Der Rathgeber bei mathematischen Beschäftigungen

Stöpel, August

Stendal, 1819

§. 90-103 Dignitäten, die Quadratwurzel, Beispiele; √ aus Irrationalgrößen und Brüchen;

$m^5 - 121\,m + 120 = 2^5 - 121 \cdot 2 + 120 = 32 - 242 + 120 = 152 - 242 = -90$, also nicht Null.

Nehmen wir $m = 3$, so ist

$m^5 - 121\,m + 120 = 3^5 - 121 \cdot 3 + 120 = 243 - 363 + 120 = 363 - 363 = 0$, also ist $m = 3$.

Das 7te Formular kann auch also geschrieben und mit Logarithmen leicht berechnet werden.

$$\frac{z^{\frac{n}{n-1}} - a^{\frac{n}{n-1}}}{z^{\frac{1}{n-1}} - a^{\frac{1}{n-1}}} = \frac{\sqrt[n-1]{z^n} - \sqrt[n-1]{a^n}}{\sqrt[n-1]{z} - \sqrt[n-1]{a}}$$

Die Auflösung dieser Formulare setzt Kenntniß der Wurzel- und Logarithmenrechnung voraus. Der Vollständigkeit wegen stehen sie mit hier an einem Platze, wo man sie mit Recht suchen kann. Der Zweck dieser Schrift erlaubt uns keine genauere Auseinandersetzung der Lehre von den Progressionen, die man in Häseler's, Burja's und anderer Autoren Schriften vollständig abgehandelt findet. Wer das Vorhergehende begriffen hat, und die folgenden 3 Abschnitte mit Aufmerksamkeit liest, wird die Formulare mit Leichtigkeit lösen und anwenden können.

IV. Ausziehung der Wurzeln.

§. 90. Ohne die Kunst, aus einer gegebenen Zahl die verlangte Wurzel zu ziehen oder zu finden, kann man in der Mathematik nicht weit kommen, weshalb dieser Abschnitt eine besondere Aufmerksamkeit verdient.

§. 91. Diejenige Zahl, welche Ein- oder mehrere Male mit sich multiplicirt wird, heißt die **Wurzel** der auf diese Weise entstandenen Größe (**Potenz**). Siehe §. 21. So ist z. B. 4 die Wurzel von 16, denn $4 \cdot 4 = 16$; man schreibt es $\sqrt{16} = 4$, d. h. die Quadratwurzel aus 16 ist 4. Der Kubus von $4 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$; und $\sqrt[3]{64} = 4$.

§. 92. Ganze Zahlen geben ganze Zahlen zum Quadrat, zum Kubus ꝛc.; Brüche geben Brüche.

So giebt

1 im Quadrat	1,	im Kubus 1
2 — —	4	— — 8
3 — —	9	— — 27
4 — —	16	— — 64
5 — —	25	— — 125
6 — —	36	— — 216
7 — —	49	— — 343
8 — —	64	— — 512
9 — —	81	— — 729

§. 93. Diese kleine Tafel kann uns auf wichtige Bemerkungen leiten.

1) Kein Quadrat der einfachen Zahlzeichen von 1 bis 9 hat über 2 Zahlen, ist also jedesmal unter 100.

2) Kein Kubus der einfachen Zahlzeichen von 1 bis 9 hat über 3 Zahlen, ist also jedesmal unter 1000.

3) Der wahren Quadratzahlen und Kubikzahlen sind im Grunde nur wenige, denn zwischen 4 und 9 fehlen 5, 6, 7, 8, welche keine reine Wurzel haben, weil ihre Wurzel zwischen 2 und 3 fällt. Zwischen 9 und 16 fehlen: 10, 11, 12, 13, 14, 15, deren Wurzel zwischen 3 und 4 liegen muß. Nun geben aber Brüche mit Brüchen multiplicirt niemals Ganze zum Product, folglich kann man auch aus den Zahlen, die nicht Quadratzahlen sind, keine reine Wurzel finden. Noch seltener sind die Kubikzahlen, wie aus der kleinen Tafel zu ersehen ist. Man nennt solche Zahlen, deren Wurzeln sich genau angeben lassen, Rationalzahlen; alle übrige heißen Irrationalzahlen.

