# Der Rathgeber bei mathematischen Beschäftigungen

**Stöpel, August**

**Stendal, 1819**

§. 142-146 mit mehreren unbekannten Größen;

urn:nbn:de:hbz:466:1-63556

Es sey $\frac{-ax+b}{x-c} = gd - f$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad} (. \, x - c$$

$$-ax+b = gdx - fx - gdc + cf$$

$$b = gdx + ax - fx - gdc + cf$$ Die ax herüber gebracht.

$$b + gdc - cf = gdx + ax - fx$$

$$b + gdc - cf = (gd + a - f).x$$

$$\frac{b + gdc - cf}{gd + a - f} = x$$

Hier ist x gemeinschaftlicher Factor von 3 Größen, die in die Klammer gesetzt werden. Und nun die bekannten Größen in der () weggebracht.

welcher Ausdruck sich auch so schreiben ließe: $\frac{b + (gd - f)c}{gd + a - f}$
denn c ist in 2 Gliedern gemeinschaftlicher Factor.

§. 140. Jede Proportion ist eine Gleichung. Nach den Regeln der Gleichungen behandelt, findet sich jedes der 4 Glieder sehr leicht.

Es sey $a : b = c : d$ eine Proportion, so ist nach §. 78.
$ad = bc$ eine Gleichung, in der sich jedes Glied durch Absonderung finden läßt.

denn $a = \frac{bc}{d}$ deßgleichen $\frac{ad}{c} = b$

und $d = \frac{bc}{a}$ und $\frac{ad}{b} = c$

§. 141. Jedes Formular für irgend eine Größe ist eine Gleichung, welche auf der einen Seite das Formular, auf der andern die Größe enthält. Durch Absonderung läßt sich ein neuer Ausdruck für jede im Formular vorkommende Größe finden. Daher ist die Auflösung der Gleichungen eine dem Mathematiker unentbehrliche Rechnungsart.

§. 142. Oft kommen in einer Gleichung zwei oder mehrere unbekannte Größen vor. Dann muß man aus

der

der Aufgabe eben so viel Gleichungen zu ziehen wissen, als unbekannte Größen darinnen sind, wenn eine bestimmte Antwort möglich seyn soll.

Z. B. Die Summe zweier Zahlen x und y beträgt 40; ihr Unterschied 8. Welches sind die Zahlen?

Die beiden Gleichungen sind: $x + y = 40$
ihr Unterschied $x - y = 8$.

Eine von den mancherlei Auflösungen, die man kennt, ist folgende überall anwendbare:

Suche aus jeder Gleichung einen Werth für x. Die beiden Werthe von x müssen sich nothwendig selbst gleich seyn, weil $x = x$, und eine neue Gleichung geben, in der nur Eine unbekannte Größe, nämlich y, ist, die sich dann leicht bestimmen läßt.

1ste Gleich. $x + y = 40$ 2te Gleich. $x - y = 8$

Also $x = 40 - y$ Also $x = 8 + y$

neue Gleichung ist $40 - y = 8 + y$

$$40 - 8 = y + y = 2y$$

$$32 = 2y$$

$$16 = y$$

Setzt man den Werth von $y = 16$ in die 1ste Gleichung, so ist

$$x + y = 40$$

$$= x + 16 = 40$$

$$x = 40 - 16$$

$$x = 24$$

Folglich sind die beiden Zahlen $y = 16$, und $x = 24$ gefunden.

Eine bequeme Auflösungsweise, wenn die unbekannten Größen verschiedene Coëfficienten haben, ist auch folgende:

Multiplicire die erste Gleichung mit dem Coëfficienten, den x in der zweiten Gleichung hat, und die zweite Gleichung mit dem Coëfficienten, den x in der ersten hat. Hernach addire oder subtrahire beide Gleichungen, so verschwindet x, und es bleibt nur Eine

Eine unbekannte Größe darin, nämlich y, deren Werth man dann findet. Z. B. Man sucht 2 Zahlen von folgender Beschaffenheit: das Vierfache der ersten zum Fünffachen der zweiten addirt, macht 23; das Siebenfache der ersten mit dem Zweifachen der andern macht 20. In Zeichen ist dies

$$\left.\begin{array}{l} 4x + 5y = 23 \\ 7x + 2y = 20 \end{array}\right\} \text{Hauptgleichungen.}$$

Multiplicirt man die erste mit 7, die zweite mit 4, so kommt

$$28x + 35y = 161$$
$$28 \;+\; 8y = 80 \text{ subtrahirt}$$
$$\text{Rest} = 27y = 81 \text{ neue Gleichung.}$$
$$y = \tfrac{81}{27} = 3.$$

Setzt man nun den Werth von $y = 3$ anstatt y in eine der Hauptgleichungen, so ergiebt sich x.

$$4x + 5 \,.\, 3 = 23$$
$$4x + 15 = 23$$
$$4x = 23 - 15$$
$$x = \tfrac{8}{4} = 2.$$

Hätte man mit den Coëfficienten von y in den Hauptgleichungen dieselben multiplicirt, so wäre y daraus verschwunden, und x in der neuen Gleichung gefunden worden.

