Der Rathgeber bei mathematischen Beschäftigungen

Stöpel, August

Stendal, 1819

VII. Beschreibung und Erklärung geometrischer Begriffe.

urn:nbn:de:hbz:466:1-63556

VII. Beschreibung und Erklärung geometrischer Linien, Figuren und Lehrsätze.

§. 161. Jedes Ding, das eine Ausdehnung nach Länge, Breite und Höhe hat, heißt ein Körper. Der Körper wird von seiner ganzen Oberfläche eingeschlossen, welche mithin die Grenze des Raums ist, den der Körper ausfüllt. Die Grenze einer Fläche ist eine Linie, welche, wie jene, gerade oder krumm seyn kann, jenachdem sie einerlei Richtung behält, oder nicht. Das Ende einer Linie ist ein Punct. Folglich kann der Punct weder breit, noch lang, noch dick seyn. Eine Linie kann lang, aber weder breit noch dick; und eine Fläche zwar lang und breit, aber nicht dick seyn.

Anmerk. In der Ausübung begnügt man sich, Puncte und Linien so zart und fein als möglich zu machen; und auf die höchste mathematische Genauigkeit Verzicht zu leisten, weil sie alsdann nicht sinnliche Darstellungen seyn würden, welche man durch Zeichnungen doch bezweckt.

§. 162. Wenn zwei gerade Linien ab und fd Fig. 1. einander durchschneiden, so geschieht dies nur in einem einzigen Puncte c, denn Linien haben keine Breite.

Die Neigung der sich durchschneidenden Linien heißt der Winkel, und die Linien selbst, in sofern sie den Winkel bestimmen, werden Schenkel genannt, bei denen es nicht auf die Länge, sondern nur auf die Neigung, die bei gleicher Länge sehr verschieden seyn kann, ankommt. So ist z. B. n ein Winkel, dessen Schenkel cb und cd sind; m ist ein eben so großer Winkel mit kürzern Schenkeln ac und fc. Der Kürze wegen schreibt man oft Winkel mit dem Zeichen $<$, und nennt den Winkel entweder mit 3 Buchstaben, die an seinen Schenkeln und seinem Scheitel stehen, als $<$ bcd, wobei der Buchstabe am Scheitel allemal der mittlere seyn muß, oder mit einem einzigen Buchstaben, der am Scheitel oder zwischen den Schenkeln steht. Hier ist $<$ n $=$ $<$ bcd, und $<$ m $=$ $<$ fca genannt.

Die Linie df könnte auch eine andere Neigung zu ab haben, wobei die Winkel n und m größer, oder kleiner wür=

würden. Man denke sich fd um den Punct c beweglich, so könnte sie z. B. auch in die Richtung der punctirten Linie hi, und in alle mögliche andere Richtungen gebracht werden. In der Lage hi würde $<$ ach eben so groß seyn, als $<$ hcb, und die Linie hi die ab *senkrecht* durchschneiden.

§. 163. Wenn zwei gerade Linien ab und df Fig. 2. einander *senkrecht* durchschneiden, so bilden sie an dem Durchschnittspuncte c vier gleichgroße Winkel, wo von jeder ein *rechter Winkel* heißt. So sind g, h, i, k rechte Winkel. Alle rechte Winkel sind gleich groß.

Man bringe die df in die Lage hi Fig. 3., so sind die Winkel h und i um eben so viel größer geworden, als die Winkel g und k abgenommen haben. Was h und i gewinnen, verlieren die andern g und k.

Die Winkel h, i sind einander gleich, eben so g und k, und heißen *Scheitelwinkel*.

Die Winkel g und h heißen *Nebenwinkel*, haben einen gemeinschaftlichen Schenkel und machen zusammen so viel, als zwei rechte Winkel. So ist auch i Nebenwinkel von k; k Nebenwinkel von h, denn $h + k = 2$ rechten u. s. w. Weil nun $g + h = h + k$ (die punctirte Linie weggedacht), so ist $g = k$; und da $h + k = k + i$, so ist $h = i$.

