Der Rathgeber bei mathematischen Beschäftigungen

Stöpel, August

Stendal, 1819

§. 134-141 mit einer unbekannten Größe;

§. 133. Die nähere Anweisung zum Gebrauch logarithmischer Tafeln ist solchen Werken immer beigefügt; daher beschließen wir diesen Abschnitt.

VI. Von den Gleichungen.

§. 134. Eine Gleichung ist ein doppelter Ausdruck für eine und dieselbe Größe. Zwischen beiden Ausdrücken steht das Gleichheitszeichen. Z. B.

$$3 + 2 = 5$$
$$10 - 8 = 2$$
$$12 = 2 . 6$$
$$3 . 9 = 24 + 3$$
$$\frac{15}{5} = \frac{6 . 2}{4} \text{ u. s. w.}$$

sind 5 Gleichungen, in denen das Wesentlichste darin besteht, daß auf jeder Seite gleiche Größen stehen. Denn $\frac{15}{5} = 3$, und $\frac{6 . 2}{4}$ auch $= 3$.

Ein solcher doppelter Ausdruck einerlei Größe bleibt daher immer eine Gleichung, wenn man auf jeder Seite gleichviel zulegt oder wegnimmt, mit einerlei Zahl multiplicirt oder dividirt, sie zu gleichen Potenzen erhebt, oder beiderseits einerlei Wurzel auszieht.

Wenn $3 + 2 = 5$ eine Gleichung ist, so ist es auch
$3 + 2 + 1 = 5 + 1$, denn auf jeder Seite ist $= 6$.

§. 135. Die Mathematiker unterscheiden Gleichungen vom ersten, zweiten, dritten, vierten Grade, je nachdem die darin vorkommende unbekannte Größe in der ersten, 2ten, 3ten oder 4ten Potenz erscheint.

§. 136. Das Verfahren, die unbekannte Größe in einer Gleichung so abzusondern, daß sie auf der einen Seite allein ist, und auf der andern lauter bekannte Größen, die ihr gleich sind, zu stehen kommen, gründet sich auf die allereinfachsten Regeln der Vernunft, und ist unter dem Namen: **Auflösung der Gleichungen** bekannt.

Man muß bei diesem Geschäft stets dahin sehen, auf jeder Seite gleich große Werthe zu erhalten, weil es sonst keine Gleichung mehr bleiben würde.

Von der Seite, wo sich die unbekannte Größe befindet, schaffe man nach und nach alle bekannten Größen weg, und bringe sie auf die andere Seite, welches dadurch geschieht, daß man sie auf der einen Seite auslöscht und sie mit **entgegengesetztem** Zeichen auf die andere Seite setzt.

So oft man eine Veränderung der Art damit vorgenommen hat, mache man unter die ganze Gleichung einen Strich, wodurch die Übersicht erleichtert wird.

Kommt die unbekannte Größe auf beiden Seiten vor, so bringe man sie (die gewöhnlich x, y oder z genannt wird) auf einerlei Seite, und sondere sie gehörig ab.

§. 137. Diese vorläufigen Regeln sind einstweilen hinlänglich. An Beispielen wollen wir sie und manche andere näher entwickeln.

1. Es sey $x + 3 = 5$ eine Gleichung,
   so ist $x = 5 - 3$, wo die 3 mit entgegengesetztem Zeichen auf die andere Seite gebracht ist
   und $x = 2$; denn $5 - 3 = 2$.

2. Es sey $x - 2 = 8$ eine Gleichung;
   so ist $x = 8 + 2$, wo die 2 auf der andern Seite $+ 2$ wird.
   also $x = 10$, denn $8 + 2$ macht 10.

3. Es sey $48 = x \cdot 2 + 24$
   $48 - 24 = x \cdot 2$, wo $+ 24$ auf der andern Seite $- 24$ geworden ist.
   $24 = x \cdot 2$, denn $48 - 24$ ist 24
   $\frac{24}{2} = x$, wo die multiplicirende 2 auf der andern Seite zum Divisor geworden ist.
   $12 = x$, denn $\frac{24}{2} = 12$.

4. Es sey $\frac{x}{5} = 12 + 3$

$x = (12+3) \cdot 5$, wo der Divisor 5 auf der andern Seite multiplicirt.

$x = 15 \cdot 5$, wo die Größe $(12 + 3)$ in Eine verwandelt ist.

$x = 75$, denn 15 mal $5 = 75$.

