Der Rathgeber bei mathematischen Beschäftigungen

Stöpel, August

Stendal, 1819

§. 60-74 Erklärungen, arithmetische Verhältnisse, Proportionen, Progressionen, Aufgaben und Formeltafel;

urn:nbn:de:hbz:466:1-63556

hören. Z. B. $\frac{21,468}{4} = 5,367$; denn wenn man 4 in 21 dividirt, so können nur 5 Ganze kommen.

§. 58. Einerlei Zeichen, durch einander dividirt, geben +; verschiedene, — im Quotienten.

$\frac{+3,2}{+1,6} = +2$; $\frac{+3,2}{-1,6} = -2$; $\frac{-3,2}{+1,6} = -2$; $\frac{-3,2}{-1,6} = +2$.

Die Division der Decimalbrüche ist von der mit gemeinen Zahlen nur dadurch unterschieden, daß man durch die §. 56. gegebene Regel zu bestimmen sucht, wo die Ganzen aufhören, also, wohin das Komma im Quotienten zu sezzen ist.

§. 59. Decimalbrüche, die nicht ins Unendliche fortgehen, können in gemeine Brüche verwandelt werden, wenn man Zähler und Nenner mit einerlei Zahl dividirt, z. B. $3,75 = 3\frac{75}{100}$, und hebt man den Bruch durch 25, so erhält man $3\frac{3}{4}$. Gehen die Decimalbrüche aber ins Unendliche fort, so mögte dies Verfahren nicht immer zuverlässig genug seyn.

III. Von den Verhältnissen und Proportionen.

§. 60. Zwei Größen einerlei Art stehen zu einander in einem Verhältniß. Sieht man dabei auf den Umstand, wie viel kleiner oder größer die eine sey, so heißt ihr Verhältniß arithmetisch; untersucht man aber, wie viel mal die eine Größe in der andern enthalten sey, so heißt das Verhältniß geometrisch. Das Zeichen des arithmetischen Verhältnisses ist sehr passend das Subtractionszeichen (—), weil die Differenz beider Größen oder Glieder hier die Hauptsache ist; das Zeichen eines geometrischen Verhältnisses ist das Divisionszeichen (:); die Zahl, welche bestimmt, wie oft das eine Glied in dem andern enthalten ist, heißt Exponent oder Quotient. So sind

Arithmetische Verhältnisse.	Geometrische Verhältnisse.
$6 - 3$, Differenz $= 3$	$6 : 3$, Exponent $= 2$
$3 - 6$, — $= -3$	$12 : 6$, — $= 2$
$15 - 10$, — $= 5$	$15 : 10$, — $= 1{,}5$
$10 - 15$, — $= -5$	$10 : 15$ — $= \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$

Der Unterschied der arithmetischen und geometrischen Verhältnisse wird aus diesen wenigen Beispielen leicht erkannt werden.

§. 61. Bei dem arithmetischen Verhältnisse kommen 3 Größen vor:

1. die große Zahl. Sie besteht aus der kleinen + der Differenz.
2. die kleinere Zahl. Sie ist = der großen — der Differenz.
3. die Differenz. Sie ist gleich der großen — der kleinen.

Denn a sey die große, b die kleine, d die Differenz, so ist

$$
\begin{array}{lll}
a = b + d & \text{in Zahlen} & 15 = 10 + 5 \\
b = a - d & & 10 = 15 - 5 \\
d = a - b & & 5 = 15 - 10
\end{array}
$$

§. 62. Ein geometrisches Verhältniß ist als ein Bruch anzusehen, dessen Werth der Exponent ist. Denn

$$12 : 6 = \frac{12}{6} = 2 = \text{Werth oder Exponenten.}$$

Wenn man Zähler und Nenner eines Bruchs mit einerlei Zahl multiplicirt oder dividirt, so wird das Verhältniß nicht geändert, und der Exponent derselbe bleiben. Denn

$$\frac{12}{6} = 2 \text{ und } \frac{12 \,.\, 3}{6 \,.\, 3} = \frac{36}{18} = 2. \text{ Oder } \frac{12 : 3}{6 : 3} = \frac{4}{2} = 2.$$

Weil kleine Zahlen faßlicher sind, als große, so pflegt man gern die durch große Zahlen ausgedrückten Verhältnisse durch die Division mit einerlei Zahl auf kleinere Zahlen zu bringen. Z. B. $\frac{96}{144}$ ist nicht so faßlich, als $\frac{2}{3}$, obgleich beide Verhältnisse gleich sind.

