Der Rathgeber bei mathematischen Beschäftigungen

Stöpel, August

Stendal, 1819

§. 155 bis 160 kubische Gleichungen.

Um für x gleiche Werthe zu bekommen, erhebe man $x = 41 - y$ ins Quadrat. $(41-y).(41-y) = y^2 - 82y + 1681 = x^2$.

Nun ist $y^2 - 82y + 1681 = 901 - y^2$

$2y^2 - 82y = 901 - 1681$ besser geordnet.

$2y^2 - 82y = -780$ (:2

gehör. Form $y^2 - 41y = -390$

$\frac{41^2}{4}$ addirt $y^2 - 41y + 420{,}25 = -390 + 420{,}25$

$\sqrt{}$ ausgez. $y - 20{,}5 = \sqrt{30{,}25}$

$y - 20{,}5 = 5{,}5$

$y = 5{,}5 + 20{,}5 = 26$, der einen Zahl.

Aber $x + y = 41$
und $x + 26 = 41$

$x = 41 - 26 = 15$, der and. gesucht. Zahl.

Z. 154. Am meisten macht die Anordnung der Gleichung dem Anfänger zu schaffen; indessen erlangt er durch eigene Versuche und Nachdenken bald eine Fertigkeit, die ihm das größte Vergnügen gewährt. Dem Wißbegierigen empfehlen wir

M. Hirsch Sammlung von Beispielen, Formeln und Aufgaben aus der Buchstabenrechnung und Algebra.

Dieses treffliche Werkchen enthält fast nur Aufgaben und Antworten, ohne Ausrechnung. Viele der hier mitgetheilten Aufgaben sind daraus entlehnt, und nur die Ausrechnungen, worauf es hier hauptsächlich ankam, von mir hinzugefügt.

§. 155. Eine Gleichung, worin die gesuchte Größe endlich in der dritten Potenz erscheint, als x^3, heißt eine kubische Gleichung. Z. B.

$$x^3 + ax^2 + bx = c; \text{ oder } \frac{x^3 p}{6} = c.$$

Wenn

Wenn die x^3 nur allein darin vorkommt, so heißt die Gleichung eine reine kubische Gleichung, als $\frac{x^3 p}{6} = c$; unrein oder vollständig heißt sie, wenn x auch noch in der zweiten und ersten Potenz mit einer bekannten Größe darin vorkommt, als $x^3 + ax^2 + bx - c = 0$.

§. 156. Die Auflösung der reinen kubischen Gleichung besteht darin: Sondere x^3 auf einer Seite ab, bringe alle bekannte Größen auf die andere Seite, verwandle sie in Eine, und ziehe auf beiden Seiten die $\sqrt[3]{}$ aus, so erhält man x und seinen Werth. Die Wurzel kann eine Plus- oder Minusgröße seyn, aber niemals beide Zeichen zugleich haben, wie die quadratische Wurzel.

1. Es sey $\frac{x^3 p}{6} = c$

$$\text{(.6}$$

$$x^3 p = 6c$$

$$x^3 = \frac{6c}{p}$$

$$\sqrt[3]{}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{6c}{p}}$$

2. Einer sprach: ich multiplicirte eine Zahl (x) mit dem halben Quadrate derselben $\left(\frac{x^2}{2}\right)$ und erhielt die Zahl 256. Welche Zahl war es?

Aufl. Nach der Aufgabe ist $x \cdot \frac{x^2}{2} = 256$.

Gleichung $x \cdot \frac{x^2}{2} = 256$

$$\frac{x^3}{2} = 256$$

$$\text{(2}$$

$$x^3 = 512$$

$$\sqrt[3]{}$$

$$x = \sqrt[3]{512}$$

$$x = 8$$

3. Aus

3. Aus dem Inhalt einer Kugel ihren Durchmesser zu finden.

Es sey der Inhalt = J = 1000; der Durchmesser = D.

