Der Rathgeber bei mathematischen Beschäftigungen

Stöpel, August

Stendal, 1819

§. 1-41 Addition, Subtraction, Multiplication und Division der einfachen und zusammengesetzten Buchstabenausdrücke und Potenzen.

Erste Abtheilung.

I. Buchstabenrechnung.

§. 1. Die Buchstabenrechnung ist eine, jedem Freunde der Mathematik unentbehrliche, Wissenschaft, ohne welche es ihm unmöglich ist, Formeln oder Vorschriften zur Auflösung mathematischer Aufgaben zu lesen, anzuwenden, oder selbst zu erfinden, und die dahin gehörigen Schriften zu verstehen. Es ist daher nothwendig, daß sich jeder, der es zu einiger Vollkommenheit bringen will, mit derselben bekannt mache, wozu wir in dem Folgenden Anleitung geben wollen. Die Kenntniß der gemeinen Zahlenrechnung, wie sie in jeder nicht gar zu schlechten Schule gelehrt wird, können wir bei den Freunden mathematischer Beschäftigungen voraussetzen.

§. 2. Gemeiniglich stellen sich Unkundige die Rechnung mit Buchstaben weit schwerer vor, als sie in der That ist, woran unter andern auch der Umstand Schuld seyn mag, daß sie sich bei den Buchstaben, die in Rechnungen vorkommen, durchaus bestimmte Größen oder Zahlenwerthe vorstellen wollen, und von dem damit bezweckten Nutzen oder Vortheile keinen deutlichen Begriff machen können. Ein guter mündlicher Vortrag ist freilich der leichteste und kürzeste Weg, bald zu einiger Fertigkeit in der Buchstabenrechnung zu gelangen; allein nicht Alle können sich dieses Glücks erfreuen! Eigenes Studium muß Vielen ersetzen, was sie früher entbehrten oder versäumten. Wer sich ernstlich vornimmt, eine Wissenschaft zu erlernen, beginne sein Werk nur mit Liebe und Ausdauer, ermatte nicht, wenn ihm dieselbe zu mühevoll, zu schwer vorkommt. So wie jede hohe Gabe nach dem unabänderlichen Naturgesetze errungen werden muß, so kann man auch die Lustgefilde, welche die Mathematik dem Geiste darbietet, nur dann erreichen, wenn man Muth genug hat, durch die freilich etwes rauhen Pfade, die ihnen vorangehen, zu wandeln. —

§. 3. Zahlen sind Zeichen, durch die wir entweder den Mangel (0), oder die Einheit (1) oder die Mehrheit (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) einer Sache dem Auge vorstellig machen. Aus diesen Zeichen ersehen wir aber nicht, welche Sache gemeint sey, sondern nur, wie oft sie als Einheit genommen werden solle.

Das Rechnen mit den Zahlzeichen besteht in einer auf feststehende Regeln sich gründenden Versetzung und Veränderung, die mit ihnen vorgenommen wird. Will man eine Größe, ein Ding, eine Person, Linie oder einen Winkel durch ein einziges Zeichen ausdrücken, und arithmetische Veränderungen damit machen, so sind dazu die Zahlzeichen nicht so brauchbar, als die Buchstaben, weshalb die Rechnung mit letzteren entstanden ist.

Die Buchstaben in den Rechnungen sollen allgemeine Größen vorstellen, unter welchen man sich allerley denken kann. Die Antwort, welche eine Buchstabenrechnung giebt, ist daher eben so allgemein, d. h. auf alles passend; und man rechnet mit Buchstaben hauptsächlich deshalb, um leichte und einfache Regeln zur Lösung einer Aufgabe zu finden. Soll nun die Antwort in Zahlen erfolgen, so setzt man statt der Buchstaben diejenigen Zahlen, die ihnen in der Rechnung zukommen. Es sey z. B. der Flächeninhalt eines Gartens aus seiner Länge und Breite zu bestimmen, so giebt die Geometrie folgende Regel:

$$l.\ b = F$$

d. h. Länge multiplicirt mit der Breite ist gleich der Fläche. Wenn nun die Länge oder l 8 Ruthen, die Breite oder b 5 Ruthen ist, so beträgt die Fläche F

8 mal 5 = 40 Quadratruthen.

Die Zahlen 8 und 5 geben nur den Flächenraum dieses Gartens, aber die Buchstaben l und b gelten bei allen ähnlichen Gärten und Rechtecken, folglich allgemein.

