Zweite Lösung.

Wenn 1 Mltr. Kartoffeln 2 fl. 45 Kr. kostet, so kosten 20 Mltr. 20mal 2 fl. 45 Kr.; 20mal 2 fl. 45 Kr sind = 20mal 2 fl. = 40 fl. und 20mal 45 Kr. = 900 Kr = 15 fl.; weil 600 Kr. = 10 fl. und 300 Kr. = 5 fl. sind. 40 fl. und 15 fl. = 55 fl.; also kosten 2c. 2c.

Dritte bis sechste Lösung.

Wenn 1 Mltr. Kartoffeln 2 fl. 45 Kr. kostet, so kosten 20 Mltr. 20mal 2 fl. 45 Kr.; —

1) Das sind 20mal 2 fl. = 40 fl. und 20mal $^3/_4$ fl. = $^{60}/_4$ fl. = 15 fl. 40+15 fl. = 55 fl.; also kosten 2c 2c. oder

2) Das sind 20mal 2 fl. = 40 fl. und 20mal $^1/_2$ fl. = 10 fl. und 20mal $^1/_4$ fl. = 5 fl. 40+10+5 fl. = 55 fl.; also kosten 2c. 2c.

3) Das sind 20mal 1 Kronenthaler, und 20mal 1 Groschen; das sind 20 Kronenthaler und 20 Groschen. 10 Kronenthlr. = 27 fl.; 20 Kronenthlr also 2×27 fl. = 54 fl.; jetzt haben wir noch 20 Groschen, das sind = 1 fl.; 54 fl. + 1 fl. = 55 fl.; also kosten 2c. 2c.

4) Das sind 20mal 1 fl. und 20mal 1 preuß. Thlr. 20mal 1 fl. sind 20 fl. und 20mal 1 pr. Thlr. = 20 pr. Thlr. Da 4 pr. Thlr gleich 7 fl. und 4 in 20 fünfmal enthalten ist, so sind 20 pr. Thlr. = 5mal 7 fl. = 35 fl. 20 fl. und 35 fl. = 55 fl.; also kosten 2c. 2c.

u. s. w.

Mit diesen wenigen Aufgaben und den ihnen beigegebenen Lösungsweisen glauben wir schon zur Genüge gezeigt zu haben, wie wir es meinen; wir fügen dem nur noch wiederholend bei:

Es ist bildender, eine Aufgabe auf zehnerlei Weise, als zehn Aufgaben auf einerlei Weise zu lösen. Die Zahl der zur Lösung kommenden Aufgaben betreffend bemerken wir: „Je mehr, desto besser; denn Uebung macht den Meister."

5. Muster, wie die vier Grundrechnungsarten in Brüchen zu behandeln sind. §. 378.

Aus diesem Gebiete:

Muster, wie die Vorübungen zum Rechnen mit Brüchen, insbesondere wie die Betrachtungen der Halben, Drittel, Viertel und Fünftel nach Grube zu halten sind.

(Siehe den Lehrplan, Seite 590, erste Stufe, a. 2.)

Vorbemerkung.

1) Wie der Schüler zur Anschauung der ganzen Zahlen gelangt, indem er sie auf die Eins zurückführte, d. h. sie als Vielfache eines Einfachen erkannte, so werden ihm jetzt auch die Bruchzahlen anschaulich gemacht durch ihre stete Beziehung auf die Einheit, aus der sie entstanden.

2) Während aber bisher die Einheit als Theil der ganzen Zahlen erschien, wird sie nunmehr selbst als ein Ganzes, mithin als ein Vielfaches aufgefaßt, das in seine einfachen Bestandtheile aufgelöst wird, welche wir eben mit Beziehung auf ihr Ganzes „Brüche" nennen.

3) Weil der Schüler bereits vom ersten Kursus an die ganzen Zahlen als Brüche zu behandeln gelernt hat, indem er sie als Theile eines Vielfachen erkannte, so wird die nun folgende Behandlung des eigentlichen Bruches (der gebrochenen Einheit) um so weniger Schwierigkeit für ihn haben, als der Prozeß ganz derselbe ist, durch welchen er in das Rechnen mit ganzen Zahlen eingeführt wurde, nämlich: Anschauung des Mannigfaltigen in seiner organischen Einheit.

4) Da die Verschiedenheit der Brüche bedingt ist durch ihre Größe, die Größe

aber durch die *Anzahl der gleichen Theile*, in welche ich die Einheit zerlege, so lassen sich diese verschiedenartigen Theilungen als besondere Ordnungen, und zwar als *absteigend niedere Ordnungen* betrachten, wie bei den ganzen Zahlen durch das Verzehnfachen der Einheit die *aufsteigend höheren Ordnungen* des Einers, Zehners, Hunderters 2c. sich bildeten. Jene verschiedenen Bruch-Einheiten bezeichnet die Sprache durch die Nachsilbe „tel", als Zweitel [1]), Drittel, Viertel 2c.

