frac{30{,}2^3}{100}} = 6{,}506 = h.$$

§. 566. Die Länge des Kreuzvisirstabes ab Fig. 189. zu finden.

Formel: $\sqrt{((R+r)^2 + \frac{1}{4} h^2)} = ab$, denn zieht man bn mit der Axe hm parallel, so ist $bn = \frac{1}{2} h$, $nm = hb = r$; $am = R$; also $an = R + r$; und

$$ab^2 = an^2 + bn^2 = (R+r)^2 + \frac{h^2}{4}.$$

Z. B. die Länge des Visirstabes ab in einem Quart haltenden Fasse zu finden. Nach vorigem §. ist $D = 3{,}79$, also $R = 1{,}9$
$d = 3{,}016$, $r = 1{,}5$
$h = 6{,}5$ $\quad R + r = 3{,}4$

und $3{,}4^2 + \frac{6{,}5^2}{4} = 11{,}56 + 10{,}5625 = 22{,}1225$, woraus die Wurzel $= 4{,}703 = ab =$ der Länge des Visirstabes.

§. 567. Einen Visirstab zu verfertigen.

Theile einen Raum von 4 Zoll 7 Linien (s. §. 566.), wie einen andern verjüngten Maaßstab in 1000 Theile; nimm einen etwa 4 Fuß langen, $\frac{1}{2}$ Zoll breiten und $\frac{1}{4}$ Zoll dicken Stab aus festem Holze, AB Fig. 190., und trage auf ihn von B an die Größe $Ba = 1000$ Theile nach dem gemachten (4 Zoll 7 Linien langen) verjüngten Maaßstabe, so ist Ba die Größe desjenigen Theils des Stabes, der in ein Faß, das nur 1 Quart hält, paßt, und die ab Fig. 189. vorstellt. Nun ziehe man aus den Zahlen 2, 3, 4, 5 u. s. w. die Kubikwurzel bis auf 3 Decimalstellen (in trigonometrischen Tafeln stehen sie mit 7 Decimalstelstellen), und trage die erhaltenen Werthe nach dem angefertigten Maaßstabe allezeit von B aus auf den Visirstab AB. Auf diese Weise erhält man die Puncte cde — fghb u. s. w., welche anzeigen, daß dasjenige Faß, in welches der Visirstab so weit hineingesteckt werden kann, bei c 2 Quart, bei d 3 Quart ꝛc. enthalte. So findet man z. B.

für	2 Quart	die	$Bc = \sqrt[3]{2} = 1260$	
—	3 —	—	$Bd = \sqrt[3]{3} = 1442$	
—	4 —	—	$Be = \sqrt[3]{4} = 1587$	
—	32 —	—	$Bf = \sqrt[3]{32} = 3175$	
—	50 —	—	$Bg = \sqrt[3]{50} = 3684$	
—	64 —	—	$Bh = \sqrt[3]{64} = 4000$	
—	100 —	—	$Bb = \sqrt[3]{100} = 4641$	u. s. w.

Man kann dies so weit fortsetzen, als es die Länge des Stabes AB erlaubt.

Die Zahlen werden auf einen Visirstab neben den zarten Theilstrichen mit Formen hinein geschlagen, damit sie durch das Einsenken in die Flüssigkeiten sich nicht so leicht verwischen. Nach einem solchen mit Fleiß bereiteten Visirstabe können nun sehr leicht viele andere angefertigt werden. Allein sowol ihr Anfertigen, als ihr Gebrauch erfordert Vorsicht und Genauigkeit. Denn oft werden absichtlich oder unwissentlich die Fässer anders gebaut, um die Officianten zu hintergehen. Ist die Axe nähmlich größer, als der doppelte Durchmesser des mittlern Cylinders, so giebt der Visirstab den Inhalt zu groß an, und ist sie kleiner, welches gemeiniglich der Fall ist, so giebt er ihn zu gering an. Aus der Summe der beiden Durchmesser, und der Länge, welche beinahe einander gleich sind, kann man vorläufig sehen, ob dieser Visirstab bei einem Fasse anwendbar sey oder nicht. Wenn es aber auf Genauigkeit ankommt, so bleibt die Rechnung §. 564. immer das zuverlässigste Mittel, den Inhalt der Fässer zu bestimmen, und der Visirstab eine Nothkrücke für den Unkundigen, mit der er zwar fein bequem, aber eben nicht sehr anständig einhergeht. Für Böttiger ist er sehr nützlich, um darnach Gefäße von verlangtem Inhalt anzufertigen.