Die Geometrie giebt für den Inhalt der Kugel das Formular:

$$\frac{D^3 p}{6} = J\text{, worin } p = 3{,}14 \text{ bedeutet.}$$

$$(.6$$

$$D^3 p = 6J$$

$$D^3 = \frac{6J}{p}$$

$$\sqrt[3]{}$$

$$D = \sqrt[3]{\frac{6J}{p}} \text{ das ist } \sqrt[3]{\left(\frac{6.1000}{3{,}14}\right)} = \sqrt[3]{\frac{6000}{3{,}14}}$$

$$= 12{,}41.$$

§. 157. Mehr Schwierigkeiten hat die Auflösung der vollständigen kubischen Gleichungen, worin x^3, x^2 und x vorkommt.

Man ordne die Gleichung so einfach wie möglich, schaffe alle Glieder auf die eine Seite, und setze auf die andere Null.

Jede vollständige kubische Gleichung hat 3 Wurzeln, die zum Theil positiv, zum Theil negativ seyn können. Alle drei Wurzeln heißen x, folglich hat x einen dreifachen Werth.

Ob die Wurzeln positiv, oder negativ sind, sieht man vorläufig an den 4 Gliedern einer auf Null gebrachten kubischen Gleichung durch folgende Kennzeichen:

1. Wenn alle Glieder der auf Null gebrachten Gleichung positiv sind, so sind alle Wurzeln negativ.
2. Wenn die Zeichen wechseln, so sind alle Wurzeln positiv.
3. Wenn mehrere gleiche Zeichen der Glieder auf einander folgen, so sind auch mehrere negative Wurzeln darin.

§. 158. Das 4te oder letzte Glied einer auf Null gebrachten Gleichung ist das Product aus allen 3 Wurzeln. Auf diesen Umstand gründet sich die Auflösung der kubischen Gleichungen.

Man

Man zerfälle nämlich das letzte Glied in seine Factoren, setze sie positiv oder negativ, je nachdem es aus den Zeichen ersichtlich ist, und einen nach dem andern anstatt x in die Gleichung. Wenn sie dadurch Null wird, so ist der für x gesetzte Factor eine Wurzel. Geschieht es bei keinem, so ist keine rationale Wurzel darin. Wenn man aber erst eine Wurzel hat, so lassen sich die andern dadurch finden, daß man die Gleichung mit der Wurzel dividirt. Man erhält im Quotienten eine quadratische Gleichung, durch deren Auflösung man die andern beiden Wurzeln findet. Aus der Natur der Aufgabe ergiebt sich, ob eine, oder alle drei Wurzeln möglich sind.

§. 159. Das Gesagte wollen wir an 2 Beispielen erläutern.

1. Ein Kapitalist giebt 10000 Rthlr. auf Zinsen, und schlägt die Zinsen jährlich zum Kapital. Am Ende des dritten Jahres findet er sein Kapital $11576\frac{1}{4}$ Rthlr. angewachsen. Wie viel Procent Zinsen nahm er jährlich?

Auflösung. Nenne die Zinsen x, so findet man dieselben fürs 1ste Jahr durch die Proportion:

$$100 \text{ Rhlr.} : x \text{ Rhlr.} = 10000 \text{ Rhlr.} : \frac{10000x}{100} = 100x \text{ Zinsen.}$$

Kapital und Zinsen betragen nach 1 Jahr $= 100x + 10000$ Rthlr.

Ferner 100 Rthlr. : x Rthlr. $= 100x + 10000$ Rthlr.

$$: \frac{100x^2 + 10000x}{100} = x^2 + 100x \text{ Zinsen des 2ten}$$

Jahres.

Kapital und Zinsen am Ende des 1sten Jahres waren $= 100x + 10000$ Rthlr.

Zinsen des 2ten Jahres $= x^2 + 100x$

Kapit. u. Zins. n. 2 Jahren $= x^2 + 200x + 10000$ Rthlr.

Ferner

$$100 \text{ lr.} : x \text{ rl.} = x^2 + 200x + 10000 \text{ rl.} : \frac{x^3 + 200x^2 + 10000x}{100}$$

$$= \frac{x^3}{100} + 2x^2 + 100x \text{ Zinsen des 3ten Jahres.}$$

$x^2 + 200x + 10000$ rl. Kapital dazu

$$\frac{x^3}{100} + 3x^2 + 300x + 10000 \text{ rl. ganzes Kapital, wel-}$$

ches nach der Aufgabe = $11576\frac{1}{4}$ Rthlr. werth seyn soll. Das giebt die Gleichung