5) Demnach ist uns der Eintheilungsgrund des für die Anschauung zu organisirenden Stoffes in diesem Kursus objektiv in der Verschiedenheit der Brüche selber gegeben, und wir behandeln auf der ersten Stufe die Halben, auf der zweiten die Drittel u. s. f., bis der Schüler durch diese organische Entwickelung seiner Anschauung zur *Beobachtung* des Bruches gelangt ist, wozu etwa 4 Stufen vollkommen ausreichen.

6) Da wir — wie in den früheren Kursen — mit der allseitigen Anschauung des Objektes beginnen, so üben wir auf jeder Stufe in der bekannten Weise mündliches und schriftliches, reines und angewandtes Rechnen, Addiren und Subtrahiren 2c. *zusammen*, und behandeln ganz dem bisherigen Gange analog den Bruch unter den Rubriken:

1) Anschauung der reinen Zahl.
   a. Messen,
   b. Vergleichen,
   c. Kombiniren.
2) Anwendung des reinen Zahlverhältnisses nach allen Spezies.

Erste Stufe.

Die Halben.

1)


Wenn ich Eins (ein Ganzes) in zwei gleiche Theile zerlege, so erhalte ich 2 Halbe (Hälften). Ein Halbes ist einer von den 2 gleichen Theilen, in die ich das Ganze getheilt habe.

$$2 : 1 = {}^1/_2 \text{ oder } {}^1/_2 \times 1 = {}^1/_2.$$

a. $^1/_2 + {}^1/_2 = 1.$
b. $1 \times {}^1/_2 = {}^1/_2,\ 2 \times {}^1/_2 = 1.$
c. $1 - {}^1/_2 = {}^1/_2.$
d. $^1/_2 : {}^1/_2 = 1,\ {}^1/_2 : 1 = 2$ ($^1/_2$ in 1 steckt 2mal).

Anwendung auf die Vielfachen.

a. Ist $2 : 1 = {}^1/_2$, so ist $2 : 2 = {}^2/_2$, $2 : 3 = {}^3/_2$, $2 : 10 = {}^{10}/_2$, $2 : 100 = {}^{100}/_2$ 2c.

aa. $^1/_2 + {}^1/_2 = 1$, $1 + {}^1/_2 = 1^1/_2$ (anderthalb), $2 + {}^1/_2 = 2^1/_2$ (drittehalb), $3 + {}^1/_2 = 3^1/_2$ (viertehalb) 2c., $1^1/_2 + {}^1/_2 = 2$, $2^1/_2 + {}^1/_2 = 3$, $12^1/_2 + {}^1/_2 = 13$ 2c., $1^1/_2 + 1^1/_2 = 3$ (denn $1^1/_2 + {}^1/_2 = 2 + 1 = 3$, oder $1 + 1 = 2$, $^1/_2 + {}^1/_2 = 1$, $2 + 1 = 3$), $5^1/_2 + 1^1/_2 = 7$ 2c., $7^1/_2 + 8 = 15^1/_2$, $7^1/_2 + 8^1/_2 = 16$, $8 + 8^1/_2 = 16^1/_2$.

bb. $2 \times {}^1/_2 = {}^2/_2 = 1$, $3 \times {}^1/_2 = {}^3/_2 \times 1^1/_2$, $10 \times {}^1/_2 = {}^{10}/_2 = 5$, $100 \times {}^1/_2 = {}^{100}/_2 = 50$; $7 \times {}^1/_2 = {}^7/_2 = 3^1/_2$, $73 \times {}^1/_2 = {}^{73}/_2 = 36^1/_2$ 2c.

$1 \times 1^1/_2 = 1 \times {}^3/_2 = 1^1/_2$, $2 \times 1^1/_2 = 2 \times {}^3/_2 = {}^6/_2 = 3$, $3 \times 1^1/_2 = 3 \times {}^3/_2 = {}^9/_2 = 4^1/_2$ 2c. (oder: $3 \times 1 = 3$, $3 \times {}^1/_2 = {}^3/_2 = 1^1/_2$, $3 + 1^1/_2 = 4^1/_2$) 2c.

---

1) Weil die Theilung eines Ganzen in 2 gleiche Theile die am meisten im Leben vorkommende ist, so hat die Sprache für diese Theile ein eigenes Wort gebildet, nämlich *Halbe* oder *Hälften*.

$6 \times 15\frac{1}{2} = 6 \times 15 + 6 \times \frac{1}{2}$ ꝛc. $9 \times 80\frac{1}{2}$ ꝛc.

