Der Rathgeber bei mathematischen Beschäftigungen

Stöpel, August

Stendal, 1819

VI. Von den Gleichungen.

§. 133. Die nähere Anweisung zum Gebrauch logarithmischer Tafeln ist solchen Werken immer beigefügt; daher beschließen wir diesen Abschnitt.

VI. Von den Gleichungen.

§. 134. Eine Gleichung ist ein doppelter Ausdruck für eine und dieselbe Größe. Zwischen beiden Ausdrücken steht das Gleichheitszeichen. Z. B.

$$3 + 2 = 5$$
$$10 - 8 = 2$$
$$12 = 2 . 6$$
$$3 . 9 = 24 + 3$$
$$\frac{15}{5} = \frac{6 . 2}{4} \text{ u. s. w.}$$

sind 5 Gleichungen, in denen das Wesentlichste darin besteht, daß auf jeder Seite gleiche Größen stehen. Denn $\frac{15}{5} = 3$, und $\frac{6 . 2}{4}$ auch $= 3$.

Ein solcher doppelter Ausdruck einerlei Größe bleibt daher immer eine Gleichung, wenn man auf jeder Seite gleichviel zulegt oder wegnimmt, mit einerlei Zahl multiplicirt oder dividirt, sie zu gleichen Potenzen erhebt, oder beiderseits einerlei Wurzel auszieht.

Wenn $3 + 2 = 5$ eine Gleichung ist, so ist es auch
$3 + 2 + 1 = 5 + 1$, denn auf jeder Seite ist $= 6$.

§. 135. Die Mathematiker unterscheiden Gleichungen vom ersten, zweiten, dritten, vierten Grade, je nachdem die darin vorkommende unbekannte Größe in der ersten, 2ten, 3ten oder 4ten Potenz erscheint.

§. 136. Das Verfahren, die unbekannte Größe in einer Gleichung so abzusondern, daß sie auf der einen Seite allein ist, und auf der andern lauter bekannte Größen, die ihr gleich sind, zu stehen kommen, gründet sich auf die allereinfachsten Regeln der Vernunft, und ist unter

ter dem Namen: **Auflösung der Gleichungen** bekannt.

Man muß bei diesem Geschäft stets dahin sehen, auf jeder Seite gleich große Werthe zu erhalten, weil es sonst keine Gleichung mehr bleiben würde.

Von der Seite, wo sich die unbekannte Größe befindet, schaffe man nach und nach alle bekannten Größen weg, und bringe sie auf die andere Seite, welches dadurch geschieht, daß man sie auf der einen Seite auslöscht und sie mit **entgegengesetztem** Zeichen auf die andere Seite setzt.

So oft man eine Veränderung der Art damit vorgenommen hat, mache man unter die ganze Gleichung einen Strich, wodurch die Übersicht erleichtert wird.

Kömmt die unbekannte Größe auf beiden Seiten vor, so bringe man sie (die gewöhnlich x; y oder z genannt wird) auf einerlei Seite, und sondere sie gehörig ab.

§. 137. Diese vorläufigen Regeln sind einstweilen hinlänglich. An Beispielen wollen wir sie und manche andere näher entwickeln.

1. Es sey $x + 3 = 5$ eine Gleichung,

so ist $x = 5 - 3$, wo die 3 mit entgegengesetztem Zeichen auf die andere Seite gebracht ist

und $x = 2$; denn $5 - 3 = 2$.

2. Es sey $x - 2 = 8$ eine Gleichung;

so ist $x = 8 + 2$, wo die 2 auf der andern Seite $+ 2$ wird.

also $x = 10$, denn $8 + 2$ macht 10.

3. Es sey $48 = x \cdot 2 + 24$

$48 - 24 = x \cdot 2$, wo $+ 24$ auf der andern Seite $- 24$ geworden ist.

$24 = x \cdot 2$, denn $48 - 24$ ist 24

$\frac{24}{2} = x$, wo die multiplicirende 2 auf der andern Seite zum Divisor geworden ist.

$12 = x$, denn $\frac{24}{2} = 12$.

 4. Es

4. Es sey $\frac{x}{5} = 12 + 3$

$x = (12+3) \cdot 5$, wo der Divisor 5 auf der andern Seite multiplicirt.

$x = 15 \cdot 5$, wo die Größe $(12+3)$ in Eine verwandelt ist.

$x = 75$, denn 15 mal $5 = 75$.

§. 138. Auf diese Weise haben wir den Werth von x in Zahlen gefunden, welches der Zweck der Rechnung ist. Mit Buchstabenausdrücken werden wir eben so verfahren, und die bekannten Größen a, b, c, d von den unbekannten absondern müssen.

1. Es sey $a + x - c = b$

$a + x = b + c$, wo c herübergebracht ist.

$x = b + c - a$, wo a herübergebracht ist.

2. Es sey $a \cdot x + b = c$

$ax = c - b$

$x = \frac{c-b}{a}$

3. Es sey $\frac{b}{x} + d = a$

$\frac{b}{x} = a - d$

$b = (a-d) \cdot x$, wo x herübergebr. ist.

$\frac{b}{a-d} = x$, wo $a - d$ fortgeschafft ist.

Die Nenner der Brüche, die in den Gleichungen vorkommen, schafft man dadurch weg, daß man alle Glieder der ganzen Gleichung mit denselben multiplicirt. (Glieder heißen alle Größen, die das Additions- oder Subtractionszeichen haben. Größen, welche durch die Multiplication oder Division mit einander verbunden sind, gelten nur für 1 Glied; daher ist jede Größe ax oder $\frac{x}{c}$, desgleichen jede in eine Klammer eingeschlossene Größe nur als 1 Glied anzusehen. Z. B. $\frac{3x-7}{8}$ oder $(a-b) \cdot c$ wird nur für 1 Glied gelten können).

Es sey $\frac{5x+3}{x-1} = 7$ (. $x-1$) multiplicirt.

$5x+3 = 7x-7$ die bekannten Größen auf die eine, und die unbek. auf die andere Seite geb.

$+3+7 = 7x-5x$

$10 = 2x$

$\frac{10}{2} = x$

$5 = x$

Es sey $\frac{x}{3}+\frac{a}{3}-\frac{bd}{4}=c$. Die Nenner nach einander weggeschafft.

(.3

$x+a-\frac{3bd}{4}=3c$

(.4

$4x+4a-3bd=12c$

$4x+4a=12c+3bd$

$4x=12c+3bd-4a$

$x=\frac{12c+3bd-4a}{4}$ wenn wirkl.

