Der Rathgeber bei mathematischen Beschäftigungen

Stöpel, August

Stendal, 1819

§. 147-154 quadratische Gleichungen;

urn:nbn:de:hbz:466:1-63556

abc = Generalnenner.

$$\begin{array}{c|l} \frac{x}{a} & bcx \\ \frac{x}{b} & acx \\ \frac{x}{c} & abx \end{array}$$

Summe $(bc + ac + ab)\,x$

Gleichung.

$$(bc + ac + ab)\,x = abc$$

$$x = \frac{abc}{bc+ac+ab}$$

§. 146. Aus diesen 9 Beispielen geht hervor, daß es zum Anordnen der Gleichung öfters mancherlei Vorbereitungen bedarf, die in jedem besondern Falle der Beurtheilung und dem Scharfblick des Rechners überlassen bleiben; aber man wird auch mit Vergnügen bemerken, daß die Gleichungen ein weiteres Feld, als jede andere Rechnungsart, und eigentlich alle Rechnungsarten mit umfassen. Nach einigen Schriftstellern ist die Algebra eine Wissenschaft, eine unbekannte Größe durch Gleichungen zu finden.

§. 147. Gleichungen vom zweiten Grade, oder quadratische Gleichungen heißen solche, in denen x oder die unbekannte Größe in der 2ten Potenz, x^2, ein oder etliche Mal vorkömmt. Man theilt sie in reine, und unreine quadratische Gleichungen.

Reine quadratische Gleichungen sind es, wenn x^2 nur allein auf einer Seite abgesondert bleibt. Z. B.

$$ax^2 = b$$

$$x^2 = \frac{b}{a}$$

beiderseits $\sqrt{\ }$ ausgezogen.

$$x = \sqrt{\frac{b}{a}}$$

wobei also die unbekannte Größe x abgesondert, und beiderseits die $\sqrt{\ }$ ausgezogen wird, um den Werth von x zu haben.

Unreine quadratische Gleichungen sind die-

diejenigen, worin außer x^2 auch noch x mit einem bekannten Coëfficienten vorkommt; als $x^2 + 6x = 27$.

§. 148. Die Gleichung mag beschaffen seyn, wie sie will, so lassen sich ihre Glieder so ordnen, daß x^2 und x bekannte Coëfficienten bekommen, und die ganze Gleichung auf Null gebracht werden kann.

Z. B. $3x^2 + 6cx - x = x^2 + 5ax - c + dn$

Hier können alle Glieder auf eine Seite gebracht werden; auf die leere Seite schreibt man Null. Dann wird obige Gleichung

$$3x^2 - x^2 + 6cx - 5ax - x + c - dn = 0$$

einfacher geordnet: $2x^2 + (6c - 5a - 1) . x + c - dn = 0$

Die bekannte Größe bei x^2 (die 2) wollen wir allgemein a; die bei x $(6c - 5a - 1)$, welche sich allemal in Eine Zahl verwandeln läßt, wollen wir $= b$; und endlich die bekannte Größe $(c - dn)$ hinter x wollen wir $= q$ nennen. Dann haben wir eine Gleichung, welche alle unreine quadratische Gleichungen allgemein vorstellt, a, b und q mögen Größen seyn, wie sie wollen.

$$ax^2 + bx + q = 0, \text{ oder } ax^2 - bx - q = 0.$$

ax^2 muß stets das Pluszeichen haben, weil sonst $\sqrt{}$ unmöglich wäre; hat es im Verfolg der Rechnung etwa Minus bekommen, so bringe man es auf die andere Seite, wo es dann + erhält. — Die Wurzel kann bekanntlich beide Zeichen haben.

§. 149. Ehe wir zur Auflösung der unreinen quadratischen Gleichungen schreiten, wollen wir noch einige Exempel von reinen quadratischen Gleichungen geben.

1) Man sucht eine Zahl, deren Hälfte mit ihrem vierten Theil multiplicirt, und alsdann von diesem Product 10 abgezogen, 152 zum letzten Facit giebt.

Aufl. Die Zahl sey x, so ist ihre Hälfte $= \frac{x}{2}$,

und ihr Viertel $= \frac{x}{4}$, und nach der Bedingung

soll

$$\left(\frac{x}{2} \cdot \frac{x}{4}\right) - 10 = 152$$

$$\frac{x^2}{8} - 10 = 152$$

$$\frac{x^2}{8} = 152 + 10 = 162$$

(8

$$x^2 = 1296$$

auf beid. Seit. $\sqrt{}$ ausgez. $= x = \sqrt{1296}$

$x = 36 =$ der gesuchten Zahl.

