



UNIVERSITÄTS-  
BIBLIOTHEK  
PADERBORN

## **Der Rathgeber bei mathematischen Beschäftigungen**

**Stöpel, August**

**Stendal, 1819**

§. 104-113 Auffinden der Kubikwurzel aus allerlei Größen.

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-63556](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-63556)

§. 102. Soll die Wurzel aus einem Bruch gezogen werden, so ziehe man sowol aus dem Zähler, als aus dem Nenner die Wurzel, und setze beide Wurzeln in einen Bruch.

$$\text{z. B. } \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}, \text{ denn } \sqrt{1} = 1; \text{ und } \sqrt{4} = 2.$$

$$\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \frac{3}{4}, \text{ denn } \sqrt{9} = 3; \text{ und } \sqrt{16} = 4.$$

Oder man verwandelt den gemeinen Bruch in einen Decimalbruch, und zieht daraus die Wurzel.

$$\text{z. B. } \sqrt{\frac{1}{4}} = \sqrt{0,25}; \text{ und } \sqrt{0,25} = 0,5 = \text{Wurzel.}$$

$$\sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt{0,75}; \text{ und nach §. 101 wird } \sqrt{0,75} = 0,866\dots = \text{Wurzel.}$$

§. 103. Weil einerlei Zeichen beim Multipliciren stets Muß geben, so muß jede quadratische Größe + haben. Die Wurzel kann daher sowol + als - haben, und wird auch oft mit beiderlei Zeichen geschrieben, als  $\sqrt{16} = +4$ . Für negative Größen giebt es also keine Wurzeln.

### Ausziehung der Kubikwurzel.

§. 104. Wenn wir eine zweitheilige (binomische) Größe  $a + b$  in die 3te Potenz erheben, und auf das genau achten, was mit ihr vorgeht, so können wir allgemeine Regeln zur Ausziehung der kubischen Wurzel entdecken.

$$(a+b) \cdot (a+b) \cdot (a+b) = a+b$$

$$a+b$$

$$ab + b^2$$

$$a^2 + ab$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = \text{zweite Potenz}$$

$$a+b$$

$$a^2 b + 2ab^2 + b^3$$

$$a^3 + 2a^2 b + ab^2$$

$$a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3 = \text{dritte Potenz.}$$

Aus dieser kubischen Größe müssen wir die Wurzel  $a + b$  durch eine Art von Division wieder zu bekommen suchen.

D

Das

Das erste der 4 Glieder ist  $a^3$ ; wird der erste Wurzeltheil  $a$  in die 3te Potenz erhoben, so geht er darin auf.

Um die übrigen 3 Glieder  $3a^2b + 3ab^2 + b^3$  dahin zu bringen, ist ein neuer Divisor  $= 3a^2$  nöthig; damit in  $3a^2b$  dividirt, giebt den zweiten Wurzeltheil  $b$ , welcher mit  $3a^2$  multiplicirt,  $3a^2b$  giebt, und also geht auch dieses Glied auf.

Das Glied  $3ab^2$  wird aufgehen, wenn wir  $b$  quadriren und mit  $3a$  multipliciren.

Das letzte Glied  $b^3$  ist das kubirte zweite Glied  $b$  in der Wurzel.

Auf diese Weise lehrt uns die kubische Größe  $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ , wie wir das Werk beginnen sollen, um die Wurzel  $a + b$  wieder zu bekommen. Die Glieder  $3a^2b + 3ab^2 + b^3$  heißen Partialproducte, und müssen bei Zahlenausdrücken auf eine gewisse Art addirt, und von der kubischen Größe abgezogen werden.

§. 105. Aus der Betrachtung dieser allgemeinen Rechnung und aus dem Umstande, daß kein Kubus einer einfachen Zahl mehr als 3 Zahlzeichen, wol aber weniger haben kann, ergeben sich folgende Regeln zur

### Auszziehung der Kubikwurzeln aus Zahlengrößen.

1. Ist die gegebene Zahl ein wirklicher Kubus und aus nicht mehr als 3 Zahlzeichen bestehend, so ist die Wurzel eine von den Ziffern 1 bis 9 (siehe §. 92.), und ohne weitere Rechnung aus jener Tafel zu finden. Hat sie aber mehr als 3 Ziffern, so theile man sie von der Rechten zur Linken in Klassen, jede zu 3 Ziffern. In der letzten Klasse links können weniger, zwei oder eine seyn.
2. Suche für die erste Klasse linker Hand die Kubikwurzel nach §. 92., und, findet sich die Zahl nicht genau, die nächst kleinere, und schreibe sie in den Quotienten. Diese erste Ziffer heiße  $a$ .
3. Kubire diesen ersten Wurzeltheil  $a$ , setze den Kubus unter die erste Klasse, ziehe ihn davon ab, und setze den etwanigen Rest unter den Strich. Zu dem Reste setze die 2te Klasse.