$x=3c+\frac{3}{4}bd-a$ mit 4 dividirt wird.

§. 139. Wenn eine Größe in mehrern Gliedern auf einer Seite als ein gemeinschaftlicher Factor erscheint, so setzt man die durch ihn multiplicirten Größen in eine Klammer, und hinter diese den gemeinschaftlichen Factor. Umgekehrt schafft man die Klammer dadurch wieder weg, daß man jedes Glied in derselben mit dem gemeinschaftlichen Factor multiplicirt.

Es

Es sey $\frac{-ax+b}{x-c} = gd - f$

$$(\,.\,x - c)$$

$$-ax + b = gdx - fx - gdc + cf$$

Die ax herüber gebracht.

$$b = gdx + ax - fx - gdc + cf$$

$$b + gdc - cf = gdx + ax - fx$$

$$b + gdc - cf = (gd + a - f).x$$

$$\frac{b + gdc - cf}{gd + a - f} = x$$

Hier ist x gemeinschaftlicher Factor von 3 Größen, die in die Klammer gesetzt werden. Und nun die bekannten Größen in der () weggebracht.

welcher Ausdruck sich auch so schreiben ließe: $\frac{b + (gd - f)c}{gd + a - f}$ denn c ist in 2 Gliedern gemeinschaftlicher Factor.

§. 140. Jede Proportion ist eine Gleichung. Nach den Regeln der Gleichungen behandelt, findet sich jedes der 4 Glieder sehr leicht.

Es sey $a : b = c : d$ eine Proportion, so ist nach §. 78.

$ad = bc$ eine Gleichung, in der sich jedes Glied durch Absonderung finden läßt.

denn $a = \frac{bc}{d}$ deßgleichen $\frac{ad}{c} = b$

und $d = \frac{bc}{a}$ und $\frac{ad}{b} = c$

§. 141. Jedes Formular für irgend eine Größe ist eine Gleichung, welche auf der einen Seite das Formular, auf der andern die Größe enthält. Durch Absonderung läßt sich ein neuer Ausdruck für jede im Formular vorkommende Größe finden. Daher ist die Auflösung der Gleichungen eine dem Mathematiker unentbehrliche Rechnungsart.

§. 142. Oft kommen in einer Gleichung zwei oder mehrere unbekannte Größen vor. Dann muß man aus der

der Aufgabe eben so viel Gleichungen zu ziehen wissen, als unbekannte Größen darinnen sind, wenn eine bestimmte Antwort möglich seyn soll.

Z. B. Die Summe zweier Zahlen x und y beträgt 40; ihr Unterschied 8. Welches sind die Zahlen?

Die beiden Gleichungen sind: $x + y = 40$
ihr Unterschied $x - y = 8$

Eine von den mancherlei Auflösungen, die man kennt, ist folgende überall anwendbare:

Suche aus jeder Gleichung einen Werth für x. Die beiden Werthe von x müssen sich nothwendig selbst gleich seyn, weil $x = x$, und eine neue Gleichung geben, in der nur Eine unbekannte Größe, nämlich y, ist, die sich dann leicht bestimmen läßt.

1ste Gleich. $x + y = 40$ 2te Gleich. $x - y = 8$

Also $x = 40 - y$ Also $x = 8 + y$

neue Gleichung ist $40 - y = 8 + y$

$$40 - 8 = y + y = 2y$$

$$32 = 2y$$

$$16 = y$$

Setzt man den Werth von $y = 16$ in die 1ste Gleichung, so ist

$$x + y = 40$$

$$= x + 16 = 40$$

$$x = 40 - 16$$

$$x = 24$$

Folglich sind die beiden Zahlen $y = 16$, und $x = 24$ gefunden.

Eine bequeme Auflösungsweise, wenn die unbekannten Größen verschiedene Coëfficienten haben, ist auch folgende:

Multiplicire die erste Gleichung mit dem Coëfficienten, den x in der zweiten Gleichung hat, und die zweite Gleichung mit dem Coëfficienten, den x in der ersten hat. Hernach addire oder subtrahire beide Gleichungen, so verschwindet x, und es bleibt nur

Eine

Eine unbekannte Größe darin, nämlich y, deren Werth man dann findet. Z. B. Man sucht 2 Zahlen von folgender Beschaffenheit: das Vierfache der ersten zum Fünffachen der zweiten addirt, macht 23; das Siebenfache der ersten mit dem Zweifachen der andern macht 20. In Zeichen ist dies

$$\left.\begin{array}{l} 4x + 5y = 23 \\ 7x + 2y = 20 \end{array}\right\} \text{Hauptgleichungen.}$$

Multiplicirt man die erste mit 7, die zweite mit 4, so kommt

$$\begin{array}{l} 28x + 35y = 161 \\ 28 \;\; + \;\; 8y = \;\; 80 \text{ subtrahirt} \\ \hline \text{Rest} = 27y = 81 \text{ neue Gleichung.} \\ \hline y = \frac{81}{27} = 3. \end{array}$$

Setzt man nun den Werth von $y = 3$ anstatt y in eine der Hauptgleichungen, so ergiebt sich x.

$$\begin{array}{ll} 4x + 5 \,.\, 3 & = 23 \\ \hline 4x + \;\; 15 & = 23 \\ \hline 4x & = 23 - 15 \\ \hline x & = \frac{8}{4} = 2. \end{array}$$

Hätte man mit den Coëfficienten von y in den Hauptgleichungen dieselben multiplicirt, so wäre y daraus verschwunden, und x in der neuen Gleichung gefunden worden.

§. 143. Wenn 3 unbekannte Größen x, y, z in einer Gleichung vorkommen, so suche man den allgemeinen Werth der einen z. B. x aus der ersten Hauptgleichung, und versetze ihn in die zweite, worin x vorkommt. Dadurch wird x verschwinden. Mit den beiden Größen y und z, die jetzt nur noch da sind, verfahre man, wie im vorigen §. 142.

Z. B. Drei Zahlen sind so beschaffen, daß die Summe der ersten und zweiten, also $x + y = 23$; der ersten und dritten $x + z = 24$; und der zweiten und dritten, $y + z = 25$ macht.

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 23 \\ x + z = 24 \\ y + z = 25 \end{array}\right\}$$ Hauptgleichungen.