§. 164. Alle Winkel, die nicht rechte sind, heißen *schiefe*. Zu den schiefen Winkeln gehören:

a. der *spitze Winkel* (z. B. $< g$), der kleiner, als ein rechter;

b. der *stumpfe Winkel* (z. B. $< h$), der größer, als ein rechter;

c. der *hohle Winkel*, der größer als 2 rechte, und nicht so gebräuchlich ist; oft wird er ein *negativer Winkel* genannt.

§. 165. Auf einer geraden Linie ab Fig. 4. können in dem Punct c die Scheitel mehrerer Winkel liegen; aber alle Winkel zusammengenommen sind nicht größer oder kleiner, als 2 rechte. Man nehme dc als senkrecht, so sind $<$ bcd und $<$ acd zwei rechte Winkel; im ersteren

liegen

liegen die spitzen Winkel m, n, und im letzteren o und p; folglich sind $m + n + o + p = 2$ rechten Winkeln.

Da nun dasselbe auch für alle Winkel unterhalb der ab um den Punct c gilt, so folgt, daß alle Winkel um einen Punct c zusammengenommen gerade so viel, als 4 rechte Winkel betragen.

§. 166. Eine Fläche läßt sich durch nicht weniger, als 3 gerade Linien einschließen, wovon aber eine nicht länger, oder eben so lang seyn darf, als die Summe der beiden übrigen, weil sonst die längste Linie in die beiden andern fallen, und sie decken würde.

Eine von 3 Seiten eingeschlossene Figur heißt Triangel oder Dreieck, und wird oft durch △ bezeichnet.

Im Dreieck sind 3 Winkel und 3 Seiten zu merken. Auch ohne vieles Nachdenken entdeckt man bald, daß der größte Winkel im △ der größten Seite, und der kleinste Winkel der kleinsten Seite gegenüber steht, daß eine jede Seite, bei übrigens gleichen Verhältnissen, mit ihrem gegenüberstehenden Winkel wächst und abnimmt. Denn wollte man den Schenkel eines Winkels im △ eine andere Lage geben, also ihre Neigung verändern, so würde die 3te Seite nothwendig auch länger oder kürzer werden müssen, wenn der △ geschlossen bleiben soll.

§. 167. Ein Dreieck heißt rechtwinklicht, wenn ein rechter Winkel darin ist. Die beiden Seiten, welche den rechten Winkel einschließen, Catheten, und die, dem rechten Winkel gegenüberstehende heißt Hypotenuse. In der Fig. 5. ist bei a der rechte Winkel; ab und ac sind also Catheten, und bc Hypotenuse.

In keinem Dreieck kann es 2 rechte Winkel geben. Denn wäre z. B. $< c$ auch ein rechter, so läge bc da, wo die punctirte Linie cd hintrifft, ab und cd würden nie zusammen kommen, und der Figur die Eigenschaften eines Dreiecks fehlen.

§. 168. Schiefwinklicht heißen alle Dreiecke, worin kein rechter Winkel ist. Dazu gehören

1. das gleichseitige abc, Fig. 6., worin alle Seiten, folglich auch alle Winkel einander gleich sind;

2. das

2. das gleichschenklichte def Fig. 7., worin 2 Seiten und 2 Winkel einander gleich sind. Ist $de = df$, so ist $< n = < o$.

3. das stumpfwinklichte, worin 1 Winkel größer, als ein rechter ist. In Fig. 8. ist $< m$ stumpf;

4. Das spitzwinklichte, worin jeder Winkel kleiner, als ein rechter ist. Fig. 6. und 7.

§. 169. Zwei gerade Linien ab und cd Fig. 9., die nach einerlei Richtung laufen, und in jedem Puncte gleichweit von einander abstehen, heißen Parallelen.

Es durchschneide eine dritte gerade Linie hk die Parallelen, so entstehen 8 Winkel o, p, q, r, s, t, u, v. Da die hk gegen beide Parallelen einerlei Neigung hat, so muß $< o = < s$, $p = t$; $q = u$; $r = v$. Nun sind o und r, so wie s und v Scheitelwinkel, und einander gleich, folglich ist auch $r = s$; da die Scheitelwinkel p und q, t und u einander auch gleich sind, so ist $t = q$. Überhaupt sind $<$ o, r, s und v einander gleich; so wie auch p, q, t und u einander gleich sind.