§. 94. Man hat eine Rechnungsart, vermittelst welcher man aus jeder Zahl eine verlangte Wurzel ziehen, d. h. angeben kann, was das für eine Zahl ist, aus deren Multipllcation die gegebene Zahl entstanden seyn muß. Die Wurzel aus Irrationalzahlen wird freilich nicht völlig genau gefunden, allein man kann sich ihr doch so weit nähern, als man will. Diese Rechnungsart heißt das Ausziehen der Wurzeln, und gründet sich auf folgende Betrachtung.

§. 95.

§. 95. Da man jede Größe, z. B. 7, so ansehen kann, als sey sie aus zweien andern, etwa aus $5 + 2$, oder $8 - 1$, entstanden, so mag $a + b$ irgend eine solche Größe seyn, und zur Potenz erhoben, d. h. mit sich selbst multiplicirt werden. Wir wollen beobachten, was mit ihr vorgeht, und versuchen, wie es anzufangen sey, aus der Potenz die Wurzel zu ziehen. Daß es durch eine Art von Division geschehen müsse, folgt schon daraus, daß jede quadratische oder kubische Größe durch die Multiplication ihrer Wurzel entstanden ist. Man multiplicirt $a + b$ mit sich selbst, so bekommt man $a^2 + 2ab + b^2$ als Quadrat von der Wurzel $a + b$.

§. 96. Das Quadrat $a^2 + 2ab + b^2$, dessen Wurzel $a + b$ wir kennen, besteht aus 3 Gliedern a^2; $2ab$, und b^2.

1) Den ersten Theil der Wurzel findet man leicht, denn man dividire nur a^2 durch a, so erhält man a.
2) Nun bleibt noch $2ab + b^2$, welches bequemer ausgedrückt wird durch $(2a + b) . b$.
3) Dividirt man mit $2a + b$ in $(2a + b)\, b$, so erhält man den zweiten Theil der Wurzel, nämlich b.
4) Den Divisor $2a + b$ bekommt man, wenn man den ersten Theil der Wurzel, a, doppelt nimmt (er ist dann $= 2a$) und damit $2a + b$ dividirt, wodurch man b bekommt. Wird nun b auch zu $2a$ gesetzt, so erhält man $2a + b$.

Das Exempel sieht also aus:

$a^2 + 2ab + b^2 \;||\; a + b =$ Quadratwurzel.
Divisor $a)$ a^2
Rest $= 2ab + b^2$
neuer Divis. $2a+b)$
(siehe 4.) $2ab + b^2$

Was dem Anfänger etwa noch dunkel und schwer vorkommt, wird ihm aus dem Folgenden und aus eigenen Versuchen bald klar werden.

§. 97. Aus dem, was von §. 90. an bisher gesagt worden ist, ergeben sich folgende Regeln zur Ausziehung der Quadratwurzeln:

1) Man

1) Man theile die Zahl, aus welcher die Wurzel gezogen werden soll, von der Rechten zur Linken in Klassen, jede von 2 Ziffern (denn kein Quadrat einer einfachen Zahl ist über 81, siehe §. 92.). Es schadet nichts, wenn vorn nur 1 Ziffer bleibt. Z. B.

$\sqrt{1764}$ wird abgetheilt 17|64||
oder $\sqrt{15625}$ — — 1|56|25||

2) Man suche für die erste Klasse linker Hand (hier für 17) die Wurzel, und wenn sie nicht genau paßt, die nächst kleinere (hier die 4; denn $4 \cdot 4 = 16$, welche der 17 am nächsten kommt).