§. 63. Im geometrischen Verhältniß sind auch 3 Größen zu merken:

der Zähler a; der Nenner b; der Exponent m,

a =

$$a = b\,m \quad \text{in Zahlen} \quad 144 = 48 \,.\, 3$$
$$b = \frac{a}{m} \qquad\qquad 48 = \frac{144}{3}$$
$$m = \frac{a}{b} \qquad\qquad 3 = \frac{144}{48}$$

a = dem Product aus dem Nenner und Exponenten;
b = dem Zähler dividirt durch den Exponenten;
m = dem Zähler dividirt durch den Nenner.

§. 64. Zwei gleiche arithmetische Verhältnisse bilden eine arithmetische Proportion. Z. B.

$$\left.\begin{array}{l} 5 - 7 = 9 - 11 \\ 7 - 5 = 11 - 9 \end{array}\right\} \text{bei allen ist die Differenz} = 2;$$

folglich ist $5 - 7 = 9 - 11$ eine arithmetische Proportion, so wie auch $a - b = c - g$, wenn beide Verhältnisse einerlei Differenz haben.

Kann das zweite Glied vom ersten abgezogen werden, so ist es kleiner, und das Verhältniß

$$7 - 5 = 7 - (7 - 2) \text{ oder } a - b = a - (a - d).$$

Ist das erste Glied das kleinere, so wird das Verhältniß

$$5 - 7 = 5 - (5 + 2) \text{ oder } a - b = a - (a + d).$$

Da das auch im 2ten Verhältniß, dessen erstes Glied b seyn soll, der Fall ist, so kann eine arithmetische Proportion allgemein auch so ausgedrückt werden:

Erstes Glied. Zweites. Drittes. Viertes.

$$a - (a - d) = b - (b - d)$$
$$\text{oder } a - (a + d) = b - (b + d).$$

§. 65. Jede Proportion besteht demnach aus 4 Gliedern. Wenn das 3te Glied dem 2ten nicht gleich ist, so heißt die Proportion discret; ist es aber ihm gleich, so heißt sie stetig.

$$\left.\begin{array}{l} \text{So ist } 3 - 4 = 9 - 10 \text{ eine discrete} \\ \text{und } 3 - 4 = 4 - 5 \text{ eine stetige} \end{array}\right\} \text{Proportion.}$$

Für die stetige arithmetische Proportion paßt der allgemeine Ausdruck

$$a - (a + d) = (a + d) - (a + 2d)$$
$$\text{oder } a - (a - d) = (a - d) - (a - 2d).$$

§. 66. In jeder arithmetischen Proportion ist die Summe der beiden äußersten Glieder gleich der Summe der beiden mittelsten. Dieses Gleichseyn ist ein untrieg=liches Kennzeichen einer arithmetischen Proportion. In den Proportionen

$8 - 11 = 12 - 15$ ist $8 + 15 = 11 + 12 = 23$
$a - a + d = b - (b + d)$ ist $a + b + d = a + d + b$.

§. 67. Die Glieder einer arithmetischen Proportion sind mancherlei Versetzungen fähig. Z. B.

$$8 - 10 = 16 - 18$$
$$10 - 8 = 18 - 16$$
$$16 - 18 = 8 - 10$$
$$18 - 16 = 10 - 8.$$

Daher kann jedes Glied zum letzten gemacht und leicht gefunden werden. Denn zieht man das 1ste Glied von der Summe der beiden mittelsten ab, so bleibt im Rest das letzte Glied. Die 4 Glieder mögen allgemein a, b, c, g heißen, so ist

das letzte $g = (b + c) - a$
das erste $a = (b + c) - g$
das dritte $c = (a + g) - b$
das zweite $b = (a + g) - c$.

§. 68. Weil in der stetigen Proportion das 3te Glied dem zweiten gleich ist, so ist es die Hälfte von der Summe der beiden äußern.

$a - b = b - c$; dann ist $a + c = 2b$; also $\frac{a + c}{2} = b$.

Man nennt das 2te Glied einer solchen Proportion auch das arithmetische Mittel, und bedient sich dessen oft, wenn vom mittlern Werthe oder Durchschnitt die Rede ist. Z. B. In einem Jahre kostete der Scheffel Korn 2 Rthlr. bis 3 Rthlr., so wird der mittlere Preis also gefunden:

$$\frac{3 + 2}{2} = \frac{5}{2} = 2\tfrac{1}{2} \text{ Rthlr.}$$

§. 69. Mehrere zusammengesetzte arithmetische stetige Proportionen bilden eine arithmetische Progression. Z. B. $2 - 4 = 4 - 6$; $4 - 6 = 6 - 8$; $6 - 8 = 8 - 10$; $8 - 10 = 10 - 12$. Die Glieder derselben sind 2, 4, 6, 8, 10, 12.

In

In allgemeinen Zeichen a, a + d, a + 2d, a + 3
a + 4d, a + 5d, wobei leicht bemerkt wird, daß die D
ferenz d stets um eins geringer ist, als die Anzahl d
vorhergehenden Glieder. Z. B. das 3te Glied ist = a + 2
das 6ste ist = a + 5d.

