Der Rathgeber bei mathematischen Beschäftigungen

Stöpel, August

Stendal, 1819

III. Verhältnisse, Proportionen und Progressionen.

urn:nbn:de:hbz:466:1-63556

hören. Z. B. $\frac{21,468}{4} = 5,367$; denn wenn man 4 in 21 dividirt, so können nur 5 Ganze kommen.

§. 58. Einerlei Zeichen, durch einander dividirt, geben +; verschiedene, − im Quotienten.

$\frac{+3,2}{+1,6} = +2$; $\frac{+3,2}{-1,6} = -2$; $\frac{-3,2}{+1,6} = -2$; $\frac{-3,2}{-1,6} = +2$.

Die Division der Decimalbrüche ist von der mit gemeinen Zahlen nur dadurch unterschieden, daß man durch die §. 56. gegebene Regel zu bestimmen sucht, wo die Ganzen aufhören, also, wohin das Komma im Quotienten zu sezzen ist.

§. 59. Decimalbrüche, die nicht ins Unendliche fortgehen, können in gemeine Brüche verwandelt werden, wenn man Zähler und Nenner mit einerlei Zahl dividirt, Z. B. $3,75 = 3\frac{75}{100}$, und hebt man den Bruch durch 25, so erhält man $3\frac{3}{4}$. Gehen die Decimalbrüche aber ins Unendliche fort, so mögte dies Verfahren nicht immer zuverlässig genug seyn.

III. Von den Verhältnissen und Proportionen.

§. 60. Zwei Größen einerlei Art stehen zu einander in einem **Verhältniß**. Sieht man dabei auf den Umstand, **wie viel** kleiner oder größer die eine sey, so heißt ihr Verhältniß **arithmetisch**; untersucht man aber, **wie viel mal** die eine Größe in der andern enthalten sey, so heißt das Verhältniß **geometrisch**. Das Zeichen des arithmetischen Verhältnisses ist sehr passend das Subtractionszeichen (—), weil die **Differenz** beider Größen oder Glieder hier die Hauptsache ist; das Zeichen eines geometrischen Verhältnisses ist das Divisionszeichen (:); die Zahl, welche bestimmt, wie oft das eine Glied in dem andern enthalten ist, heißt **Exponent** oder **Quotient**. So sind

Arithmetische Verhältnisse.	Geometrische Verhältnisse.
$6 - 3$, Differenz $= 3$	$6 : 3$, Exponent $= 2$
$3 - 6$, — $= -3$	$12 : 6$, — $= 2$
$15 - 10$, — $= 5$	$15 : 10$, — $= 1{,}5$
$10 - 15$, — $= -5$	$10 : 15$ — $= \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$

Der Unterschied der arithmetischen und geometrischen Verhältnisse wird aus diesen wenigen Beispielen leicht erkannt werden.

§. 61. Bei dem arithmetischen Verhältnisse kommen 3 Größen vor:

1. die große Zahl. Sie besteht aus der kleinen + der Differenz.
2. die kleinere Zahl. Sie ist = der großen — der Differenz.
3. die Differenz. Sie ist gleich der großen — der kleinen.

Denn a sey die große, b die kleine, d die Differenz, so ist

$a = b + d$ in Zahlen $15 = 10 + 5$
$b = a - d$ $\quad 10 = 15 - 5$
$d = a - b$ $\quad 5 = 15 - 10$

§. 62. Ein geometrisches Verhältniß ist als ein Bruch anzusehen, dessen Werth der Exponent ist. Denn

$$12 : 6 = \frac{12}{6} = 2 = \text{Werth oder Exponenten.}$$

Wenn man Zähler und Nenner eines Bruchs mit einerlei Zahl multiplicirt oder dividirt, so wird das Verhältniß nicht geändert, und der Exponent derselbe bleiben. Denn

$$\frac{12}{6} = 2 \text{ und } \frac{12 \cdot 3}{6 \cdot 3} = \frac{36}{18} = 2. \text{ Oder } \frac{12 : 3}{6 : 3} = \frac{4}{2} = 2.$$

Weil kleine Zahlen faßlicher sind, als große, so pflegt man gern die durch große Zahlen ausgedrückten Verhältnisse durch die Division mit einerlei Zahl auf kleinere Zahlen zu bringen. Z. B. $\frac{96}{144}$ ist nicht so faßlich, als $\frac{2}{3}$, obgleich beide Verhältnisse gleich sind.

§. 63. Im geometrischen Verhältniß sind auch 3 Größen zu merken:

der Zähler a; der Nenner b; der Exponent m,

$$a = b\,m \quad \text{in Zahlen} \quad 144 = 48 \cdot 3$$

$$b = \frac{a}{m} \qquad\qquad 48 = \frac{144}{3}$$

$$m = \frac{a}{b} \qquad\qquad 3 = \frac{144}{48}$$

a = dem Product aus dem Nenner und Exponenten;
b = dem Zähler dividirt durch den Exponenten;
m = dem Zähler dividirt durch den Nenner.