Die Winkel q, t oder r, s heißen Wechselswinkel, und übereinstimmende Wechselswinkel sind einander gleich.

§. 170. In jedem Dreieck sind alle 3 Winkel zusammengenommen nicht größer und nicht kleiner, als zwei rechte Winkel. Es sey das Dreieck ABC Fig. 10., und m, t, o die 3 Winkel desselben. Man ziehe durch c die Linie DE parallel mit AB.

Nun ist $< t = < q$; und $< o = < r$, weil es Wechselswinkel (Siehe §. 169.); und $< m = < m$; folglich sind die 3 Winkel $q + m + r$ eben so groß, als $m + t + o$, und, da sie unter der geraden Linie DE an dem Puncte C liegen, zwei rechten Winkeln gleich (Siehe §. 165.).

Weil Winkel o und $< n$ zwei Nebenwinkel auf der AB um den Punct B sind, so machen beide eben so viel, als 2 rechte Winkel. Wenn aber $m + t + o = n + o$ (o subt.

so ist $m + t = n$

Also ist der Winkel n außerhalb des Dreiecks ABC,

ABC, an der verlängerten Seite AB so groß, als die beiden innern gegenüberliegenden Winkel t + m.

§. 171. Wenn von den 6 Stücken eines Dreiecks 3 bekannt sind, so lassen sich die andern 3 durch Zeichnung (und Rechnung) finden. Unter den bekannten muß wenigstens eine Seite seyn, weil ein großes Dreieck eben solche Winkel haben kann, als ein kleines. Z. B. in dem kleinen △ wären die Seiten 3, 4, 5; im großen aber 9, 12, 15, so wären in beiden die Seiten verschieden, aber die Winkel gleich.

Aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel kann nur Ein Triangel gebildet werden, denn es ist die Neigung und Länge jedes Schenkels gegeben, folglich paßt zur 3ten Seite auch nur Eine Linie. Daher sind sich zwei Dreiecke völlig gleich und decken sich, wenn zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel des einen △ gleichen Stücken im andern △ gleich sind.

Ein Dreieck ist bestimmt, wenn eine Seite und die beiden anliegenden Winkel gegeben sind. Es sey ab und < o und < m Fig. 11. gegeben, so ist die Neigung der Seiten ac und bc gegeben, und sie können sich nur in dem Puncte c schneiden. Gesetzt, es könnte dies auch in einem andern Puncte d geschehen, so müßte < o zweierlei Neigungen des Schenkels ab zulassen, welches ein Widerspruch ist. Zwei Dreiecke sind einander völlig gleich und decken sich, wenn die eine Seite und die anliegenden Winkel in dem einen △ der einen Seite und den anliegenden Winkeln im andern △ gleich sind.

Da alle 3 Winkel eines Dreiecks zusammengenommen = 2 Rechten sind, so ist aus 2 Winkeln allemal der 3te zu finden, wenn man die Summe der beiden bekannten von 2 Rechten abzieht. Zwei Dreiecke müssen daher gleiche Winkel haben, wenn 2 Winkel des einen △ zweien Winkeln des andern △ gleich sind.

Drei Seiten bestimmen ein Dreieck vollkommen. Zwei Dreiecke, in denen die 3 Seiten übereinstimmen, d. h. wo die 3 Seiten des einen den 3 Seiten des andern gleich sind, sind sich völlig gleich und decken sich.

172. Die Größe eines Winkels ist ein Bogen, der aus der Winkelspitze mit einem Zirkel durch beide Schenkel gezogen wird. — Dies führt zum Kreis.