§. 70. Wenn das erste Glied a einer arithmetisch
Progression und die Differenz d bekannt sind, so k
daraus jedes verlangte Glied n gefunden werden. B
zeichnet n ein gewisses Glied, so besteht dieses Glied n
§. 69. aus a + (n — 1) d; nun kann dasselbe immer
das letzte angesehen werden, welches wir z nennen woll
also ist

$$z = a + (n - 1)\,d$$

worin n die Anzahl der Glieder bedeutet.

§. 71. In der arithmetischen Progression sind de
nach 4 Größen zu merken; wenn 3 von ihnen beka
sind, so findet man jedesmal die 4te durch Rechnung.

a, das erste Glied ist $= z - (n - 1)\,d$
z das letzte $= a + (n - 1)\,d$
d die Differenz $= \frac{z - a}{n - 1}$
n die Anzahl der Glieder $= \frac{z - a + d}{d}$

§. 72. Wenn man zwei von den Enden gleich w
abstehende Glieder addirt, so bekommt man aus jed
Paar einerlei Summe. Z. B.

$$3, 5, 7, 9, 11, 13. \text{ Hierin ist } \left.\begin{matrix} 3 + 13 \\ 5 + 11 \\ 7 + 9 \end{matrix}\right\} = 16$$

In a, a + d, a + 2d, a + 3d, a + 4d, a + 5d

$$\text{ist ebenfalls } \left.\begin{matrix} a + a + 5d \\ a + d + a + 4d \\ a + 2d + a + 3d \end{matrix}\right\} = 2a + 5d.$$

§. 73. Hierauf gründet sich eine vortheilhafte Su
mirung einer arithmetischen Progression:

D

Dividire die Anzahl der Glieder n durch 2, so erhält man Paare $= \frac{n}{2}$; addire das erste und letzte Glied $a + z$, so erhält man den Werth eines Paars; dieser Werth, multiplicirt mit der Anzahl der Paare $\frac{n}{2}$, giebt im Product die Summe S, und also ist

$$S = \frac{n}{2} . (a + z) \text{ oder } \frac{n . (a + z)}{2}$$

Diese Formel gilt auch, wenn die Zahl der Glieder ungerade ist.

Weiß man das letzte Glied z nicht, so setze man seinen Werth §. 71. dafür; dann ist

$$S = \frac{n}{2} . 2a + \Big((n - 1) d\Big)$$

$$\text{oder } an + \frac{(n - 1) dn}{2}$$

§. 74. Über die Summirung der arithmetischen Progressionen, welche am meisten vorkommen, einige Aufgaben.

1. Wie groß ist die Summe der Zahlen von 1 bis 50?
Hier ist $a = 1$; $n = 50 = z$; $d = 1$.

$$\text{Und } \frac{n . (a + z}{2} = \frac{50 (1 + 50)}{2} = \frac{50 . 51}{2} = 1275$$
$= $ Summe.

$$\text{oder auch } an + \frac{(n - 1) dn}{2} = 1 . 50 + \frac{(50 - 1) . 1 . 50}{2}$$

$$= 50 + \frac{49 . 50}{2} = 50 + \frac{2450}{2} = 50 + 1225$$
$= 1275 = $ Summe.

2. Wie viel Schläge thut eine Uhr, die nur voll schlägt, in 24 Stunden?

Da die Uhr nur bis 12 schlägt, so sind in 24 Stunden 2 völlig gleiche Progressionen von 1 bis 12.

Auch hier ist $a = 1$; $n = 12 = z$; $d = 1$.

Die

Die Summe $= \frac{n.(a+z)}{2} = \frac{12.(1+12)}{2} = \frac{12.13}{2}$

$= \frac{156}{2} = 78$ Schläge. Diese 2 Mal genommen $= 156$ Schläge in 24 Stunden. Sollen die Viertelschläge, deren in jeder Stunde 10 sind, mitgezählt werden, so giebt es noch $10.24 = 240$ Schläge, in allem also 396 Schläge.

3. Jemand verkauft 48 Bäume. Für den ersten bekommt er 3 Gr., für den 2ten 5 Gr. und für jeden folgenden 2 Gr. mehr, als für den vorhergehenden. Wie viel löst er für die 48 Bäume?

Hier ist $a = 3$; $n = 48$; $d = 2$, und die Reihe ist $= 3, 5, 7, 9, 11 \ldots\ldots z$, also z unbekannt.

$$S = an + \frac{(n-1)\,dn}{2} = 3.48 + \frac{(48-1).2.48}{2}$$

$= 144 + 47.48 = 144 + 2256 = 2400$ Gr. $= 100$ Rthlr.

Der letzte Baum $z = a + (n-1)d = 3 + (48-1).2$ $= 3 + 47.2 = 3 + 94 = 97$ Gr.