§. 143. Wenn 3 unbekannte Größen x, y, z in einer Gleichung vorkommen, so suche man den allgemeinen Werth der einen z. B. x aus der ersten Hauptgleichung, und versetze ihn in die zweite, worin x vorkommt. Dadurch wird x verschwinden. Mit den beiden Größen y und z, die jetzt nur noch da sind, verfahre man, wie im vorigen §. 142.

Z. B. Drei Zahlen sind so beschaffen, daß die Summe der ersten und zweiten, also $x + y = 23$; der ersten und dritten $x + z = 24$; und der zweiten und dritten, $y + z = 25$ macht.

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 23 \\ x + z = 24 \\ y + z = 25 \end{array}\right\}$$ Hauptgleichungen.

Aus der ersten ist $x = 23 - y$. Durch Versetzung dieses Werthes in die zweite Hauptgleichung wird

$$\begin{array}{ll} 23 - y + z = 24; & \text{es ist aber } y + z = 25 \\ z - y = 24 - 23 & \text{und } \quad z = 25 - y \\ z \quad = 1 + y & \end{array}$$

Die beiden Werthe von $z$ müssen sich gleich seyn, daher

$$1 + y = 25 - y$$
$$y + y = 25 - 1$$
$$2y = 24$$
$$\text{Also } y = 12$$

Nun ist in d. ersten Hauptgleich. $x + y = 23$

$$\text{also } x + 12 = 23$$
$$x \quad = 23 - 12 = 11$$

Und in der 2ten Hauptgleichung war $x + z = 24$

$$\text{also } 11 + z = 24$$
$$z = 24 - 11$$
$$z = 13$$

folglich sind die Werthe von $x$, $y$ und $z$ gefunden worden, nämlich $x = 11$; $y = 12$; $z = 13$.

§. 144. Können aus einer Aufgabe nicht so viel Hauptgleichungen gezogen werden, als unbekannte Größen darin vorkommen, so bleibt die Auflösung zum Theil unbestimmt oder willkührlich. Z. B.

Das Sechsfache einer Zahl soll dem Quadrat einer andern gleich seyn. Wenn $x$ und $y$ diese Zahlen sind, so soll $6x = y^2 = yy$

$$\text{und } x = \frac{y^2}{6}$$

Man setze nun anstatt $y$ welche Zahl man will, so wird immer die Frage beantwortet. Es sey $y = 4$, so ist

$y^2$

$\frac{y^2}{6} = \frac{16}{6} = 2\frac{2}{3} = x$. Wenn $y = 5$; so ist $\frac{y^2}{6} = \frac{25}{6} = 4\frac{1}{6} = x$. In jedem Falle wird nur das Verhältniß $x : y$ gefunden.

§. 145. Zur Übung im Anordnen und Auflösen der Gleichungen wollen wir einige Aufgaben lösen. (Siehe M. Hirsch Sammlung von Beispielen und Aufgaben ...... S. 139.)

1) Jemand hat 2640 Rthlr. und darunter $4\frac{1}{2}$ mal so viel Münze als Courant. Wie viel hatte er von jeder Sorte?

Aufl. Nenne das Courant $x$
dann ist die Münze $= 4\frac{1}{2}x$

und die Summe $= 5\frac{1}{2}x = \frac{11x}{2} = 2640$ rthl.

$$11x = 5280 \quad (2$$

$$x = \frac{5280}{11}.$$

Courant $= x = 480$ rthl.
und die Münze $= 4\frac{1}{2} \cdot 480 = 2160$ rthl.

2) Ich multiplicire eine gewisse Zahl ($x$) mit 4, und dividire das Product durch 3; da erhielt ich 24. Welche Zahl ist es?

$$\frac{4x}{3} = 24$$

$$4x = 72 \quad (3$$

$x = 18$ war die Zahl.

3) Zu einem bevorstehenden Kriege sollen drei Städte A, B, C ihr Contingent von 594 Mann stellen; die Vertheilung soll nach Verhältniß ihrer Volksmenge geschehen. Wenn nun die Volksmenge von A sich zu der von B, wie 3 : 5; die Volksmenge von B zu der von C sich wie 8 : 7 verhält, wie viel Mann muß jede Stadt stellen?