§. 4. Bei mathematischen Rechnungen sind die negativen und positiven Größen vorzüglich merkwürwürdig. Sie sind einander stets entgegengesetzt, und etwa als Schulden und Vermögen, Rückwärtsgehen und Vorwärtsgehen, Ausgabe und Einnahme anzusehen. Die negativen Größen werden mit dem Subtractions- oder Minuszeichen (—), und die positiven mit dem Additions- oder Pluszeichen (+) versehen. Größen, vor welchen keins dieser beiden Zeichen steht, sind allemal als positive, oder Plusgrößen, zu betrachten, und müßten das Zeichen + erhalten; welches man der Kürze wegen ausläßt. Wie wichtig der Einfluß dieser Zeichen in den Rechnungen ist, wird man im Folgenden sehen.

Addition.

§. 5. Größen, die zu einander addirt werden sollen, erhalten das Pluszeichen. So heißt z. B. $8+6$, oder $a+b$ so viel: die Größen 8 und 6, oder a und b sind zu addiren.

Das Zeichen der Gleichheit ist ein doppelter Strich ($=$); und $8+6=14$ heißt: 8 und 6 ist gleich, oder macht 14.

Nur Dinge von einerley Art lassen sich addiren. 6 Äpfel, 5 Birnen und 9 Pflaumen können unter dieser Benennung nicht summirt werden; daher ordne man alle zu summirende Größen nach ihrer Art und schreibe sie unter einander; dann zähle man das Gleichartige zusammen, und schreibe die Summe darunter.

Eine Zahl vor einer Größe heißt Coëfficient; steht keine davor, so ist der Coëfficient $=1$.

$$\begin{array}{r} 6a+\ 7b+8c \\ 3a+\ 4b+\ c \\ \hline \text{Summe}=9a+11b+9c \end{array} \qquad \begin{array}{r} g+\ m+\ n \\ 2g+\ 6m+3n \\ 7g+\ 5m+2n \\ \hline \text{Summe}=10g+12m+6n \end{array}$$

Unter den Buchstaben a, b, c, g ꝛc. denke man sich, was man will, als Äpfel, Birnen, Castanien, Gurken u. d. gl., so wird man einsehen, daß $6a$ und $3a=9a$; $7b$ und $4b=11b$ u. s. w. machen.

§. 6. Wenn entgegengesetzte Größen z. B. $+3$ und -3 zu addiren sind, so gleicht man sie mit einander aus, d. h. man zieht die kleinere von der größern ab, und giebt dem Rest das Zeichen der größeren. Z. B.

$$\begin{array}{r} +3 \\ -3 \\ \hline =0 \end{array} \quad \begin{array}{r} +4 \\ -2 \\ \hline =+2 \end{array} \quad \begin{array}{r} -4 \\ +2 \\ \hline =-2 \end{array} \quad \begin{array}{r} +5 \\ -7 \\ \hline =-2 \end{array} \quad \begin{array}{r} +7a \\ +3a \\ -4a \\ -11a \\ +6a \\ \hline =+16a-15a=+a \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 6a-4b-2c+d \\ -a-7b+3c+d \\ 5a-9b-7c \\ \hline 10a-20b-6c+2d \end{array}$$

Sind mehrere Größen Einer Art mit verschiedenen Zeichen, wie in den beiden letzten Beispielen, so addirt man die Plusgrößen besonders, und zieht davon die Summe der Minusgrößen ab, oder gleicht sie aus. Z. B. $6a + 5a$ sind $+ 11a$; davon $-a$, bleibt $+ 10a$.

§. 7. Sollen Größen addirt werden, die nicht von einerlei Art sind, so setzt man sie mit ihren Zeichen neben einander. Z. B.

$$\begin{array}{r} 4a \\ -6b \\ +2c \\ -d \\ -g \\ \hline =4a-6b+2c-d-g. \end{array}$$

§. 8. Daß eine Größe mehr, oder größer sey, als eine andere, wird durch das Zeichen < angezeigt; an der Öffnung steht die größere, an der Spitze die kleinere Größe. Z. B. $9>5$ heißt: 9 ist größer, als 5; und $5<8$ heißt: 5 ist kleiner, als 8.

Jede Größe ist sich selbst gleich, also $c=c$; $a=a$. Wenn nun $a>b$, so muß auch $a+c>b+c$; folglich $b+c<a+c$.

Subtraction.

§. 9. Da das Subtrahiren oder Abziehen das Entgegengesetzte vom Addiren oder Hinzuthun ist, so gilt auch hier, was schon §. 5. gesagt ist, nämlich: nur Gleichartiges läßt sich wirklich von einander abziehen.

Allge-

Allgemeine Regeln beim Subtrahiren:
Verwandle das Zeichen des Subtrahenden oder der abzuziehenden Größe in das entgegengesetzte, und addire dann oder gleiche aus, so wird das Kommende der Rest oder Unterschied seyn.