§. 568. Den Durchmesser und die Höhe eines Scheffelgefäßes, das 3072 Kubikzoll enthält, zu bestimmen.

Nach höherer Verfügung soll ein rundes Scheffelgefäß 22 Zoll im Durchmesser haben; weil bei manchen Producten gehäuftes Maaß gegeben wird, und es dann nicht einerlei ist, welche Gestalt ein solches Gefäß habe.

$$\text{Die Höhe desselben} = \frac{3072}{121 \cdot 3{,}141\ldots} = 8{,}07116 \text{ Zoll}$$

d. h. 8 Zoll, 7 Scrupel. Dabei ist $121 = r^2$; $3{,}141\ldots = p$.

Ein Viert muß nach diesem Verhältnisse haben

$$\sqrt[3]{\frac{22^3}{4}} = 13'',859 \text{ im Durchmesser,}$$

$$\sqrt[3]{\frac{8{,}07116^3}{4}} = 5'',0844 \text{ in der Höhe.}$$

Eine Metze ($= \frac{1}{16}$ Scheffel) muß haben:

$$\sqrt[3]{\frac{22^3}{16}} = 8'',7307 \text{ im Durchmesser,}$$

$$\sqrt[3]{\frac{8{,}07116^3}{16}} = 3'',203 \text{ in der Höhe.}$$

Anmerk. (Bei diesen Angaben zeigt die Zahl vor dem Komma allemal Rheinl. oder Preußische Zolle zwölftheiliges Maaß, und die Ziffer hinter dem Komma Decimaltheile dieses Zolles an. Will man die Decimaltheile in Linien, 12 auf einen Zoll, haben, so multiplicire man sie mit 12 und dividire darauf mit 10. Allein man thut sehr wohl, wenn man den Duodecimalzoll nur in 10 Theile theilt, indem dies alle Rechnungen erleichtert, und niemals schaden kann. Wer mit Decimalbrüchen rechnen kann, wird die großen Vortheile kennen, die eine 10theilige Unterabtheilung überall gewährt.)

Zu Probemaaßen sind viereckige Gefäße am bequemsten, weil sie leichter und sicherer, als runde, anzufertigen sind. Man zerlege die Zahl 3072 in 3 beliebige Factoren, so hat man in ihnen die Länge, Breite und Höhe eines solchen Scheffels. Z. B.

Er kann 16 Zoll lang, 16 Zoll breit und 12 Zoll hoch;
oder 24 — — 16 — — — 8 — —
seyn u. s. w.

§. 569. Ein Gefäß, das 64 Kubikzoll oder 1 Preußisch Quart enthält, anzufertigen.

Zu einem Probemaaße wähle man einen Würfel, der 4 Zoll lang, eben so breit und hoch im Lichten ist. Sein Inhalt ist dann genau 64 Kubikzoll.

Die gewöhnliche Gestalt solcher Gefäße, die man Quart oder Maaß nennt, ist aber die eines abgekürzten Kegels, für den das Formular $\frac{(R^2+r^2+rR).p.h}{3}$ gilt, wobei R und r Radien der Grundfläche und obern Öffnung, h aber senkrechte Höhe, und p die bekannte Zahl 3,14 ist.

Wenn von den Größen R, r und h zwei gegeben sind, so läßt sich die 3te durch Rechnung finden.

$$R = \sqrt{\left(\frac{3J}{p.h} - r^2 + \frac{r^2}{4}\right)} - \tfrac{1}{2}r$$

$$r = \sqrt{\left(\frac{3J}{p.h} - R^2 + \frac{R^2}{4}\right)} - \tfrac{1}{2}R$$

$$h = \frac{3J}{(R^2+r^2+rR).p},$$ wobei J = Inhalt ist.

Allein die Auflösung dieser Formeln ist nicht jedermanns Sache, und daher den handwerksmäßigen Verfertigern der Quartgefäße folgende Verfahrungsweise anzuempfehlen:

Man mache das Gefäß vorläufig nach Gutdünken, wiege es, fülle es mit Wasser, bis es zwei Pfund, 14 Loth, 1 Quentchen mehr wiegt, als es leer wog; darauf mache man an

der

der Oberfläche des Wassers ein Zeichen in das Gefäß. Wird es nun mit einer flüssigen Masse bis zu diesem Zeichen angefüllt, so kann man überzeugt seyn, daß man ein richtiges Quart derselben habe. Zu den Vorsichtsmaßregeln gehört, daß das Wasser entweder reines Regenwasser oder destillirtes Wasser sey, und eine Wärme von 15 Grad Reaumür habe. Denn unter diesen Umständen wiegt ein Kubikfuß reines Waßer 66 ℔, und füllt 27 Quart an.