Ist $\frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$, so ist
$\frac{1}{2} \times 6 = \frac{6}{2} = 3$, $\frac{1}{2} \times 9 = 4\frac{1}{2}$ ꝛc.

cc. $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, $2 - \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$ (denn $2 = 1 + 1$; $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, $1 + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$), $3 - \frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$ (denn $3 = 2 + 1$; $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, $2 + \frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$) ꝛc. $2 - 1\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ (denn $2 - 1 = 1$, $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, $1 + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$) $6 - 4\frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$ (denn $6 - 4 = 2$, $2 - \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$), $9 - 3\frac{1}{2}$ ꝛc. $2\frac{1}{2} - 1 = 1\frac{1}{2}$ ($= [2 - 1] + \frac{1}{2}$), $6\frac{1}{2} - 3 = 3\frac{1}{2}$ ($= [6 - 3] + \frac{1}{2}$) ꝛc. $3\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2} = 1$ ($3 - 2 = 1$, $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$; oder: $3\frac{1}{2} - 2 = 1\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 1$) $8\frac{1}{2} - 4\frac{1}{2}$? ꝛc.

dd. $\frac{1}{2} : 1 = 2$ (denn $1 = \frac{2}{2}$, $\frac{1}{2} : \frac{2}{2} = 1 : 2 = 2$ [mal]).
$\frac{1}{2} : 4 = 8$; denn $4 = \frac{8}{2}$, $\frac{1}{2} : \frac{8}{2}$ ꝛc., oder $\frac{1}{2} : 1 = 2$, $\frac{1}{2} : 4 = 4 \times 2 = 8$) ꝛc.
$\frac{1}{2} : 1\frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1 : 3 = 3. - \frac{1}{2}$ $9\frac{1}{2} = 19$ ꝛc.
$1\frac{1}{2} : 6 = \frac{3}{2} : \frac{12}{2} = 3 : 12 = 4$.
$3\frac{1}{2} : 10\frac{1}{2} = \frac{7}{2} : \frac{21}{2} = 7 : 21 = 3$ ꝛc.

2) a. Vergleiche $\frac{1}{2}$ mit 1!
$\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$, $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$.
$\frac{1}{2}$ = der Hälfte von 1, 1 = dem Zweifachen von $\frac{1}{2}$.

b. Welche Zahl nennt mir den Unterschied von $\frac{1}{2}$ und 1?
Wie viel muß ich von 16 wegnehmen, um $9\frac{1}{2}$ zu bekommen?
Von 2 Zahlen heißt die eine $9\frac{1}{2}$, der Unterschied von der größeren ist $6\frac{1}{2}$, wie heißt die größere Zahl?
Nenne andere Zahlenpaare, welche $6\frac{1}{2}$ zum Unterschiede haben!

c. Wie oft muß ich $\frac{1}{2}$ nehmen, um 1 zu bekommen?
Wie oft $4\frac{1}{2}$, um 9 zu erhalten?
Von welcher Zahl ist $4\frac{1}{2}$ die Hälfte?
Von welcher Zahl ist 9 das Zweifache?
Der Divisor ist $4\frac{1}{2}$, der Quotient 2, wie heißt der Dividend?
(Der Quotient 2 sagt mir, daß $4\frac{1}{2}$ in der Fragezahl 2mal enthalten sei, also muß diese das Zweifache von $4\frac{1}{2} = 9$ sein.)
Welche Zahl muß ich $\frac{1}{2}$mal nehmen, um $4\frac{1}{2}$ zu bekommen?

3) a. Was heißt $\frac{1}{2}$ Thaler ꝛc.?
$\frac{1}{2}$ Thaler heißt einer von den 2 gleichen Theilen, in welche ich den ganzen Thaler zerlegt habe.

b. Wie viel sind 17 Sgr. in halben Thalern?
(Da $\frac{1}{2}$ Thlr. = $\frac{30}{2}$ Sgr. = 15 Sgr., und 17 Sgr. = 15 + 2 Sgr., so sind 17 Sgr. = $\frac{1}{2}$ Thlr. + 2 Sgr.)

c. Um wie viel ist das Achtfache von 17 Sgr. kleiner, als das Neunfache von 19 Sgr.?
(Das Achtfache von 17 Sgr. = 8×17 Sgr. = $8 \times \frac{1}{2}$ Thlr. + 8×2 Sgr. = 4 Thlr. 16 Sgr. Das Neunfache von 19 Sgr. = $9 \times \frac{1}{2}$ Thlr. + 9×4 Sgr. = $4\frac{1}{2}$ Thlr. + 36 Sgr. = $5\frac{1}{2}$ Thlr. + 6 Sgr. = 5 Thlr. 21 Sgr. 5 Thlr. 21 Sgr. — 4 Thlr. 16 Sgr. = 1 Thlr. 5 Sgr. Also ist ꝛc.)