Z. B. Von $12a$ ist gleich $12a$	Von -16 ist gleich -16
ab $5a$ dazu $-5a$	ab -10 dazu $+10$
Rest $7a$ $7a$	Rest -6 -6

Von $3b + x - 2z$	Von $a + b + 5c + 3d$
ab $b - x + z$	ab $-6a - 2b + 2d$
$- \quad + \quad -$	$+ \quad + \quad -$
Rest $2b + 2x - 3z$	Rest $7a + 3b + 5c + d$
Von $-2z - x + 17g$	Von $3m + n$
ab $-5z - 8g$	ab $4m + 2n + 6z - 8x$
$+ \quad +$	$- \quad - \quad - \quad +$
Rest $+3z - x + 25g$	Rest $-m - n - 6z + 8x$

In den Beispielen sind in der untersten Reihe die Zeichen verwechselt, und dann beide Reihen addirt. Die Größen, zu denen sich keine gleichnamigen finden, werden, wenn sie in der obern Reihe oder in dem Minuenden stehen, mit demselben Zeichen unter den Strich, wenn sie aber im Subtrahenden stehen, mit entgegengesetztem Zeichen herabgesetzt.

§. 10. Sind die Größen nicht gleichnamig, aber zusammengesetzt, d. h. aus mehrern durch + und − verbundenen Theilen oder Gliedern bestehend, so wird das, was zu jeder Größe gehört, in Klammern eingeschlossen, und zwischen beide das Minuszeichen gesetzt. Z. B.

Von $4a - 3b + 2c$
ab $-7g + x - z$
Rest $(4a - 3b + 2c) - (-7g + x - z)$

In solchen Fällen wird also die Subtraction bloß angezeigt.

Wenn die Werthe der einzelnen Glieder bekannt sind, so verwandelt man sie in einen Zahlwerth, und verrichtet dann die Subtraction. Z. B.

Von

$$\begin{array}{rl} \text{Von } 6 + 5 + 4 \text{ das ist} = & 15 \\ \text{ab} - 7 - 8 + 9 \quad - = & -6 \\ & + \\ \hline \text{Rest} = & +21 \end{array}$$

§. 11. So wie Gleichviel zu Gleichvielem addirt Gleichviel in den Summen giebt, so muß Gleiches von Gleichem subtrahirt auch gleichgroße Reste übrig lassen.

Es sey $a = m$, so ist $a + z = m + z$
und $a - z = m - z$

Das Minuszeichen erhält jede abzuziehende Größe; als $60 - 30$ heißt: von 60 soll 30 subtrahirt werden; deßgleichen $a - b$ heißt: von der Größe a soll die Größe b abgezogen werden.

Multiplication.

§. 12. Größen, die mit einander multiplicirt werden, erhalten das Multiplicationszeichen, welches ein Punct, oder ein schiefliegendes Kreuz ist. Z. B. $8 . 6$ oder 8×6 heißt: 8 mal 6; $a . b$ heißt: a mal b. Indessen braucht man die Buchstaben, welche mit einander zu multipliciren sind, nur neben einander ohne Zeichen zu setzen, wenn nicht anderer Ursachen wegen eine Zweideutigkeit zu besorgen ist. So ist ab eben so viel, als $a . b$ oder $a \times b$.

§. 13. Die zu multiplicirenden Größen heißen Factoren oder Efficienten; was aus beiden entsteht heißt Product.

§. 14. Oft sind mehrere Factoren mit einander zu multipliciren, dann ist es einerlei, in welcher Reihenfolge sie stehen. Denn

$2 . 4 . 6 = 48$ desgleichen $a . b . c . d = abcd$
und $4 . 6 . 2 = 48$ und $c . d . b . a = abcd$

Man ordnet sie aber gern nach ihrer alphabetischen Ordnung, wenn nicht andere Umstände dies verbieten.

§. 15. Zusammengesetzte Größen werden in Klammern geschlossen, und das Multiplicationszeichen wird zwischen die Factoren gesetzt. Z. B.

$$(5 + 4 - 3 - 2) . (3 + 9 + 1 - 4 - 2)$$

Verwandelt man jeden Factor in Eine Größe, welches hier wohl

wohl angeht, so wird aus $(5 + 4 - 3 - 2) = + 4$, und aus $(3 + 9 + 1 - 4 - 2) = + 7$. Die beiden Factoren sind dann 4 und 7, und ihr Product 28.

Überhaupt muß man suchen, zusammengesetzte Größen auf die einfachste Form zu bringen. So wäre es z. B. vortheilhafter, anstatt $(mn) . (rp)$ lieber $mnrp$ zu schreiben.