§. 570. Den Inhalt eines parabolischen Afterkegels Fig. 55., zu finden.

Formel: $\frac{R^2 \cdot p \cdot h}{2} = J.$

Mit dem Quadrat des Halbmessers (R^2) der Grundfläche multiplicire die Zahl 3,14... und die Höhe h; endlich dividire alles durch 2, weil dieser Körper die Hälfte eines Cylinders von gleicher Höhe und Grundfläche ist.

Z. B. Es sey $CD = R = 3'',5$; $DA = 7' = h$, so ist der Inhalt $= \frac{3{,}5^2 \cdot 3{,}14 \cdot 7}{2} = \frac{12{,}25 \cdot 3{,}14 \cdot 7}{2}$

$\frac{269{,}255}{2} = 134{,}6275$ Kubikzoll.

§. 571. Den Inhalt eines elliptischen Körpers (Ellipsoide) zu finden.

Formel: $\frac{A \cdot a^2 \cdot p}{6} = J.$

Multiplicire die große Axe mit dem Quadrat der kleinen, mit 3,14..., und dividire das Product durch 6.

Z. B. Es sey die große Axe der Erde, oder der Durchmesser am Äquator = 1720, und die kleine Axe oder der Abstand der Pole = 1710 Meilen, so ist ihr kubischer Inhalt

$\frac{1720 \cdot 1710^2 \cdot 3{,}141}{6} = 2632918122$ Kubik-Meilen.

Als Kugel berechnet, ist ihr Inhalt = 2662560000 Kubik-Meilen.

§. 572.

§. 572. Den Inhalt einer Kugel zu finden.

1. Formel: $\frac{D^3 . p}{6} = J.$

Multiplicire den kubirten Diameter mit 3,141..., und dividire das Product durch 6. Oder nach der

2. Formel: $\frac{D^3 . 157}{300} = J$, denn $300 : 157 = D^3 : J.$

3. Formel: $\frac{2 R^2 . p . D}{3} = J$ (Siehe §. 236.)

Z. B. es sey der Diameter D = 2 Fuß, so ist ihr Inhalt $\frac{2^3 . 3,14}{6} = \frac{8 . 3,14}{6} = \frac{25,12}{6} = 4,186$ Kubikfuß.

§. 573. Aus dem gegebenen Inhalt einer Kugel ihren Diameter zu finden.

Formel: $\sqrt[3]{\left(\frac{6 . J}{p}\right)} = D.$

den 6fachen Inhalt dividire durch 3,141, und ziehe aus dem Quotienten die Kubikwurzel.

§. 574. Die Oberfläche einer Kugel zu finden.

Formel: $4 R^2 . p$, oder $D^2 p$ = Oberfläche.

Z. B. Es sey der Diameter einer Kugel = 3 Zoll, so ist $D^2 . p = 3^2 . 3,14159... = 28,27431$ □ Zoll, = Oberfläche.

§. 575. Den Inhalt eines Kugelabschnitts AME Fig. 191. zu finden.

Formel: $(3 . h . R - h^2) . \frac{p . h}{3} = J.$

wobei CA = R = Radius, AH = h die Höhe bedeutet.

Z. B. Es sey R = 8''; h = 2'', so ist der Abschnitt AME = $(3 . 2 . 8 - 2^2) . \frac{3,141 . 2}{3}$

$= (48-4) \cdot \frac{6{,}282}{3} = 44 \cdot 2{,}094 = 92{,}136$ Kubikzoll,

d. h. 92 Kubikzoll, 136 Kubiklinien.

Sollte das Kugelstück MBE berechnet werden, so ist HB = h, und die Rechnung, wie vorher.

§. 576. Die Oberfläche eines Kugelabschnitts AME Fig. 191. zu finden.

Formel. $AE^2 . p$, oder $(AH^2 + AH . HB) . p$ = Oberfläche AME.

Die Größe der Sehne findet man durch

$AH : HE = HE : HB$, also ist $HE^2 = AH . HB$ und $AH^2 + HE^2 = AE^2$.

Für die Oberfläche des Kugelstücks MBE gilt die

Formel: $BE^2 . p = O$

und $BE^2 = BH^2 + BH . HA$.