Aus der ersten ist $x = 23 - y$. Durch Versetzung dieses Werthes in die zweite Hauptgleichung wird

$23 - y + z = 24$; es ist aber $y + z = 25$

$z - y = 24 - 23$ und $z = 25 - y$

$z \quad = 1 + y$

Die beiden Werthe von z müssen sich gleich seyn, daher

$1 + y = 25 - y$

$y + y = 25 - 1$

$2y = 24$

Also $y = 12$

Nun ist in d. ersten Hauptgleich. $x + y = 23$

also $x + 12 = 23$

$x \quad = 23 - 12 = 11$

Und in der 2ten Hauptgleichung war $x + z = 24$

also $11 + z = 24$

$z = 24 - 11$

$z = 13$

folglich sind die Werthe von x, y und z gefunden worden, nämlich $x = 11$; $y = 12$; $z = 13$.

§. 144. Können aus einer Aufgabe nicht so viel Hauptgleichungen gezogen werden, als unbekannte Größen darin vorkommen, so bleibt die Auflösung zum Theil unbestimmt oder willkührlich. Z. B.

Das Sechsfache einer Zahl soll dem Quadrat einer andern gleich seyn. Wenn x und y diese Zahlen sind, so soll $6x = y^2 = yy$

und $x = \frac{y^2}{6}$

Man setze nun anstatt y welche Zahl man will, so wird immer die Frage beantwortet. Es sey $y = 4$, so ist

$\frac{y^2}{6} = \frac{16}{6} = 2\frac{2}{3} = x$. Wenn $y = 5$; so ist $\frac{y^2}{6} = \frac{25}{6} = 4\frac{1}{6} = x$. In jedem Falle wird nur das Verhältniß $x : y$ gefunden.

§. 145. Zur Übung im Anordnen und Auflösen der Gleichungen wollen wir einige Aufgaben lösen. (Siehe M. Hirsch Sammlung von Beispielen und Aufgaben ...... S. 139.)

1) Jemand hat 2640 Rthlr. und darunter $4\frac{1}{2}$ mal so viel Münze als Courant. Wie viel hatte er von jeder Sorte?

Aufl. Nenne das Courant x

dann ist die Münze $= 4\frac{1}{2}x$

und die Summe $= 5\frac{1}{2}x = \frac{11x}{2} = 2640$ rthl.

$$11x = 5280 \quad (2$$

$$x = \frac{5280}{11}$$

Courant $= x = 480$ rthl.

und die Münze $= 4\frac{1}{2} \cdot 480 = 2160$ rthl.

2) Ich multiplicire eine gewisse Zahl (x) mit 4, und dividire das Product durch 3; da erhielt ich 24. Welche Zahl ist es?

$$\frac{4x}{3} = 24$$

$$4x = 72 \quad (3$$

$x = 18$ war die Zahl.

3) Zu einem bevorstehenden Kriege sollen drei Städte A, B, C ihr Contingent von 594 Mann stellen; die Vertheilung soll nach Verhältniß ihrer Volksmenge geschehen. Wenn nun die Volksmenge von A sich zu der von B, wie $3 : 5$; die Volksmenge von B zu der von C sich wie $8 : 7$ verhält, wie viel Mann muß jede Stadt stellen?

Aufl. Reducire das Verhältniß B : C auf das von A : B und sprich

$$A : B = 3 : 5$$
ferner $B : C = 8 : 7$
d. ist $5 : C = 8 : 7$

Also ist $5 \cdot 7 = 8C = \frac{35}{8} = 4\frac{3}{8} = C.$

Nun hat A $3x$
B $5x$
C $4\frac{3}{8}x$

Summe $12\frac{3}{8}x$ oder $\frac{99x}{8} = 594$ Mann

$$(8$$
$$99x = 4752$$
$$x = \frac{4752}{99} = 48 \text{ Mann.}$$

Aber A giebt $3x$, oder $3 \cdot 48 = 144$ Mann
B — $5x$ — $5 \cdot 48 = 240$ —
C — $4\frac{3}{8}x$ — $4\frac{3}{8} \cdot 48 = 210$ —

Summa 594 Mann.

4) Unter 3 Personen A, B, C sollen 1170 Rthlr. nach Verhältniß ihres Alters vertheilt werden. Nun ist B um den dritten Theil älter, C aber doppelt so alt, als A. Wie viel erhält jede Person?

Aufl. Das Alter von A $= x$
dann ist B $= x + \frac{1}{3}x$
und C $= 2x$

Summe $= 4\frac{1}{3}x$

$$4\frac{1}{3}x = 1170 \text{ Rthlr.}$$
$$\frac{13x}{3} = 1170$$
$$(3$$
$$13x = 3510$$
$$x = \frac{3510}{13} = 270 \text{ Rthlr.} = A,$$

und $270 + \frac{270}{3} = 270 + 90 = 360 = B.$
und $2 \cdot 270 = 540 = C.$

Summe $= 1170$ Rthlr.

5) Die Garnison einer Stadt besteht aus 1250 Mann, theils Cavallerie, theils Infanterie. Jeder Cavallerist bekommt monatlich 5, und jeder Infanterist 3 Rthlr. Wenn nun der monatliche Sold 4150 Rthlr. beträgt, wie viel Cavalleristen und Infanteristen befinden sich darunter?

Aufl. Es sey die Infanterie $= x$; also ihr Sold $= 3x$
und die Cavallerie $= y$; und ihr Sold $= 5y$

Nach der Aufg. ist $\underline{x + y = 1250}$; u. $\underline{3x + 5y = 4150}$ rthl.

der Werth von $x = 1250 - y$; so wie $x = \dfrac{4150 - 5y}{3}$

Folglich ist auch $1250 - y = \dfrac{4150 - 5y}{3}$ $\Big|\,3$

$$3750 - 3y = 4150 - 5y$$
$$5y - 3y = 4150 - 3750$$
$$2y = 400$$
$$y = 200 \text{ Mann Cavall.}$$

Und $x + y \;= 1250$ Mann
d. h. $x + 200 = 1250$
$x \;= 1250 - 200 = 1050$ Mann Infanterie.
(Vergl. §. 142.)

6) Es sollen 3 Zahlen von solcher Beschaffenheit gefunden werden, daß die zweite, durch die erste dividirt, 2 zum Quotienten und 1 für den Rest; hingegen die dritte durch die zweite dividirt 3 zum Quotienten und 3 für den Rest gebe; die Summe dieser 3 Zahlen soll 70 seyn. Welche Zahlen sind es?