Ein Kreis entsteht, wenn eine gerade Linie Ac Fig. 12., die um den Punct c beweglich, mit dem andern Ende A um c herümgeführt wird. Die krumme, von A beschriebene, Linie heißt Peripherie, Umfang, Kreislinie, Kreis, Zirkel. Die cA heißt Radius oder Halbmesser. Der Punct c ist Centrum oder Mittelpunct, und steht vom Umfange überall gleich weit ab; eine Linie, die den Kreis trifft und durch's Centrum geht, AD, heißt Diameter oder Durchmesser, und theilt sowol die Kreislinie, als die von ihr eingeschlossene Fläche in 2 gleiche Theile. Sie ist = 2 Radien oder Halbmessern. Es sind unzählig viele Radien und Diameter im Kreise möglich, aber alle berühren den Mittelpunct.

Steht der Halbmesser Bc auf AD senkrecht, so theilt er den Halbkreis DABD in zwei Viertelkreise, Quadranten. Betrachtet man Ac und cB als Schenkel des rechten Winkels o, so ist AB der diesem Winkel gehörige Bogen, und also das Maaß desselben. Nun ist AB $\frac{1}{4}$ von der Kreislinie, folglich auch die Größe oder das Maaß eines rechten Winkels = $\frac{1}{4}$ Peripherie.

§. 173. Um einen Bogen in Zahlen ausdrücken zu können, theilt man den ganzen Umfang, er sey groß oder klein, in 360 Theile, Grade genannt, den Grad in 60 Minuten, die Minute in 60 Sekunden, diese wieder in 60 Tertien, oder, was gewöhnlicher ist, in Decimalsekunden, und bezeichnet sie der Kürze wegen mit ° (Grad), ′ (Minute), ″ (Sekunde), ‴ (Tertie). So heißt $50^\circ\, 20'\, 30''\, 12'''$ so viel als: 50 Grad, 20 Minuten, 30 Sekunden, 12 Tertien.

Ein Viertelkreis (das Maaß eines rechten Winkels) ist $\frac{360}{4} = 90^\circ$; ein Halbkreis = 2 rechten Winkeln = 180°; das Maaß eines spitzen Winkels muß kleiner, als 90°, eines stumpfen größer, als 90° seyn. In Fig. 12 ist

$<o = <m =$ rechtem Winkel oder 90°; $< n$ ist spitz, denn sein Bogen ist unter 90°; und $<p$ größer, als 90°, also stumpf.

Unter Kreisfläche versteht man den von der Peripherie eingeschlossenen Raum. Ein Stück derselben ACE, welches von 2 Radien abgeschnitten wird, heißt Sector, Ausschnitt. Eine gerade Linie, die den Umfang an 2 Puncten durchschneidet und nicht durch's Centrum geht, heißt Sehne oder Chorde, als FG. Das von der Kreisfläche durch die Sehne abgeschnittene Stück FGH heißt Sehnenabschnitt.

Es sind unzählig viele Sehnen möglich, aber die größte von allen ist der Diameter selbst.

§. 174. Eine Figur von 4 gleichgroßen Seiten und 4 rechten Winkeln heißt Quadrat Fig. 13. Die Linie ad nach gegenüberstehenden Winkeln heißt Diagonale und theilt das Quadrat in 2 gleiche rechtwinklichte Dreiecke. Denn

ab $=$ cd; ac $=$ bd, weil es Seiten eines Quadrats sind; und cb $=$ cb; folglich haben beide Dreiecke übereinstimmige Seiten, und sind also einander gleich.

§. 175. Eine Figur von 4 gleichen Seiten, aber zweierlei Winkeln, wovon die gegenüberstehenden nur einander gleich sind, heißt Rhombus, Raute oder verschobenes Quadrat. Fig. 14.

Die Diagonale ad theilt auch diese Figur in 2 gleiche Dreiecke abd und adc, wie leicht zu erweisen. Die $\triangle$ sind schiefwinklicht.

§. 176. Wenn in einer Figur zwar 4 rechte Winkel, aber nur die gegenüberstehenden Seiten einander gleich sind, so heißt sie Rechteck oder Oblongum. Die Diagonale cb Fig. 15. theilt es in 2 gleiche rechtwinklichte Dreiecke abc und cbd.

