



UNIVERSITÄTS-  
BIBLIOTHEK  
PADERBORN

## **Der Rathgeber bei mathematischen Beschäftigungen**

**Stöpel, August**

**Stendal, 1819**

§. 75-89 geometrische Porportionen, Progressionen, Aufgaben und Formeltafel.

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-63556](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-63556)

Z. o.	Gege- ben.	Ge- sucht	Formeln.
17	$d, n, z$		$a = z - (n-1)d$
18	$d, n, s$		$a = \frac{s}{n} - \frac{(n-1)d}{2}$
19	$d, z, s$	$a$	$a = \frac{1}{2}d + \sqrt{\left(z + \frac{1}{2}d\right)^2 - 2ds}$
20	$n, z, s$		$a = \frac{2s}{n} - z$

Die Formeln No. 2, 14, 16 und 19 werden nur demjenigen völlig verständlich seyn, der sich mit der Ausziehung der Quadratwurzel (wobon weiter unten) bekannt gemacht hat.

§. 75. Von der geometrischen Proportion. Zwei gleiche geometrische Verhältnisse bilden eine geometrische Proportion. Als  $2 : 8 = 3 : 12$  sind zwei solche Verhältnisse, die gleiche Exponenten, nämlich 4, haben. Der Exponent kann auch ein Bruch seyn, als  $8 : 2 = 12 : 3$ , wobei wir uns das erste und 3te Glied als Divisoren denken können, denn es ändert in dem Wesen der Proportion nichts ab, ob man das erste und dritte, oder das zweite und vierte Glied zu Divisoren nimmt; die Exponenten ändern sich gleichmäßig.

Und  $\frac{8}{2} = \frac{12}{3}$ , Exponenten = 4  
oder  $\frac{2}{8} = \frac{3}{12}$ , Exponenten =  $\frac{1}{4}$ .

Es ist gebräuchlicher, die Divisoren ins 1ste und 3te Glied zu setzen.

§. 76. Die geometrische Proportion ist in allen mathematischen Rechnungen recht wichtig und im gemeinen Rechnungswesen unter dem Namen Regel de tri bekannt, weil aus 3 Gliedern derselben sich jedesmal das 4te durch Rechnung finden läßt.

§. 77. Die 4 Glieder einer geometrischen Proportion haben folgende Einrichtung:

das erste besteht für sich;

das zweite aus dem ersten, multiplicirt mit dem Exponenten;

das dritte wieder für sich;  
 das vierte aus dem 3ten, multiplicirt mit dem Exponenten.

Folglich kann die Proportion  $2 : 8 = 3 : 12$  auch so ausgedrückt werden:  $2 : 2 \cdot 4 = 3 : 3 \cdot 4$ . Heißt nun das erste Glied  $a$ , das 3te  $b$ , und der Exponent  $m$ , so ist jede geometrische Proportion in allgemeinen Ausdrücken  $= a : am = b : bm$ .

Wenn das 3te Glied dem 2ten nicht gleich ist, so heißt die Proportion diskret; wenn aber das 2te Glied dem 3ten gleich ist, so heißt die Proportion continuirlich.

Diskrete Proportionen sind z. B.  $2 : 8 = 3 : 12$   
 $a : am = b : bm$

und continuirliche Proportionen sind z. B.  $2 : 8 = 8 : 32$   
 und allgemein ausgedrückt  $= a : am = am : amm$   
 oder  $a m^2$

denn  $2 : 2 \cdot 4 = 2 \cdot 4 : 2 \cdot 4 \cdot 4$ .

§. 78. Bei jeder geometrischen Proportion gilt die Generalregel:

das Product der beiden äußern Glieder ist gleich dem Product der beiden innern oder mittlern Glieder.

In  $2 : 8 = 3 : 12$  ist  $2 \cdot 12 = 8 \cdot 3 = 24$

In  $2 : 8 = 8 : 32$  ist  $2 \cdot 32 = 8 \cdot 8 = 64$

In  $a : am = b : bm$  ist  $abm = amb = abm$

In  $a : am = am : amm$  ist  $aamm = amam = a^2 m^2$

Ähnliche Glieder sind das 1ste und 3te; das 2te und 4te.