§. 16. Haben die Factoren Zahlzeichen zu Coëfficienten bei sich, so kann man die Multiplication auch bloß durch das Zusammensetzen (jedoch nicht ohne Puncte) verrichten. Z. B.

$$4a . 5b . 6d$$

das ist $= 4 . 5 . 6 . abd$, oder noch besser $120abd$. Und $4pq . 3x$ ist auch $3 . 4pqx$ oder $12pqx$ zu schreiben, denn die Coëfficienten sind Factoren, von denen gilt, was §. 14. gesagt wurde. Wenn die Coëfficienten aber große Zahlen sind, so läßt man sie oft auch stehen; als

$$720c . 84ab = (720 . 84) abc.$$

§. 17. Sind entgegengesetzte Größen mit einander zu multipliciren, so gilt folgende Regel:

Einerlei Zeichen mit einander multiplicirt geben im Product eine Plusgröße; verschiedene Zeichen geben im Product eine Minusgröße.

Z. B. $+a . +b = +ab$	oder	$+3 . +9 = +27$
$-a . -b = +ab$		$-3 . -9 = +27$
$+a . -b = -ab$		$+3 . -9 = -27$
$-a . +b = -ab$		$-3 . +9 = -27$

§. 18. Sind mehr, als zwei Factoren mit verschiedenen Zeichen da, so multiplicire man erst zwei mit einander, und gebe dem Producte das ihm gehörige Zeichen; dann multiplicire man den dritten Factor mit dem Producte der beiden erstern, und fahre so fort, so wird es sich ausweisen, welches Zeichen das letzte Product erhalten muß. Z. B.

$$a . -b . +c . +d . -g$$

hier ist

$a . -b = -ab$, weil die Zeichen verschieden sind;
und $-ab . +c = -abc$ — — — — —
und $-abc . +d = -abcd$ — — — — —
und $-abcd . -g = +abcdg$, weil die Zeichen gleich sind.

§. 19.

§. 19. Die Multiplication mit zusammengesetzten Größen geschieht beinahe eben so, als mit Zahlen. Nämlich man multiplicirt mit jedem Gliede des einen Factors alle Glieder des andern Factors, schreibt sie mit ihren Zeichen hin, und addirt sie endlich zusammen.

Z. B. $9-2$ multiplicirt mit $5-3$, ist also anzufangen:

$$\begin{array}{rr}
 & 9-2 \\
 & 5-3 \\
\hline
 & -27+6 \\
 & 45-10 \\
\hline
\text{Product} & 45-37+6
\end{array}$$

Und $(a+2b+c)$ mal $a = a+2b+c$

$$\begin{array}{rr}
 & a+2b+c \\
 & a \\
\hline
\text{Product} & aa+2ab+ac
\end{array}$$

$$\begin{array}{rr}
(a+2b+c)\,.\,(a-b) = & a+2b+c \\
 & a-b \\
\hline
 & -ab-2bb-bc \\
 & aa+2ab+ac \\
\hline
\text{Product} & aa+ab-2bb+ac-bc
\end{array}$$

$$\begin{array}{rr}
\text{Mit 3 Factoren:} & a+2b+c \\
 & a-2b-c \\
\hline
 & -ac-2bc-cc \\
 & -2ab-4bb-2bc \\
 & aa+2ab+ac \\
\hline
 & aa-4bb-4bc-cc = \text{Product.}
\end{array}$$

§. 20. Man pflegt die Producte gern kürzer zu schreiben, wenn es angeht und vortheilhaft ist. Ein Abkürzen ist z. B. dann möglich, wenn in allen, oder einigen Gliedern einerlei Buchstaben oder Factoren vorkommen. Diese sind dann als allgemeine Factoren anzusehen, und die durch sie multiplicirten Größen in eine Klammer zu schließen. Z. B.

$aa-3ab$ kann auch heißen: $(a-3b)\,.\,a$, weil a ein gemeinschaftlicher Factor in beiden Gliedern ist.

Anstatt $aabd + 2aab - 5abd$ steht kürzer $(ad + 2a - 5d) \cdot ab$., weil ab in allen Gliedern als gemeinschaftlicher Factor ist.

Anstatt $3aac - 9abd + 18a$ schreibt man lieber
$(ac - 3bd + 6) \cdot 3a$, weil $3a$ in allen Gliedern ist.

Anstatt $5pqx - 30qx + 25px$, lieber
$(pq - 6q + 5p) \cdot 5x$.

Man kann die erste Schreibart wieder herstellen, wenn man die Größe in der Klammer mit der hinter derselben multiplicirt; als

$$\begin{array}{r} pq - 6q + 5p \\ 5x \\ \hline 5pqx - 30qx + 25px \end{array}$$

Dies Abkürzen und Verändern einer Größe ist sehr nützlich, und wird durch Übung und Nachdenken bald geläufig.