Aufl. Wenn die 3 Zahlen x, y, z heißen, so soll

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{y - 1}{x} = 2 \\ \text{und } \dfrac{z - 3}{y} = 3 \\ \text{und } x + y + z = 70 \end{array}\right\} \text{Hauptgleichung.}$$

Aus der ersten ist $y = 2x + 1$
Diesen Werth in die zweite Gleichung gebracht, giebt

$$\frac{z - 3}{2x + 1} = 3 \quad (2x+1$$
$$z - 3 = 6x + 3$$
$$z \quad = 6x + 6$$

Jetzt sind die Werthe von y und z in lauter x gefunden; da nun $x + y + z = 70$, so muß $x = x$

$$y = 2x + 1$$
$$z = 6x + 6$$
$$\text{Also } 70 = 9x + 7$$
$$70 - 7 = 9x$$
$$\tfrac{63}{9} = x$$
$$7 = x$$

folglich $2x + 1 = 2 \cdot 7 + 1 = 15 = y$
und $6x + 6 = 6 \cdot 7 + 6 = 48 = z$.

7) Ich bin jetzt 30, mein Bruder 20 Jahre alt, und folglich ist $3 : 2$ das Verhältniß unsers Alters. Nach wie vielen Jahren wird das Verhältniß $5 : 4$ seyn?

Aufl. Nenne die gesuchten Jahre x, so soll sich verhalten

$x + 30 : x + 20 = 5 : 4$; nach den Regeln der Proportion

ist $(x+30) \cdot 4 = (x+20) \cdot 5$
$$4x + 120 = 5x + 100$$
$$120 - 100 = 5x - 4x$$
$$20 = x, \text{ also nach 20 Jahren.}$$

8) In einer zahlreichen Gesellschaft befanden sich anfangs dreimal so viel Herren als Frauen; später aber, als 8 Männer mit ihren Frauen weggingen, wurde das Verhältniß der beiden Geschlechter noch ungleicher; es blieben nämlich gar noch 5 mal so viel Herren als Frauen. Aus wie viel Personen bestand die Gesellschaft im Anfange?

Aufl.

Aufl. Nenne die Zahl der Frauen x, so sind vor der Entfernung der 16 Personen x . 3 die Herren; nach ihrer Entfernung aber ist das Verhältniß

$$3x - 8 : x - 8 = 5 : 1$$

und $$3x - 8 = (x - 8) \cdot 5$$

$$3x - 8 = 5x - 40$$

$40 - 8 = 5x - 3x$, d. h. $32 = 2x$, und $16 = x$ = Frauen, und $3 \cdot 16 = 48$ Herren, in allem 64 Personen.

9) An einem vollen Weinfasse befinden sich 3 Spundlöcher von verschiedener Größe; durch das erste könnte der Wein in 2, durch das zweite in 3, und durch das dritte in 4 Stunden abgezapft werden. Wie viel Zeit wird zur Ausleerung erfordert, wenn alle 3 Spundlöcher zugleich geöffnet werden?

Aufl. Es heiße diese Zeit x Stunden, so läuft

		12 Generalnenner.
das 1ste Spundloch	$\frac{x}{2}$	$6x$
2te —	$\frac{x}{3}$	$4x$
3te —	$\frac{x}{4}$	$3x$

Summe $= 13x$ in 12 Stunden

$x = \frac{12}{13}$ St. $= 55\frac{5}{13}$ Minuten.

Anmerk. Man schließe: Wenn das erste Spundloch allein läuft, so leert es das Faß in 12 Stunden 6 mal; das zweite aber nur 4 mal, und das dritte 3 mal; also 13 mal in 12 Stunden (wenn alle Löcher laufen), wie lange Zeit ist zu einem einmaligen Leeren erforderlich?

Allgemein heiße die Zeit des ersten Spundlochs a; des 2ten = b; des 3ten = c, so findet man die Zeit, in welcher alle 3 Löcher das Faß leeren, in allgemeinen Ausdrücken:

abc = Generalnenner.

$$\begin{array}{c|l} \frac{x}{a} & bcx \\ \frac{x}{b} & acx \\ \frac{x}{c} & abx \\ \hline \end{array}$$

Summe $(bc + ac + ab)\,x$

Gleichung.

$$(bc + ac + ab)\,x = abc$$

$$x = \frac{abc}{bc+ac+ab}$$

§. 146. Aus diesen 9 Beispielen geht hervor, daß es zum Anordnen der Gleichung öfters mancherlei Vorbereitungen bedarf, die in jedem besondern Falle der Beurtheilung und dem Scharfblick des Rechners überlassen bleiben; aber man wird auch mit Vergnügen bemerken, daß die Gleichungen ein weiteres Feld, als jede andere Rechnungsart, und eigentlich alle Rechnungsarten mit umfassen. Nach einigen Schriftstellern ist die Algebra eine Wissenschaft, eine unbekannte Größe durch Gleichungen zu finden.

§. 147. Gleichungen vom zweiten Grade, oder quadratische Gleichungen heißen solche, in denen x oder die unbekannte Größe in der 2ten Potenz, x^2, ein oder etliche Mal vorkömmt. Man theilt sie in reine, und unreine quadratische Gleichungen.

Reine quadratische Gleichungen sind es, wenn x^2 nur allein auf einer Seite abgesondert bleibt. Z. B.

$$ax^2 = b$$

$$x^2 = \frac{b}{a}$$

beiderseits $\sqrt{}$ ausgezogen.

$$x = \sqrt{\frac{b}{a}}$$

wobei also die unbekannte Größe x abgesondert, und beiderseits die $\sqrt{}$ ausgezogen wird, um den Werth von x zu haben.

Unreine quadratische Gleichungen sind

Die-

diejenigen, worin außer x^2 auch noch x mit einem bekannten Coëfficienten vorkommt; als $x^2 + 6x = 27$.

§. 148. Die Gleichung mag beschaffen seyn, wie sie will, so lassen sich ihre Glieder so ordnen, daß x^2 und x bekannte Coëfficienten bekommen, und die ganze Gleichung auf Null gebracht werden kann.