4. In der obern Reihe Ziegel eines Dachgiebels liegen 2, in der zweiten 5, in jeder folgenden 3 mehr, und in der letzten Reihe 59 Dachziegeln. Wie viel Reihen und wie viel Dachsteine erfordert der Giebel?

Hier ist $a = 2$; $d = 3$; $z = 59$; man sucht n und S.

$$n = \frac{z - a + d}{d} = \frac{59 - 2 + 3}{3} = \frac{60}{3} = 20$$

$$S = \frac{n}{2}.(a+z) = \frac{20}{2}.(2+59) = 10.61$$

$= 610$ Dachziegeln.

Überhaupt, wenn von den 5 Größen a, d, n, z, s drei gegeben sind, so lassen sich jedesmal die beiden übrigen mittelst folgender Tafel finden.

For-

Formeltafel für die arithmetischen Progressionen.

Z. ?	Gegeben.	Gesucht	Formeln.
1	a, d, n	z	$z = a + (n - 1)d$
2	a, d, s	z	$z = -\frac{1}{2}d + \sqrt{(2ds + (a - \frac{1}{2}d)^2)}$
3	a, n, s	z	$z = \frac{2s}{n} - a$
4	d, n, s	z	$z = \frac{s}{n} + \frac{(n-1)d}{2}$
5	a, d, n	s	$s = \frac{1}{2}n(2a + (n-1)d)$
6	a, d, z	s	$s = \frac{a+z}{2} + \frac{(z+a).(z-a)}{2d}$
7	a, n, z	s	$s = \frac{1}{2}n(a+z)$
8	d, n, z	s	$s = \frac{1}{2}n(2z - (n-1)d$
9	a, n, z	d	$d = \frac{z-a}{n-1}$ Vergleiche §. 71.
10	a, n, s	d	$d = \frac{2s - 2an}{n(n-1)}$
11	a, z, s	d	$d = \frac{(z+a).(z-a)}{2s - z - a}$
12	n, z, s	d	$d = \frac{2nz - 2s}{n(n-1)}$
13	a, d, z	n	$n = 1 + \frac{z-a}{d}$
14	a, d, s	n	$n = \frac{d-2a}{2d} + \sqrt{\left(\frac{2s}{d} + \left(\frac{2a-d}{2d}\right)^2\right)}$
15	a, z, s	n	$n = \frac{2s}{a+z}$
16	d, z, s	n	$n = \frac{2z+d}{2d} - \sqrt{\left(\left(\frac{2z+d}{2d}\right)^2 - \frac{2s}{d}\right)}$

Wobei
$a =$ erstes $\}$ Glied
$z =$ letztes $\}$ Glied
$n =$ Anz. d. Glied.
$d =$ Differenz
$s =$ Summe.

No.	Gegeben.	Gesucht	Formeln.
17	d, n, z	a	$a = z - (n - 1) d$
18	d, n, s		$a = \frac{s}{n} - \frac{(n - 1) d}{2}$
19	d, z, s		$a = \frac{1}{2} d + \sqrt{\left((z + \frac{1}{2} d)^2 - 2 ds\right)}$
20	n, z, s		$a = \frac{2s}{n} - z.$

Die Formeln No. 2, 14, 16 und 19 werden nur demjenigen völlig verständlich seyn, der sich mit der Ausziehung der Quadratwurzel (wovon weiter unten) bekannt gemacht hat.

§. 75. Von der geometrischen Proportion. Zwei gleiche geometrische Verhältnisse bilden eine geometrische Proportion. Als $2 : 8 = 3 : 12$ sind zwei solche Verhältnisse, die gleiche Exponenten, nämlich 4, haben. Der Exponent kann auch ein Bruch seyn, als $8 : 2 = 12 : 3$, wobei wir uns das erste und 3te Glied als Divisoren denken können, denn es ändert in dem Wesen der Proportion nichts ab, ob man das erste und dritte, oder das zweite und vierte Glied zu Divisoren nimmt; die Exponenten ändern sich gleichmäßig.

Und $\frac{8}{2} = \frac{12}{3}$, Exponenten $= 4$

oder $\frac{2}{8} = \frac{3}{12}$, Exponenten $= \frac{1}{4}$.

Es ist gebräuchlicher, die Divisoren ins 1ste und 3te Glied zu setzen.

§. 76. Die geometrische Proportion ist in allen mathematischen Rechnungen recht wichtig und im gemeinen Rechnungswesen unter dem Namen Regel de tri bekannt, weil aus 3 Gliedern derselben sich jedesmal das 4te durch Rechnung finden läßt.

§. 77. Die 4 Glieder einer geometrischen Proportion haben folgende Einrichtung:

das erste besteht für sich;

das zweite aus dem ersten, multiplicirt mit dem Exponenten;

das