§. 177. Die Figur 15 kann auch zwei spitze und zwei stumpfe Winkel haben, verschoben seyn (s. Fig. 16.), dann heißt sie Rhomboides (verschobenes Oblongum) oder längliche Raute. Die durch die Diagonale cb entstandenen Triangel sind einander gleich und schiefwinklicht.

§. 178. Quadrat, Rhombus, Rechteck (Oblongum) und Rhomboides haben auch den gemeinschaftlichen Namen Parallelogramme, weil ihre gegenüberstehende Seiten stets parallel sind. Ein Triangel ist allezeit die Hälfte desjenigen Parallelogramms, aus dem er durch die Diagonale gebildet wurde. Die rechtwinklichten Triangel entspringen aus dem Quadrat, oder aus dem Rechteck; die schiefwinklichten aus dem Rhombus oder Rhomboides. Mag daher ein Dreieck beschaffen seyn, wie es will, so wird immer wieder ein Parallelogramm daraus werden, indem man einen gleichen Triangel schicklich daran fügt (ein Geschäft, das seiner Leichtigkeit wegen Anfängern zu empfehlen ist).

§. 179. Wenn in einer Figur nur 2 Seiten parallel sind, die beiden andern aber verschiedene Neigung haben, Fig. 17, so heißt sie Trapezium. Eine Diagonale cb theilt es in 2 ungleiche Dreiecke abc und cbd.

§. 180. Die Figur heißt Trapezoides, wenn keine der 4 Seiten mit einer andern parallel läuft Fig. 18. Die Diagonale ad theilt sie in 2 ungleiche Dreiecke abd, und adc.

§. 181. Eine von den Linien, die eine Figur umschließen, nennt man Grundlinie, Basis.

Unter der Höhe einer Figur versteht man die Länge des Perpendikels oder derjenigen Linie, die auf der Grundlinie senkrecht steht, und den entferntesten (höchsten) Punct der Figur berührt. Im Quadrat und Rechteck ist die Höhe allemal die eine, auf der Grundlinie stehende, Seite; im rechtwinklichten Triangel ist die eine Cathete als Grundlinie, und die andere als die Höhe anzusehen; im Rhombus und Rhomboides ist die Höhe = dem Abstande der mit der Grundlinie parallelen Seite; im schiefwinklichten Dreieck ist die Höhe = dem Abstande der Winkelspitze, welche der Grundlinie gegenüber steht, von der (nöthigenfalls verlängerten) Grundlinie. Im gleichseitigen und gleichschenklichten Dreieck fällt das Perpendikel auf die Mitte der Grundlinie, und halbirt den Winkel an der Spitze, denn es entstehen 2 völlig gleiche rechtwinklichte

Dreiecke

Dreiecke durch dasselbe, deren Congruenz leicht in die Augen fällt.

Das Perpendikel fällt noch in den △, wenn die Winkel an der Grundlinie spitz sind. (In der Fig. 6 und 8 sind die Perpendikel durch punktirte Linien bp angegeben.) Es fällt außerhalb des △, wenn ein Winkel an der angenommenen Grundlinie stumpf ist, wie in Fig. 8.

Die Flächen, welche die Parallelogramme einschließen, findet man dadurch, daß man Grundlinie und Höhe mit einander multiplicirt. Das Product ist Quadratmaaß oder Quadratinhalt. — Sich davon zu überzeugen, zerlege man z. B. ein Rechteck durch Parallelen in kleine Quadrate von beliebiger Größe, so wird man gerade so viel Reihen von kleinen Quadraten bekommen, als die Seite eines solchen Quadrats in der Höhe des Parallelogramms enthalten ist. Bei schiefwinklichten Parallelogrammen hängt auf der Seite, wo der stumpfe Winkel liegt, gerade eben so viel über die Grundlinie, als auf der andern Seite fehlt, folglich wird auch ihr Flächeninhalt das Product der Grundlinie und Höhe seyn.

Da jeder Triangel $\frac{1}{2}$ Parallelogramm ist, das gleiche Grundlinie und gleiche Höhe mit ihm hat, so wird sein Flächenraum das halbe Product der Grundlinie und Höhe seyn.

Bei der Berechnung der Fläche einer Figur nimmt man die Grundlinie ohne etwanige Verlängerung wegen Fällung des Perpendikels.