Z. B. $3x^2 + 6cx - x = x^2 + 5ax - c + dn$

Hier können alle Glieder auf eine Seite gebracht werden; auf die leere Seite schreibt man Null. Dann wird obige Gleichung

$$3x^2 - x^2 + 6cx - 5ax - x + c - dn = 0$$

einfacher geordnet: $2x^2 + (6c - 5a - 1) . x + c - dn = 0$

Die bekannte Größe bei x^2 (die 2) wollen wir allgemein a; die bei x $(6c - 5a - 1)$, welche sich allemal in Eine Zahl verwandeln läßt, wollen wir $= b$; und endlich die bekannte Größe $(c - dn)$ hinter x wollen wir $= q$ nennen. Dann haben wir eine Gleichung, welche alle unreine quadratische Gleichungen allgemein vorstellt, a, b und q mögen Größen seyn, wie sie wollen.

$$ax^2 + bx + q = 0, \text{ oder } ax^2 - bx - q = 0.$$

ax^2 muß stets das Pluszeichen haben, weil sonst $\sqrt{}$ unmöglich wäre; hat es im Verfolg der Rechnung etwa Minus bekommen, so bringe man es auf die andere Seite, wo es dann + erhält. — Die Wurzel kann bekanntlich beide Zeichen haben.

§. 149. Ehe wir zur Auflösung der unreinen quadratischen Gleichungen schreiten, wollen wir noch einige Exempel von reinen quadratischen Gleichungen geben.

1) Man sucht eine Zahl, deren Hälfte mit ihrem vierten Theil multiplicirt, und alsdann von diesem Product 10 abgezogen, 152 zum letzten Facit giebt.

Aufl. Die Zahl sey x, so ist ihre Hälfte $= \frac{x}{2}$, und ihr Viertel $= \frac{x}{4}$, und nach der Bedingung

$$\left(\frac{x}{2} \cdot \frac{x}{4}\right) - 10 = 152$$

$$\frac{x^2}{8} - 10 = 152$$

$$\frac{x^2}{8} = 152 + 10 = 162 \quad (8$$

$$x^2 = 1296$$

auf beid. Seit. $\sqrt{}$ ausgez. $= x = \sqrt{1296}$

$x = 36 =$ der gesuchten Zahl.

2) Es wird eine Zahl x von der Beschaffenheit gesucht, daß, wenn man dieselbe erst zu 94 addirt $(x + 94)$, hernach auch von 94 subtrahirt $(94 - x)$, und diesen Rest mit jener Summe multiplicirt $(x + 94) \cdot (94 - x)$, das Product 8512 sey. Welche Zahl ist es?

$$\begin{array}{l} x + 94 \\ 94 - x \end{array} \Big\} \text{ multiplicirt}$$

$$\begin{array}{l} -x^2 - 94x \\ 8836 + 94x \end{array}$$

Product $= -x^2 + 8836$, welches $= 8512$ seyn soll.

$-x^2$ auf die and. Seite gebr., dam. es $+x^2$ werde $8836 - 8512 = x^2$

$$324 = x^2$$

$$\sqrt{324} = x$$

gesuchte Zahl $= 18 = x$

3) Ein gewisses Capital (x) steht zu 4 Procent auf Zinsen; multiplicirt man das Capital mit den 5monatlichen Zinsen desselben, so erhält man $117041\frac{2}{3}$ rhl. Was für ein Capital ist es?

Aufl. Schließe: 100 Rthlr. : 4 Rtlr. $=$ x Rtlr. : $\frac{4x}{100}$ jährliche Zinsen;

und 12 Monat : $\frac{4x}{100} =$ 5 Monat : $\frac{20x}{1200}$ Rthlr. 5 monatliche Zinsen.; damit das Capital x multipliplicirt giebt $\frac{20xx}{1200}$ oder einfacher $= \frac{x^2}{60}$, welches $= 117041\frac{2}{3}$ seyn soll.

$$\text{Gleichung } \frac{x^2}{60} = 117041\tfrac{2}{3}$$

$$x^2 = 7022500 \quad (60$$

$$x = \sqrt{7022500}$$

$$x = 2650 \text{ Rthlr. Capital.}$$

4) Ein Cylinder ist 20 Zoll lang und faßt 1004,8 Kubikzoll; wie groß ist der Halbmesser ($= r$) seiner Grundfläche?

In der Körpermessung findet man für den Inhalt eines Cylinders das Formular: $r^2\, p\, .\, h = J$, wobei r Radius, p die beständige Zahl 3,14; und h die Höhe oder Länge bedeutet. Folglich wird

$$r^2\, p\, .\, h = J = \text{Inhalt}$$

$$= r^2 . 3{,}14 . 20 = 1004{,}8 \quad \text{nun } r^2 \text{ abgesond.}$$

$$r^2 = \frac{1004{,}8}{3{,}14 . 20} = \frac{1004{,}8}{62{,}8}$$

$$r^2 = 16$$

$$r \text{ oder Halbmesser} = \sqrt{16} = 4 \text{ Zoll.}$$

§. 150. Jede unreine quadratische Gleichung muß sich so ordnen lassen, daß sie endlich folgende Gestalt hat:

$$x^2 + px = c, \text{ oder } x^2 - px = c$$

wobei p und c bekannte Größen sind. Siehe §. 148.

Die Größe $x^2 + px$ ist aber kein vollständiges Quadrat, denn wenn man $a + b$ ins Quadrat erhebt, so bekommt man $a^2 + 2ab + b^2$; also fehlt auch an dem Quadrat in der Gleichung der dritte Theil, nämlich b^2, den man aus $a^2 + 2ab$ dadurch gefunden hätte, daß man das, was sich im zweiten Giede außer a befindet ($2b$), halbirte (b) und quadrirte (b^2) und hinzufügte, wodurch erst ein wirkliches Quadrat wird, nämlich

$$a^2 + 2ab + b^2$$

$$\text{oder } a^2 + 2ba + b^2$$

Die

die 2b ist Coëfficient von a, und dasjenige, was in unserer Gleichung p ist. Daher können wir nun das unvollständige Quadrat $x^2 + px$ dadurch vollständig machen, daß wir den Coëfficienten von x, nämlich p, halbiren, quadriren und zu $x^2 + px$ addiren. Die Wurzel muß dann seyn $x + \frac{p}{2}$. Der halbirte und quadrirte Coëfficient p wird in der Gleichung auch auf der andern Seite, wo die bekannte Größe c steht, addirt werden müssen, wenn es eine Gleichung bleiben soll. Das Quadrat von $\frac{p}{2}$ ist $= \frac{p}{2} \cdot \frac{p}{2} = \frac{p^2}{4}$ oder $\frac{1}{4}p^2$, und die Gleichung sieht nun also aus:

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} = c + \frac{p^2}{4}$$

Die Wurzel auf der Seite, wo sich x^2 befindet, wissen wir, sie ist $= x + \frac{1}{2}p$, und da auf der andern lauter bekannte Größen sind, die sich in eine einzige bringen lassen, so wird man auch da die $\sqrt{}$ ausziehen können. Dann ist

$$x + \tfrac{1}{2}p = \sqrt{\left(c + \frac{p^2}{4}\right)}$$

$$\text{folglich } x = \sqrt{\left(c + \frac{p^2}{4}\right)} - \tfrac{1}{2}p$$

§. 151. Die Auflösung der unreinen quadratischen Gleichungen ist daher in folgenden Regeln enthalten:

1. Ordne die Gleichung zur Form $x^2 + px = c$
   oder $x^2 - px = c$.

2. Halbire p und quadrire es, so wird es $\frac{p^2}{4}$.

3. Addire dies $\frac{p^2}{4}$ auf beiden Seiten der Gleichung:

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} = c + \frac{p^2}{4}.$$

4. Ziehe auf beiden Seiten die Wurzel aus. Sie ist

$$x + \tfrac{1}{2}p = \sqrt{\left(c + \frac{p^2}{4}\right)}.$$

4. Bringe die $\tfrac{1}{2}p$ mit verändertem Zeichen auf die andere Seite, so ist x abgesondert, und

$$x = \sqrt{\left(c + \frac{p^2}{4}\right)} - \tfrac{1}{2}p$$

Wenn die Gleichung folgende Gestalt hat

$$x^2 - px = c, \text{ so ist } \frac{p}{2} = -\frac{p}{2}, \text{ u. } -\frac{p}{2} \cdot -\frac{p}{2} = +\frac{p^2}{4}$$

$$\text{folgl. } x^2 - px + \frac{p^2}{4} = c + \frac{p^2}{4}$$

die $\sqrt{\ }$ ausgezogen

$$\text{und } x - \frac{p}{2} = \sqrt{\left(c + \frac{p^2}{4}\right)}$$

$$\text{endlich } x = \sqrt{\left(c + \frac{p^2}{4}\right)} + \frac{p}{2}$$

§. 152. Wir wollen nicht vergessen, daß jede Quadratwurzel sowol positiv als negativ genommen werden kann. Daher schreibt man auch beide Zeichen vor die Wurzel, und die Umstände bestimmen, welches Zeichen gelten soll.

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(c + \frac{p^2}{4}\right)}$$

$$\text{oder } x = \frac{p}{2} \mp \sqrt{\left(c + \frac{p^2}{4}\right)}$$

§. 153. Zur Übung wollen wir einige Aufgaben lösen.

1. Von zwei Zahlen ist die eine um 6 größer, als die andere; mit einander multiplicirt geben sie 27. Welche Zahlen sind es?

Aufl. Es sey x die kleinere, und x + 6 die größere.

Nach

Nach der Bedingung soll $x \cdot (x+6) = 27$

d. Coëfficienten halbirt, gibt 3, u. $3^2 = 9$ auf beid. Seit. addirt $\left\{ \begin{array}{l} x^2 + 6x = 27 \\ x^2 + 6x + 9 = 27 + 9 = 36 \end{array} \right.$

Wurzel ausgezogen $x + 3 = \sqrt{36} = 6$

$x = 6 - 3$

Da x zwei Werthe haben kann $x = +6 - 3 = +3$

und $x = -6 - 3 = -9$

die beiden Zahlen sind also 3 und 9, welche die verlangten Eigenschaften haben.

2. Wie groß ist x in folgender auf Null gebrachten Gleichung?

$$x^2 - 7x + 3\tfrac{1}{4} = 0$$
$$x^2 - 7x = -3\tfrac{1}{4}$$
$$x^2 - 7x = -\tfrac{13}{4}$$
$$x^2 - 7x = -3{,}25$$

$\frac{7}{2} = 3{,}5$, dessen Quadrat $= 12{,}25$ $\left\} \; x^2 - 7x + 12{,}25 = 12{,}25 - 3{,}25 = 9 \right.$

daraus die $\sqrt{} = x - 3{,}5 = \pm\sqrt{9} = \pm 3$

$x = +3 + 3{,}5 = 6{,}5$

und $-3 + 3{,}5 = 0{,}5$

3. Ein Kaufmann hat zweierlei Thee von verschiedenem Gewicht und Preise. Das Gewicht der erstern Sorte verhält sich zum Gewicht der zweiten Sorte, wie 4 : 3. Das Pfund der erstern kostet halb so viel Groschen, als sie an Pfunden wiegt; das Pfund der zweiten kostet 6 Gr. weniger. Der Betrag des Thee's überhaupt ist 218 Rthlr. 8 Gr. Wie viel wiegt jede Sorte?

Aufl. Es sey die erste Sorte x ℔; die zweite = y ℔; so ist x ℔ : y ℔ = 4 : 3

und $x = \frac{4y}{3}$; oder $y = \frac{3x}{4}$ (Siehe §. 140.)

der Preis der ersten Sorte $= \frac{x}{2}$, ihr ganzer

Werth

Werth $= x \cdot \frac{x}{2} = \frac{x^2}{2}$. Der Preis der zweiten Sorte $= \frac{x}{2} - 6$, ihr ganzer Werth $\left(\frac{x}{2}-6\right) \cdot y$ oder $= \left(\frac{x}{2}-6\right) \cdot \frac{3x}{4} = \frac{3x^2}{8} - \frac{18x}{4}$.

Die Summe beid. Werthe $= \frac{x^2}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{18x}{4} = 5240$ Gr. $(\cdot 2$

$$x^2 + \frac{3x^2}{4} - 9x = 10480 \text{ Gr.} \quad (\cdot 4$$

$$4x^2 + 3x^2 - 36x = 41920$$

$$7x^2 - 36x = 41920 \quad (:7$$

$$x^2 - 5{,}143x = 5988{,}57$$

D.Qudr.v. $\frac{5{,}143}{2}$ add. $= x^2 - 5{,}143x + 6{,}612 = 5988{,}57$
$$+ 6{,}612$$
$$= 5995{,}182$$

aus beiden Seiten die $\sqrt{}$ gez. $x - 2{,}571 = 77{,}429$

$$x = 77{,}429$$
$$+ 2{,}571$$
$$80{,}000 = 80 \text{ ℔.}$$

Da $x = 80$ ℔, so muß, wenn man den oben gefundnen Werth unterlegt, $y = \frac{3x}{4} = 60$ ℔ seyn.