Aufl. Reducire das Verhältniß B : C auf das von A : B und sprich

$A : B = 3 : 5$

ferner $B : C = 8 : 7$

d. i. $5 : C = 8 : 7$

Also ist $5 \cdot 7 = 8C = \frac{35}{8} = 4\frac{3}{8} = C$.

Nun hat A $3x$

B $5x$

C $4\frac{3}{8}x$

Summe $12\frac{3}{8}x$ oder $\frac{99x}{8} = 594$ Mann (8

$99x = 4752$

$x = \frac{4752}{99} = 48$ Mann.

Aber A giebt $3x$, oder $3 \cdot 48 = 144$ Mann

B — $5x$ — $5 \cdot 48 = 240$ —

C — $4\frac{3}{8}x$ — $4\frac{3}{8} \cdot 48 = 210$ —

Summa 594 Mann.

4) Unter 3 Personen A, B, C sollen 1170 Rthlr. nach Verhältniß ihres Alters vertheilt werden. Nun ist B um den dritten Theil älter, C aber doppelt so alt, als A. Wie viel erhält jede Person?

Aufl. Das Alter von $A = x$

dann ist $B = x + \frac{1}{3}x$

und $C = 2x$

Summe $= 4\frac{1}{3}x$

$4\frac{1}{3}x = 1170$ Rthlr.

$\frac{13x}{3} = 1170$ (3

$13x = 3510$

$x = \frac{3510}{13} = 270$ Rthlr. $= A$,

und $270 + \frac{270}{3} = 270 + 90 = 360 = B$.

und $2 \cdot 270 = 540 = C$.

Summe $= 1170$ Rthlr.

5) Die Garnison einer Stadt besteht aus 1250 Mann, theils Cavallerie, theils Infanterie. Jeder Cavallerist bekommt monatlich 5, und jeder Infanterist 3 Rthlr. Wenn nun der monatliche Sold 4150 Rthlr. beträgt, wie viel Cavalleristen und Infanteristen befinden sich darunter?

Aufl. Es sey die Infanterie $= x$; also ihr Sold $= 3x$
und die Cavallerie $= y$; und ihr Sold $= 5y$

Nach der Aufg. ist $x + y = 1250$; u. $3x + 5y = 4150$ rthl.

der Werth von $x = 1250 - y$; so wie $x = \frac{4150 - 5y}{3}$

Folglich ist auch $1250 - y = \frac{4150 - 5y}{3}$ $\cdot 3$

$$3750 - 3y = 4150 - 5y$$

$$5y - 3y = 4150 - 3750$$

$$2y = 400$$

$y = 200$ Mann Cavall.

Und $x + y = 1250$ Mann

d. h. $x + 200 = 1250$

$x = 1250 - 200 = 1050$ Mann Infanterie.

(Vergl. §. 142.)

6) Es sollen 3 Zahlen von solcher Beschaffenheit gefunden werden, daß die zweite, durch die erste dividirt, 2 zum Quotienten und 1 für den Rest; hingegen die dritte durch die zweite dividirt 3 zum Quotienten und 3 für den Rest gebe; die Summe dieser 3 Zahlen soll 70 seyn. Welche Zahlen sind es?

Aufl. Wenn die 3 Zahlen x, y, z heißen, so soll

$$\left.\begin{array}{l} \frac{y-1}{x} = 2 \\ \text{und } \frac{z-3}{y} = 3 \\ \text{und } x+y+z = 70 \end{array}\right\} \text{Hauptgleichung.}$$

Aus der ersten ist $y = 2x + 1$

Diesen Werth in die zweite Gleichung gebracht, giebt

$$\frac{z-3}{2x+1} = 3 \quad (2x+1$$

$$z - 3 = 6x + 3$$

$$z = 6x + 6$$

Jetzt sind die Werthe von y und z in lauter x gefunden; da nun $x + y + z = 70$, so muß

$$x = x$$
$$y = 2x + 1$$
$$z = 6x + 6$$

$$\text{Also } 70 = 9x + 7$$
$$70 - 7 = 9x$$
$$\tfrac{63}{9} = x$$
$$7 = x$$

folglich $2x + 1 = 2 \cdot 7 + 1 = 15 = y$
und $6x + 6 = 6 \cdot 7 + 6 = 48 = z$.

7) Ich bin jetzt 30, mein Bruder 20 Jahre alt, und folglich ist 3 : 2 das Verhältniß unsers Alters. Nach wie vielen Jahren wird das Verhältniß 5 : 4 seyn?