§. 79. Da man  $2 : 8 = 3 : 12$  auch schreiben kann  $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$ , so folgt, daß eine Proportion aus zwei gleichen Brüchen besteht, und also aus zwei gleichgroßen Brüchen auch eine Proportion geformt werden kann. z. B.  $\frac{3}{8} = \frac{7}{14}$  kann stehen  $6 : 3 = 14 : 7$ , wobei nur dahinzusehen ist, daß

ähnliche Glieder zu Divisoren gemacht werden; z. B.  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

kann stehen  $a : b = c : d$  und auch  $b : a = d : c$ ; es bleibt immer eine richtige Proportion.

§. 80. Mit jeder Proportion können vielerlei Veränderungen vorgenommen werden.

E

1) Durch

1) Durch Versetzung der Glieder.

$$\begin{aligned} 2 : 8 &= 3 : 12 \\ 8 : 2 &= 12 : 3 \\ 12 : 3 &= 8 : 2 \\ 3 : 12 &= 2 : 8 \end{aligned}$$

• und jedes Glied kann also letztes seyn.

2) Durch Versetzung der mittelsten Glieder.

$$2 : 3 = 8 : 12.$$

3) Durch Addition bei ähnlichen Gliedern.

$$am : a + ma = bm : b + mb, \text{ wo beim 2ten und 4ten Glied } ma \text{ und } mb \text{ addirt sind.}$$

4) Durch Subtraction bei ähnlichen Gliedern.

$$a - am : am = b - mb : bm.$$

5) Durch Multiplication einer Größe in alle 4 Glieder, oder in 2 Glieder.

$$\left. \begin{aligned} a : am &= b : bm \\ ac : acm &= bc : bcm \\ a : acm &= b : bcm \\ ac : acm &= b : bm \\ a : am &= bc : bcm \\ ac : am &= bc : bm \end{aligned} \right\}$$

wo stets das Product der beiden äußern Glieder dem der beiden innern gleich ist, nämlich  $abmc$ .

6) Durch die Division einer Größe in alle 4 Gliedern oder nur in zwei.

$$\begin{aligned} a : am &= b : bm \\ \frac{a}{c} : \frac{am}{c} &= \frac{b}{c} : \frac{bm}{c} \\ \frac{a}{e} : am &= \frac{b}{e} : bm \\ a : \frac{am}{c} &= b : \frac{bm}{c} \\ \frac{a}{e} : \frac{am}{e} &= b : bm \\ a : am &= \frac{b}{e} : \frac{bm}{e} \end{aligned}$$

7) Durch

7) Durch Erhebung der Glieder zu Potenzen, oder Ausziehung der Wurzeln.

$$\begin{aligned} a & : am = b : bm \\ a^2 & : a^2m^2 = b^2 : b^2m^2 \\ \sqrt{a} & : \sqrt{am} = \sqrt{b} : \sqrt{bm} \\ a & : am = b^2 : b^2m \text{ ic.} \end{aligned}$$

wobei einerlei Exponenten der Potenzen und der Wurzeln vorausgesetzt werden.

Als Hauptregel für alle Veränderungen von 3 bis 7 bei geometrischen Proportionen merke man, daß die zu machende Veränderung niemals allein an solchen Gliedern vorgenommen werden kann, die einander multipliciren, als am 1sten und 4ten; am 2ten und 3ten. Denn alsdann würde die Hauptbedingung, daß das Product der äußern Glieder dem der innern gleich sey, nicht erfüllt. So würde es z. B. keine Proportion mehr bleiben, wenn man das 2te und 3te Glied mit einerlei Größe multiplicirte, als  $a : am = bc : bm$ , wie die Probe beweist.

§. 81. Aus drei Gliedern einer geometrischen Proportion läßt sich allezeit das 4te finden, denn jedes Glied kann zum letzten gemacht werden, und das letzte ist gleich dem Product der mittlern dividirt durch das vordere.

$$a : am = b : bm, \text{ also ist } bm = \frac{amb}{a}$$

$$2 : 8 = 3 : 12, \text{ --- } 12 = \frac{8 \cdot 3}{2}$$

$$8 : 2 = 12 : 3, \text{ --- } 3 = \frac{2 \cdot 12}{8}$$

$$12 : 3 = 8 : 2, \text{ --- } 2 = \frac{3 \cdot 8}{12}$$

$$3 : 12 = 2 : 8, \text{ --- } 8 = \frac{12 \cdot 2}{3}$$

Bei der continuirlichen Proportion, worin das 2te Glied dem 3ten gleich ist, ist das 4te Glied eben so zu finden, denn

$$2 : 8 = 8 : 32, \text{ und } 32 = \frac{8 \cdot 8}{2}$$

$$\text{Allgemein } a : b = b : c, \text{ und } c = \frac{bb}{a}$$

€ 2

das



4) Durch die Multiplication der gleichnamigen Glieder in zweien Proportionen entstehen neue.

