Der Rathgeber bei mathematischen Beschäftigungen

Stöpel, August

Stendal, 1819

§. 114-133 etwas von ihrer Entstehung, Gebrauch der logarithmischen Tafeln an allerlei Fällen.

$$\begin{array}{lll} & & a+b \\ & m^3+12m^2+48m+64 & \| m+4 = \text{Wurz.} \\ \text{hier ist } a=m, \text{ u. } a^3=m^3 & & \\ \hline & 12m^2+48m+64 & \\ \text{Divisor } 3a^2 & = (3m^2) & \\ \left\{\begin{array}{l} 3a^2b \\ 3ab^2 \\ b^3 \end{array}\right. & \begin{array}{l} = 12m^2 \\ = \quad +48m \\ = \quad\quad +64 \end{array} & \\ \hline \text{Summe} & 12m^2+48m+64 & \\ \hline \text{Rest} & = 0 & \end{array}$$

§. 112. Die Kubikwurzel aus einer Größe kann sowol Plus als Minus haben, denn der Kubus von einer Plusgröße $=+$, von einer Minusgröße $=-$.

Auch aus einer Minusgröße muß sich daher die $\sqrt[3]{}$ ziehen lassen. $\sqrt[3]{64}=+4$; und $\sqrt[3]{-64}=-4$; denn $-4 \cdot -4 \cdot -4 = +16 \cdot -4 = -64$.

§. 113. Die Wurzeln aus der 4ten, 5ten, 6ten Potenz zu ziehen, ist zwar auch möglich, aber sehr weitläufig. Wir werden in den Logarithmen bequeme Mittel finden, aus einer Größe jede verlangte Wurzel zu ziehen.

V. Gebrauch der Logarithmen.

§. 114. Unter eine geometrische Progression, deren erstes Glied sich mit 1 anfängt, setze eine arithmetische Progression, deren 1stes Glied sich mit Null anfängt, so heißt jedes Glied der letztern der Logarithme des über ihm stehenden Gliedes in der geometrischen Reihe. Z. B.

Geometr. Progr. 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256 u. s. w.
Arithmet. Progr. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 u. s. w.

Die Glieder der untern Reihe sind also eigentlich die Exponenten der geometrischen Reihe, deren erstes Glied 1, deren Exponent $=2$ ist. So ist z. B. 6 der Logarithme von 64, und auch die sechste Potenz des Exponenten 2;

die

die 64 ist daher das 6te Verhältniß in der geometrischen Reihe.

Anmerk. Man kann die Logarithmen Verhältnißzähler nennen. Ihre Erfindung fällt in die Zeit 1614 bis 1624, wo Nepper und Brigg sich dadurch unsterblich machten, daß sie die höchst mühevolle Berechnung der Logarithmen unternahmen und logarithmische Tafeln in den Druck gaben

§. 115. An den im vorigen §. angeführten beiden Reihen können wir vieles entdecken, was uns über den Gebrauch der Logarithmen Aufschluß geben kann.

1. Wenn z. B. zwei Zahlen der obern Reihe, 4 und 32 mit einander multiplicirt werden sollen, so braucht man nur ihre darunter stehenden Logarithmen 2 und 5 zu addiren: die Summe 7 ist der Logarithme der Zahl 128, welche die Antwort ist; und $4 \cdot 32 = 128$.
2. Ist 4 in 32 zu dividiren, so findet man die Antwort dadurch, daß man den Logarithmen der Zahl 4 vom Logarithmen der 32 abzieht, hier $5 - 2 = 3$. Die 3 ist der Logarithme der Antwort, und steht unter der 8. Aber $\frac{32}{4}$ ist auch $= 8$.
3. Soll die 4 in die 3te Potenz erhoben werden, so multiplicire man den Logarithmen der Zahl 4, welcher 2 ist, mit 3; das Product 6 ist der Logarithme von 64, welches auch der Kubus von 4 ist.
4. Das Ausziehen der Wurzel geschieht dadurch, daß man den Logarithmen durch den Wurzelexponenten dividirt. Z. B. $\sqrt{256}$ wird gefunden, indem wir 8 durch 2 dividiren. Der Quotient 4 ist der Logarithme der Wurzel, und gehört der 16, welches auch die Wurzel ist. Die $\sqrt[4]{256}$ wäre $\frac{8}{4} = 2$, welche Zahl der Logarithme von 4 ist; und $\sqrt[4]{256}$ ist auch $= 4$.