§. 64. Zwei gleiche arithmetische Verhältnisse bilden eine arithmetische Proportion. Z. B.

$$\left.\begin{array}{l} 5 - 7 = 9 - 11 \\ 7 - 5 = 11 - 9 \end{array}\right\} \text{ bei allen ist die Differenz} = 2;$$

folglich ist $5 - 7 = 9 - 11$ eine arithmetische Proportion, so wie auch $a - b = c - g$, wenn beide Verhältnisse einerlei Differenz haben.

Kann das zweite Glied vom ersten abgezogen werden, so ist es kleiner, und das Verhältniß

$$7 - 5 = 7 - (7 - 2) \text{ oder } a - b = a - (a - d).$$

Ist das erste Glied das kleinere, so wird das Verhältniß

$$5 - 7 = 5 - (5 + 2) \text{ oder } a - b = a - (a + d).$$

Da das auch im 2ten Verhältniß, dessen erstes Glied b seyn soll, der Fall ist, so kann eine arithmetische Proportion allgemein auch so ausgedrückt werden:

Erstes Glied. Zweites. Drittes. Viertes.

$$a - (a - d) = b - (b - d)$$

$$\text{oder } a - (a + d) = b - (b + d).$$

§. 65. Jede Proportion besteht demnach aus 4 Gliedern. Wenn das 3te Glied dem 2ten nicht gleich ist, so heißt die Proportion discret; ist es aber ihm gleich, so heißt sie stetig.

$$\left.\begin{array}{l} \text{So ist } 3 - 4 = 9 - 10 \text{ eine discrete} \\ \text{und } 3 - 4 = 4 - 5 \text{ eine stetige} \end{array}\right\} \text{Proportion.}$$

Für die stetige arithmetische Proportion paßt der allgemeine Ausdruck

$$a - (a + d) = (a + d) - (a + 2d)$$

$$\text{oder } a - (a - d) = (a - d) - (a - 2d).$$

§. 66. In jeder arithmetischen Proportion ist die Summe der beiden äußersten Glieder gleich der Summe der beiden mittelsten. Dieses Gleichseyn ist ein untriegliches Kennzeichen einer arithmetischen Proportion. In den Proportionen

$8 - 11 = 12 - 15$ ist $8 + 15 = 11 + 12 = 23$

$a - a + d = b - (b + d)$ ist $a + b + d = a + d + b$.

§. 67. Die Glieder einer arithmetischen Proportion sind mancherlei Versetzungen fähig. Z. B.

$$8 - 10 = 16 - 18$$
$$10 - 8 = 18 - 16$$
$$16 - 18 = 8 - 10$$
$$18 - 16 = 10 - 8.$$

Daher kann jedes Glied zum letzten gemacht und leicht gefunden werden. Denn zieht man das 1ste Glied von der Summe der beiden mittelsten ab, so bleibt im Rest das letzte Glied. Die 4 Glieder mögen allgemein a, b, c, g heißen, so ist

das letzte $g = (b + c) - a$
das erste $a = (b + c) - g$
das dritte $c = (a + g) - b$
das zweite $b = (a + g) - c$.

§. 68. Weil in der stetigen Proportion das 3te Glied dem zweiten gleich ist, so ist es die Hälfte von der Summe der beiden äußern.

$a - b = b - c$; dann ist $a + c = 2b$; also $\frac{a + c}{2} = b$.

Man nennt das 2te Glied einer solchen Proportion auch das arithmetische Mittel, und bedient sich dessen oft, wenn vom mittlern Werthe oder Durchschnitt die Rede ist. Z. B. In einem Jahre kostete der Scheffel Korn 2 Rthlr. bis 3 Rthlr., so wird der mittlere Preis also gefunden:

$$\frac{3 + 2}{2} = \frac{5}{2} = 2\tfrac{1}{2} \text{ Rthlr.}$$

§. 69. Mehrere zusammengesetzte arithmetische stetige Proportionen bilden eine arithmetische Progression. Z. B. $2 - 4 = 4 - 6$; $4 - 6 = 6 - 8$; $6 - 8 = 8 - 10$; $8 - 10 = 10 - 12$. Die Glieder derselben sind 2, 4, 6, 8, 10, 12.

In

In allgemeinen Zeichen a, a + d, a + 2d, a + 3d, a + 4d, a + 5d, wobei leicht bemerkt wird, daß die Differenz d stets um eins geringer ist, als die Anzahl der vorhergehenden Glieder. Z. B. das 3te Glied ist = a + 2d, das 6ste ist = a + 5d.

§. 70. Wenn das erste Glied a einer arithmetischen Progression und die Differenz d bekannt sind, so kann daraus jedes verlangte Glied n gefunden werden. Bezeichnet n ein gewisses Glied, so besteht dieses Glied nach §. 69. aus a + (n — 1) d; nun kann dasselbe immer als das letzte angesehen werden, welches wir z nennen wollen, also ist

$$z = a + (n - 1)\, d$$

worin n die Anzahl der Glieder bedeutet.