§. 182. Parallelogramme von gleicher Grundlinie und Höhe sind einander der Fläche nach gleich, sie mögen in Hinsicht der Winkel auch noch so verschieden seyn.

Es sey ABCD das eine, und CBDF das andere Parallelogramm. Beide haben die gemeinschaftiche Grundlinie CD, und Höhe DB. Das Parallelogramm ABDC besteht aus den Dreiecken 1 und 2, Fig. 20.; das Parallelogramm BFDC aus den △ 2 und 3. Diese drei Dreiecke sind einander gleich. Denn

△ 1

$\triangle 1 = \triangle 2$, weil CB die Diagonale im Parallelogramm ist.
$\triangle 2 = \triangle 3$, weil beide übereinstimmende Seiten haben und DB die Diagonale des Parallelogramms CBFD ist.

Also ist $\triangle 1 + \triangle 2 = \triangle 2 + \triangle 3$
und Parall. ABDC = BFCD.

Zwar können die zu vergleichenden Parallelogramme in sehr verschiedenen Lagen erscheinen, allein der angeführte Satz behält immer seine Richtigkeit.

Weil Dreiecke als Hälften der Parallelogramme anzusehen sind, so gilt auch von ihnen der Satz:

Dreiecke von gleicher Grundlinie und Höhe schließen gleichgroße Flächen ein, mögen ihre Winkel auch noch so verschieden seyn.

§. 183. Parallelogramme und Dreiecke von gleicher Grundlinie, aber verschiedenen Höhen, verhalten sich zu einander, wie ihre Höhen.

P und p bezeichnen Parallelogramme; H und h ihre Höhen; und B die gemeinschaftliche Grundlinie: dann ist

$P = B \cdot H$
und $p = B \cdot h$

Und $P : p = B \cdot H : B \cdot h$ eine Proportion;
$P : p = H : h$ (: B dividirt

Sind die Höhen H und h gleich, so verhalten sie sich, wie ihre Grundlinien B und b. D. h.

$P : p = B : b.$

Und wenn Grundlinien und Höhen verschieden sind, wie die Producte aus beiden. $P : p = B \cdot H : b \cdot h.$

Was in Hinsicht dieser Verhältnisse von den Parallelogrammen gesagt worden, muß natürlicherweise auch von den Dreiecken gelten.

§. 184. Einer der wichtigsten Lehrsätze in der ganzen Mathematik ist der vom Pythagoras erfundene:

Im rechtwinklichten Dreieck ABC Fig. 21. ist das auf der Hypotenuse AC errichtete Quadrat ADFC eben so groß, als die beiden auf den Catheten errichteten Quadrate ABJK und BCGH zusammen genommen sind. Oder

AC Quadrat = AB Quadrat + BC Quadrat.

Beweis. Ziehe BE parallel mit CF, so ist das Quadrat ADFC dadurch in 2 Parallelogramme ADEL und LEFC getheilt, wovon ersteres dem Quadrat ABJK, und letzteres dem Quadrat BCGH gleich ist. Diese Gleichheit ist eigentlich zu erweisen.

Man ziehe die beiden Hülfslinien AG und BF, so hat man 2 Dreiecke, die einander gleich sind, $\triangle$ AGC = $\triangle$ BFC, denn

AC = CF; CB = CG aus Bedingung.

$< y + z = < x + z$, weil y und x rechte Winkel, folglich sind in beiden Dreiecken ACG und BFC zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel, also auch die $\triangle$ einander gleich.

Aber $\triangle$ BCF = $\frac{1}{2}$ LEFC, weil beide gleiche Grundlinie CF und senkrechte Höhe CL haben; und $\triangle$ ACG = $\frac{1}{2}$ CGHB, weil sie gleiche Grundlinie CG und gleiche Höhe CB haben.

Sind aber die Hälften zweier Dinge einander gleich, so sind es auch die Ganzen. Folglich ist das Quadrat BCGH = dem Rechteck LEFC.