4. Nun

4. Nun ist ein Divisor nöthig, welchen man bekommt, wenn man den ersten Wurzeltheil  $a$  quadriert und mit 3 multiplicirt. Dann ist er  $= 3a^2$ .
5. Dividire mit  $3a^2$  in den heruntergesetzten Rest, und die erste Ziffer links in der zweiten Klasse. Der Quotient ist der zweite Wurzeltheil  $b$ , den man nicht zu groß nehmen muß, weil noch mehrere Partialproducte von der zweiten Klasse abgezogen werden.
6. Der zweite Wurzeltheil  $b$  mit dem Divisor  $3a^2$  multiplicirt, giebt das erste Partialproduct  $= 3a^2 b$ , welches so hingeschrieben wird, daß zwei Ziffern in der zweiten Klasse rechts nichts unter sich bekommen.
7. Der zweite Wurzeltheil  $b$  quadriert und mit  $3a$  multiplicirt, giebt  $3ab^2$  oder das zweite Partialproduct, welches so hingeschrieben wird, daß seine Einer unter der mittlern Zahl der zweiten Klasse stehen.
8. Das dritte Partialproduct ist  $b^3$ , dessen niedrigste Ziffer unter der niedrigsten Ziffer der zweiten Klasse (also Einer unter Einer) stehen muß.
9. Man addire alle 3 Partialproducte in dieser Stellung zusammen, und ziehe ihre Summe von der Zahl, welche durch den Rest der ersten Klasse und durch die 3 Ziffern der zweiten Klasse entstanden ist, ab.
10. Ist nun die Zahl ein reiner oder wirklicher Kubus, und hat sie nur 2 Klassen gehabt, so muß alles aufgehen. Sind aber mehr, als zwei Klassen, so wird die 3te Klasse zum Reste der 2ten heruntergesetzt.
11. Die beiden gefundenen Wurzeltheile  $a + b$  sehe man als Einen an, und nenne ihn  $a$ . Darauf beginne die ganze Verrichtung, wie sie von 3 an gelehrt, von neuem. Das gefundene dritte Wurzelglied behandle wie  $b$ .

Hat die Zahl 4 Klassen, die Wurzel also 4 Ziffern, so nenne man die 3 ersten Ziffern der Wurzel  $a$ , und die 4te wieder  $b$ . Auf diese Weise wird das Buchstabenformular stets brauchbar seyn.

§. 106. Beispiele erläutern die Regeln am besten.

1. Aus der Zahl 79507 die Kubikwurzel zu finden.

Theile 79507 in Klassen, also  $\overset{a+b}{79|507|4} \quad 3 = \text{Wurzel.}$   
 Suche aus 79 die  $\sqrt[3]{}$ , welche  
 $4 = a$ , und  $a^3 = 64$

Zum Rest 15 die 2te Kl. gesetzt = 15 507

Divisor =  $3a^2 = 3 \cdot 4 \cdot 4 = (48) ::$

1. Partialpr. =  $3a^2b = 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 = 144 ::$

2. Partialpr. =  $3ab^2 = 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 = 108 ::$

3. Partialpr. =  $b^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$

Summe der 3 Partialpr. = 15507

und abgezogen von 15507

bleibt = 0

Die  $\sqrt[3]{}$  aus 79507 ist also = 43, und  $43 \cdot 43 \cdot 43$  wird jene Zahl wiedergeben. Der Anfänger wird wohlthun, so lange bei diesem Beispiele zu verweilen, und alle Regeln zu wiederholen, bis sie ihm ganz geläufig sind.

2. Die  $\sqrt[3]{}$  884736 zu finden.

$\overset{a+b}{884|736|9} \quad 6 = \text{Wurzel.}$   
 $a^3 = 729$   
 Rest und 2te Klasse = 155 736  
 Divisor =  $3a^2 = (24 \ 3)$   
 Partialproducte  $\left\{ \begin{array}{l} 3a^2b = 145 \ 8 \\ 3ab^2 = 9 \ 72 \\ b^3 = 216 \end{array} \right.$

Summe = 155 736

abgezogen von obigem Rest geht auf.