$$a : am = b : bm$$

$$c : cn = d : dn$$

$$ac : amen = bd : bmdn$$

5) desgleichen durch die Division gleichnamiger Glieder:

$$a : am = b : bm$$

$$c : cn = d : dn$$

$$\frac{a}{c} : \frac{am}{cn} = \frac{b}{d} : \frac{bm}{dn}$$

Es ist ein wichtiges, und für die bessere Einsicht in mathematische Lehrsätze und Beweise höchst notwendiges Geschäft, sich mit den geometrischen Proportionen und ihren Verwandlungen recht bekannt zu machen.

§. 83. Eine Reihe Zahlen, die immer gleich vielmal größer oder kleiner werden, heißt eine geometrische Progression. Z. B. 1, 2, 4, 8, 16, 32

$$\text{oder } 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$$

$$\text{oder } 81, 27, 9, 3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27} \text{ u.}$$

Solche Reihen entstehen aus lauter continuirlichen Proportionen, als:

$$1 : 2 = 2 : 4 \quad \text{oder } a : am = am : am^2$$

$$2 : 4 = 4 : 8 \quad am : am^2 = am^2 : am^3 \text{ u.}$$

$$4 : 8 = 8 : 16 \text{ u.}$$

Die neuen Glieder sind:  $a, am, am^2, am^3, am^4, am^5$  und man entdeckt leicht, daß der Exponent  $m$  um eine Potenz niedriger ist, als die Zahl des Gliedes. Z. B. im 6ten Glied ist  $m^5$ ; im 3ten Gliede  $m^2$  u.

Heißt nun die Zahl eines Gliedes allgemein  $n$ , so ist die Potenz von  $m$  allemal um 1 geringer, als  $n$ , also  $= n - 1$  und das letzte Glied  $= am^{n-1}$ .

§. 84. Zwei von den Enden einer geometrischen Progression gleichweit abstehende Glieder geben einerlei Product.

$$1, 2, 4, 8, 16, 32 \quad \text{und } 1 \cdot 32 = 2 \cdot 16 = 4 \cdot 8 = 3e$$

$$a, am, am^2, am^3, am^4, am^5, am^6$$

und

und jedes Paar Glieder giebt  $a^2 m^6$ ; weil  $n$  oder die Anzahl der Glieder ungerade ist, so bleibt  $am^3$  allein, und wird es mit sich selbst multiplicirt, so kommt auch  $a^2 m^6$ .

§. 85. Bei der geometrischen Progression sind zu merken:

das erste Glied  $= a$

der Exponent  $= m$

das letzte Glied  $= z$

die Anzahl der Glieder  $= n$ .

Jedes Glied in einer Progression kann als letztes angesehen und geschrieben werden  $am^{n-1} = z$ .

$$\text{Das erste } a = \frac{z}{m^{n-1}}$$

Der Exponent  $m = \frac{am}{a}$  d. i. dem 2ten Gliede dividirt durchs erste; in der Reihe 3, 6, 12, 24, 48 ist  $a = 3$ ;  $am$  oder das zweite Glied  $= 6$ , und  $\frac{6}{3} = 2 = m$ ; überhaupt bekommt man den Exponenten, wenn man das kleinere Glied in das nächst größere dividirt, als  $\frac{48}{24} = 2$ .

Die Anzahl der Glieder  $n$  findet man am leichtesten, wenn man die Reihe wirklich hinschreibt. Z. B. wenn  $a = 2$ ,  $m = 3$ ,  $z = 162$ , so muß die Reihe seyn:

$$2, 2 \cdot 3, 2 \cdot 3 \cdot 3, 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3, 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

$$= 2, 6, 18, 54, 162$$

also sind 5 Glieder, und  $n = 5$

Das Auffinden des Exponenten  $m$  und der Anzahl der Glieder  $n$  aus gegebenem Datis erfordert indessen Kenntniß der Wurzel- und Logarithmenrechnung (wovon weiter unten). Für Kundige sind daher folgende Formeln brauchbar

$$m = \sqrt[n-1]{\frac{z}{a}}, \text{ und } n = 1 + \frac{\log. z - \log. a}{\log. m}$$

§. 86. Zwischen zwei gegebenen Zahlen  $a$  und  $b$  eine mittlere Proportionalzahl zu finden, sage man:

$$a : x = x : b, \text{ und } xx = ab$$

$$= x^2 = ab$$

$$x = \sqrt{ab}$$

wobei  $x$  die gesuchte Zahl ist.