Die Multiplication zweier Zahlen geschieht also durch die Addition ihrer Logarithmen;

die Division durch die Subtraction der Logarithmen;

die Erhebung zu Potenzen geschieht durch die Multiplication der Logarithmen mit dem Exponenten;

die Ausziehung der Wurzel geschieht durch die Division durch den Exponenten.

Die erhaltene Zahl ist dann der Logarithme der Antwort.

Dies alles hat seinen Grund darin, daß man die Logarithmen als Exponenten der obern Reihe betrachten kann.

§. 116. Man kann übrigens mit jeder geometrischen und arithmetischen Reihe alle vorige Aufgaben lösen, wie Versuche beweisen werden. Wir bedienen uns gegenwärtig der sogenannten Briggischen oder gemeinen Logarithmen, deren 2 Reihen folgende sind:

Geometr.	1,	10,	100,	1000,	10000,	100000,	1000000.
Arithmet. od. Logarith.	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6.

Es sind unzählig viele Logarithmensysteme möglich, aber in jedem ist 0 der Logarithme der Einheit, und diejenige Zahl, deren Logarithme 1 ist, heißt die Grundzahl dieses Systems.

§. 117. Wie fand man aber die Logarithmen für die Zahlen zwischen 1 und 10; zwischen 10 und 100 u. s. w.? Sollen die Logarithmen ganz brauchbar werden, so muß man für jede Zahl einen Logarithmen haben. Nun sieht man bald, daß die Logarithmen der Zahlen zwischen 1 und 10, zwar größer als 0, aber doch kleiner als 1, also echte Brüche; die Logarithmen der Zahlen 11 bis 99 zwar größer als 1, aber doch kleiner, als 2; die Logarithmen der Zahlen von 101 bis 999 zwar größer, als 2, aber doch kleiner, als 3, folglich Ganze und Brüche seyn müssen. Die Logarithmen der 10 und ihrer Potenzen sind daher nur ganze Zahlen; die Logarithmen aller übrigen Zahlen bestehen aus Brüchen, die man auf eine mühsame Weise berechnet, und in Büchern, die den Titel: logarithmische Tafeln, führen, hat abdrucken lassen.

§. 118. Um einen kleinen Überblick zu geben, wie logarithmische Tafeln aussehen, setze ich die Reihe der natürlichen Zahlen von 1 bis 16 nebst ihren Logarithmen her.

Natürliche Zahl = N.	Logarithmen = Log.
1	0,0000000
2	0,3010300
3	0,4771213
4	0,6020600
5	0,6989700
6	0,7781513
7	0,8450980
8	0,9030900
9	0,9542425
10	1,0000000
11	1,0413927
12	1,0791812
13	1,1139434
14	1,1461280
15	1,1760913
16	1,2041200
u. s. w.	

Anmerk.

Die Ganze in den Logarithmen nennt man die Kennziffer, Charakteristik; der angehängte Decimalbruch heißt Mantisse.

Die natürlichen Zahlen

von 1 — 9	haben 0	zur Kennziffer
von 10 — 99	— 1	—
von 100 — 999	— 2	—
von 1000 — 9999	— 3	—

u. s. w.

folglich ist die Kennziffer stets um eine 1 geringer, als die ihr zugehörige natürliche Zahl Ziffern hat. Daher läßt man auch in größeren Tafeln die Kennziffer ganz weg.

Der Deutlichkeit wegen wollen wir einige Aufgaben mit Hülfe vorstehender 16 Logarithmen lösen.