3. Die  $\sqrt[3]{}$  34965783 zu finden.

Die Wurzel wird 3 Ziffern haben, weil die Zahl 3 Klassen hat.

a + b

$$\begin{array}{r}
 \phantom{a^3 = 27} \phantom{34} | 965 | 783 | | 3 \phantom{2} \phantom{7} = \text{Wurzel} \\
 \phantom{a^3 = 27} \phantom{34} | \phantom{965} | \phantom{783} | | \phantom{3} \phantom{2} \phantom{7} \\
 \hline
 a^3 = 27 | \\
 \hline
 \text{Rest und 2te Klasse} = 7 \ 965 \\
 \text{Divisor } 3a^2 = (2 \ 7) \\
 \left. \begin{array}{l} 3a^2b = 5 \ 4 \\ 3ab^2 = \phantom{5} \ 36 \\ b^3 = \phantom{5} \phantom{36} \phantom{8} \end{array} \right\} \text{Partialpr.} \\
 \hline
 \text{Summe} = 5 \ 768
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{Rest und 3te Klasse } 2 \ 197 \ 783 \\
 \text{Divis.} = 3a^2 = 3 \cdot 32^2 = (307 \ 2) \text{ denn } a = 32 \\
 3a^2b = 2150 \ 4 \\
 3ab^2 = \phantom{2150} \ 47 \ 04 \\
 b^3 = \phantom{2150} \phantom{47} \ 343 \\
 \hline
 \text{Summe} = 2 \ 197 \ 783
 \end{array}$$

abgezogen vom Rest der 2ten und 3ten Klasse = 0.

§. 107. Wenn die Zahl keine wirkliche Kubikzahl ist, so bleibt endlich ein Rest, an den man so viele Klassen von Nullen hängt, als man Decimalstellen in der Wurzel haben will.

3. B.  $\sqrt[3]{636059}$  zu finden. Die Wurzel kann nur zwei ganze Zahlen haben.

$$\begin{array}{r}
 \phantom{a^3 = 512} \phantom{636} | 059 | | 8 \ 6 \\
 \phantom{a^3 = 512} \phantom{636} | \phantom{059} | | \phantom{8} \phantom{6} \\
 \hline
 a^3 = 512 | \\
 \hline
 \phantom{a^3 = 512} \phantom{636} | 124 \ 059 \\
 \text{Divisor} = 3a^2 = (19 \ 2) \\
 \left. \begin{array}{l} 3a^2b = 115 \ 2 \\ 3ab^2 = \phantom{115} \ 8 \ 64 \\ b^3 = \phantom{115} \phantom{8} \ 216 \end{array} \right\} \\
 \hline
 \text{Summe } 124 \ 056 \\
 \hline
 \text{Rest} = \phantom{124} \phantom{056} \phantom{3}
 \end{array}$$

Weil hier der Rest sehr gering ist, so könnte man sich mit der gefundenen Wurzel 86 begnügen, denn  $86 \cdot 86 \cdot 86 = 636056$ . Allein verlangt man mehr Schärfe, so müssen dem Reste 3 mehrere Klassen Nullen angehängt werden. Wir wollen 4 Klassen anhängen, um noch 4 Decimal-

malstellen zu bekommen. Die Fortsetzung des Exempels sieht also aus:

..... || 86,0001 = Wurzel.

Rest u. neue Kl. = 3000

$$a = 86, 3a^2 = (22188) \quad \text{Da die Division nicht angeht, so wird 0 in den Quotienten gesetzt, und eine neue Klasse Nullen angehängt.}$$


---


$$3000000$$

$$a = 860, 3a^2 = (2218800) \quad \text{Die Division geht noch nicht, daher 0 in den Quotienten und 3 Nullen zum Rest.}$$


---


$$30000\ 00000$$

$$a = 8600, 3a^2 = (221880\ 000) \quad \text{wie vorher verfahren.}$$


---


$$30000\ 000\ 00000$$

$$a = 86000, 3a^2 = 22188\ 000\ 000) :: \text{ hier geht die Division an.}$$

$$b = 1, \quad \left\{ \begin{array}{l} 3a^2b = 22188\ 000\ 000 :: \\ 3ab^2 = 25\ 8000: \\ b^3 = 1 \end{array} \right.$$


---


$$\text{Summe} = 22188\ 025\ 80001$$


---


$$\text{Rest} = 7811\ 974\ 19999$$

Hängt man noch eine Klasse Nullen an, und führe fort, so wäre  $a = 860001$ , und  $b = 3$ ; dann ist die Wurzel  $= 86,00013 \dots$