d. In einer Wirthschaft wurden zu einem Gastmahle gekauft $17\frac{1}{2}$ Pfd., ferner $13\frac{1}{2}$ Pfd. + $8\frac{1}{2}$ Pfd. Fleisch. Wie viel Portionen konnten daraus gemacht werden, wenn auf 1 Portion 16 Loth gerechnet wurden?

e. Wenn man für 1 Pfd. $\frac{1}{2}$ Thlr. bezahlt, so bekommt man für $7\frac{1}{2}$ Sgr. wie viel?
(Da $7\frac{1}{2}$ Sgr. = $\frac{1}{2} \times 15$ Sgr. oder $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ Thlr., so bekommt man dafür auch nur die Hälfte von dem, was man für $\frac{1}{2}$ Thlr. bekommt, nämlich die Hälfte eines Pfundes = $\frac{1}{2}$ Pfd.)

f. Was kosten $10\frac{1}{2}$ Elle Tuch, wenn man 5 Ellen mit 6 Thalern bezahlt?
(Kosten 5 Ellen 6 Thaler, so kostet 1 Elle den 5ten Theil von 6 Thalern = 1 Thaler 6 Sgr.; $\frac{1}{2}$ Elle kostet $\frac{1}{2} \times 1$ Thaler 6 Sgr. = 18 Sgr., also $10\frac{1}{2}$ Elle = $\frac{21}{2}$ Ellen 21×18 Sgr. = $21 \times \frac{1}{2}$ Thlr. + 21×3 Sgr. = $10\frac{1}{2}$ Thlr. + 63 Sgr. = $10\frac{1}{2}$ Thlr. + 2 Thlr. 3 Sgr. = 12 Thlr. 18 Sgr.)

Zweite Stufe.

Die Drittel.

1) 

Wenn ich 1 in 3 gleiche Theile theile, so bekomme ich $\frac{1}{3}$.

$\frac{1}{3}$ ist einer von den 3 gleichen Theilen, in welche ich 1 getheilt habe.

$\frac{2}{3}$ sind 2 von den 3 gleichen Theilen, in die ich 1 getheilt habe.

$3 : 1 = \frac{1}{3}$, oder $\frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}$.

a. $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$.

b. $1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$, $2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, $3 \times \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$.

c. $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, $\frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.

d. $\frac{1}{3} : 1 = 3$, $\frac{1}{3} : \frac{2}{3} = 2$, $\frac{1}{3} : \frac{1}{3} = 1$.

α. $3 : 1 = \frac{1}{3}$, $3 : 2 = \frac{2}{3}$, $3 : 10 = \frac{10}{3}$ ꝛc.

aa. $2 + \frac{1}{3} = 2\frac{1}{3}$, $8 + 4\frac{1}{3} = 12\frac{1}{3}$, $5\frac{1}{3} + 4\frac{1}{3} = 9\frac{2}{3}$, $17\frac{2}{3} + 17\frac{1}{3} = 35$, $17\frac{2}{3} + 17\frac{2}{3} = 35\frac{1}{3}$ ꝛc.

bb. $1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$, $9 \times \frac{1}{3} = \frac{9}{3} = 3$, $14 \times \frac{1}{3} = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$ ꝛc.

$1 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$, $9 \times \frac{2}{3} = \frac{18}{3} = 6$, $14 \times \frac{2}{3} = \frac{28}{3} = 9\frac{1}{3}$, $10 \times \frac{2}{3} = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$ ꝛc.

$3 \times 1\frac{1}{3} = 4$ (oder $3 \times 1 + 3 \times \frac{1}{3}$, oder $3 \times 1\frac{1}{3} = 3 \times \frac{4}{3} = \frac{12}{3} = 4$), $9 \times 1\frac{1}{3} = 12$ ꝛc.

$3 \times 1\frac{2}{3} = 5$, $5 \times 1\frac{2}{3} = 8\frac{1}{3}$ ꝛc.

Ist $\frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}$, so ist $\frac{1}{3} \times 2 = \frac{2}{3}$, $\frac{1}{3} \times 6 = \frac{6}{3} = 2$, $\frac{1}{3} \times 7 = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$.

$\frac{2}{3} \times 1$ (der dritte Theil von 1 zweimal genommen) $= \frac{2}{3}$, $\frac{2}{3} \times 2 = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3} \times 9 = \frac{18}{3} = 6$ ꝛc.

cc. $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, $2 - \frac{1}{3} = 1\frac{2}{3}$ ꝛc.

$1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$, $2 - \frac{2}{3} = 1\frac{1}{3}$ ꝛc.

$2 - 1\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ ꝛc.

$7\frac{2}{3} - 4\frac{1}{3} = 3\frac{1}{3}$ ꝛc.