Mehrere Proportionalzahlen z. B. 3 zu finden:

Die Reihe ist  $a, x, x^2, x^3, b$ .

Nun ist  $ab = x \cdot x^3$  (siehe S. 84); und  $x \cdot x^3 = x^4$ ; folglich ist  $ab = x^4$ , und  $\sqrt[4]{ab} = x =$  dem 2ten Gliede. Wird dies durch das 1ste Glied dividirt, so ergiebt sich der Exponent, mit dem alle folgende Glieder leicht zu finden sind.

S. 87. Die Summe aller Glieder einer geometrischen Progression giebt die Formel

$$\frac{am^n - a}{m - 1} = S = \text{Summe.}$$

Z. B. In der Progression 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256 ist  $a = 1$ ;  $m = 2$ ,  $n = 9$ , folglich

$$S = \frac{1 \cdot 2^9 - 1}{2 - 1} = \frac{2^9 - 1}{1} = 2^9 - 1 = 512 - 1 = 511$$

Indessen pflegt man oft durch die bloße Addition der Glieder die Summe zu finden, wenn die Reihe bekannt oder gegeben und nicht zu lang ist.

S. 88. Die Summe einer bis in's Unendliche fortgehenden Progression kann nur dann gefunden werden, wenn die Reihe eine fallende, und der Exponent kleiner, als 1 ist.

Wenn das erste Glied  $= a$ ; der Exponent  $= \frac{b}{c}$ , so ist, wenn jedes Glied das Pluszeichen hat, die Summe

$$S = \frac{ac}{c - b}$$

Z. B. in der Reihe 3, 2,  $1\frac{1}{2}$ ,  $\frac{5}{6}$ ,  $\frac{1}{2}$  u. s. f. ist  $a = 3$ ; der Exponent  $= \frac{2}{3} = \frac{b}{c}$ , und

$$\frac{ac}{c - b} = \frac{3 \cdot 3}{3 - 2} = \frac{9}{1} = 9$$

S. 89. Wenn in einer unendlichen Reihe die Zeichen wechseln, so ist die Summe  $S = \frac{ac}{c + b}$

In der Reihe  $\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{3}, -\frac{2}{9}, +\frac{1}{27}$  u. s. w. ist  $a = \frac{3}{4}$ ,  $m = \frac{3}{4}$  in  $-\frac{1}{2} = \frac{4}{8} = \frac{2}{3} = \frac{b}{c}$ ; und

ac

$$\frac{ac}{c+b} = \frac{\frac{3}{4} \cdot 3}{3+2} = \frac{\frac{9}{4}}{5} = \frac{9}{20} = S$$

Wenn von den 5 Größen  $a, m, z, n, s$  drei bekannt sind, so lassen sich mittelst folgender Tafel die übrigen finden.

Formeltafel für die geometrische Progression.

Z.	Gegeben.	Gesucht.	Formeln.	
1	$a, m, n$		$z = am^{n-1}$	Wobei $a =$ erstes Glied $z =$ letztes $m =$ Exponent. $n =$ Anz. d. Glied. $s =$ Summe.
2	$a, m, s$		$z = \frac{a + (m-1)s}{m}$	
3	$a, n, s$	$z$	$z \cdot (s-z)^{n-1} = a$ $(s-a)^{n-1} = 0$ $(m-1)sm^{n-1}$	
4	$m, n, s$		$z = \frac{s}{m^n - 1}$	
5	$a, m, n$		$s = \frac{a(m^n - 1)}{m - 1}$	
6	$a, m, z$		$s = \frac{mz - a}{m - 1}$	
7	$a, n, z$	$s$	$s = \frac{z^n - a^n}{z - a}$	
8	$m, n, z$		$s = \frac{z(m^n - 1)}{(m - 1)m^{n-1}}$	
9	$m, n, z$		$a = \frac{z}{m^{n-1}}$	
10	$m, n, s$	$a$	$a = \frac{(m-1)s}{m^n - 1}$	
11	$m, z, s$		$a = mz - (m-1)s$	
12	$n, z, s$		$a \cdot (s-a)^{n-1} = z(s-z)^{n-1} = 0$	