§. 108. Soll die  $\sqrt[3]{}$  aus einer Zahl mit einem Decimalbrüche gezogen werden, so theilt man nur die Ganze in Klassen, und zieht die Decimalbrüche anstatt der Nullenklassen herunter. Die Wurzel erhält natürlich nur so viel Ganze, als Wurzeltheile sich aus den Ganzen ergeben, oder als die Ganzen Klassen haben; sobald die Decimalbrüche heruntergezogen werden, fangen in der Wurzel auch die Decimalstellen an.

z. B.  $\sqrt[3]{126,52} = 126,520 \mid \mid 5,02 = \text{Wurzel.}$   
 $a^3 = 125$

$$\begin{array}{r} 1520 \\ 3a^2 = (75) \end{array} \quad \text{Die Division geht nicht an.}$$

Nun ist  $a = 50$ , u.  $3a^2 = 152000$   
 $b = 2$ ,  $(7500) ::$

$$\left. \begin{array}{l} 3a^2b = 15000 :: \\ 3ab^2 = 6000 :: \\ b^3 = 8 \end{array} \right\}$$

$$\text{Summe} = 1506008$$

$$\text{Rest} = 13992$$

§. 109. Soll aus einem Decimalbruche die  $\sqrt[3]{}$  gezogen werden, so setzt man in dem Quotienten an die Stelle der Ganzen eine Null. z. B.  $\sqrt[3]{0,004096}$ .

$$0 \mid 004 \mid 096 \mid \mid 0,16 = \text{Wurzel.}$$

suche  $\sqrt[3]{}$  aus 4;  $a^3 = 1$

$$\text{Rest} = 3.096$$

$$3a^2 = (3)$$

$$3a^2b = 18$$

$$3ab^2 = 108$$

$$b^3 = 216$$

$$\text{Summe} = 3096$$

0

§. 110. Die  $\sqrt[3]{}$  aus Brüchen ziehen heißt: sie sowol aus dem Zähler als aus dem Nenner ziehen. z. B.  $\sqrt[3]{\frac{3}{8}}$

$$\sqrt[3]{\frac{3}{8}} = \sqrt[3]{\frac{3}{8}}$$

Soll aber aus dem Zähler oder aus dem Nenner allein die Wurzel gezogen werden, so muß es so angezeigt stehen:

$$\frac{\sqrt[3]{8}}{17} \text{ und } \frac{8}{\sqrt[3]{17}}$$

§. 111. Wenn Buchstabengrößen wirkliche Quadrate oder Kuben sind, so läßt sich auch aus ihnen die Wurzel ziehen. z. B.  $\sqrt[3]{(m^3 + 12m^2 + 48m + 64)}$ .

$$a + b$$

hier ist  $a = m$ , u.  $a^3 = m^3$

$$\begin{array}{r}
 m^3 + 12m^2 + 48m + 64 \quad | \quad m + 4 = \text{Wurz.} \\
 \hline
 \text{Divisor } 3a^2 = (3m^2) \\
 \left. \begin{array}{l} 3a^2b = 12m^2 \\ 3ab^2 = \quad +48m \\ b^3 = \quad \quad +64 \end{array} \right\} \\
 \hline
 \text{Summe } 12m^2 + 48m + 64 \\
 \hline
 \text{Rest} = 0
 \end{array}$$

§. 112. Die Kubikwurzel aus einer Größe kann sowohl Plus als Minus haben, denn der Kubus von einer Plusgröße = +, von einer Minusgröße = -.

Auch aus einer Minusgröße muß sich daher die  $\sqrt[3]{\quad}$  ziehen lassen.  $\sqrt[3]{64} = +4$ ; und  $\sqrt[3]{-64} = -4$ ; denn  $-4 \cdot -4 \cdot -4 = +16 \cdot -4 = -64$ .

§. 113. Die Wurzeln aus der 4ten, 5ten, 6ten Potenz zu ziehen, ist zwar auch möglich, aber sehr weitläufig. Wir werden in den Logarithmen bequeme Mittel finden, aus einer Größe jede verlangte Wurzel zu ziehen.

## V. Gebrauch der Logarithmen.

§. 114. Unter eine geometrische Progression, deren erstes Glied sich mit 1 anfängt, setze eine arithmetische Progression, deren 1stes Glied sich mit Null anfängt, so heißt jedes Glied der letztern der Logarithme des über ihm stehenden Gliedes in der geometrischen Reihe. 3. B.

Geometr. Progr. 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256 u. s. w.  
 Arithmet. Progr. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 u. s. w.

Die Glieder der untern Reihe sind also eigentlich die Exponenten der geometrischen Reihe, deren erstes Glied 1, deren Exponent = 2 ist. So ist 3. B. 6 der Logarithme von 64, und auch die sechste Potenz des Exponenten 2; die