$7\frac{1}{3} - 4\frac{2}{3} = 2\frac{2}{3}$, ($7 - 4\frac{2}{3} + \frac{1}{3}$, oder $7\frac{1}{3} - 4 - \frac{2}{3}$.)

dd. $\frac{1}{3} : 1 = 3$, $\frac{1}{3} : 2 = 2 \times 3 = 6$, $\frac{1}{3} : 3 = 3 \times 3 = 9$ ꝛc.

$\frac{1}{3} : 14 = 42$ ($\frac{1}{3} : 1 = 3$, $\frac{1}{3} : 14 = 14 \times 3$).

$\frac{2}{3} : 1 = \frac{3}{2}$ ($\frac{1}{3}$ in $1 = 3$mal, $\frac{2}{3}$ in 1 die Hälfte von $3 = \frac{3}{2}$mal)

$\frac{2}{3} : 6 = 9$ ($\frac{1}{3} : 6 = 18$, $\frac{2}{3} : 6 = \frac{18}{2} = 9$) ꝛc. Oder:

$\frac{2}{3} : 1 = \frac{2}{3} : \frac{3}{3} = 2 : 3 = \frac{3}{2}$ ꝛc.

$2\frac{1}{3} : 4\frac{2}{3} = 2$ ($\frac{7}{3} : \frac{14}{3} = 7 : 14 = 2$).

$6\frac{2}{3} : 20 = \frac{20}{3} : \frac{60}{3} = 20 : 60 = 3$ ꝛc.

2) a. Vergleiche $\frac{1}{3}$ mit 1!

$\frac{1}{3} = 1 - \frac{2}{3}$, $1 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}$.

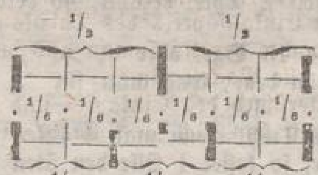
$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times 1$, $1 = 3 \times \frac{1}{3}$.

Vergleiche $\frac{2}{3}$ mit 1!

$\frac{2}{3} = 1 - \frac{1}{3}$, $1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}$.

$\frac{2}{3} = \frac{2}{3} \times 1$, $1 = 1 \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3}$.

b. Vergleiche $\frac{1}{3}$ mit $\frac{1}{2}$!



Drittel und Halbe kommen zusammen in **Sechsteln**.

$\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$, $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$.

$\frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}$, $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$.

$\frac{1}{3} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}$ (2mal der 3te Theil von $\frac{1}{2}$), denn $\frac{1}{2}$ oder $\frac{3}{6}$ stecken in $\frac{1}{3}$ oder $\frac{2}{6}$ (= 3 : 2) nur $\frac{2}{3}$mal.

$\frac{1}{2} = \frac{3}{2} \times \frac{1}{3}$ (3mal die Hälfte von $\frac{1}{3}$), denn $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} = \frac{3}{6} : \frac{2}{6} = 2 : 3 = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$.

Vergleiche $\frac{1}{2}$ mit $\frac{2}{3}$!

$\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$, $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$.

$\frac{1}{2} = \frac{2}{3} - \frac{1}{6}$; $\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$.

$\frac{1}{2} = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3}$, denn $\frac{2}{3} : \frac{1}{2} = 4 : 3 = \frac{3}{4}$ *).

$\frac{2}{3} = \frac{4}{3} \times \frac{1}{2}$, denn $\frac{1}{2} : \frac{2}{3} = 3 : 4 = \frac{4}{3}$.

c. Welche Zahl muß ich $\frac{2}{3}$mal nehmen, um 9 zu bekommen?

(Muß ich eine Zahl $\frac{2}{3}$mal nehmen, um 9 zu bekommen, so ist 9 2mal der dritte Theil dieser Zahl; also 1mal der dritte Theil der unbekannten Zahl ist die Hälfte von 9 = $4\frac{1}{2}$, drei Drittel oder die ganze unbekannte Zahl, daher $3 \times 4\frac{1}{2} = 13\frac{1}{2}$.)

Wie verhält sich die Anzahl der gleichen Theile von 9 und 13?

(13 hat 3 solcher Theile ($4\frac{1}{2}$), wie deren 9 nur 2 hat.)

Nenne 2 andere Zahlen, die sich auch so verhalten!

(6 und 9.)

Vergleiche beide!

$6 = \frac{2}{3} \times 9$, $9 = \frac{3}{2} \times 6$.

$= 2 \times 3$, $= 3 \times 3$.

Wie könntest du unter dieser Bedingung aus 6 uns die 9 suchen lassen?