1. Es soll 3 mit 4 multiplicirt werden. Dies geschieht logarithmisch also Log. 3 + log. 4

$$\left.\begin{aligned} \log. 3 &= 0{,}4771213 \\ +\log. 4 &= 0{,}6020600 \end{aligned}\right\} \text{ addirt.}$$

$$\log. (3.4) = 1{,}0791813, \text{ gehört zu } 12.$$

2. Man dividirt z. B. 3 in 15 logarithmisch also: $\log. \frac{15}{3} = \log. 15 - \log. 3;$

$$\log. 15 = 1{,}1760913$$
$$-\log.\ 3 = 0{,}4771213 \text{ subtrahirt.}$$
$$\log. \tfrac{15}{3} = 0{,}6989700, \text{ gehört zur } 5.$$

3. Die 2 in die 4te Potenz zu erheben, heißt 4 log. 2.

$$\log. 2 = 0{,}3010300 \quad (4 \text{ multiplic.}$$
$$\log. 2^4 = 1{,}2041200$$

wozu die Zahl 16 gehört.

4. Aus 16 die $\sqrt[4]{}$ zu finden, heißt $\frac{\log. 16}{4}$

$$\log.\ 16 = 1{,}2041200$$
dividirt durch 4) 0,3010300

welcher Logarithme zur 2 gehört, also $\sqrt[4]{16} = 2$.

Die Rechnung mit größern Zahlen ist eben nicht weitläufiger, daher sind die Logarithmen ein recht bequemes Mittel, weitläufige Rechnungen kurz und leicht zu vollenden, die auf gewöhnlichem Wege sehr mühsam, oft unmöglich auszuführen sind.

§. 119. Ohne Zweifel werden sich Liebhaber mathematischer Beschäftigungen solche logarithmische Tafeln anschaffen wollen. Daher empfehlen wir ihnen folgende brauchbare Werke, in denen zugleich noch andere zur Mathematik gehörige Tafeln vorkommen, von denen wir in der Folge reden werden.

1. Adrian Vlaeqs Tabellen der Sinus, Tangenten 2c., nebst ihren Logarithmen, und der Logarithmen der Zahlen von 1 bis 10000. Preis 1 Rthlr. (Für Anfänger brauchbar und beliebt.)
2. Joh. Carl Schulze Neue und erweiterte Sammlung logarithmischer trigonometrischer, und anderer, zum Gebrauch der Mathematik unentbehrlicher Tafeln. Berlin, 1778. Zwei Bände. Preis 4 Rthlr.
3. Georg Vega Logarith. trigonometr. und andere zum Gebrauch der Mathematik eingerichtete Tafeln und Formeln. Wien, 1783. Preis 1 Rthlr 4 Gr.

Außer diesen recht brauchbaren Werken verdient aber folgendes vorzügliche Empfehlung:

4. Georg Vega Logarith. trigonometr. Tafeln nebst andern zum Gebrauch der Mathematik eingerichteten Tafeln und Formeln. 2 Bände. 3te verbesserte und vermehrte Aufl. Leipz. 1814. Preis 5 Rthlr.

(Der erste Band enthält die Logarithmen der natürlichen Zahlen von 1 bis 101000; die Logarithmen der trigonometrischen Linien; die Linien selbst, und viele

viele andere Tafeln und Formeln in höchster Schärfe. Der zweite Band enthält die sogenannten natürlichen Logarithmen, viele astronomische Tafeln, Formeln aus der Analysis, Differenzial- und Integralrechnung ꝛc., alles in höchster Schärfe, und daher für Kenner sehr brauchbar).

Jedem dieser Werke ist eine Anweisung beigefügt, die die Einrichtung und den Gebrauch erklärt.

§. 120. Jede Zahl, die mit der 10, 100, 1000 u. s. w. multiplicirt oder dividirt wird, ist im Logarithmus nur durch ihre Kennziffer unterschieden. So ist z. B.

log. 3450 = 3,5389506
und log. 34590 = 4,5389506
log. 345900 = 5,5389506
log. 34,59 = 1,5389506
log. 3,459 = 0,5389506

Da die Kennziffer sich nach der Anzahl Ziffern richtet, woraus die Ganzen einer Zahl bestehen, so kann man umgekehrt aus der Kennziffer eines Logarithmen auf die ihm gehörige Zahl schließen. Ist die Kennziffer 0, so ist die natürliche Zahl unter 10; ist sie 1, zwischen 10 und 100 ꝛc.