§. 21. Wenn eine Größe mehrere Male mit sich multiplicirt wird, so schreibt man sie entweder eben so oft neben einander hin, oder man bemerkt rechts neben der Größe durch eine kleine Zahl, wie oft sie neben einander stehen sollte. Z. B.

$a = a^1$
$aa = a^2$
$aaa = a^3$
$aaaa = a^4$
a unbestimmte oder gewisse Male $= a^n$

Diese Schreibart ist sehr bequem. Man bemerke aber folgende dabei vorkommende Kunstausdrücke.

Das einfache a, woraus durch die Multiplication alle andere entstehen, heißt Wurzel;

die Größen a^2, a^3, a^4, a^n heißen Dignitäten oder Potenzen von a;

die kleinen Zahlen $1, 2, 3, 4, 5 \ldots\ldots n$ heißen Exponenten des a.

Steht keine Zahl am Kopfe einer Größe, so ist die Größe selbst noch in der ersten Potenz, und also ihr Exponent $= 1$.

Die Wurzel oder die radix wird durch das Zeichen $\sqrt{}$ angezeigt. So ist $\sqrt{aa}$ oder $\sqrt{a^2} = a$; d. h. die Wurzel aus a^2 ist a.

Die

Die Wurzel erhält verschiedene Namen; so heißt sie z. B. Quadratwurzel ($\sqrt{}$), wenn die Größe, deren Wurzel sie ist, in der zweiten Potenz; Kubikwurzel ($\sqrt[3]{}$), wenn die Größe in der 3ten Potenz steht u. s. w.; und so ist

a von a^2 die Quadratwurzel $= \sqrt{}$
von a^3 die Kubikwurzel $= \sqrt[3]{}$
von a^4 die vierte Wurzel $= \sqrt[4]{}$
von a^5 die fünfte Wurzel $= \sqrt[5]{}$ rc.

§. 22. Die Potenzen können addirt und subtrahirt werden. Z. B. $2a^2$ und noch $4a^2$ sind $= 6a^2$;

$$2b^2\, x^3 + 5b^2\, x^3 = 7b^2\, x^3$$

Und wenn die Zeichen verschieden sind:

$$\begin{array}{rl} & +4x^3\, z^2 \\ \text{und} & -2x^3\, z^2 \\ \hline \text{Summe} & +2x^3\, z^2 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{oder von} & +4x^3\, z^2 \\ \text{ab} & -2x^3\, z^2 \\ & + \\ \hline \text{Rest} & +6x^3\, z^2 \end{array}$$

§. 23. Diese Addition und Subtraction ist nur bei einerlei Buchstaben und gleichen Potenzen möglich, und wird unter den Coëfficienten abgemacht.

Sind die Exponenten nicht gleich, so wird die Addition oder Subtraction bloß angezeigt. Z. B. zu $4x^3$ sollen $3x^2$ addirt werden, so ist die Summe $= 4x^3 + 3x^2$.

Größen, die durch die Multiplication verbunden sind, gelten nur für eine Größe (oder ein Glied).

§. 24. Die Multiplication der Potenzen geschieht dadurch, daß man die Exponenten gleichartiger Größen addirt. Z. B.

$$a^2 \,.\, a^3 = a^{2+3} = a^5; \text{ denn } \begin{array}{rl} & a^2 = aa \\ \text{und} & a^3 = aaa \\ \hline & aaaaa \text{ oder } a^5 \end{array}$$

$$-x^3 \,.\, x^4 = x^7; \text{ und } x^n \,.\, x^m = x^{n+m}$$

$$x^2\, y^2 \,.\, x^3\, y^4 = x^{2+3}\; y^{2+4} = x^5 \,.\, y^6$$

§. 25. Ungleichnamige Potenzen setzt man bloß neben einander, und das Multiplicationszeichen etwa zwischen sie. Z. B. $x^5 \,.\, z^2$.

Auch bei größeren Exempeln kommt die Multiplication mit Potenzen vor. Z. B.

$$\begin{array}{r} px + ax^2 - a^2 \\ x^2 + a^2 \\ \hline a^2px + a^3x^2 - a^4 \\ px^3 + ax^4 - a^2x^2 \qquad\qquad \\ \hline \end{array}$$

Product $px^3 + a^2px + ax^4 + a^3x^2 - a^2x^2 - a^4$.