(Von zwei Zahlen heißt die eine 6, die andere ist = $\frac{3}{2} \times 6$. Welches ist sie? Besser: Welche Zahl ist gleich dem Dreifachen der Hälfte von 6? Oder: Von welcher Zahl ist 6 $\frac{2}{3}$?)

d. Wie oft muß ich den Unterschied von $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ setzen, um 1 zu bekommen?

Die Differenz von $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ ist gleich dem Sechstel welcher Zahl?

Welcher Theil von 1 ist der Unterschied von $\frac{2}{3}$ und $\frac{1}{2}$?

Welcher Theil ist der Unterschied von $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ von ihrer Summe?

3) Was heißt $\frac{2}{3}$ Wispel? — Malter ꝛc.

Vergleiche $\frac{2}{3}$ Wisp. mit $\frac{1}{3}$ Wisp.!

Wie kannst du 17 Scheffel in Drittel-Wispel ausdrücken?

(17 Scheff. = 16 Scheff. + 1 Sch. = $\frac{1}{3}$ W. + 1 Sch.)

Das Neunfache von 17 Scheffeln sind wie viel Wispel?

(9×17 Scheffel = $9 \times \frac{1}{3}$ Wispel + 9×1 Schff. ꝛc.)

Wie viel Pfund hat $\frac{1}{3}$ Ctr. weniger, als $\frac{1}{2}$ Ctr., und $\frac{1}{2}$ Ctr. weniger, als $\frac{2}{3}$ Ctr.?

Wie verhalten sich $\frac{2}{3}$ Scheffel zu 4 Scheffel?

(4 Scheffel = $\frac{12}{3}$ Scheffel = $6 \times \frac{2}{3}$ Scheffel, also $\frac{2}{3}$ Sch. = $\frac{1}{6} \times$ 4 Scheffel.)

Was kosten $\frac{2}{3}$ Scheffel, wenn man für $\frac{1}{12}$ Wispel 4 Thlr. 6 Sgr. bezahlt?

($\frac{1}{12}$ W. = 4 Schff. = $\frac{12}{3}$ Schff. = $6 \times \frac{2}{3}$ Schff. Also $\frac{2}{3}$ Schff. = $\frac{1}{6} \times$ 4 Schff., also kosten auch $\frac{2}{3}$ Schff. $\frac{1}{6} \times$ 4 Thaler 6 Sgr. $\frac{1}{6} \times$ 1 Thlr. = 5 Sgr., $\frac{1}{6} \times$ 4 Thlr. = 4×5 Sgr. = 20 Sgr., $\frac{1}{6} \times$ 6 Sgr. = 1 Sgr., 20 Sgr. + 1 Sgr. = 21 Sgr. Also kosten $\frac{2}{3}$ Schff. 21 Sgr., wenn $\frac{1}{12}$ Wisp. 4 Thlr. 6 Sgr. gilt.)

Ein Kaufmann erhält 1 Ctr. Tabak und verpackt denselben in Packeten zu $\frac{2}{3}$ Pfd. Den Preis eines solchen Packets bestimmt er zu 20 Sgr. Wie viel gewinnt er daran, wenn der Einkaufspreis des Tabaks 91 Thlr. 20 Sgr. betrug?

a. Wie viel Packete machte der Kaufmann aus dem Ctr.?

b. Was nahm er für alle Packete ein?

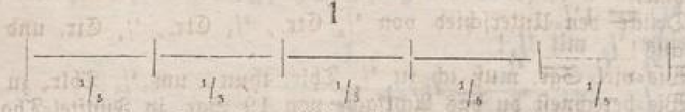
c. Welches ist der Unterschied des Einkaufs- und Verkaufspreises?

Der Schüler muß so weit sein, sich die Aufgabe in diese 3 Fragen selbstständig zu zerlegen.

---

*) Der Lehrer vergesse nicht, daß hier Kopfrechnen Statt findet. — Die räumliche Anschauung dieser Verhältnisse hebt alle scheinbare Schwierigkeit.

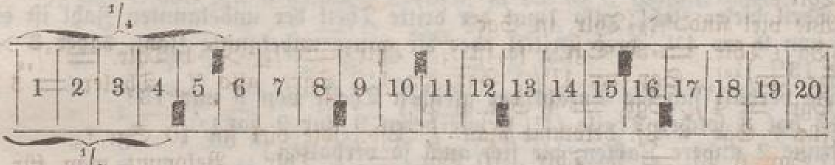
Vierte Stufe.
Die Fünftel.

1) 

$5 : 1 = \frac{1}{5}$. Oder $\frac{1}{5} \times 1 = \frac{1}{5}$.

Wie auf den vorigen Stufen!