4. Die Summe zweier Zahlen soll 41, und die Summe ihrer Quadrate soll 901 seyn. Was für Zahlen sind es?

Aufl. Die beiden Zahlen mögen x und y seyn, so ist

$x + y = 41$, also $x = 41 - y$
und $x^2 + y^2 = 901$, also $x^2 = 901 - y^2$.

Um

Um für x gleiche Werthe zu bekommen, erhebe man $x = 41 - y$ ins Quadrat. $(41 - y) \cdot (41 - y) = y^2 - 82y + 1681 = x^2$.

Nun ist $y^2 - 82y + 1681 = 901 - y^2$ besser geordnet.

$2y^2 - 82y = 901 - 1681$

$2y^2 - 82y = - 780$ (:2

gehör. Form $y^2 - 41y = - 390$.

$\frac{41^2}{4}$ addirt $y^2 - 41y + 420{,}25 = - 390 + 420{,}25$

$\sqrt{}$ ausgez. $y - 20{,}5 = \sqrt{30{,}25}$

$y - 20{,}5 = 5{,}5$

$y = 5{,}5 + 20{,}5 = 26$, der einen Zahl.

Aber $x + y = 41$
und $x + 26 = 41$

$x = 41 - 26 = 15$, der and. gesucht. Zahl.

Z. 154. Am meisten macht die Anordnung der Gleichung dem Anfänger zu schaffen; indessen erlangt er durch eigene Versuche und Nachdenken bald eine Fertigkeit, die ihm das größte Vergnügen gewährt. Dem Wißbegierigen empfehlen wir

M. Hirsch Sammlung von Beispielen, Formeln und Aufgaben aus der Buchstabenrechnung und Algebra.

Dieses treffliche Werkchen enthält fast nur Aufgaben und Antworten, ohne Ausrechnung. Viele der hier mitgetheilten Aufgaben sind daraus entlehnt, und nur die Ausrechnungen, worauf es hier hauptsächlich ankam, von mir hinzugefügt.

§. 155. Eine Gleichung, worin die gesuchte Größe endlich in der dritten Potenz erscheint, als x^3, heißt eine kubische Gleichung. Z. B.

$$x^3 + ax^2 + bx = c; \text{ oder } \frac{x^3 p}{6} = c.$$

Wenn

Wenn die x^3 nur allein darin vorkommt, so heißt die Gleichung eine reine kubische Gleichung, als $\frac{x^3p}{6} = c$; unrein oder vollständig heißt sie, wenn x auch noch in der zweiten und ersten Potenz mit einer bekannten Größe darin vorkommt, als $x^3 + ax^2 + bx - c = 0$.

§. 156. Die Auflösung der reinen kubischen Gleichung besteht darin: Sondere x^3 auf einer Seite ab, bringe alle bekannte Größen auf die andere Seite, verwandle sie in Eine, und ziehe auf beiden Seiten die $\sqrt[3]{}$ aus, so erhält man x und seinen Werth. Die Wurzel kann eine Plus- oder Minusgröße seyn, aber niemals beide Zeichen zugleich haben, wie die quadratische Wurzel.

1. Es sey $\frac{x^3p}{6} = c$

$$\begin{aligned} x^3p &= 6c \quad (.6 \\ x^3 &= \frac{6c}{p} \\ \sqrt[3]{}\quad x &= \sqrt[3]{\frac{6c}{p}} \end{aligned}$$

2. Einer sprach: ich multiplicirte eine Zahl (x) mit dem halben Quadrate derselben $\left(\frac{x^2}{2}\right)$ und erhielt die Zahl 256. Welche Zahl war es?

Aufl. Nach der Aufgabe ist $x \cdot \frac{x^2}{2} = 256$.

$$\begin{aligned} \text{Gleichung}\quad x \cdot \frac{x^2}{2} &= 256 \\ \frac{x^3}{2} &= 256 \quad (2 \\ x^3 &= 512 \\ \sqrt[3]{}\quad x &= \sqrt[3]{512} \\ x &= 8 \end{aligned}$$

3. Aus dem Inhalt einer Kugel ihren Durchmesser zu finden.

Es sey der Inhalt $= J = 1000$; der Durchmesser $= D$.

Die Geometrie giebt für den Inhalt der Kugel das Formular:

$\frac{D^3 p}{6} = J$, worin $p = 3{,}14$ bedeutet.

$$\frac{D^3 p}{6} = J \quad (.6$$

$$D^3 p = 6J$$

$$D^3 = \frac{6J}{p}$$

$$D = \sqrt[3]{\frac{6J}{p}} \text{ das ist } \sqrt[3]{\left(\frac{6.1000}{3{,}14}\right)} = \sqrt[3]{\frac{6000}{3{,}14}}$$

$= 12{,}41.$

§. 157. Mehr Schwierigkeiten hat die Auflösung der vollständigen kubischen Gleichungen, worin x^3, x^2 und x vorkommt.

Man ordne die Gleichung so einfach wie möglich, schaffe alle Glieder auf die eine Seite, und setze auf die andere Null.

Jede vollständige kubische Gleichung hat 3 Wurzeln, die zum Theil positiv, zum Theil negativ seyn können. Alle drei Wurzeln heißen x, folglich hat x einen dreifachen Werth.

Ob die Wurzeln positiv, oder negativ sind, sieht man vorläufig an den 4 Gliedern einer auf Null gebrachten kubischen Gleichung durch folgende Kennzeichen:

1. Wenn alle Glieder der auf Null gebrachten Gleichung positiv sind, so sind alle Wurzeln negativ.
2. Wenn die Zeichen wechseln, so sind alle Wurzeln positiv.
3. Wenn mehrere gleiche Zeichen der Glieder auf einander folgen, so sind auch mehrere negative Wurzeln darin.

§. 158. Das 4te oder letzte Glied einer auf Null gebrachten Gleichung ist das Product aus allen 3 Wurzeln. Auf diesen Umstand gründet sich die Auflösung der kubischen Gleichungen.

Man

Man zerfälle nämlich das letzte Glied in seine Factoren, setze sie positiv oder negativ, je nachdem es aus den Zeichen ersichtlich ist, und einen nach dem andern anstatt x in die Gleichung. Wenn sie dadurch Null wird, so ist der für x gesetzte Factor eine Wurzel. Geschieht es bei keinem, so ist keine rationale Wurzel darin. Wenn man aber erst eine Wurzel hat, so lassen sich die andern dadurch finden, daß man die Gleichung mit der Wurzel dividirt. Man erhält im Quotienten eine quadratische Gleichung, durch deren Auflösung man die andern beiden Wurzeln findet. Aus der Natur der Aufgabe ergiebt sich, ob eine, oder alle drei Wurzeln möglich sind.