3) Die so gefundene Wurzel (4) setze in den Quotienten, als den ersten Wurzeltheil $= a$, multiplicire ihn mit sich selbst, und ziehe das Product (16) von der ersten Klasse ab. Zum etwaigen Rest (1) setze die 2te Klasse (64) herunter.

```
         a
17|64||4
16|
---------
Rest und 2te Klasse 1 64
```

4) Den neuen Divisor bekommt man, indem man den 1sten Wurzeltheil a (hier $= 4$) doppelt nimmt, also $2a$ ($= 8$). Den Divisor setzt man so unter die zweite Klasse, daß die Ziffer rechts (hier die 4) nichts unter sich bekommt.

```
         a
17|64||4
16|
---------
 1 64
neuer Divisor = 8)
```

5) Dividire mit dem neuen Divisor (8) in die über ihm stehende Zahl (16). Der Quotient ist der zweite Theil der Wurzel $= b$ (hier $= 2$). Er muß auch rechts neben den Divisor (8) gesetzt werden, wodurch dieser $= 2a + b$ (82) wird, und die leere Stelle der 2ten Klasse einnimmt. Multiplicire nun $2a + b$ mit dem zweiten Wurzeltheil b, und ziehe das Product von der 2ten Klasse und dem Reste der ersten ab.

a + b
17|64|| 4 2 = Wurzel
$a^2 = 16$|

Rest und 2te Klasse 1 6 4
neuer Divisor = 2a = (8,2)
und b = 2 dazu gesetzt
endlich $(2a+b) \cdot b = 1\,6\,4$
Rest = 0

6) Wenn nun alles aufgeht, so ist $a+b$ (42) die reine Wurzel. Hat aber die Zahl mehr, als 2 Klassen, so setzt man die 3te Klasse herunter, sieht die beiden schon erhaltenen Wurzeltheile als Einen an, nimmt ihn doppelt, so hat man abermals einen neuen Divisor, mit dem man wie vorher bei 5 verfährt, und so den 3ten Wurzeltheil bekömmt.

Man wiederholt dies so lange, als man Klassen hat, und erhält auch eben so viel Wurzeltheile, als Klassen. Ist die gegebene Zahl ein wirkliches Quadrat, so geht am Ende alles auf.

§. 98. Zur Übung einige Beispiele.

Die $\sqrt{15625}$. Da diese Zahl drei Klassen, nämlich 1|56|25|| hat, so muß auch die Wurzel aus 3 Ziffern bestehen.

a + b
1|56|25|| 1 2 5 Wurzel = 125.
$a^2 = 1$| a + b

zweite Klasse 56
neuer Divisor 2a = 2 = (2,2)
$(2a+b) \cdot b =$ 44
Rest und 3te Klasse = 1225
Divisor = $2 \cdot 12$ = (24,5)
(nun ist a = 12
b = 5) u. $2a+b$ = 122 5
Rest = 0

Die $\sqrt{582169}$ wird 3 Ziffern haben, weil die Zahl drei Klassen hat

a + b

$$\begin{array}{l} \qquad\qquad\qquad\qquad a+b \\ 58|21|69||7\ \ 6\ \ 3,\ \text{Wurzel} = 763. \\ a^2 = 7 \cdot 7 = 49 \qquad\qquad a+b \end{array}$$

Rest und 2te Kl. = 9 21
neuer Divisor 2 . 7 = (1 4,6)
$(2a + b) . b$ = 876

Rest und 3te Kl. = 4 569
neuer Divis. = 2 . 76 = (1 52,3)
$(2a + b) . b$ = 4 569

Rest = 0

§. 99. Wenn die Zahl, woraus die Wurzel gezogen werden soll, kein Quadrat ist, und man also die Wurzel durch Näherung suchen muß, so hänge man an die Zahl so viel Klassen von Nullen, als man will, und ziehe die Wurzel, wie gewöhnlich, aus. Im Quotienten streiche man aber so viel Decimalstellen ab, als man Klassen von Nullen angehängt hat. Es wird niemals aufgehen; doch erhält man die Wurzel immer genauer, je mehr Klassen Nullen angehängt werden.

Man soll z. B. die Wurzel aus 5 bis auf drei Decimalstellen finden, so hänge man der 5 drei Klassen Nullen an.