§. 71. In der arithmetischen Progression sind demnach 4 Größen zu merken; wenn 3 von ihnen bekannt sind, so findet man jedesmal die 4te durch Rechnung.

a, das erste Glied ist $= z - (n - 1)\, d$

z das letzte $= a + (n - 1)\, d$

d die Differenz $= \dfrac{z - a}{n - 1}$

n die Anzahl der Glieder $= \dfrac{z - a + d}{d}$

§. 72. Wenn man zwei von den Enden gleich weit abstehende Glieder addirt, so bekommt man aus jedem Paar einerlei Summe. Z. B.

3, 5, 7, 9, 11, 13. Hierin ist $\left.\begin{matrix}3 + 13\\ 5 + 11\\ 7 + 9\end{matrix}\right\} = 16$

In a, a + d, a + 2d, a + 3d, a + 4d, a + 5d

ist ebenfalls $\left.\begin{matrix}a + a + 5d\\ a + d + a + 4d\\ a + 2d + a + 3d\end{matrix}\right\} = 2a + 5d.$

§. 73. Hierauf gründet sich eine vortheilhafte Summirung einer arithmetischen Progression:

Dividire die Anzahl der Glieder n durch 2, so erhält man Paare $= \frac{n}{2}$; addire das erste und letzte Glied $a + z$, so erhält man den Werth eines Paars; dieser Werth, multiplicirt mit der Anzahl der Paare $\frac{n}{2}$, giebt im Product die Summe S, und also ist

$$S = \frac{n}{2} \cdot (a + z) \text{ oder } \frac{n \cdot (a+z)}{2}$$

Diese Formel gilt auch, wenn die Zahl der Glieder ungerade ist.

Weiß man das letzte Glied z nicht, so setze man seinen Werth §. 71. dafür; dann ist

$$S = \frac{n}{2} \cdot 2a + \Big((n - 1)\, d\Big)$$

$$\text{oder } an + \frac{(n - 1)\, dn}{2}$$

§. 74. Über die Summirung der arithmetischen Progressionen, welche am meisten vorkommen, einige Aufgaben.

1. Wie groß ist die Summe der Zahlen von 1 bis 50? Hier ist $a = 1$; $n = 50 = z$; $d = 1$.

Und $\frac{n \cdot (a+z}{2} = \frac{50\,(1+50)}{2} = \frac{50 \cdot 51}{2} = 1275$
$=$ Summe.

oder auch $an + \frac{(n-1)\, dn}{2} = 1 \cdot 50 + \frac{(50-1) \cdot 1 \cdot 50}{2}$
$= 50 + \frac{49 \cdot 50}{2} = 50 + \frac{2450}{2} = 50 + 1225$
$= 1275 =$ Summe.

2. Wie viel Schläge thut eine Uhr, die nur voll schlägt, in 24 Stunden?

Da die Uhr nur bis 12 schlägt, so sind in 24 Stunden 2 völlig gleiche Progressionen von 1 bis 12.

Auch hier ist $a = 1$; $n = 12 = z$; $d = 1$.

Die

Die Summe $= \frac{n \cdot (a+z)}{2} = \frac{12 \cdot (1+12)}{2} = \frac{12 \cdot 13}{2}$

$= \frac{156}{2} = 78$ Schläge. Diese 2 Mal genommen $= 156$ Schläge in 24 Stunden. Sollen die Viertelschläge, deren in jeder Stunde 10 sind, mitgezählt werden, so giebt es noch $10 \cdot 24 = 240$ Schläge, in allem also 396 Schläge.

3. Jemand verkauft 48 Bäume. Für den ersten bekommt er 3 Gr., für den 2ten 5 Gr. und für jeden folgenden 2 Gr. mehr, als für den vorhergehenden. Wie viel lößt er für die 48 Bäume?

Hier ist $a = 3$; $n = 48$; $d = 2$, und die Reihe ist $= 3, 5, 7, 9, 11 \ldots\ldots z$, also z unbekannt.

$$S = an + \frac{(n-1)\,dn}{2} = 3 \cdot 48 + \frac{(48-1) \cdot 2 \cdot 48}{2}$$

$= 144 + 47 \cdot 48 = 144 + 2256 = 2400$ Gr. $= 100$ Rthlr.

Der letzte Baum $z = a + (n-1)\,d = 3 + (48-1) \cdot 2$ $= 3 + 47 \cdot 2 = 3 + 94 = 97$ Gr.

4. In der obern Reihe Ziegel eines Dachgiebels liegen 2, in der zweiten 5, in jeder folgenden 3 mehr, und in der letzten Reihe 59 Dachziegeln. Wie viel Reihen und wie viel Dachsteine erfordert der Giebel?

Hier ist $a = 2$; $d = 3$; $z = 59$; man sucht n und S.

$$n = \frac{z - a + d}{d} = \frac{59 - 2 + 3}{3} = \frac{60}{3} = 20$$

$$S = \frac{n}{2} \cdot (a + z) = \frac{20}{2} \cdot (2 + 59) = 10 \cdot 61$$

$= 610$ Dachziegeln.