§. 26. Gegebene Potenzen werden zu höheren erhoben, wenn man ihre Exponenten mit der Größe multiplicirt, zu welcher Potenz sie erhoben werden sollen. Z. B.

a^2 in die dritte Potenz erhoben, ist $= a^{2 \cdot 3} = a^6$

z^4 in die zweite Potenz erhoben, ist $= z^{4 \cdot 2} = z^8$

b^m in die nte Potenz erhoben, ist $= b^{m \cdot n} = b^{mn}$

§. 27. Wenn Größen, die durch die Multiplication mit einander verbunden sind, zu Potenzen erhoben werden sollen, so wird jede Größe mit dem gegebenen Exponenten bezeichnet. Z. B.

$(ax)^2$ heißt: a mit x multiplicirt, und das Product wieder mit sich selbst multiplicirt, oder ins Quadrat erhoben. Dies ist gleich $a^2 x^2$.

Es sey $a = 2$, $x = 3$; so ist $(ax)^2 = (2.3)^2 = 6^2 = 36$ und $a^2 . x^2 = 2^2 . 3^2 = 2.2.3.3 = 4.9 = 36$.

Eben so wird $(axy)^3 = a^3 x^3 y^3$.

§. 28. Jede zusammengesetzte Größe, die zu irgend einer Potenz erhoben werden soll, muß in eine Klammer geschlossen seyn. Z. B. $9 + 3$ in der 3ten Potenz, ist $(9+3)^3$; $(a+b)^2$.

Löst man die Aufgabe, so fällt die Klammer weg.

So ist $(9+3)^3 = 12^3 = 12 . 12 . 12 = 1728$.

Oder $(a+b)^2 = a+b$

$$\begin{array}{r} a+b \\ \hline ab+b^2 \\ a^2+ab \qquad \\ \hline \end{array}$$

Product $a^2+2ab+b^2 =$ der 2ten Potenz, oder $(a+b)^2$.

Oder $(a-b)^2 = a - b$

$$\begin{array}{r} a - b \\ \hline -ab + b^2 \\ a^2 - ab \qquad \\ \hline \end{array}$$

$a^2 - 2ab + b^2 =$ der 2ten Potenz von $a-b$.

Schriebe

Schriebe man anstatt $(a+b)^2$ nur $a+b^2$, so sollte nur b ins Quadrat erhoben werden, und die Antwort würde seyn $a+bb$.

Division.

§. 29. Das Divisionszeichen besteht in einem Querstrich zwischen den Größen, oder in zwei über einander stehenden Puncten. So heißt $\frac{a}{b}$ oder $a:b$ so viel, als: die Größe a soll durch b getheilt werden. Die erstere Schreibart ist mit Recht die gewöhnlichste. Divisor und Dividendus stehen allemal in einem Bruch, in welchem der erstere der Nenner ist. Soll 48 durch 6 getheilt werden, so zeigt dies der Mathematiker durch den Bruch $\frac{48}{6}$ an. Und $a^2+2ab+b^2$ dividirt durch $a+b$ steht so:

$$\frac{a^2+2ab+b^2}{a+b}$$

§. 30. Sind gleichnamige Größen im Divisor und Dividendus, so geschieht die Division durch Wegnahme der gleichnamigen Größen. Z. B.

$\frac{abc}{c}=ab$, weil c im Divisor sich gegen c im Dividendus hebt. Der **Quotient** ist ab.

$\frac{abc}{bc}=a$, weil bc sich heben läßt.

$\frac{6.7.8}{8}=6.7$, weil 8 sich heben läßt.

§. 31. Da die Division eine entgegengesetzte Multiplication ist, so gilt auch hier die Regel:

Einerlei Zeichen geben +; verschiedene Zeichen geben – im Quotienten.

Z. B. $\frac{bc}{c}=+b$; $\frac{-bc}{-c}=+b$; $\frac{+bc}{-c}=-b$; $\frac{-bc}{+c}=-b$.

§. 32. Wenn Divisor und Dividendus gleich groß sind, so ist der Quotient = 1.

$$\frac{a}{a} = 1;\ \frac{+a}{-a} = -1;\ \frac{-a}{-a} = 1;\ \frac{-5}{+5} = -1.$$

Wenn gleich 1 nicht dividirt, so hat doch ihr Zeichen auf den Quotienten den gewöhnlichen Einfluß.

$$\frac{+4}{-1} = -4;\ \frac{-5a^2b}{-1} = +5a^2b;\ \frac{+3ab}{+1} = +3ab.$$

§. 33. Zusammengesetzte Größen werden fast eben so dividirt, als gemeine Zahlen.

Es sey $4abc - 16cda$ durch $2a$ zu theilen. Man stelle die Größen folgendermaßen:

Divisor. Dividend. Quotient.

$2a)\ 4abc - 16cda\ ||\ 2bc - 8cd$, od. auch $(b - 4d) . 2c$
ab $4abc$ siehe §. 20.