§. 121. Über den Gebrauch der Logarithmen müssen wir noch einige Aufgaben hinzufügen, und dem Anfänger rathen, seine Tafeln zur Hand zu nehmen, jeden Logarithmen selbst aufzusuchen, und die §. 115 gegebenen Regeln wohl zu beachten.

§. 122. Durch die Benutzung der Logarithmen wird, besonders wenn man mit großen Zahlen zu rechnen hat, viel Kürze und Bequemlichkeit erreicht. Auch bei der gemeinen Regeldetri kann man Logarithmen brauchen. Z. B.

3457 ℔ : 1000 Rthlr. = 864,25 ℔ ?

$$\left.\begin{array}{l}\text{log. } 864{,}25 = 2{,}9366394\\ \text{log. } 1000 = 3{,}0000000\end{array}\right\}\text{ addirt.}$$

5,9366394
log. 3457 = 3,5386994 subtrahirt.

log. 2,3979400 gehört zu 250,

folglich ist die Antwort ein Logarithme 2,3979400, den man in den Tafeln aufschlägt, und neben der Zahl 250 findet, welche = 250 Rthlr. sind.

§. 123.

§. 123. Unter der sogenannten decadischen Ergänzung versteht man das, was übrig bleibt, wenn man jede der Ziffern eines Logarithmen von 9 subtrahirt. Addirt man die decadische Ergänzung eines zu subtrahirenden Logarithmen, so ist es eben so gut, als hätte man ihn subtrahirt. Von der Kennziffer der Summe wirft man dann die Zehner weg.

So hätte z. B. voriges Exempel auch so ausgerechnet werden können:

log. 864,25	= 2,9366394	addirt
log. 1000	= 3,0000000	
decadische Ergänzung des log. 3457	= 6,4613006	
	$\cancel{1}$2,3979400 = 250	

von der Kennziffer 12 wird die 1 weggeworfen.

Die decadische Ergänzung ist aber da besonders bequem, wenn mehrere Divisoren in der Rechnung sind.

Z. B. $\frac{72648}{94 \cdot 36}$ wird logarithmisch also stehen:

log. 72648	= 4,8612237
decadische Ergänzung des log. 94	= 8,0268720
decadische Ergänzung des log. 36	= 8,4436975
	$\cancel{2}$1,3317932

Der gefundene Logarithme 1,3317932 gehört zur Zahl 21468. Da nun aber aus der Kennziffer 1 hervorgeht, daß der Quotient nur 2 ganze Ziffern haben kann, so ist derselbe = 21,468.

§. 124. Den Logarithmen eines echten Bruchs mittelst der Tafeln zu finden.

1ste Auflösung. Weil der Nenner größer ist, als der Zähler, so subtrahire man den log. des Zählers vom log. des Nenners, und setze dem Unterschiede das Minuszeichen vor.

Z. B. log. $\frac{5}{8}$ = log. 8 = 0,9030900
log 5 = 0,6989700
log. $\frac{5}{8}$ = — 0,2041200

2te Auflösung. Vermehre die Kennziffer des Zählers so, daß der log. des Nenners abgezo-

gen

gen werden kann. Wie viel diese Vermehrung betragen habe, bemerke man hinter dem Logarithmen. Z. B. log. $\frac{5}{8}$

$$\begin{array}{rl} & \quad +1 \\ \text{log. } 5 & = 0{,}6989700 - 1 \\ \text{log. } 8 & = \underline{0{,}9030900} \\ \text{log. } \frac{5}{8} & = 0{,}7958700 - 1. \end{array}$$

3te Auflösung. Zum log. des Zählers addire die decadische Ergänzung des Nenners und schreibe − 10 hinter den log.

$$\begin{array}{rl} \text{Als log. } \frac{5}{8} = \text{log. } 5 & = 0{,}6989700 \\ \text{decadische Ergänzung log. } 8 & = \underline{9{,}0969099} \\ \text{log. } \frac{5}{8} & = 9{,}7958799 - 10 \\ \text{oder} & = 0{,}7958800 - 1. \end{array}$$

§. 125. Gebrauch eines Bruchlogarithmen, z. B. log. $\frac{5}{8}$. Es sey $\frac{5}{8}$ mit 80 zu multipliciren.