Überhaupt, wenn von den 5 Größen a, d, n, z, s drei gegeben sind, so lassen sich jedesmal die beiden übrigen mittelst folgender Tafel finden.

Formeltafel für die arithmetischen Progressionen.

Z. P.	Gegeben.	Gesucht	Formeln.	
1	a, d, n	z	$z = a + (n-1)d$	Wobei
2	a, d, s	z	$z = -\frac{1}{2}d + \sqrt{(2ds + (a - \frac{1}{2}d)^2)}$	a = erstes } Glied; z = letztes } Glied
3	a, n, s	z	$z = \frac{2s}{n} - a$	n = Anz. d. Glied. d = Differenz
4	d, n, s	z	$z = \frac{s}{n} + \frac{(n-1)d}{2}$	s = Summe.
5	a, d, n	s	$s = \frac{1}{2} n (2a + (n-1) d)$	
6	a, d, z	s	$s = \frac{a+z}{2} + \frac{(z+a).(z-a)}{2d}$	
7	a, n, z	s	$s = \frac{1}{2} n (a + z)$	
8	d, n, z	s	$s = \frac{1}{2} n (2z - (n-1) d$	
9	a, n, z	d	$d = \frac{z-a}{n-1}$	Vergleiche §. 71.
10	a, n, s	d	$d = \frac{2s - 2an}{n(n-1)}$	
11	a, z, s	d	$d = \frac{(z+a).(z-a)}{2s - z - a}$	
12	n, z, s	d	$d = \frac{2nz - 2s}{n(n-1)}$	
13	a, d, z	n	$n = 1 + \frac{z-a}{d}$	
14	a, d, s	n	$n = \frac{d - 2a}{2d} + \sqrt{\left(\frac{2s}{d} + \left(\frac{2a-d}{2d}\right)^2\right)}$	
15	a, z, s	n	$n = \frac{2s}{a+z}$	
16	d, z, s	n	$n = \frac{2z+d}{2d} - \sqrt{\left(\left(\frac{2z+d}{2d}\right)^2 - \frac{2s}{d}\right)}$	

No.	Gegeben.	Gesucht	Formeln.
17	d, n, z	a	$a = z - (n - 1)\,d$
18	d, n, s		$a = \frac{s}{n} - \frac{(n-1)\,d}{2}$
19	d, z, s		$a = \frac{1}{2}d + \sqrt{\left((z+\frac{1}{2}d)^2 - 2ds\right)}$
20	n, z, s		$a = \frac{2s}{n} - z.$

Die Formeln No. 2, 14, 16 und 19 werden nur dem-
jenigen völlig verständlich seyn, der sich mit der Auszie-
hung der Quadratwurzel (wovon weiter unten) bekannt
gemacht hat.

§. 75. Von der geometrischen Proportion.
Zwei gleiche geometrische Verhältnisse bilden eine geome-
trische Proportion. Als $2 : 8 = 3 : 12$ sind zwei solche
Verhältnisse, die gleiche Exponenten, nämlich 4, haben.
Der Exponent kann auch ein Bruch seyn, als $8 : 2 = 12 : 3$, wobei wir uns das erste und 3te Glied als Di-
visoren denken können, denn es ändert in dem Wesen der
Proportion nichts ab, ob man das erste und dritte, oder
das zweite und vierte Glied zu Divisoren nimmt; die Ex-
ponenten ändern sich gleichmäßig.

Und $\frac{8}{2} = \frac{12}{3}$, Exponenten $= 4$
oder $\frac{2}{8} = \frac{3}{12}$, Exponenten $= \frac{1}{4}$.

Es ist gebräuchlicher, die Divisoren ins 1ste und 3te Glied
zu setzen.

§. 76. Die geometrische Proportion ist in allen ma-
thematischen Rechnungen recht wichtig und im gemeinen
Rechnungswesen unter dem Namen Regel de tri be-
kannt, weil aus 3 Gliedern derselben sich jedesmal das
4te durch Rechnung finden läßt.

§. 77. Die 4 Glieder einer geometrischen Propor-
tion haben folgende Einrichtung:

das erste besteht für sich;
das zweite aus dem ersten, multiplicirt mit dem Ex-
ponenten;

das

das dritte wieder für sich;

das vierte aus dem 3ten, multiplicirt mit dem Exponenten.

Folglich kann die Proportion 2 : 8 = 3 : 12 auch so ausgedrückt werden: 2 : 2 . 4 = 3 : 3 . 4. Heißt nun das erste Glied a, das 3te b, und der Exponent m, so ist jede geometrische Proportion in allgemeinen Ausdrücken = a : am = b : bm.

Wenn das 3te Glied dem 2ten nicht gleich ist, so heißt die Proportion diskret; wenn aber das 2te Glied dem 3ten gleich ist, so heißt die Proportion continuirlich.