$$\frac{x^3}{100}+3x^2+300x+10000\,\text{rl.}=11576\tfrac{1}{4}\,\text{rl.}\quad(.100$$

$$x^3+300x^2+30000x+1000000=1157625$$

$$x^3+300x^2+30000x=1157625-1000000=157625$$

$$x^3+300x^2+30000x-157625=0$$

Die Zahl 157625 ist nur durch 5 theilbar, daher muß 5 eine Wurzel seyn. Setzt man nun 5 anstatt x, so ist

$$\begin{aligned} x^3 &= 125 \\ 300x^2 &= 7500 \\ 30000x &= 150000 \\ \hline \text{Summe} &= 157625 \\ \text{davon ab}\ & \ 157625 \end{aligned}$$

die Gleichung wird = 0, also ist $x = 5$, und das Kapital zu 5 Procent ausgeliehen worden. —

2. Es sey die Gleichung aus folgenden Angaben zu ordnen: zum Kubus einer Zahl wurde das vierfache Quadrat derselben addirt und die vierfache Zahl selbst subtrahirt; der Rest betrug 16. Welche Zahl war es:

Aufl. Nenne die Zahl x, so ist der Kubus $= x^3$; das vierfache Quadrat $= 4x^2$; die vierfache Zahl $= 4x$. Die Gleichung

$$x^3+4x^2-4x=16$$

$$x^3+4x^2-4x-16=0.$$

Da hier eine Folge gleicher Zeichen und eine Abwechselung statt findet, so werden die meisten Wurzeln negativ, und eine positiv seyr. Nun läßt sich 16 zerlegen in 2, 4, 8, 16, 1

Wir wollen, da 2 negative Wurzeln sind, die 2 negativ, also -2 anstatt x setzen.

$$\begin{aligned} \text{Dann ist } x^3 &= -2^3 = -8 \\ 4x^2 &= 4\cdot 2^2 = +16 \\ -4x &= -4\cdot -2 = +8 \\ -16 &= -16 \\ \hline \text{Summe} &= 0. \end{aligned}$$

Die -2 ist also eine Wurzel.

Nimmt

Nimmt man $x = -4$, so wird die Gleichung ebenfalls Null; allein nimmt man $x = 8$, so bleibt endlich -240. Daher wollen wir die ganze Gleichung mit der auf Null gebrachten Wurzel dividiren. Wenn $x = -2$, so ist $x + 2 = 0$.

Quotient.

$$
\begin{array}{l}
x + 2 : x^3 + 4x^2 - 4x - 16 \,|\, x^2 + 2x - 8 = 0 \\
\quad\quad\; \underline{x^3 + 2x^2 \qquad\qquad\quad} \\
\quad\quad\quad\quad 2x^2 - 4x - 16 \\
\quad\quad\quad\quad \underline{2x^2 + 4x \qquad\;} \\
\quad\quad\quad\quad\quad\;\; -8x - 16 \\
\quad\quad\quad\quad\quad\;\; \underline{-8x - 16}
\end{array}
$$

In dem Quotienten, welcher eine quadratische Gleichung ist, hat x die andern beiden Wurzelwerthe. Wir lösen sie auf.

$$
\begin{array}{rl}
 & x^2 + 2x - 8 = 0 \\
 & x^2 + 2x = 8 \\
\frac{2}{2} = 1 \text{ quadrirt.} & x^2 + 2x + 1 = 8 + 1 = 9 \\
\surd \text{ ausgezogen} & x + 1 = \sqrt{9} = 3 \\
 & x = \pm 3 - 1 \text{ d. h.} = +2 \\
 & \text{und } -4.
\end{array}
$$

Die 3 Wurzeln sind demnach -2, $+2$ und -4.

§. 160. Wir übergehen die mannichfachen Kunstgriffe, deren man sich bedient, die vollständigen kubischen Gleichungen zu lösen, wenn die Wurzeln irrational sind, und durch Näherung gefunden werden müssen, da sie in diesem Buche nicht vorkommen, und verweisen den Wißbegierigen auf

Burja's selbstlernenden Algebraisten rc. und

Häseler's Anfangsgründe der Arithmetik und Algebra, welche schätzbare Werke dieses Thema sehr faßlich abhandeln.