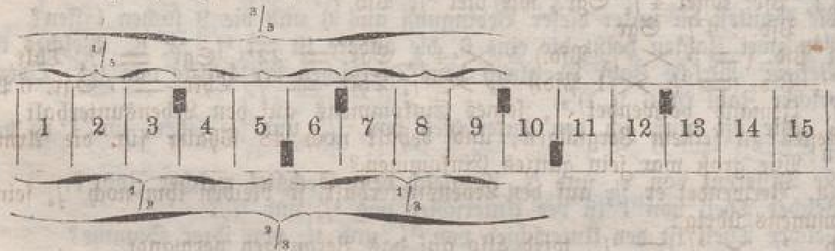
2) a. Vergleiche $\frac{1}{5}$ mit $\frac{1}{4}$!



Vergleiche $\frac{1}{5}$ mit $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{5}$ mit $\frac{1}{4}$! $\frac{3}{5}$ mit $\frac{3}{4}$! *)

Wie auf den vorigen Stufen!

b. Vergleiche $\frac{1}{5}$ mit $\frac{1}{3}$!



Vergleiche $\frac{3}{5}$ mit $\frac{2}{3}$!

$\frac{3}{5} = \frac{9}{15}$, $\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$; $\frac{3}{5} = \frac{2}{3} - \frac{1}{15}$.
ꝛc. ꝛc.

Wie auf den vorigen Stufen!

c. Worin kommen Halbe, Drittel, Viertel und Fünftel zusammen?
(Da Halbe, Drittel und Viertel in Zwölfteln zusammenkommen, so sehe ich zu, worin Fünftel und Zwölftel zusammenkommen. Ich theile das Fünftel in 12, und das Zwölftel in 5 Theile, so wird das Ganze in 60 gleiche Theile zerlegt. Ist $1 = \frac{60}{60}$, so ist $\frac{1}{2} = \frac{30}{60}$, $\frac{1}{3} = \frac{20}{60}$ ꝛc.)

d. Ist $\frac{1}{5} : \frac{1}{4} = \frac{4}{5}$, so ist auch
$6 \times \frac{1}{5} : 6 \times \frac{1}{4} = 1\frac{1}{5} : 1\frac{2}{4} = \frac{4}{5}$,
$10 \times \frac{1}{5} : 10 \times \frac{1}{4} = 2 : 2\frac{2}{4} = \frac{4}{5}$ ꝛc.
Ist $\frac{2}{5}$ in $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{5}$ mal enthalten, so ist auch
$3 \times \frac{2}{3} : 3 \times \frac{2}{5} = 2 : 1\frac{1}{5} = \frac{3}{5}$ ꝛc.
d. h. die eine Zahl hat 3 solcher Theile, wie die andere 5 hat.

e. Zwei Zahlen, wovon die eine $6\frac{1}{5}$, geben die Summe $18\frac{2}{3}$, wie heißt die andere Zahl?
($18\frac{2}{3} - 6\frac{1}{5}$. $18 - 6 = 12$, $\frac{2}{3} - \frac{1}{5} = \frac{10}{15} - \frac{3}{15} = \frac{7}{15}$. $18\frac{2}{3} - 6\frac{1}{5} = 12\frac{7}{15}$. Oder: $18\frac{2}{3} - 6 = 12\frac{2}{3}$, $12\frac{2}{3} - \frac{1}{5} = 12\frac{10}{15} - \frac{3}{15} = 12\frac{7}{15}$. Oder: $18\frac{2}{3} - 6\frac{1}{5} = 18 - 6\frac{1}{5} + \frac{2}{3}$. $18 - 6\frac{1}{5} = 11\frac{4}{5}$ ꝛc.

f. Wie oft muß ich $3\frac{3}{5}$ nehmen, um 18 zu bekommen?
($3\frac{3}{5} = \frac{18}{5}$, $18 = \frac{90}{5}$; $\frac{18}{5} : \frac{90}{5} = 18 : 90 = 5$. Oder: Wie $\frac{1}{5} : 1 = 5$, so $\frac{18}{5} : 18 = 5$. Oder: $\frac{1}{5} : 1 = 5$, $\frac{1}{5} : 18 = 90$, $\frac{18}{5} : 18 = \frac{90}{18} = 5$.)

---

*) Man lasse oft einen Schüler an die Wandtafel treten und durch Zeichnung diese Zahlverhältnisse darstellen. Die Schüler bekommen bald große Fertigkeit in diesem „Zahlenzeichnen“, und es macht ihnen viel Vergnügen.

3) a. Wie erhalte ich $^4/_5$ Ctr?

(Dadurch, daß ich den 5. Theil eines Centners 4mal nehme oder 4 Centner $^1/_5$mal nehme.)

b. Drücke den Unterschied von $^1/_2$ Ctr., $^1/_3$ Ctr., $^1/_4$ Ctr. und $^1/_5$ Ctr. in Pfunden aus!

c. Wie viel Sgr. muß ich zu $^3/_4$ Thlr. thun, um $^4/_5$ Thlr. zu bekommen?

d. Wie berechnest du das Achtfache von 19 Sgr. in Fünftel-Thalern?

e. $^1/_3$ Pfd. kostet $^1/_4$ Thlr., wie viel $^1/_5$ Pfd.?