Diskrete Proportionen sind z. B. 2 : 8 = 3 : 12
a : am = b : bm

und continuirliche Proportionen sind z. B. 2 : 8 = 8 : 32
und allgemein ausgedrückt = a : am = am : amm
oder am^2

denn 2 : 2 . 4 = 2 . 4 : 2 . 4 . 4.

§. 78. Bei jeder geometrischen Proportion gilt die Generalregel:

das Product der beiden äußern Glieder ist gleich dem Product der beiden innern oder mittlern Glieder.

In 2 : 8 = 3 : 12 ist 2 . 12 = 8 . 3 = 24
In 2 : 8 = 8 : 32 ist 2 . 32 = 8 . 8 = 64
In a : am = b : bm ist abm = amb = abm
In a : am = am : amm ist aamm = amam = $a^2 m^2$

Ähnliche Glieder sind das 1ste und 3te; das 2te und 4te.

§. 79. Da man 2 : 8 = 3 : 12 auch schreiben kann $\frac{8}{2} = \frac{12}{3}$, so folgt, daß eine Proportion aus zwei gleichen Brüchen besteht, und also aus zwei gleichgroßen Brüchen auch eine Proportion geformt werden kann. Z. B. $\frac{3}{6} = \frac{7}{14}$ kann stehen 6 : 3 = 14 : 7, wobei nur dahin zu sehen ist, daß ähnliche Glieder zu Divisoren gemacht werden; z. B. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ kann stehen a : b = c : d und auch b : a = d : c; es bleibt immer eine richtige Proportion.

§. 80. Mit jeder Proportion können vielerlei Veränderungen vorgenommen werden.

 1) Durch

1) Durch Versetzung der Glieder.

$$2 : 8 = 3 : 12$$
$$8 : 2 = 12 : 3$$
$$12 : 3 = 8 : 2$$
$$3 : 12 = 2 : 8$$

und jedes Glied kann also letztes seyn.

2) Durch Versetzung der mittelsten Glieder.

$$2 : 3 = 8 : 12.$$

3) Durch Addition bei ähnlichen Gliedern.

$am : a + ma = bm : b + mb$, wo beim 2ten und 4ten Glied ma und mb addirt sind.

4) Durch Subtraction bei ähnlichen Gliedern.

$$a - am : am = b - mb : bm.$$

5) Durch Multiplication einer Größe in alle 4 Glieder, oder in 2 Glieder.

$$a : am = b : bm$$
$$ac : acm = bc : bcm$$
$$\left.\begin{array}{l} a : acm = b : bcm \\ ac : acm = b : bm \\ a : am = bc : bcm \\ ac : am = bc : bm \end{array}\right\}$$

wo stets das Product der beiden äußern Glieder dem der beiden innern gleich ist, nämlich abmc.

6) Durch die Division einer Größe in alle 4 Glieder, oder nur in zwei.

$$a : am = b : bm$$
$$\frac{a}{c} : \frac{am}{c} = \frac{b}{c} : \frac{bm}{c}$$
$$\frac{a}{c} : am = \frac{b}{c} : bm$$
$$a : \frac{am}{c} = b : \frac{bm}{c}$$
$$\frac{a}{c} : \frac{am}{c} = b : bm$$
$$a : am = \frac{b}{c} : \frac{bm}{c}$$

7) Durch

7) Durch Erhebung der Glieder zu Potenzen, oder Ausziehung der Wurzeln.

$$a : am = b : bm$$
$$a^2 : a^2m^2 = b^2 : b^2m^2$$
$$\sqrt{a} : \sqrt{am} = \sqrt{b} : \sqrt{bm}$$
$$a : am = b^2 : b^2m \text{ ic.}$$

wobei einerlei Exponenten der Potenzen und der Wurzeln vorausgesetzt werden.

Als Hauptregel für alle Veränderungen von 3 bis 7 bei geometrischen Proportionen merke man, daß die zu machende Veränderung niemals allein an solchen Gliedern vorgenommen werden kann, die einander multipliciren, als am 1sten und 4ten; am 2ten und 3ten. Denn alsdann würde die Hauptbedingung, daß das Product der äußern Glieder dem der innern gleich sey, nicht erfüllt. So würde es z. B. keine Proportion mehr bleiben, wenn man das 2te und 3te Glied mit einerlei Größe multiplicirte, als $a : acm = bc : bm$, wie die Probe beweist.