§. 138. Auf diese Weise haben wir den Werth von x in Zahlen gefunden, welches der Zweck der Rechnung ist. Mit Buchstabenausdrücken werden wir eben so verfahren, und die bekannten Größen a, b, c, d von den unbekannten absondern müssen.

1. Es sey $a + x - c = b$

$a + x = b + c$, wo c herübergebracht ist.

$x = b + c - a$, wo a herübergebracht ist.

2. Es sey $a \cdot x + b = c$

$ax = c - b$

$x = \frac{c-b}{a}$

3. Es sey $\frac{b}{x} + d = a$

$\frac{b}{x} = a - d$

$b = (a-d) \cdot x$, wo x herübergebr. ist.

$\frac{b}{a-d} = x$, wo $a - d$ fortgeschafft ist.

Die Nenner der Brüche, die in den Gleichungen vorkommen, schafft man dadurch weg, daß man alle Glieder der ganzen Gleichung mit denselben multiplicirt. (Glieder heißen alle Größen, die das Additions- oder Subtractionszeichen haben. Größen, welche durch die Multiplication oder Division mit einander verbunden sind, gelten nur für 1 Glied; daher ist jede Größe ax oder $\frac{x}{c}$,

dessdesgleichen jede in eine Klammer eingeschlossene Größe nur als 1 Glied anzusehen. Z. B. $\frac{3x-7}{8}$ oder $(a-b).c$ wird nur für 1 Glied gelten können).

Es sey $\frac{5x+3}{x-1} = 7$ (. x — 1) multiplicirt.

$$5x+3 = 7x-7$$ die bekannten Größen auf die eine, und die unbek. auf die andere Seite gebr.

$$+3+7 = 7x-5x$$

$$10 = 2x$$

$$\tfrac{10}{2} = x$$

$$5 = x$$

Es sey $\frac{x}{3}+\frac{a}{3}-\frac{bd}{4}=c.$ Die Nenner nach einander weggeschafft. (.3

$$x+a-\frac{3bd}{4}=3c \quad (.4$$

$$4x+4a-3bd=12c$$

$$4x+4a=12c+3bd$$

$$4x=12c+3bd-4a$$

$$x=\frac{12c+3bd-4a}{4}$$ wenn wirkl.

$$x=3c+\tfrac{3}{4}bd-a$$ mit 4 dividirt wird.

§. 139. Wenn eine Größe in mehrern Gliedern auf einer Seite als ein gemeinschaftlicher Factor erscheint, so setzt man die durch ihn multiplicirten Größen in eine Klammer, und hinter diese den gemeinschaftlichen Factor. Umgekehrt schafft man die Klammer dadurch wieder weg, daß man jedes Glied in derselben mit dem gemeinschaftlichen Factor multiplicirt.

Es

Es sey $\frac{-ax+b}{x-c} = gd - f$

$$\frac{-ax+b}{x-c} = gd-f \quad (.\,x-c$$

$$-ax+b = gdx - fx - gdc + cf$$

$$b = gdx + ax - fx - gdc + cf$$ Die ax herüber gebracht.

$$b + gdc - cf = gdx + ax - fx$$

$$b + gdc - cf = (gd + a - f).x$$

$$\frac{b + gdc - cf}{gd + a - f} = x$$

Hier ist x gemeinschaftlicher Factor von 3 Größen, die in die Klammer gesetzt werden. Und nun die bekannten Größen in der () weggebracht.

welcher Ausdruck sich auch so schreiben ließe: $\frac{b + (gd - f)c}{gd + a - f}$ denn c ist in 2 Gliedern gemeinschaftlicher Factor.

§. 140. Jede Proportion ist eine Gleichung. Nach den Regeln der Gleichungen behandelt, findet sich jedes der 4 Glieder sehr leicht.

Es sey $a : b = c : d$ eine Proportion, so ist nach §. 78.
$ad = bc$ eine Gleichung, in der sich jedes Glied durch Absonderung finden läßt.

denn $a = \frac{bc}{d}$ deßgleichen $\frac{ad}{c} = b$

und $d = \frac{bc}{a}$ und $\frac{ad}{b} = c$

§. 141. Jedes Formular für irgend eine Größe ist eine Gleichung, welche auf der einen Seite das Formular, auf der andern die Größe enthält. Durch Absonderung läßt sich ein neuer Ausdruck für jede im Formular vorkommende Größe finden. Daher ist die Auflösung der Gleichungen eine dem Mathematiker unentbehrliche Rechnungsart.

§. 142. Oft kommen in einer Gleichung zwei oder mehrere unbekannte Größen vor. Dann muß man aus der