Rest $-16cda$
ab $-16cda$

Rest 0

Man dividirt mit $2a$ in $4abc$; a hebt sich gegen a, und 2 in $4bc = 2bc$, welches das erste Glied im Quotienten ist. Multiplicire $2bc$ mit $2a$, schreibe das Product $4abc$ unter den gleichnamigen Theil des Dividendus, und ziehe ab. Den Rest, hier $= -16cda$, setze herunter; dividire mit $2a$ in $-16cda$; a fällt gegen a weg, und 2 in $16cd = -8cd$, welches das zweite Glied des Quotienten ist. Hiermit den Divisor multiplicirt, giebt $-16cda$, und alles geht auf.

Ferner: Divis. Dividend. Quotient.

$-4cg)\ -16gcd + 4c^2g^2 - 8cg\ ||\ +4d - cg + 2$
ab $-16gcd$

Rest $+4c^2g^2 - 8cg$
ab $+4c^2g^2$

Rest $-8cg$
ab $-8cg$

Rest 0.

Man hätte denselben Quotienten bekommen, wenn man die gleichnamigen Buchstaben oder Größen des Divisors

und

und Dividenden ausgestrichen oder aufgehoben hätte. Denn die Glieder des Quotienten bleiben dann allein stehen. Z. B.

$$\frac{-\overset{4}{\cancel{16}}\,\cancel{g}\cancel{c}d + \cancel{4}\cancel{c}cg\cancel{g} - \overset{2}{\cancel{8}}\cancel{c}\cancel{g}}{-\cancel{4}\cancel{c}\cancel{g}} = +4d - cg + 2$$

wobei man aber immer auf die Zeichen zu achten hat.

§. 34. Wenn der Dividend eine einfache, der Divisor eine zusammengesetzte Größe ist, als 1 dividirt durch 1 + a, so wird die Division bloß angezeigt.

$$\frac{1}{1+a}$$

§. 35. Eben so wird die Division nur angezeigt, wenn sich im Divisor und Dividenden keine gleichnamigen Größen finden. Denn alsdann kann gar nicht wirklich dividirt werden. Z. B.

$$\frac{5a+d}{2g-m}$$

läßt sich nur dann theilen, wenn den Buchstaben Zahlenwerthe untergelegt sind.

§. 36. Folgende Regeln können bei der Division mit zusammengesetzten Größen gute Dienste leisten.

1) Man ordne die Glieder im Divisor, wie im Dividendus, nach einem am häufigsten vorkommenden Buchstaben, und zwar die größten Potenzen voran. Es wäre z. B.

   Dividendus $= bbbb + 4abbb + 4aaab + 6aabb + aaaa$,

   Divisor $= bb + aa + 2ab$,

   so würden sie folgendermaßen zu ordnen seyn:

   Dividendus $= aaaa + 4aaab + 6aabb + 4abbb + bbbb$.

   Divisor $= aa + 2ab + bb$.

   Und mit Potenzzeichen noch kürzer:

   $$\frac{a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4}{a^2 + 2ab + b^2}$$

2) Man theile nun das erste Glied des Dividendus durch das erste des Divisors, so erhält man einen Di-

Theil des Quotienten, mit dem man alle Glieder des Divisors multiplicirt und die Producte unter solche Glieder des Dividendus setzt, von denen sie sich abziehen lassen. Mit dem herabgesetzten Reste verfährt man eben so, wodurch man das zweite Glied des Quotienten bekommt. Geht am Ende nicht alles auf, so ist der Rest der Zähler und der Divisor ist der Nenner eines Bruchs, wie bei der Zahlendivision.

3) Wenn wegen der vorkommenden ungleichartigen Glieder zuweilen die Subtraction nicht angeht, so setzt man die ungleichartigen Glieder des Subtrahenden mit verändertem Zeichen als Rest herunter, weil es dann eben so gut ist, als wenn abgezogen wäre.

Zur Übung einige Beispiele:

Divisor. Dividend. Quotient.

1) $a+b)\ aa+2ab+bb\ ||\ a+b$

$aa+\ ab$

$+\ ab+bb$

$+\ ab+bb$

0

2) $a-b-d)\ a^2-2ad-b^2+d^2\ ||\ a-d+b$

$a^2-\ ad-ab$

$+$

$-\ ad-b^2+ab+d^2$

$-\ ad+db\quad +d^2$

$-$

$-b^2-db+ab$

(besser $ab-db-b^2$)

$ab-db-b^2$

0

3) $5a+3d)\ 15a^2-10ab+9ad-6bd\ ||\ 3a-2b$

$15a^2\quad +9ad$

$-10ab\quad -6bd$

$-10ab\quad -6bd$

0

§. 37. Wenn man mehrere Größen einzeln durch eine dividirt, so kommt eben so viel heraus, als wenn man diese Größen erst addirt, und dann dividirt. Z. B.