(Kostet $^1/_3$ Pfd. $^1/_4$ Thlr., so kostet 1 Pfd. $= 3 \times {}^1/_3$ Pfd. $3 \times {}^1/_4$ Thlr. $= {}^3/_4$ Thlr., $^1/_5$ Pfd. aber oder $^1/_5 \times 1$ Pfd. kostet $^1/_5 \times {}^3/_4$ Thlr. $= {}^3/_{20}$ Thlr.)

Wie viel sind $^3/_{20}$ Thlr. in Sgr?

(Da 1 Thlr. $=$ 30 Sgr., so ist $^1/_{20}$ Thlr. $= {}^1/_{20} \times 1$ Thlr. $= {}^1/_{20} \times$ 30 Sgr. $= {}^{30}/_{20}$ Sgr. $= 1^{10}/_{20}$ Sgr. $= 1^1/_2$ Sgr., also $^3/_{20}$ Thaler $= 3 \times 1^1/_2$ Sgr. $= 4^1/_2$ Sgr. $=$ 4 Sgr. 6 Pf.)

Für 7 Sgr. 6 Pf. bekommt man $^1/_5$ Pfd., wie viel für 10 Sgr.?

(7 Sgr. 6 Pf. $= {}^1/_4$ Thlr., 10 Sgr. $= {}^1/_3$ Thlr. Bekommt man für $^1/_4$ Thlr. $^1/_5$ Pfd., so bekommt man für 1 Thlr. $= 4 \times {}^1/_4$ Thlr. $4 \times {}^1/_5$ Pfd. $= {}^4/_5$ Pfd. Also für $^1/_3$ Thlr. $= {}^1/_3 \times 1$ Thlr. $^1/_3 \times {}^4/_5$ Pfd. $^1/_3 \times {}^1/_5$ Pfd $= {}^1/_{15}$ Pfd., $^1/_3 \times {}^4/_5$ Pfd. $= {}^4/_{15}$ Pfd.)

($^1/_5$ Pfd. kostet $4^1/_2$ Sgr., wie viel $^1/_3$ Pfd.?

$^1/_5$ Pfd. : $4^1/_2$ Sgr.

1 Pfd. ($= 5 \times {}^1/_5$ Pfd.) $5 \times 4^1/_2$ Sgr. $= 22^1/_2$ Sgr. $= {}^3/_4$ Thlr.

$^1/_3$ Pfd. ($= {}^1/_3 \times 1$ Pfd.) $^1/_3 \times {}^3/_4$ Thlr. $= {}^1/_4$ Thlr. $=$ 7 Sgr. 6 Pf.)

f. Jemand verwendet $^2/_3$ seines Einkommens auf den Lebensunterhalt, $^1/_5$ des Restes zu seinem Vergnügen, und behält noch 48 Thaler für die Armen übrig. Wie groß war sein ganzes Einkommen?

(a. Verwendet er $^2/_3$ auf den Lebensunterhalt, so bleiben ihm noch $^1/_3$ seines Einkommens übrig:

b. $^1/_5 \times {}^1/_3 = {}^1/_{15}$ wird also auf das Vergnügen verwandt.

c. Da vom Lebensunterhalt noch $^1/_3 = {}^5/_{15}$ des Einkommens übrig blieben, so bleibt nach Abzug des $^1/_{15}$ noch $^4/_{15}$ vom Ganzen übrig.

d. Diese $^4/_{15}$ sind gleich den 48 Thalern.

e. Also $^1/_{15} = {}^{48}/_4$ Thlr. $=$ 12 Thlr.

f. Also das ganze Einkommen oder $^{15}/_{15} = 15 \times 12$ Thlr. $=$ 180 Thlr.)

α. Wie viel Thaler werden auf den Lebensunterhalt und wie viel auf das Vergnügen verwandt? Wie verhalten sich beide Summen? Wie das Geld für das Vergnügen zum Gelde für die Armen? Welcher Theil vom Ganzen sind die 48 Thlr.? ($^4/_{15}$)

β. Jemand hatte ein Einkommen von 180 Thlr. Davon brauchte er $^2/_3$ zu seinem Lebensunterhalte, und $^1/_{15}$ zu seinem Vergnügen. Das Uebrige bestimmte er für die Armen Wie viel war das?

γ. Jemand hatte ein jährliches Einkommen von 180 Thalern, wovon er $^2/_3$ zu seinem Lebensunterhalte brauchte, und 48 Thalern den Armen gab. Wie viel vom Ganzen konnte er auf sein Vergnügen verwenden?