Zöge man eine Hülfslinie von K nach C, und eine andere von B nach D, so ließe sich der Beweis, daß das Quadrat ABJK = dem Rechteck ADEL, wie vorher führen.

§. 185, Mit Hülfe des pythagorischen Lehrsatzes lassen sich zwei und mehrere Quadrate in eins verwandeln, oder auch Differenzquadrate finden.

1. Man setze die gegebenen Seiten zweier Quadrate rechtwinklicht zusammen, und ziehe die Hypotenuse, welche die Seite des verlangten Quadrats ist, das so viel Fläche hat, als beide gegebene Quadrate. In Fig. 22. sind die gegebenen Seiten a und b rechtwinklicht zusammen gesetzt, und dadurch die Seite c gefunden.

Setzte

Setzte man an die gefundene c abermals die Seite eines Quadrats rechtwinklicht, so würde sich durch die neue Hypotenuse die Seite desjenigen Quadrats ergeben, das alle 3 Quadrate vereinigte.

2, Ein Quadrat zu machen, das so groß ist, als der Unterschied zweier Quadrate, ziehe man EA Fig. 22. unbestimmt lang, nehme die kleinste der gegebenen Quadratseite a und setze sie an E rechtwinklicht; von B aus trage die andere Quadratseite b nach EA, wo sie nach D hintrifft. ED ist dann die Seite des gesuchten Unterschiedsquadrates

§. 186. Ähnlich sind zwei Dreiecke, wenn jeder Winkel des einen einem übereinstimmig liegenden Winkel des andern △ gleich ist, und die Dreiecke nur in der Größe der Seiten und nicht in den Winkeln verschieden sind. In Fig. 23. ist das innere Dreieck abc dem äußern größern ABC ähnlich, denn $< A = < a$; $< B = < b$; $< C = < c$. Da nun die Seiten von den Winkeln, die ihnen gegenüberstehen, abhängig und in beiden Dreiecken übereinstimmige Winkel sind, so stehen auch die Seiten des einen Dreiecks zu einander in demselben Verhältniß, wie die des andern △ zu einander. Ist z. B. die Seite x im großen △ um die Hälfte größer, als Seite M, so ist auch Seite z im kleinern △ um die Hälfte größer, als n; wenn x und z parallel sind, so wird auch M und n; so wie W und v parallel seyn, weil sie gleiche Neigungen zu einander haben. Dies drückt der Satz aus:

In ähnlichen Dreiecken sind diejenigen Seiten, die gleichen Winkeln gegenüberliegen, einander proportional, d. h. die Verhältnisse sind einander gleich, und geben eine Proportion.

$$x : M = z : n$$
und $$x : W = z : v$$
also $$z : v = x : W$$ u. s. w.

wenn also zwei Seiten des einen △, und eine ähnlichliegende im andern △ bekannt sind, so läßt sich die andere ähnlich liegende Seite im 2ten Dreieck durch die Regel de tri finden.

§. 187.

§. 187. Wird in einem Dreieck eine Linie mit der Grundlinie parallel gezogen, so sind die dadurch abgeschnittenen Stücke einander proportional, denn es entstehen dadurch 2 Dreiecke ABC und dBg (wenn dg die Paralleie ist) Fig. 24., welche gleiche Winkel haben und einander ähnlich sind. Es ist nähmlich $< o = < m$ und $< B$ gemeinschaftlich, $< g = < c$. Daher gelten die Proportionen

$$\begin{aligned} Bd : dA &= Bg : gC \\ Bd : dg &= BA : AC \\ Bg : BC &= Bd : BA \\ AC : dg &= AB : dB. \end{aligned}$$

In allen Figuren, die einander ähnlich sind, sind die ähnlich liegenden Seiten einander proportional, sie mögen Dreiecke, oder andere Figuren bilden.

§. 188. Die Flächen ähnlicher Figuren verhalten sich zu einander, wie die Quadrate der ähnlichliegenden Seiten.