Z. B. Es sey $AH = 3$; $HB = 17$, so ist $AE^2 = 60$ und die Fläche $AME = (3^2 + 3 . 17) . 3{,}141... = 188{,}5$ □ Maaß.

Nennt man den Durchmesser allgemein d, das Stück $AH = x$, so sind die Formeln

$(AH^2 + AH . HB) . p$

völlig gleich mit $(x^2 + x . (d-x) . p$

$= (x^2 + dx - x^2) . p$

also die Oberfläche $AME = dx . p = O$, welche Formel die bequemste ist.

§. 577. Den Inhalt eines Zonenstückes DOME Fig. 191. zu finden.

Formel. $(3H . R - H^2) . \frac{p . H}{3} - (3 . h . R - h^2) . \frac{p . h}{3} = J.$

Dabei ist $H = AC$; R = Radius; $h = AH$.

Man berechnet zuerst das Kugelstück AOD, und zieht davon das Stück AME ab.

Wenn OD der Äquator und in A der Pol, so ist das Formular einfacher, und $= \frac{D^3 p}{12} - (3h . R - h^2) . \frac{p . h}{3}$.

Z. B.

Z. B. Es sey AH = h = 3
AC = R = 10
BA = D = 20

$$\text{so ist } \frac{20^3 p}{12} = \frac{25120}{12} = 2093,33$$

$$\text{und } (3 . 3 . 10 - 3^2) . \frac{3,14 . 3}{3} = 81 . 3,14 = 254,46$$

Inhalt des Zonenstücks 1838,87

§. 578. Die Oberfläche einer Zone DOME zu finden. Fig. 191.

Formel. D . h . p = Oberfläche.

Multiplicire die Peripherie eines größten Kreises D . p mit der Höhe der Zone HC = h.

Z. B. Es sey D = 20 ; so ist 20 . 7 . 3,14...
HC = h = 7 = 439,8 □ Maaß.

§. 579. Den Inhalt eines keilförmigen Ausschnitts zu finden.

Formel: $\frac{D^3 . p . n}{6 . 360} = J.$

Solche Ausschnitte verhalten sich zur ganzen Kugel, wie die ihnen zukommenden Bogen von n Graden, zum Umkreise der Kugel. Daher 360° : n° $= \frac{D^3 p}{6} : \frac{D^3 . p . n}{6 . 360}$.

§. 580. Die Oberfläche eines keilförmigen Ausschnittes zu finden.

Formel: $\frac{D^2 . p . n}{360} = O.$

Wie 360° zur Oberfläche der Kugel ($D^2 p$), so die dem Ausschnitt zukommenden Grade (n), zur Oberfläche desselben.

§. 581. Den körperlichen Inhalt ganz unregelmäßiger Körper zu finden.

Wenn sie sich auf keine Weise in bekannte geometrische Körper zerlegen lassen, so wiege man sie, und auch einen Kubikzoll oder Fuß ihrer Masse, und suche aus dem bekannten Gewicht der Massen die Massen selbst. Z. B. eine steinerne Bildsäule wog 300 ℔; ein Kubikzoll der Steinmasse wog $\frac{1}{4}$ ℔, wie groß ist der kubische Inhalt der Bildsäule?

$\frac{1}{4}$ ℔ : 1 Kubikzoll = 300 ℔?

(4

Sie enthielt 1200 Kubikzoll.

Läßt sich kein kleinerer Theil der Masse wiegen, so stecke man den unregelmäßigen Körper in ein Gefäß von bekanntem Inhalt, und fülle dasselbe vollends mit Wasser oder Sand an; nehme den Körper wieder heraus, und berechne den leer gewordenen Raum des Gefäßes, welcher dem Inhalt des Körpers gleich seyn muß.

§. 582. Sehr oft lassen sich unregelmäßige Körper, z. B. Kornhaufen, Erdhaufen u. dgl. mit leichter Mühe in regelmäßige verwandeln und berechnen. Gemeiniglich bilden solche Haufen Piramyden oder abgekürzte Piramyden, bei denen es hauptsächlich darauf ankommt, die Grundflächen und Länge auszumitteln. Oft läßt sich eine solche Masse als Prisma berechnen, wie z. B. der Inhalt eines mit Getreide beladenen Kahns; denn die Getreidemasse bildet ein niedergelegtes Prisma, dessen Grundflächen senkrecht stehen, und leicht zu berechnen sind. Multiplicirt man eine solche Fläche mit der Länge, so erhält man den Inhalt. Die Grund- oder Durchschnittsfläche kann man in ein Trapez verwandeln, wenn man die Oberfläche des Getreides ebenen läßt; denn alsdann ist die obere Breite der untern parallel. Weil diese Aufgabe häufig vorkommt, so wollen wir sie an einem Beispiel lösen.