2) Es wird eine Zahl x von der Beschaffenheit gesucht, daß, wenn man dieselbe erst zu 94 addirt $(x + 94)$, hernach auch von 94 subtrahirt $(94 - x)$, und diesen Rest mit jener Summe multiplicirt $(x + 94) \cdot (94 - x)$, das Product 8512 sey. Welche Zahl ist es?

$$\left.\begin{array}{r} x + 94 \\ 94 - x \end{array}\right\} \text{multiplicirt}$$

$$-x^2 - 94x$$

$$8836 + 94x$$

Product $= -x^2 + 8836$, welches $= 8512$ seyn soll.

$-x^2$ auf die and. Seite gebr., dam. es $+x^2$ werde $8836 - 8512 = x^2$

$$324 = x^2$$

$$\sqrt{324} = x$$

gesuchte Zahl $= 18 = x$

3) Ein gewisses Capital (x) steht zu 4 Procent auf Zinsen; multiplicirt man das Capital mit den 5monatlichen Zinsen desselben, so erhält man $117041\frac{2}{3}$ rhl. Was für ein Capital ist es?

Aufl. Schließe: 100 Rthlr. : 4 Rtlr. $=$ x Rtlr. : $\frac{4x}{100}$ jährliche Zinsen;

und 12 Monat : $\frac{4x}{100} =$ 5 Monat : $\frac{20x}{1200}$ Rthlr. 5 monatliche Zinsen.; damit das Capital; x multi-

 pli-

plicirt giebt $\frac{20xx}{1200}$ oder einfacher $= \frac{x^2}{60}$, welches $= 117041\frac{2}{3}$ seyn soll.

$$\text{Gleichung } \frac{x^2}{60} = 117041\tfrac{2}{3}$$

$$x^2 = 7022500 \quad (60$$

$$x = \sqrt{7022500}$$

$$x = 2650 \text{ Rthlr. Capital.}$$

4) Ein Cylinder ist 20 Zoll lang und faßt 1004,8 Kubikzoll; wie groß ist der Halbmesser ($= r$) seiner Grundfläche?

In der Körpermessung findet man für den Inhalt eines Cylinders das Formular: $r^2 p \cdot h = J$, wobei r Radius, p die beständige Zahl 3,14; und h die Höhe oder Länge bedeutet. Folglich wird

$$r^2 p \cdot h = J = \text{Inhalt}$$

$$= r^2 \cdot 3{,}14 \cdot 20 = 1004{,}8 \quad \text{nun } r^2 \text{ abgesond.}$$

$$r^2 = \frac{1004{,}8}{3{,}14 \cdot 20} = \frac{1004{,}8}{62{,}8}$$

$$r^2 = 16$$

$$r \text{ oder Halbmesser} = \sqrt{16} = 4 \text{ Zoll.}$$

§. 150. Jede unreine quadratische Gleichung muß sich so ordnen lassen, daß sie endlich folgende Gestalt hat:

$$x^2 + px = c, \text{ oder } x^2 - px = c$$

wobei p und c bekannte Größen sind. Siehe §. 148.

Die Größe $x^2 + px$ ist aber kein vollständiges Quadrat, denn wenn man $a + b$ ins Quadrat erhebt, so bekommt man $a^2 + 2ab + b^2$; also fehlt auch an dem Quadrat in der Gleichung der dritte Theil, nämlich b^2, den man aus $a^2 + 2ab$ dadurch gefunden hätte, daß man das, was sich im zweiten Gliede außer a befindet ($2b$), halbirte (b) und quadrirte (b^2) und hinzufügte, wodurch erst ein wirkliches Quadrat wird, nämlich

$a^2 + 2ab + b^2$

oder $a^2 + 2ba + b^2$

Die

die 2b ist Coëfficient von a, und dasjenige, was in unserer Gleichung p ist. Daher können wir nun das unvollständige Quadrat $x^2 + px$ dadurch vollständig machen, daß wir den Coëfficienten von x, nämlich p, halbiren, quadriren und zu $x^2 + px$ addiren. Die Wurzel muß dann seyn $x + \frac{p}{2}$. Der halbirte und quadrirte Coëfficient p wird in der Gleichung auch auf der andern Seite, wo die bekannte Größe c steht, addirt werden müssen, wenn es eine Gleichung bleiben soll. Das Quadrat von $\frac{p}{2}$ ist $= \frac{p}{2} \cdot \frac{p}{2} = \frac{p^2}{4}$ oder $\frac{1}{4}p^2$, und die Gleichung sieht nun also aus:

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} = c + \frac{p^2}{4}$$

Die Wurzel auf der Seite, wo sich x^2 befindet, wissen wir, sie ist $= x + \frac{1}{2}p$, und da auf der andern lauter bekannte Größen sind, die sich in eine einzige bringen lassen, so wird man auch da die $\sqrt{}$ ausziehen können. Dann ist

$$x + \tfrac{1}{2}p = \sqrt{\left(c + \frac{p^2}{4}\right)}$$

$$\text{folglich } x = \sqrt{\left(c + \frac{p^2}{4}\right)} - \tfrac{1}{2}p$$

§. 151. Die Auflösung der unreinen quadratischen Gleichungen ist daher in folgenden Regeln enthalten:

1. Ordne die Gleichung zur Form $x^2 + px = c$
oder $x^2 - px = c$.

2. Halbire p und quadrire es, so wird es $\frac{p^2}{4}$.

3. Addire dies $\frac{p^2}{4}$ auf beiden Seiten der Gleichung:

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} = c + \frac{p^2}{4}.$$

4. Ziehe auf beiden Seiten die Wurzel aus. Sie ist

$$x + \tfrac{1}{2}p = \sqrt{\left(c + \frac{p^2}{4}\right)}.$$

4. Bringe die $\tfrac{1}{2}p$ mit verändertem Zeichen auf die andere Seite, so ist x abgesondert, und

$$x = \sqrt{\left(c + \frac{p^2}{4}\right)} - \tfrac{1}{2}p$$

Wenn die Gleichung folgende Gestalt hat

$$x^2 - px = c, \text{ so ist } \frac{p}{2} = -\frac{p}{2}, \text{ u. } -\frac{p}{2} \cdot -\frac{p}{2} = +\frac{p^2}{4}$$

$$\text{folgl. } x^2 - px + \frac{p^2}{4} = c + \frac{p^2}{4}$$

die $\sqrt{}$ ausgezogen

$$\text{und } x - \frac{p}{2} = \sqrt{\left(c + \frac{p^2}{4}\right)}$$

$$\text{endlich } x = \sqrt{\left(c + \frac{p^2}{4}\right)} + \frac{p}{2}$$

§. 152. Wir wollen nicht vergessen, daß jede Quadratwurzel sowol positiv als negativ genommen werden kann. Daher schreibt man auch beide Zeichen vor die Wurzel, und die Umstände bestimmen, welches Zeichen gelten soll.

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(c + \frac{p^2}{4}\right)}$$

$$\text{oder } x = \frac{p}{2} \mp \sqrt{\left(c + \frac{p^2}{4}\right)}$$

§. 153. Zur Übung wollen wir einige Aufgaben lösen.

1. Von zwei Zahlen ist die eine um 6 größer, als die andere; mit einander multiplicirt geben sie 27. Welche Zahlen sind es?

Aufl. Es sey x die kleinere, und x + 6 die größere.

Nach der Bedingung soll $x \cdot (x+6) = 27$

d. Coëfficienten halbirt, gibt 3, u. $3^2 = 9$ auf beid. Seit. addirt $\left\{ \begin{array}{l} x^2 + 6x = 27 \\ x^2 + 6x + 9 = 27 + 9 = 36 \end{array} \right.$

Wurzel ausgezogen $x + 3 = \sqrt{36} = 6$

$x = 6 - 3$

Da x zwei Werthe haben kann $x = +6 - 3 = +3$

und $x = -6 - 3 = -9$

die beiden Zahlen sind also 3 und 9, welche die verlangten Eigenschaften haben.

2. Wie groß ist x in folgender auf Null gebrachten Gleichung?

$$x^2 - 7x + 3\tfrac{1}{4} = 0$$
$$x^2 - 7x = -3\tfrac{1}{4}$$
$$x^2 - 7x = -\tfrac{13}{4}$$
$$x^2 - 7x = -3{,}25$$

$\frac{7}{2} = 3{,}5$, dessen Quadrat $= 12{,}25$ $\left\} x^2 - 7x + 12{,}25 = 12{,}25 - 3{,}25 = 9 \right.$

daraus die $\sqrt{} = x - 3{,}5 = \pm\sqrt{9} = \pm 3$

$x = +3 + 3{,}5 = 6{,}5$

und $-3 + 3{,}5 = 0{,}5$

3. Ein Kaufmann hat zweierlei Thee von verschiedenem Gewicht und Preise. Das Gewicht der erstern Sorte verhält sich zum Gewicht der zweiten Sorte, wie 4 : 3. Das Pfund der erstern kostet halb so viel Groschen, als sie an Pfunden wiegt; das Pfund der zweiten kostet 6 Gr. weniger. Der Betrag des Thee's überhaupt ist 218 Rthlr. 8 Gr. Wie viel wiegt jede Sorte?