§. 159. Das Gesagte wollen wir an 2 Beispielen erläutern.

1. Ein Kapitalist giebt 10000 Rthlr. auf Zinsen, und schlägt die Zinsen jährlich zum Kapital. Am Ende des dritten Jahres findet er sein Kapital $11576\frac{1}{4}$ Rthlr. angewachsen. Wie viel Procent Zinsen nahm er jährlich?

Auflösung. Nenne die Zinsen x, so findet man dieselben fürs 1ste Jahr durch die Proportion:

$$100 \text{ Rhlr.} : x \text{ Rhlr.} = 10000 \text{ Rhlr.} : \frac{10000x}{100} = 100x \text{ Zinsen.}$$

Kapital und Zinsen betragen nach 1 Jahr $= 100x + 10000$ Rthlr.

Ferner $100 \text{ Rthlr.} : x \text{ Rthlr.} = 100x + 10000 \text{ Rthlr.}$

$$: \frac{100x^2 + 10000x}{100} = x^2 + 100x \text{ Zinsen des 2ten Jahres.}$$

Kapital und Zinsen am Ende des 1sten Jahres waren $= 100x + 10000$ Rthlr.

Zinsen des 2ten Jahres $= x^2 + 100x$

Kapit. u. Zins. n. 2 Jahren $= x^2 + 200x + 10000$ Rthlr.

Ferner

$$100 \text{ lr.} : x \text{ rl.} = x^2 + 200x + 10000 \text{ rl.} : \frac{x^3 + 200x^2 + 10000x}{100}$$

$$= \frac{x^3}{100} + 2x^2 + 100x \text{ Zinsen des 3ten Jahres.}$$

$x^2 + 200x + 10000$ rl. Kapital dazu

$$\frac{x^3}{100} + 3x^2 + 300x + 10000 \text{ rl. ganzes Kapital, wel-}$$

ches nach der Aufgabe $= 11576\frac{1}{4}$ Rthlr. werth seyn soll. Das giebt die Gleichung

$$\frac{x^3}{100}+3x^2 + 300x + 10000 \text{ rl.} = 11576\tfrac{1}{4}\text{ rl.} \quad (.100$$

$$x^3 + 300x^2 + 30000x + 1000000 = 1157625$$

$$x^3 + 300x^2 + 30000x = 1157625 - 1000000 = 157625$$

$$x^3 + 300x^2 + 30000x - 157625 = 0$$

Die Zahl 157625 ist nur durch 5 theilbar, daher muß 5 eine Wurzel seyn. Setzt man nun 5 anstatt x,

$$\begin{array}{rl} \text{so ist } x^3 = & 125 \\ 300x^2 = & 7500 \\ 30000x = & 150000 \\ \hline \text{Summe} = & 157625 \\ \text{davon ab} & 157625 \\ \hline \end{array}$$

die Gleichung wird $= 0$, also ist $x = 5$, und das Kapital zu 5 Procent ausgeliehen worden. —

2. Es sey die Gleichung aus folgenden Angaben zu ordnen: zum Kubus einer Zahl wurde das vierfache Quadrat derselben addirt und die vierfache Zahl selbst subtrahirt; der Rest betrug 16. Welche Zahl war es:

Aufl. Nenne die Zahl x, so ist der Kubus $= x^3$; das vierfache Quadrat $= 4x^2$; die vierfache Zahl $= 4x$. Die Gleichung

$$x^3 + 4x^2 - 4x = 16$$

$$x^3 + 4x^2 - 4x - 16 = 0.$$

Da hier eine Folge gleicher Zeichen und eine Abwechselung statt findet, so werden die meisten Wurzeln negativ, und eine positiv seyn. Nun läßt sich 16 zerlegen in 2, 4, 8, 16, 1

Wir wollen, da 2 negative Wurzeln sind, die 2 negativ, also -2 anstatt x setzen.

$$\begin{array}{rl} \text{Dann ist } x^3 = & -2^3 = -8 \\ 4x^2 = & 4 \cdot 2^2 = +16 \\ -4x = & -4 \cdot -2 = +8 \\ -16 = & -16 \\ \hline \text{Summe} = & 0. \end{array}$$

Die -2 ist also eine Wurzel.

Nimmt

Nimmt man $x = -4$, so wird die Gleichung ebenfalls Null; allein nimmt man $x = 8$, so bleibt endlich -240. Daher wolien wir die ganze Gleichung mit der auf Null gebrachten Wurzel dividiren. Wenn $x = -2$, so ist $x + 2 = 0$.

Quotient.

$$
\begin{array}{l}
x+2 : x^3 + 4x^2 - 4x - 16 \,\|\, x^2 + 2x - 8 = 0 \\
\quad x^3 + 2x^2 \\
\hline
\quad\quad 2x^2 - 4x - 16 \\
\quad\quad 2x^2 + 4x \\
\hline
\quad\quad\quad -8x - 16 \\
\quad\quad\quad -8x - 16 \\
\hline
\end{array}
$$

In dem Quotienten, welcher eine quadratische Gleichung ist, hat x die andern beiden Wurzelwerthe. Wir lösen sie auf.

$$
\begin{array}{lll}
 & x^2 + 2x - 8 = 0 & \\
\hline
 & x^2 + 2x = 8 & \\
\hline
\frac{2}{2} = 1 \text{ quadrirt.} & x^2 + 2x + 1 = 8 + 1 = 9 & \\
\hline
\sqrt{\ } \text{ ausgezogen} & x + 1 = \sqrt{9} = 3 & \\
\hline
 & x = \pm 3 - 1 \text{ d. h.} = +2 & \\
 & \text{und } -4. &
\end{array}
$$

Die 3 Wurzeln sind demnach -2, $+2$ und -4.

§. 160. Wir übergehen die mannichfachen Kunstgriffe, deren man sich bedient, die vollständigen kubischen Gleichungen zu lösen, wenn die Wurzeln irrational sind, und durch Näherung gefunden werden müssen, da sie in diesem Buche nicht vorkommen, und verweisen den Wißbegierigen auf

Burja's selbstlernenden Algebraisten ꝛc. und

Häseler's Anfangsgründe der Arithmetik und Algebra, welche schätzbare Werke dieses Thema sehr faßlich abhandeln.