Es sey die untere Breite eines Schiffsraums = 4 Fuß, 2 Zoll = 50 Zoll; die obere Breite = 6 Fuß 8 Zoll = 80 Zoll; die Höhe = 5 Fuß = 60 Zoll; die Länge = 24 Fuß = 288 Zoll. Wie viel Scheffel enthält er?

$B = 80$ und h oder die Höhe $= 60$ Zoll

$b = 50$ daher $\frac{b+B}{2} = 65$

$\overline{130}$

$2:)\overline{65}$

$3900 = G =$ d. Grundfläche

multiplicirt mit $288 \quad = l =$ Länge

31200

312

78

$\overline{1123200}$ Kubikzoll.

Dividirt man diese Zahl durch 3072, so kommen 365,6 Scheffel, oder 15 Wispel $5\frac{6}{10}$ Scheffel.

Formular. $\left(\frac{B+b}{2}\right) . h . l =$ Inhalt eines Schiffsraums, wobei B und b Breiten, h senkrechte Höhe, und l Länge bedeutet.

VII. Verwandlung der Körper.

§. 583. Jeder Körper kann in andere geometrische Körper, die gleichviel Inhalt haben, mittelst der Rechnung verwandelt werden. Man beobachte auch hier, wie bei der Verwandlung der Flächen die allgemeine Regel:

> Setze den Inhalt des gegebenen Körpers oder sein Formular auf die eine Seite, und das Formular desjenigen Körpers, in welchen er verwandelt werden soll, auf die andere Seite einer Gleichung; lege überall die bekannten Werthe unter, und sondere die unbekannte Größe gehörig ab, so ergiebt sich ihr Werth in lauter bekannten Größen.

Würfel und Kugeln sind durch eine Größe, die Seite und den Radius; aber Prisma, Cylinder, Kegel und Piramyden durch zwei oder drei Größen zu bestimmen. Denn es kommt bei letzteren sowol auf ihre Grundflächen, als Höhen an, wobei wieder allerlei Umstände statt finden können, von denen wenigstens so viel bekannt oder gewählt werden muß, daß sich das Übrige berechnen läßt.

Zu

Zu solchen Verwandlungen gehört eine genaue Bekanntschaft mit den Formeln für die Inhalte der Körper, Gewandtheit in der Auflösung der Gleichungen, und ein richtiger geometrischer Blick. Aber kein Zweig der Geometrie gewährt auch dem talentvollen Zögling mehr Vergnügen, als gerade dieser.

Den Anfängern zum Nutzen wollen wir an einigen Beispielen die Verfahrungsweise, und die vortheilhafte Anwendung der Logarihmen zeigen.

§. 584. Einen Körper, dessen Inhalt $= J$, zu verwandeln:

in einen Würfel.

Formel: $\sqrt[3]{J} = l$,

wobei l die Seitenlinie des Würfels, wodurch dieser Körper vollkommen bestimmt ist.

Z. B. Wenn 64 Kubikzoll in einen Würfel zu verwandeln sind, so ist $J = 64$, und $\sqrt[3]{64} = 4 =$ der Seite desselben.

§. 585. in eine Kugel.

Formel: $\sqrt[3]{\frac{6 \cdot J}{p}} = D$,

wobei $p = 3{,}141 \ldots$ und $D =$ Diameter.

Hier ist $J = \frac{D^3 \cdot p}{6}$, siehe §. 572.

$$6J = D^3 \cdot p$$

$$\frac{6J}{p} = D^3, \text{ also } \sqrt[3]{\frac{6J}{p}} = D.$$

Z. B. Es sollen 64 Kubikzoll in eine Kugel verwandelt werden. Der Kürze wegen rechnen wir mit Logarithmen.

log.

$$\log. 6 = 0{,}7781513$$
$$\log. 64 = J = 1{,}8061800 \text{ addirt}$$
$$2{,}5843313$$
$$\log. 3{,}14\ldots = 0{,}4971500 \text{ abgezogen}$$
daraus $\sqrt[3]{}$ gezogen; 3:) $2{,}0871813$
$$\log. = 0{,}6957271 = 4{,}9628 = D.$$

und der gesuchte Diameter der Kugel ist $= 4'' 9''' 6''''$ u. s. w.

§. 586. in ein Parallelepipedon.