Z. o	Gege- ben.	Ge- sucht	Formeln.
13	a, n, z		$m = n-1 \sqrt[n]{\frac{z}{a}}$
14	a, n, s	m	$m^n - \frac{s}{a} m + \frac{s-a}{a} = 0$
15	a, z, s		$m = \frac{s-a}{s-z}$
16	n, z, s		$m^n - \frac{s}{s-z} m^{n-1} + \frac{z}{s-z} = 0$
17	a, m, z		$n = 1 + \frac{\log. z - \log. a}{\log. m}$
18	a, m, s	n	$n = \frac{\log. (a + (m-1)s) - \log. a}{\log. m}$
19	a, z, s		$n = \frac{\log. z - \log. a}{\log. (s-a) - \log. (s-1)} + 1$
20	m, z, s		$n = \frac{\log. z - \log. (mz - (m-1)s)}{\log. m} + 1$

Die Formeln No. 3, 12, 14, 16 sind auf 0 gebrachte Gleichungen von höheren Graden, deren Auflösung schwierig und mühsam ist; indessen kann man durch Versuche oft bald das Gesuchte finden. Z. B. es sey No. 14  $a=2$ ,

$n=5$ ,  $s=242$ , man sucht m; dann soll  $m^n - \frac{s}{a} m + \frac{s-a}{a} = 0$  seyn. Man lege die Werthe unter, so ist  $m^5 - \frac{242}{2} m$

$$+ \frac{242-2}{2} = m^5 - 121 m + 120 = 0.$$

Die Zahl 120 ist durch 2, 3, 4, 5, 6 ic. theilbar; daher versuche man, statt m die 2, 3 ic. zu setzen; bei welcher Zahl die Gleichung Null wird, dieselbe ist die richtige. Wir wollen annehmen  $m=2$ , so ist

$m^5$

$$m^5 - 121m + 120 = 2^5 - 121 \cdot 2 + 120 = 32 - 242 + 120 = 152 - 242 = -90, \text{ also nicht Null.}$$

Nehmen wir  $m = 3$ , so ist

$$m^5 - 121m + 120 = 3^5 - 121 \cdot 3 + 120 = 243 - 363 + 120 = 363 - 363 = 0, \text{ also ist } m = 3.$$

Das 7te Formular kann auch also geschrieben und mit Logarithmen leicht berechnet werden.

$$\frac{z^{\frac{n}{n-1}} - a^{\frac{n}{n-1}}}{z^{\frac{1}{n-1}} - a^{\frac{1}{n-1}}} = \frac{n-1 \sqrt[n-1]{z^n} - n-1 \sqrt[n-1]{a^n}}{n-1 \sqrt[n-1]{z} - n-1 \sqrt[n-1]{a}}$$

Die Auflösung dieser Formulare setzt Kenntniß der Wurzel- und Logarithmenrechnung voraus. Der Vollständigkeit wegen stehen sie mit hier an einem Platze, wo man sie mit Recht suchen kann. Der Zweck dieser Schrift erlaubt uns keine genauere Auseinandersetzung der Lehre von den Progressionen, die man in Häfeler's, Wurja's und anderer Autoren Schriften vollständig abgehandelt findet. Wer das Vorhergehende begriffen hat, und die folgenden 3 Abschnitte mit Aufmerksamkeit liest, wird die Formulare mit Leichtigkeit lösen und anwenden können.

#### IV. Ausziehung der Wurzeln.

§. 90. Ohne die Kunst, aus einer gegebenen Zahl die verlangte Wurzel zu ziehen oder zu finden, kann man in der Mathematik nicht weit kommen, weshalb dieser Abschnitt eine besondere Aufmerksamkeit verdient.

§. 91. Diejenige Zahl, welche Ein- oder mehrere Male mit sich multiplicirt wird, heißt die Wurzel der auf diese Weise entstandenen Größe (Potenz). Siehe §. 21. So ist z. B. 4 die Wurzel von 16, denn  $4 \cdot 4 = 16$ ; man schreibt es  $\sqrt{16} = 4$ , d. h. die Quadratwurzel aus 16 ist 4. Der Kubus von 4  $= 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ ; und  $\sqrt[3]{64} = 4$ .

§. 92. Ganze Zahlen geben ganze Zahlen zum Quadrat, zum Kubus ic.; Brüche geben Brüche.

Es