Aufl. Nenne die gesuchten Jahre x, so soll sich verhalten

$x + 30 : x + 20 = 5 : 4$; nach den Regeln der Proportion

ist $(x+30) \cdot 4 = (x+20) \cdot 5$

$$4x + 120 = 5x + 100$$
$$120 - 100 = 5x - 4x$$
$$20 = x$$, also nach 20 Jahren.

8) In einer zahlreichen Gesellschaft befanden sich anfangs dreimal so viel Herren als Frauen; später aber, als 8 Männer mit ihren Frauen weggingen, wurde das Verhältniß der beiden Geschlechter noch ungleicher; es blieben nämlich gar noch 5 mal so viel Herren als Frauen. Aus wie viel Personen bestand die Gesellschaft im Anfange?

Aufl.

Aufl. Nenne die Zahl der Frauen x, so sind vor der Entfernung der 16 Personen x . 3 die Herren; nach ihrer Entfernung aber ist das Verhältniß

$$3x - 8 : x - 8 = 5 : 1$$

und $3x - 8 = (x - 8) \cdot 5$

$$3x - 8 = 5x - 40$$

$40 - 8 = 5x - 3x$, d. h. $32 = 2x$, und $16 = x$ = Frauen, und $3 \cdot 16 = 48$ Herren, in allem 64 Personen.

9) An einem vollen Weinfasse befinden sich 3 Spundlöcher von verschiedener Größe; durch das erste könnte der Wein in 2, durch das zweite in 3, und durch das dritte in 4 Stunden abgezapft werden. Wie viel Zeit wird zur Ausleerung erfordert, wenn alle 3 Spundlöcher zugleich geöffnet werden?

Aufl. Es heiße diese Zeit x Stunden, so läuft

| | | 12 Generalnenner. |
|---|---|---|
| das 1ste Spundloch | $\frac{x}{2}$ | 6x |
| 2te — | $\frac{x}{3}$ | 4x |
| 3te — | $\frac{x}{4}$ | 3x |

Summe $= 13x$ in 12 Stunden

$x = \frac{12}{13}$ St. $= 55\frac{5}{13}$ Minuten.

Anmerk. Man schließe: Wenn das erste Spundloch allein läuft, so leert es das Faß in 12 Stunden 6 mal; das zweite aber nur 4 mal, und das dritte 3 mal; also 13 mal in 12 Stunden (wenn alle Löcher laufen), wie lange Zeit ist zu einem einmaligen Leeren erforderlich?

Allgemein heiße die Zeit des ersten Spundlochs a; des 2ten = b; des 3ten = c, so findet man die Zeit, in welcher alle 3 Löcher das Faß leeren, in allgemeinen Ausdrücken :

1

abc

$abc =$ Generalnenner.

$$\frac{x}{a} \mid bcx$$
$$\frac{x}{b} \mid acx$$
$$\frac{x}{c} \mid abx$$

Summe $(bc + ac + ab)\,x$

Gleichung.

$$(bc + ac + ab)\,x = abc$$
$$x = \frac{abc}{bc + ac + ab}$$

§. 146. Aus diesen 9 Beispielen geht hervor, daß es zum Anordnen der Gleichung öfters mancherlei Vorbereitungen bedarf, die in jedem besondern Falle der Beurtheilung und dem Scharfblick des Rechners überlassen bleiben; aber man wird auch mit Vergnügen bemerken, daß die Gleichungen ein weiteres Feld, als jede andere Rechnungsart, und eigentlich alle Rechnungsarten mit umfassen. Nach einigen Schriftstellern ist die **Algebra** eine Wissenschaft, eine unbekannte Größe durch Gleichungen zu finden.

§. 147. **Gleichungen vom zweiten Grade, oder quadratische Gleichungen** heißen solche, in denen x oder die unbekannte Größe in der 2ten Potenz, $x^2$, ein oder etliche Mal vorkömmt. Man theilt sie in **reine**, und **unreine** quadratische Gleichungen.

**Reine quadratische Gleichungen** sind es, wenn $x^2$ nur allein auf einer Seite abgesondert bleibt. Z. B.

$$ax^2 = b$$
$$x^2 = \frac{b}{a}$$

beiderseits $\sqrt{\phantom{x}}$ ausgezogen.

$$x = \sqrt{\frac{b}{a}}$$

wobei also die unbekannte Größe x abgesondert, und beiderseits die $\sqrt{\phantom{x}}$ ausgezogen wird, um den Werth von x zu haben.

**Unreine quadratische Gleichungen** sind

die-