Aufl. Es sey die erste Sorte x ℔; die zweite = y ℔; so ist x ℔ : y ℔ = 4 : 3

und $x = \frac{4y}{3}$; oder $y = \frac{3x}{4}$ (Siehe §. 140.)

der Preis der ersten Sorte $= \frac{x}{2}$, ihr ganzer

Werth

Werth $= x \cdot \frac{x}{2} = \frac{x^2}{2}$. Der Preis der zweiten Sorte $= \frac{x}{2} - 6$, ihr ganzer Werth $\left(\frac{x}{2}-6\right) \cdot y$ oder $= \left(\frac{x}{2}-6\right) \cdot \frac{3x}{4} = \frac{3x^2}{8} - \frac{18x}{4}$.

Die Summe beid. Werthe $= \frac{x^2}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{18x}{4} = 5240$ Gr. (.2

$$x^2 + \frac{3x^2}{4} - 9x = 10480 \text{ Gr.} \quad (.4$$

$$4x^2 + 3x^2 - 36x = 41920$$

$$7x^2 - 36x = 41920 \quad (:7$$

$$x^2 - 5{,}143x = 5988{,}57$$

D. Qudr. v. $\frac{5{,}143}{2}$ add. $= x^2 - 5{,}143x + 6{,}612 = 5988{,}57$

$$+ 6{,}612$$

$$= 5995{,}182$$

aus beiden Seiten die $\sqrt{}$ gez. $x - 2{,}571 = 77{,}429$

$$x = 77{,}429$$

$$+ 2{,}571$$

$$80{,}000 = 80 \text{ ℔.}$$

Da $x = 80$ ℔, so muß, wenn man den oben gefundnen Werth unterlegt, $y = \frac{3x}{4} = 60$ ℔ seyn.

4. Die Summe zweier Zahlen soll 41, und die Summe ihrer Quadrate soll 901 seyn. Was für Zahlen sind es?

Aufl. Die beiden Zahlen mögen x und y seyn, so ist

$x + y = 41$, also $x = 41 - y$

und $x^2 + y^2 = 901$, also $x^2 = 901 - y^2$.

Um für x gleiche Werthe zu bekommen, erhebe man $x = 41 - y$ ins Quadrat. $(41 - y) . (41 - y) = y^2 - 82y + 1681 = x^2$.

Nun ist $y^2 - 82y + 1681 = 901 - y^2$ besser geordnet.

$2y^2 - 82y = 901 - 1681$

$2y^2 - 82y = - 780$ (:2

gehör. Form $y^2 - 41y = - 390$

$\frac{41^2}{4}$ addirt $y^2 - 41y + 420{,}25 = - 390 + 420{,}25$

$\sqrt{}$ ausgez. $y - 20{,}5 = \sqrt{30{,}25}$

$y - 20{,}5 = 5{,}5$

$y = 5{,}5 + 20{,}5 = 26$, der einen Zahl.

Aber $x + y = 41$
und $x + 26 = 41$

$x = 41 - 26 = 15$, der and. gesucht. Zahl.

Z. 154. Am meisten macht die Anordnung der Gleichung dem Anfänger zu schaffen; indessen erlangt er durch eigene Versuche und Nachdenken bald eine Fertigkeit, die ihm das größte Vergnügen gewährt. Dem Wißbegierigen empfehlen wir

M. Hirsch Sammlung von Beispielen, Formeln und Aufgaben aus der Buchstabenrechnung und Algebra.

Dieses treffliche Werkchen enthält fast nur Aufgaben und Antworten, ohne Ausrechnung. Viele der hier mitgetheilten Aufgaben sind daraus entlehnt, und nur die Ausrechnungen, worauf es hier hauptsächlich ankam, von mir hinzugefügt.

§. 155. Eine Gleichung, worin die gesuchte Größe endlich in der dritten Potenz erscheint, als x^3, heißt eine kubische Gleichung. Z. B.

$$x^3 + ax^2 + bx = c; \text{ oder } \frac{x^3 p}{6} = c.$$