$$\begin{array}{rl} \text{log. } 80 & = 1{,}9030900 \\ \text{Nach 1r Aufl. d. §. 124 ist log. } \frac{5}{8} & = \underline{-0{,}2041200} \\ \text{log. } \frac{5}{8} \,.\, 80 & = 1{,}6989700 \text{ geh. zu } 50. \end{array}$$

(Hier wurden die zu addirenden Logarithmen, weil sie verschiedene Zeichen hatten, mit einander ausgeglichen, wie dies §. 6 gelehrt.)

$$\begin{array}{rl} \text{oder log. } 80 & = 1{,}9030900 \\ \text{Nach 2r Aufl. d. §. 124 ist log. } \frac{5}{8} & = \underline{0{,}7958800 - 1} \\ \text{log. } \frac{5}{8} \,.\, 80 & = 2{,}6989700 - 1 \\ \text{oder} & = 1{,}6989700 \text{ geh. zu } 50. \end{array}$$

Oder endlich, da $\frac{5}{8} \,.\, 80 = \frac{5 \,.\, 80}{8}$, ist auch folgende Rechnung zu empfehlen:

$$\begin{array}{rl} \text{log. } 80 & = 1{,}9030900 \\ \text{log. } 5 & = 0{,}6989700 \\ \text{decadische Ergänzung d. log. } 8 & = \underline{9{,}0969100} \\ \text{log. } \frac{5 \,.\, 80}{8} & = \cancel{1}1{,}6989700 \text{ geh. zu } 50. \end{array}$$

§. 126. Man hätte auch den Bruch $\frac{5}{8}$ in einen Decimalbruch verwandeln und dazu den Logarithmen aufsuchen können.

$\frac{5}{8} = 0,625$, dessen log. $= 0,7958800 - 1$.
wobei zu merken, daß die Kennziffer einer Zahl, welche kleiner, als 1, ist, kleiner als Null, d. h. negativ werden muß.

So ist log $625 = 2,7958800$
— $6,25 = 0,7958800$
— $0,625 = 0,7958800 - 1$
— $0,0625 = 0,7958800 - 2$
u. s. w.

Die Kennziffer des Logarithmen eines Decimalbruchs ist allemal Null; und hinter dem Logarithmen stehen so viel Einheiten mit dem Minuszeichen, als der Decimalbruch überhaupt linker Hand Nullen hat. Der log. von 0,000625 $= 0,7958800 - 4$.

Bekommt aber ein Bruch durch die Verwandlung in einen Decimalbruch zu viele Decimalstellen, oder bleibt er unvollständig, so ist es genauer und sicherer, den gemeinen Bruch beizubehalten, und log. $\frac{a}{b}$ zu schreiben: log. a — log. b, wie §. 124. gewiesen worden ist.

§. 127. Hat ein Decimalbruch Ganze bei sich, so richtet sich die Kennziffer bloß nach den Ganzen. So ist log. $62,5 = 1,7958800$, und wenn man daher zu einer Zahl mit einem Decimalbruch, oder zum bloßen Decimalbruch den Logarithmen sucht, so bekümmert man sich um das Komma nicht, nimmt die Zahl für Ganze, und ordnet endlich die Kennziffer nach den wirklichen Ganzen.

§. 128. Die Erhebung einer Zahl zur verlangten Potenz. Z. B. log. $275^3 = 3$ log. 275.

$$\begin{array}{ll} \text{log. } 275 & = 2,4393327 \\ \hline \text{log. } 275^3 & = 7,3179981 \end{array} \text{(3 mal}$$

wozu die Zahl 20796875 gehört, welche der Kubus ist.

§. 129. Die Wurzel aus einer gegebenen Zahl z. B. $\sqrt[5]{2000}$ findet man

$$\begin{array}{ll} \text{log. } 2000 & = 3,3010300 \\ \text{dividirt durch 5)} & \overline{} \\ \text{log. } \sqrt[5]{2000} & = 0,6602060 \end{array}$$

wozu die Zahl 457305 gehört. Da aber aus der Kennziffer

ziffer 0 hervorgeht, daß die Wurzel zwischen 1 und 10 liegt, so ist sie nur = 4,57305.