Also $\sqrt{5} = \sqrt{5|00|00|00}\ |2,236\ldots$ = Wurzel

4
100
(4,2)
84
1600
(44,3)
1329
27100
(446,6)
26796
Rest 304

§. 100. Wenn die Wurzel aus einer ganzen Zahl mit einem Decimalbruche gezogen werden soll, so theilt man nur die Ganzen ab, und zieht die Decimalstellen so her=

herunter, als man im vorigen §. die Nullen heruntersetzte. Z. B. $\sqrt{7,651}$ zu finden.

7|65|10||2,76.... = Wurzel
4|
3 65
(4,7)
3 2 9
3 6 10
(54,6
3276
Rest 334

Man kann nun dem Rest 334 abermals eine oder mehrere Klassen Nullen geben, und mit der Rechnung fortfahren, wodurch man die Wurzel immer genauer bekommt. Im obigen Beispiel geben die 3 Decimalstellen 651 nicht zwei volle Klassen; deshalb mußte noch eine Null angehängt werden. Daß die Wurzel unvollständig ist, zeigt man durch Puncte (2,76....) an.

§. 101. Auch aus Decimalbrüchen, ohne Ganze, kann die Wurzel eben so, wie vorhin, gefunden werden. Dann vertritt die Null die Stelle der Ganzen, folglich kann die Wurzel auch keine Ganze enthalten.

Z. B. $\sqrt{0,056}$ zu finden auf 4 Decimalstellen. Man hänge so viel Nullen an, daß aus 056 vier Klassen werden, also $\sqrt{0,}$|05|60|00|00||0,2366 = Wurzel.
0|
5
$a^2 = 4$
160
(4,3)
129
3100
(46,6)
2796
30400
(472,6)
28356
Rest = 2044

§. 102.

§. 102. Soll die Wurzel aus einem Bruch gezogen werden, so ziehe man sowol aus dem Zähler, als aus dem Nenner die Wurzel, und setze beide Wurzeln in einen Bruch.

Z. B. $\sqrt{\tfrac{1}{4}} = \dfrac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}} = \tfrac{1}{2}$, denn $\sqrt{1} = 1$; und $\sqrt{4} = 2$.

$\sqrt{\tfrac{9}{16}} = \dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \tfrac{3}{4}$, denn $\sqrt{9} = 4$; und $\sqrt{16} = 4$.

Oder man verwandelt den gemeinen Bruch in einen Decimalbruch, und zieht daraus die Wurzel.

Z. B: $\sqrt{\tfrac{1}{4}} = \sqrt{0{,}25}$; und $\sqrt{0{,}25} = 0{,}5 =$ Wurzel.

$\sqrt{\tfrac{3}{4}} = \sqrt{0{,}75}$; und nach §. 101 wird $\sqrt{0{,}75} = 0{,}866\,.. =$ Wurzel.

§. 103. Weil einerlei Zeichen beim Multipliciren stets Plus geben, so muß jede quadratische Größe + haben. Die Wurzel kann daher sowol + als — haben, und wird auch oft mit beiderlei Zeichen geschrieben, als $\sqrt{16} = \pm 4$. Für negative Größen giebt es also keine Wurzeln.

Ausziehung der Kubikwurzel.

§. 104. Wenn wir eine zweitheilige (binomische) Größe a + b in die 3te Potenz erheben, und auf das genau achten, was mit ihr vorgeht, so können wir allgemeine Regeln zur Ausziehung der kubischen Wurzel entdecken.

$$
\begin{array}{rl}
(a+b)\,.\,(a+b)\,.\,(a+b) = & a + b \\
& a + b \\
\hline
& ab + b^2 \\
a^2 + ab & \\
\hline
a^2 + 2ab + b^2 & = \text{zweite Potenz} \\
a + b & \\
\hline
a^2 b + 2ab^2 + b^3 & \\
a^3 + 2a^2 b + ab^2 & \\
\hline
a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3 & = \text{dritte Potenz.}
\end{array}
$$

Aus dieser kubischen Größe müssen wir die Wurzel a + b durch eine Art von Division wieder zu bekommen suchen.