$\frac{6}{2}+$

$$\frac{6}{2}+\frac{8}{2}+\frac{10}{2}+\frac{12}{2}=3+4+5+6=18$$

und $$\frac{6+8+10+12}{2}=\frac{36}{2}=18.$$

also $$\frac{a-b}{n}=\frac{a}{n}-\frac{b}{n}$$

Größen, welche durch die Addition oder Subtraction mit einander verbunden, und durch eine andere Größe zu dividiren sind, müssen daher einzeln dividirt werden, wenn man ihre Summe nicht theilen kann.

§. 38. Potenzen von einerlei Wurzeln werden durch einander dividirt, indem man ihre Exponenten von einander abzieht. Z. B.

$$\frac{a^3}{a^2}=a\text{; denn }\frac{a^3}{a^2}=\frac{aaa}{aa}=a.\text{ Und }\frac{d^5}{d}=d^4$$

$$\frac{a^3x^4}{a^2x^2}=ax^2;\ \frac{a^mx^n}{a^nx^r}=a^{m-n}x^{n-r}$$

$\frac{a^5}{a^7}=a^{5-7}=a^{-2}$, wobei der Exponent negativ wird, weil der Nenner eine höhere Potenz hat, als der Zähler.

§. 39. Weil es negative Exponenten giebt, so kann folgende Reihe der Potenzen statt finden:

$a^n \ldots\ldots a^4, a^3, a^2, a, a^0, a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, a^{-4} \ldots\ldots a^{-n}$

Eine Größe in der Potenz 0 ist allemal $=1$, also $a^0=1$. Von a^{-1} an soll a noch a mal kleiner werden, welches geschieht, wenn der Divisor a mal größer wird; daher kann auch die Reihe

$$a^{-1},\ a^{-2},\ a^{-3},\ a^{-n}$$

also aussehen $\frac{1}{a}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a^3}, \frac{1}{a^n}$, was wohl zu merken ist.

Dividirt man $\frac{a^4x^ry^5}{a^4x^ry}$, so ist der Quotient $a^{4-4}x^{r-r}y^{5-1}$ $=a^0x^0y^4=1\cdot1\cdot y^4=y^4$.

§. 40.

§. 40. Potenzen werden erniedrigt, wenn man ihre Exponenten dividirt. — Gesetzt man wollte aus a^{12} die dreifache oder $\sqrt[3]{\ }$ ziehen, so wäre dies

$$a^{\frac{12}{3}} = a^4$$

$\sqrt[6]{x^{12}} = x^{\frac{12}{6}} = x^2$; $\sqrt[2]{b^4} = b^{\frac{4}{2}} = b^2$; $\sqrt[3]{g^2} = g^{\frac{2}{3}}$; $\sqrt[m]{z} = z^{\frac{1}{m}}$, und das Wurzelzeichen kann also wegbleiben, wenn man den Exponenten der Wurzel unter den Exponenten der Potenz als Nenner desselben setzt. Und eine Größe $a^{\frac{n}{m}}$ kann auch $\sqrt[m]{a^n}$ geschrieben werden, welches der umgekehrte Fall vom vorigen ist. $a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$; $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$.

§. 41. Aus Größen, welche durch die Multiplication verbunden sind, zieht man die Wurzel, indem man die Wurzel aus jeder besonders zieht. Z. B.

$$\sqrt[3]{a^2 x^4 z} = a^{\frac{2}{3}} x^{\frac{4}{3}} z^{\frac{1}{3}}$$

$$\sqrt[3]{a^6 x^9 y^{12}} = a^{\frac{6}{3}} x^{\frac{9}{3}} y^{\frac{12}{3}} = a^2 x^3 y^4$$

Nun wird man auch folgendes Exempel dividiren können.

$$\begin{array}{lll}
\text{Divisor.} & \text{Dividendus.} & \text{Quotient.} \\
a^2 + b^2) & a^6 + b^6 & \| \; a^4 - a^2 b^2 + b^4 \\
 & a^6 + a^4 b^2 & \\
 & - & \\
\hline
 & \text{Rest } - a^4 b^2 + b^6 & \\
 & - a^4 b^2 - a^2 b^4 & \\
 & + & \\
\hline
 & \text{Rest } + a^2 b^4 + b^6 & \\
 & + a^2 b^4 + b^6 & \\
\hline
 & 0 &
\end{array}$$

wobei man sich erinnern muß, daß Potenzen durch die Addition ihrer Exponenten multiplicirt, und durch die Subtraction ihrer Exponenten dividirt werden.