§. 130. Die Wurzel aus einer Zahl, deren Logarithmus zum Theil positiv, zum Theil negativ ist, zu ziehen, richte man seine Kennziffer so ein, daß der Divisor in dem negativen Theil aufgeht.

$$\text{Z. B. log.} \sqrt[5]{\frac{3475}{8946}} = \text{log.} \frac{0{,}5893258 - 1}{5}$$

$$= \text{log.} \frac{4{,}5893258 - 5}{5} = 0{,}9178651 - 1.$$

Die Wurzel wird zwischen 0 und 1 liegen, also ein Bruch seyn. In den Tafeln findet man dazu die Zahl 827685, welche = 0,827685 zu lesen, und $\sqrt[5]{\frac{3475}{8946}}$ ist.

§. 131. Den Exponenten einer gegebenen Potenz findet man, wenn man den Logarithmen der Potenz durch den Logarithmen der Wurzel dividirt, wobei man die 2 oder 3 niedrigsten Stellen der Mantisse weglassen kann. Z. B. die Zahl 61 sey in eine gewisse Potenz erhoben, welche = 2476099 ist. Welches ist ihr Exponent?

$$\frac{\text{log. } 2476099}{\text{log. } 19} = \frac{6{,}39376}{1{,}27875} = 5 = \text{Exponenten, also ist}$$
$19^5 = 2476099$.

§. 132. Zu einem gegebenen ganz negativen Logarithmen die zugehörige Zahl zu finden.

1ste Aufl. Suche zur decadischen Ergänzung des Logarithmen die Zahl.

Z. B. zum log. − 0,2041200 gehört die
decadische Erg. = 9,7958800 − 10
= 0,7958800 − 1, wozu 0,625 geh.

2te Aufl. Sieh den gegebenen log. als positiv an, und suche dazu die Zahl, welche der Nenner eines Bruchs ist, dessen Zähler = 1. Z. B. log. − 0,2041200 gehört, positiv genommen, zu 1,6; folglich ist die

$$\text{Zahl} = \frac{1}{1{,}6} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8} = 0{,}625.$$

§. 133. Die nähere Anweisung zum Gebrauch logarithmischer Tafeln ist solchen Werken immer beigefügt; daher beschließen wir diesen Abschnitt.

VI. Von den Gleichungen.

§. 134. Eine Gleichung ist ein doppelter Ausdruck für eine und dieselbe Größe. Zwischen beiden Ausdrücken steht das Gleichheitszeichen. Z. B.

$$3 + 2 = 5$$
$$10 - 8 = 2$$
$$12 = 2 \cdot 6$$
$$3 \cdot 9 = 24 + 3$$
$$\frac{15}{5} = \frac{6 \cdot 2}{4} \text{ u. s. w.}$$

sind 5 Gleichungen, in denen das Wesentlichste darin besteht, daß auf jeder Seite gleiche Größen stehen. Denn $\frac{15}{5} = 3$, und $\frac{6 \cdot 2}{4}$ auch $= 3$.

Ein solcher doppelter Ausdruck einerlei Größe bleibt daher immer eine Gleichung, wenn man auf jeder Seite gleichviel zulegt oder wegnimmt, mit einerlei Zahl multiplicirt oder dividirt, sie zu gleichen Potenzen erhebt, oder beiderseits einerlei Wurzel auszieht.

Wenn $3 + 2 = 5$ eine Gleichung ist, so ist es auch
$3 + 2 + 1 = 5 + 1$, denn auf jeder Seite ist $= 6$.

§. 135. Die Mathematiker unterscheiden Gleichungen vom ersten, zweiten, dritten, vierten Grade, je nachdem die darin vorkommende unbekannte Größe in der ersten, 2ten, 3ten oder 4ten Potenz erscheint.

§. 136. Das Verfahren, die unbekannte Größe in einer Gleichung so abzusondern, daß sie auf der einen Seite allein ist, und auf der andern lauter bekannte Größen, die ihr gleich sind, zu stehen kommen, gründet sich auf die allereinfachsten Regeln der Vernunft, und ist un-

ter