Formel: $J = l . b . h$

also $\frac{J}{l . b} = h =$ der Höhe,

und $\frac{J}{l . h} = b =$ der Breite,

und $\frac{J}{b . h} = l =$ der Länge.

Wenn z. B. auch das Verhältniß der Länge und Breite $l : b = m : n$ gegeben ist, so sondere man eine der Größen l und b ab, und setze ihren Werth in die Gleichung $J = l . b . h$, so wird sich ergeben, daß nach der

Formel: $\frac{nJ}{b^2 m} = h$; $\sqrt{\frac{nJ}{mh}} = b$; $\frac{mJ}{nl^2} = h$; $\sqrt{\frac{mJ}{nh}} = l$.

Es sey $J = 64$; $h = 4$; $b = 3$, man sucht die Länge l. Nach obiger Formel ist $l = \frac{J}{b . h}$, d. i. $\frac{64}{3 . 4} = \frac{64}{12} = 5{,}333 = l$, und so würde jede andere Seite leicht gefunden seyn. Es sey aber $l : b = 16 : 9$, so ist $m = 16$; $n = 9$, und $\frac{nJ}{b^2 m} = h$,

d. i.

d. i. $\frac{9.64}{9.16} = 4 = h$; ferner $\sqrt{\frac{n.J}{m\,h}} = b, = \sqrt{\frac{9.64}{16.4}}$ $= 3 = b$; so wie $\sqrt{\frac{mJ}{nh}} = \sqrt{\frac{16.64}{9,4}} = \sqrt{\frac{256}{9}}$ $= \sqrt{28,4444} = 5,333 ;\ l.$

§. 587. in ein Prisma.

Formel: $\frac{J}{g} = h =$ Höhe,

$\frac{J}{h} = g =$ Grundfläche.

Ist aber die Anzahl der Seiten des Prisma, mithin die Gestalt der Grundfläche gegeben, so muß der Werth von g in die verlangte Figur verwandelt werden, wozu in dem Abschnitt von der Verwandlung der Flächen Anleitung gegeben ist und Formeln vorkommen.

Z. B. Es sey der gegebene Inhalt $= 64$ Kubikfuß in ein dreiseitiges Prisma, dessen Höhe auf 8 Fuß bestimmt ist, zu verwandeln. Man sucht die Seite der Grundfläche, welche $\frac{64}{8} = 8 \square$ Fuß ist, und in ein gleichseitiges Dreieck nach §. 536. verwandelt werden muß.

Die Seite $m = \sqrt{\left(\frac{2.8.1,732}{3.0,5}\right)} = \sqrt{18,475}$ $= 4',298.$

§. 588. in einen Cylinder.

Formel: $\frac{J}{r^2 p} = h =$ Höhe,

und $\sqrt{\frac{J}{p.h}} = r =$ Radius der Grundfläche.

Es soll z. B. ein Cylinder, der 1 Quart oder 64 Kubikzoll enthält, und 6 Zoll im Diameter hat, angefertigt werden, wie hoch muß er seyn?

Hier ist $J = 64$; $r = 3$; p, wie bekannt, $= 3,14\ldots$ also

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

also $\frac{J}{r^2 p} = \frac{64}{9 \cdot 3{,}14} = 2{,}26$ Zoll, d. i. 2 Zoll, 2 Linien, 6 Scrupel $=$ h $=$ der Höhe (wobei 1 Duodecimalzoll in 10 Linien, zu 10 Scrupel, gerechnet, welches bei allen solchen Aufgaben sehr bequem ist.)

§. 589. in eine Piramyde.

Formel: $\frac{3J}{h} = g =$ Grundfläche,

und $\frac{3J}{g} = h =$ Höhe.

Hier ist zu bestimmen, welche Gestalt die Grundfläche haben soll, um den Werth von g darin zu verwandeln.

Z. B. der Inhalt J $=$ 64 Kubikfuß soll in eine sechsseitige Piramyde, deren Höhe 16′ seyn kann, verwandelt werden, wie groß wird eine Seite derselben seyn?

$\frac{3J}{h} = \frac{3 \cdot 64}{16} = 12 \square$ Fuß $=$ g.

Diese 12 $\square$ Fuß nach §. 536. in ein Sechseck verwandelt, giebt für die Seite $m = \sqrt{\left(\frac{2 \cdot 12 \cdot 1 \cdot}{6 \cdot 0{,}866}\right)}$

$= \sqrt{\frac{4}{0{,}866}} = \sqrt{4{,}619} = 2',149 =$ einer Seite.