§. 81. Aus drei Gliedern einer geometrischen Proportion läßt sich allezeit das 4te finden, denn jedes Glied kann zum letzten gemacht werden, und das letzte ist gleich dem Product der mittlern dividirt durch das vordere.

$$a : am = b : bm, \text{ also ist } bm = \frac{amb}{a}$$
$$2 : 8 = 3 : 12, \text{ — — } 12 = \frac{8 \cdot 3}{2}$$
$$8 : 2 = 12 : 3, \text{ — — } 3 = \frac{2 \cdot 12}{8}$$
$$12 : 3 = 8 : 2, \text{ — — } 2 = \frac{3 \cdot 8}{12}$$
$$3 : 12 = 2 : 8, \text{ — — } 8 = \frac{12 \cdot 2}{3}$$

Bei der continuirlichen Proportion, worin das 2te Glied dem 3ten gleich ist, ist das 4te Glied eben so zu finden, denn

$$2 : 8 = 8 : 32, \text{ und } 32 = \frac{8 \cdot 8}{2}$$

Allgemein $a : b = b : c$, und $c = \frac{bb}{a}$

das Product der äußersten $ac = bb = b^2$, und $b = \sqrt{ac}$; woraus folgt, daß man beide mittlere finden kann, wenn die äußeren gegeben sind; denn die $\sqrt{ac}$ ist dem zweiten Gliede, folglich auch dem 3ten gleich.

§. 82. Aus der Vergleichung zweier oder mehrerer Proportionen entstehen oft ganz neue. Denn

1) Wenn in 2 verschiedenen Proportionen entweder die beiden vordern oder die beiden letzten Glieder gleich sind, so stehen die andern auch in Proportion. Z. B.

wenn $a : am = b : bm$
und $a : am = c : cm$

so ist $b : bm = c : cm$

wenn $a : am = b : bm$
und $c : cm = b : bm$

so ist $a : am = c : cm$

denn 2 Dinge, die einem 3ten gleich sind, sind einander selbst gleich.

2) Wenn ähnliche Glieder in zweien Proportionen einander gleich sind (als das 1ste und 3te; das 2te und 4te), so stehen die andern auch in Proportion.

$a : am = b : bm$
$a : an = b : bn$

also $am : an = bm : bn$

$a : am = b : bm$
$na : am = nb : bm$

also $a : na = b : nb$

3) Wenn das 2te Glied der einen Proportion dem 1sten in der andern, und das 4te der einen dem 3ten in der andern gleich ist, so stehen die übrigen in Proportion.

$a : am = b : bm$
$am : an = bm : bn$

folgl. $a : an = b : bn$

Oder wenn

$a : am = b : bm$
und $amn : am = b : \frac{b}{n}$

so ist $a : amn = \frac{b}{n} : bm$

$a : am = b : bm$
$am : amn = \frac{b}{n} : b$

also $a : amn = \frac{b}{n} : bm$

Oder wenn

$a : am = b : bm$
und $a : amn = \frac{b}{n} : bm$

so ist $am : amn = \frac{b}{n} : b$

4) Durch

4) Durch die Multiplication der gleichnamigen Glieder in zweien Proportionen entstehen neue.

$$\begin{array}{l} a : am = b : bm \\ c : cn = d : dn \\ \hline ac : amcn = bd : bmdn \end{array}$$

5) desgleichen durch die Division gleichnamiger Glieder:

$$\begin{array}{l} a : am = b : bm \\ c : cn = d : dn \\ \hline \frac{a}{c} : \frac{am}{cn} = \frac{b}{d} : \frac{bm}{dn} \end{array}$$

Es ist ein wichtiges, und für die bessere Einsicht in mathematische Lehrsätze und Beweise höchst nothwendiges Geschäft, sich mit den geometrischen Proportionen und ihren Verwandlungen recht bekannt zu machen.

§. 83. Eine Reihe Zahlen, die immer gleich vielmal größer oder kleiner werden, heißt eine **geometrische Progression.** Z. B. $1, 2, 4, 8, 16, 32$
oder $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$
oder $81, 27, 9, 3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}$ ꝛc.

Solche Reihen entstehen aus lauter contuuirlichen Proportionen, als:

$$\begin{array}{lll} 1 : 2 = 2 : 4 & \text{oder} & a : am = am : am^2 \\ 2 : 4 = 4 : 8 & & am : am^2 = am^2 : am^3 \text{ ꝛc.} \\ 4 : 8 = 8 : 16 \text{ ꝛc.} & & \end{array}$$

Die neuen Glieder sind: $a, am, am^2, am^3, am^4, am^5$ und man entdeckt leicht, daß der Exponent m um eine Potenz niedriger ist, als die Zahl des Gliedes. Z. B. im 6ten Glied ist m^5; im 3ten Gliede m^2 ꝛc.

Heißt nun die Zahl eines Gliedes allgemein n, so ist die Potenz von m allemal um 1 geringer, als n, also $= n - 1$ und das letzte Glied $= am^{n-1}$.

§. 84. Zwei von den Enden einer geometrischen Progression gleichweit abstehende Glieder geben einerlei Product.

$1, 2, 4, 8, 16, 32$ und $1 . 32 = 2 . 16 = 4 . 8 = 32$

$a, am, am^2, am^3, am^4, am^5, am^6$

und jedes Paar Glieder giebt $a^2 m^6$; weil n oder die Anzahl der Glieder ungerade ist, so bleibt am^3 allein, und wird es mit sich selbst multiplicirt, so kommt auch $a^2 m^6$.

§. 85. Bei der geometrischen Progression sind zu merken:

das erste Glied $= a$
der Exponent $= m$
das letzte Glied $= z$
die Anzahl der Glieder $= n$.

Jedes Glied in einer Progression kann als letztes angesehen und geschrieben werden $am^{n-1} = z$.

Das erste $a = \frac{z}{m^{n-1}}$

Der Exponent $m = \frac{am}{a}$ d. i. dem 2ten Gliede dividirt durchs erste; in der Reihe 3, 6, 12, 24, 48 ist $a = 3$; am oder das zweite Glied $= 6$, und $\frac{6}{3} = 2 = m$; überhaupt bekommt man den Exponenten, wenn man das kleinere Glied in das nächst größere dividirt, als $\frac{48}{24} = 2$.

Die Anzahl der Glieder n findet man am leichtesten, wenn man die Reihe wirklich hinschreibt. Z. B. wenn $a = 2$, $m = 3$, $z = 162$, so muß die Reihe seyn:

$$2,\ 2.3,\ 2.3.3,\ 2.3.3.3,\ 2.3.3.3.3$$
$$= 2,\ 6,\ 18,\ 54,\ 162$$

also sind 5 Glieder, und $n = 5$

Das Auffinden des Exponenten m und der Anzahl der Glieder n aus gegebenen Datis erfordert indessen Kenntniß der Wurzel- und Logarithmenrechnung (wovon weiter unten). Für Kundige sind daher folgende Formeln brauchbar

$$m = \sqrt[n-1]{\frac{z}{a}}, \text{ und } n = 1 + \frac{\log. z - \log. a}{\log. m}$$

§. 86. Zwischen zwei gegebenen Zahlen a und b eine mittlere Proportionalzahl zu finden, sage man:

$$a : x = x : b, \text{ und } xx = ab$$
$$= x^2 = ab$$
$$x = \sqrt{ab}$$

wobei x die gesuchte Zahl ist.

Meß-

Mehrere Proportionalzahlen z. B. 3 zu finden:

Die Reihe ist a, x, x^2, x^3, b.

Nun ist $ab = x \,.\, x^3$ (siehe §. 84); und $x \,.\, x^3 = x^4$; folglich ist $ab = x^4$, und $\sqrt[4]{ab} = x =$ dem 2ten Gliede. Wird dies durch das 1ste Glied dividirt, so ergiebt sich der Exponent, mit dem alle folgende Glieder leicht zu finden sind.

§. 87. Die Summe aller Glieder einer geometrischen Progression giebt die Formel

$$\frac{am^n - a}{m - 1} = S = \text{Summe.}$$

Z. B. In der Progression 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256 ist $a = 1$; $m = 2$, $n = 9$, folglich

$$S = \frac{1 \,.\, 2^9 - 1}{2 - 1} = \frac{2^9 - 1}{1} = 2^9 - 1 = 512 - 1 = 511$$

indessen pflegt man oft durch die bloße Addition der Glieder die Summe zu finden, wenn die Reihe bekannt oder gegeben und nicht zu lang ist.

§. 88. Die Summe einer bis in's Unendliche fortgehenden Progression kann nur dann gefunden werden, wenn die Reihe eine fallende, und der Exponent kleiner, als 1 ist.

Wenn das erste Glied $= a$; der Exponent $= \frac{b}{c}$, so ist, wenn jedes Glied das Pluszeichen hat, die Summe

$$S = \frac{ac}{c - b}$$

Z. B. in der Reihe 3, 2, $1\frac{1}{3}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{16}{27}$ u. s. f. ist $a = 3$; der Exponent $= \frac{2}{3} = \frac{b}{c}$, und

$$\frac{ac}{c - b} = \frac{3 \,.\, 3}{3 - 2} = \frac{9}{1} = 9$$

§. 89. Wenn in einer unendlichen Reihe die Zeichen wechseln, so ist die Summe $S = \frac{ac}{c + b}$

In der Reihe $\frac{3}{4}$, $-\frac{1}{2}$, $+\frac{1}{3}$, $-\frac{2}{9}$, $+\frac{4}{27}$, u. s. w. ist $a = \frac{3}{4}$, $m = \frac{3}{4}$ in $-\frac{1}{2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} = \frac{b}{c}$; und

ac

$$\frac{ac}{c+b} = \frac{\frac{3}{4} \cdot 3}{3+2} = \frac{\frac{9}{4}}{5} = \frac{9}{20} = s$$

Wenn von den 5 Grössen a, m, z, n, s drei bekannt sind, so lassen sich mittelst folgender Tafel die übrigen finden.

Formeltafel für die geometrische Progression.