§. 590. in einen Kegel.

Formel: $\frac{3J}{r^2 \cdot p} = h =$ Höhe.

und $\sqrt{\frac{3J}{p \cdot h}} = r =$ Radius der Grundfläche.

Hier ist die Grundfläche allemal ein Kreis und $= r^2 p$, also, wenn eine von den Größen r oder h bekannt ist, so ist die andere allzeit zu finden.

§. 591. in einen abgekürzten Kegel.

Formel: $\frac{3J}{(R^2 + r^2 + rR) \cdot p} = h =$ Höhe,

und $\sqrt{\left(\frac{3J}{p \cdot h} - r^2 + \frac{r^2}{4}\right)} - \frac{r}{2} = R =$ Radius der Grundfläche,

und $\sqrt{\left(\frac{3J}{p \cdot h} - R^2 + \frac{R^2}{4}\right)} - \frac{R}{2} = r =$ Radius der Durchschnittsfläche.

Z. B. es sey $R = 2$; $r = 1$; $J = 64$, so ist $h = 8{,}734 \ldots$ Höhe. Legt man diesen Werth für h in den andern Formeln unter, so erhält man R und r wieder.

§. 592. Einen Würfel zu verdoppeln oder n mal zu nehmen.

Unter dieser Aufgabe verstehen wir: die Seite eines Würfels zu finden, der doppelt, oder überhaupt n mal so viel Masse hat, als der gegebene.

Formel: $\sqrt[3]{nJ} = l =$ der Seite.

Z. B. es sey die Seite eines Würfels, der 3mal so groß, als der gegebene ist, welcher 64 Kubikzoll hat, zu finden. Hier ist $J = 64$; $n = 3$; und $\sqrt[3]{3 \cdot 64} = \sqrt[3]{192} = 5'',769 =$ der Seite des 3mal größern Würfels.

Da n auch ein Bruch seyn kann, z. B. $\frac{1}{2}$, so kann man die Seite eines kleinern Würfels eben so leicht finden. $\sqrt[3]{\frac{1}{2} \cdot 64} = \sqrt[3]{32} = 3'',1748 =$ der Seite eines halb so großen Würfels.

§. 593. Einen gegebenen Inhalt in einen Körper zu verwandeln, dessen Seiten ein gegebenes Verhältniß haben, z. B. in ein Parallelepipedon, dessen Seiten sich wie $\begin{Bmatrix} 3 : 4 : 5 \\ m : n : q \end{Bmatrix}$ verhalten. Der gegebene Inhalt sey 480 Kubikfuß $= J$; der, dessen Seiten m, n, q sind, $= P$, so findet man die Seiten des neuen Körpers durch folgende Proportionen:

P:

$P : J = m^3 : x^3$, und $x = \sqrt[3]{\frac{m^3 J}{P}}$ = der Seite x,

$P : J = n^3 : y^3$, und $y = \sqrt[3]{\frac{n^3 J}{P}}$ = der Seite y,

$P : J = q^3 : z^3$, und $z = \sqrt[3]{\frac{q^3 J}{P}}$ = der Seite z.

Im gegenwärtigen Falle, wo $m = 3$, $n = 4$, $q = 5$, ist $P = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$,

$$\text{und } x = \sqrt[3]{\frac{3^3 \cdot 480}{60}} = \sqrt[3]{216} = 6 = x,$$

$$\text{und } \sqrt[3]{\frac{4^3 \cdot 480}{60}} = \sqrt[3]{512} = 8 = y,$$

$$\text{und } \sqrt[3]{\frac{5^3 \cdot 480}{60}} = \sqrt[3]{1000} = 10 = z.$$

Durch theilweise Auszziehung der $\sqrt[3]{\ }$ ergeben sich die

Formeln: $m \cdot \sqrt[3]{\frac{J}{P}} = x$; $n \cdot \sqrt[3]{\frac{J}{P}} = y$; $q \cdot \sqrt[3]{\frac{J}{P}} = z$.

§. 594. Ein elliptisches Gefäß, dessen große Axe = 4 Fuß 8 Zoll = 56 Zoll; kleine Axe = 3 Fuß 8 Zoll = 44″; Höhe = 2 Fuß 6 Zoll = 30″, enthält 58045,68 Kubikzoll oder 907 Quart. Man soll ein kleineres, jenem ähnliches Gefäß, das nur 18 Quart enthält, anfertigen; wie groß muß jede seiner Axen und seine Höhe seyn?

Weil sich die Inhalte ähnlicher Körper zu einander verhalten, wie die Würfel der ähnlichen Seiten, so gilt die

Formel: $907 : 18 = 56^3 : A^3$, und $A = \sqrt[3]{\left(\frac{18 \cdot 56^3}{907}\right)}$ = großen Axe.

log.

$$\log. 18 = 1{,}2552727$$
$$\log. 56^3 = 5{,}2445640$$
$$6{,}4998367$$
$$\log. 907 = 2{,}9576073$$

Daraus $^3\sqrt{\ }3:)\ 3{,}5422294$

$\log. A = 1{,}1807431 = 15'',16 =$ großen Axe.

Ferner $907 : 18 = 44^3 : a^3$, und $a = \sqrt[3]{\left(\frac{18 \cdot 44^3}{907}\right)}$
$= 11'',91 = a =$ der kleinen Axe,

und $907 : 18 = 30^3 : h^3$, also $h = \sqrt[3]{\left(\frac{18 \cdot 30^3}{907}\right)}$
$= 8'',12 =$ Höhe.

Dergleichen Aufgaben kommen häufig vor.

§. 595. **Es ist ein abgekürzter Kegel adeb Fig. 192. gegeben; man wünscht die krumme Oberfläche oder den Mantel desselben zu zeichnen und aus Pappe zu formen.**

Nennt $ag = R$; $dh = r$; $ad = a$; und $ac = A$, und schließt:

$af : ad = ag : ac$, weil die $\triangle$ adf und acg ähnlich.

$= R - r : a = R : A$, und $A = \frac{a \cdot R}{R - r}$.

Die ac oder A ist der Radius desjenigen Kreises, woraus der Mantel ein Sector ist, in Fig 193 ist sie die NC. Der Bogen NK des auszuschneidenden Sectors wird dem Umfange der Grundfläche des Kegels gleich seyn, folglich $=$ Dp, oder 2 R p.

Aus dem Radius A ergiebt sich die dazugehörige Peripherie $= 2 A \cdot p$. Daher läßt sich der Bogen NK in Graden angeben. $2 A \cdot p : 360° = D \cdot p : NK$; und $NK = \frac{D \cdot 360}{2 A}$, wobei $D =$ Diameter der Grundfläche des Kegels.

Den kleinen concentrischen Kreis, wovon LH Fig. 193 ein Bogenstück, ziehe man in einem Abstande $NL = a$, also mit einem Radius $= A - a$.

Man

Man schneide nun das Sectorstück NKHLN aus, rolle es zusammen, daß NL an KH streift, so hat man den Mantel des abgekürzten Kegels.

Das ganze Geschäft besteht demnach in Folgendem:

1. Ziehe einen Kreis mit dem Radius $A = \frac{R \cdot a}{R - r}$;
2. Von diesem Kreise nimm einen Bogen von $\frac{D \cdot 360}{2A}$ Graden.
3. Ziehe einen zweiten concentrischen Kreis mit dem Radius $A - a$.
4. Ziehe gerade Linien von jedem Endpuncte des Bogens nach dem Mittelpunct, und schneide das zwischen den Kreisen und den geraden Linien liegende Stück aus.

Z. B. Man will den Fuß einer Orgelpfeife, welcher ein abgekürzter Kegel ist, aus einer Zinnplatte schneiden. Der große Durchmesser $= D$ soll 6 Zoll, also $R = 3$ Zoll; der kleine Durchmesser dc Fig. 192., soll 1 Zoll, also $r = 0{,}5$ oder $\frac{1}{2}$ Zoll; die schiefe Höhe $= a$ (in der Figur ad) soll 9 Zoll betragen. Wie sind die Kreise zu ziehen?

1. Der Radius $CN = A = \frac{R \cdot a}{R - r} = \frac{3 \cdot 9}{3 - 0{,}5} = \frac{27}{2{,}5}$ $= 10{,}8$ Zoll $= A$.
2. Der davon zu nehmende Bogen $= \frac{D \cdot 360}{2A} = \frac{6 \cdot 360}{2 \cdot 10{,}8}$ $= \frac{2160}{21{,}6} = 100$ Grade.
3. Der Radius des kleinen Kreises, $CL = A - a$ $= 10{,}8 - 9 = 1{,}8$ Zoll.
4. Das ausgeschnittene Stück NKHLN gehörig zusammen gerollt, giebt, wenn die breite Öffnung oben hingestellt wird, den Fuß der Orgelpfeife.

Dritte