No.	Gegeben.	Gesucht	Formeln.	
1	a, m, n	z	$z = am^{n-1}$	Wobei
2	a, m, s		$z = \frac{a+(m-1)s}{m}$	a = erstes Glied, z = letztes Glied
3	a, n, s		$z.(s-z)^{n-1} - a.(s-a)^{n-1} = 0$	m = Exponent.
				n = Anz. d. Glied.
4	m, n, s		$z = \frac{(m-1)sm^{n-1}}{m^n - 1}$.	s = Summe.
5	a, m, n	s	$s = \frac{a(m^n - 1)}{m-1}$.	
6	a, m, z		$s = \frac{mz - a}{m-1}$.	
7	a, n, z		$s = \frac{z^{\frac{n}{n-1}} - a^{\frac{n}{n-1}}}{z^{\frac{1}{n-1}} - a^{\frac{1}{n-1}}}$	
8	m, n, z		$s = \frac{z(m^n - 1)}{(m-1)m^{n-1}}$.	
9	m, n, z	a	$a = \frac{z}{m^{n-1}}$	
10	m, n, s		$a = \frac{(m-1)s}{m^n - 1}$	
11	m, z, s		$a = mz - (m-1)s$	
12	n, z, s		$a.(s-a)^{n-1} - z(s-z)^{n-1} = 0$	

No.	Gegeben.	Gesucht	Formeln.
13	a, n, z	m	$m = \sqrt[n-1]{\frac{z}{a}}$
14	a, n, s		$m^n - \frac{s}{a} m + \frac{s-a}{a} = 0$
15	a, z, s		$m = \frac{s-a}{s-z}$
16	n, z, s		$m^n - \frac{s}{s-z} m^{n-1} + \frac{z}{s-z} = 0$
17	a, m, z	n	$n = 1 + \frac{\log. z - \log. a}{\log. m}$
18	a, m, s		$n = \frac{\log. (a + (m-1)s) - \log. a}{\log. m}$
19	a, z, s		$n = \frac{\log. z - \log. a}{\log. (s-a) - \log. (s-1)} + 1$
20	m, z, s		$n = \frac{\log. z - \log. (mz - (m-1)s)}{\log m} + 1$

Die Formeln No. 3, 12, 14, 16 sind auf o gebrachte Gleichungen von höheren Graden, deren Auflösung schwierig und mühsam ist; indessen kann man durch Versuche oft bald das Gesuchte finden. Z. B. es sey No. 14 $a = 2$, $n = 5$, $s = 242$, man sucht m; dann soll $m^n - \frac{s}{a} m + \frac{s-a}{a} = 0$ seyn. Man lege die Werthe unter, so ist $m^5 - \frac{242}{2} m + \frac{242-2}{2} = m^5 - 121 m + 120 = 0$.

Die Zahl 120 ist durch 2, 3, 4, 5, 6 ꝛc. theilbar; daher versuche man, statt m die 2, 3 ꝛc. zu setzen; bei welcher Zahl die Gleichung Null wird, dieselbe ist die richtige. Wir wollen annehmen $m = 2$, so ist

$m^5 - 121\,m + 120 = 2^5 - 121 \cdot 2 + 120 = 32 - 242$ $+ 120 = 152 - 242 = -90$, also nicht Null.

Nehmen wir $m = 3$, so ist

$m^5 - 121\,m + 120 = 3^5 - 121 \cdot 3 + 120 = 243 - 363$ $+ 120 = 363 - 363 = 0$, also ist $m = 3$.

Das 7te Formular kann auch also geschrieben und mit Logarithmen leicht berechnet werden.

$$\frac{z^{\frac{n}{n-1}} - a^{\frac{n}{n-1}}}{z^{\frac{1}{n-1}} - a^{\frac{1}{n-1}}} = \frac{\sqrt[n-1]{z^n} - \sqrt[n-1]{a^n}}{\sqrt[n-1]{z} - \sqrt[n-1]{a}}$$

Die Auflösung dieser Formulare setzt Kenntniß der Wurzel- und Logarithmenrechnung voraus. Der Vollständigkeit wegen stehen sie mit hier an einem Platze, wo man sie mit Recht suchen kann. Der Zweck dieser Schrift erlaubt uns keine genauere Auseinandersetzung der Lehre von den Progressionen, die man in Häseler's, Burja's und anderer Autoren Schriften vollständig abgehandelt findet. Wer das Vorhergehende begriffen hat, und die folgenden 3 Abschnitte mit Aufmerksamkeit liest, wird die Formulare mit Leichtigkeit lösen und anwenden können.

IV. Ausziehung der Wurzeln.

§. 90. Ohne die Kunst, aus einer gegebenen Zahl die verlangte Wurzel zu ziehen oder zu finden, kann man in der Mathematik nicht weit kommen, weshalb dieser Abschnitt eine besondere Aufmerksamkeit verdient.

§. 91. Diejenige Zahl, welche Ein- oder mehrere Male mit sich multiplicirt wird, heißt die **Wurzel** der auf diese Weise entstandenen Größe (**Potenz**). Siehe §. 21. So ist z. B. 4 die Wurzel von 16, denn $4 \cdot 4 = 16$; man schreibt es $\sqrt{16} = 4$, d. h. die Quadratwurzel aus 16 ist 4. Der Kubus von $4 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$; und $\sqrt[3]{64} = 4$.

§. 92. Ganze Zahlen geben ganze Zahlen zum Quadrat, zum Kubus ꝛc.; Brüche geben Brüche.

So