In den beiden ähnlichen Dreiecken ABC und abc ist $AG = H$ und $ag = h$ die Höhe; BC und bc Grundlinie $= G, g$ Fig. 26. Dann gilt

$$g : G = h : H$$

also ist $\dfrac{G \cdot h}{g} = H$

Man findet aber den Inhalt eines $\triangle$, wenn Grundlinie und Höhe mit einander multiplicirt und durch 2 dividirt wird, oder $\dfrac{G \cdot H.}{2}$ Also verhalten sich auch

$$\triangle ABC : \triangle abc = \frac{G \cdot H}{2} : \frac{gh}{2}$$

durch 2 divid.

$$\triangle ABC : \triangle abc = G \cdot H : gh$$

Für H seinen Werth $\dfrac{G \cdot h}{g}$ gesetzt.

$$\triangle ABC : \triangle abc = G \cdot \frac{G \cdot h}{g} : gh$$

m. g mult.

$$\triangle ABC : \triangle abc = G^2 \cdot h : g^2 h$$

durch h dividirt.

$$= G_2 : g^2$$

Weil

Weil jede Seite Grundlinie oder G, g heißen kann, so gilt der Satz für jede Seite.

Aus der Betrachtung ähnlicher Figuren ergeben sich noch folgende Wahrheiten:

In ähnlichen Figuren verhalten sich die Umfänge (Perimeter) wie ähnlich liegende Seiten; und die Flächen ähnlicher Figuren verhalten sich, wie die Quadrate ähnlichliegender Seiten (ihrer Diagonalen, ihrer Höhen oder Grundlinien); und, weil alle Kreise einander ähnlich sind, die Kreisflächen, wie die Quadrate der Diameter oder Radien, die Umfänge aber, wie die Diameter oder Radien selbst.

§. 189. Zur Ausmessung der Linien bedient man sich des Längenmaaßes Ruthen, Fuß, Zoll, Linien und Scrupel. Die Ruthe gilt für die Einheit und wird im bürgerlichen Leben in 12 Fuß, der Fuß in 12 Zoll, der Zoll in 12 Linien, die Linie in 12 Scrupel; bei Mathematikern aber, des bequemern Rechnens wegen in 10 Fuß, 1 Fuß in 10 Zoll, dieser in 10 Linien, und diese in 10 Scrupel getheilt. Man bezeichnet in den Rechnungen die Ruthe mit °, den Fuß mit ′, den Zoll mit ″, die Linie mit ‴, den Scrupel mit ⁗. Je nachdem nun die Ruthe in 10 oder 12 Theile getheilt wird, so nennt man die Eintheilung Decimal- oder Duodecimalmaaß.

§. 190. Zur Ausmessung der Flächen nimmt man das Quadratmaaß. Eine Quadratruthe ist eine Fläche, die rechtwinklicht eine Ruthe lang und eben so breit ist. Theilt man jede Seite derselben in Fuß, und zieht die Theilpuncte zusammen, so erhält man kleinere Quadrate, und zwar bei der Decimaltheilung 100, bei der Duodecimaltheilung 144 Quadratfuße. So läßt sich wieder der Quadratfuß in 100 oder 144 Quadratzolle, jeder dieser Zolle in 100 oder 144 Quadratlinien u. s. w. zerlegen.

Die Frage: wie viel Flächenraum eine Figur habe, sagt so viel: wie viel Quadratruthen, Quadratfuß, Quadratzolle 2c. lassen sich in die Fläche legen?

Anmerk. In der Preußischen Monarchie ist das ehemalige Rheinländische Maaß gesetzlich eingeführt, und seine wahre Größe soll nach dem Secundenpendel angegeben werden. In Vega's Logarithmischen Tafeln findet man eine sehr ausführliche Tabelle zur Vergleichung allerlei Längen- Quadrat- und Hohlmaaße im pariser Maaße angegeben.

§. 191. Im Kreise sind die Sehnen gleicher Bogen gleich.

Man ziehe zur Sehne AB Fig. 26. die Radien CA und CB, welche einen Winkel bei C einschließen, dessen Maaß der Bogen AFB ist. Wenn nun DGE ein eben so großer Bogen ist, so ist $< m$, den die Radien CE und CD einschließen, auch dem $< x + y$ gleich. Daher ist $\triangle ABC = \triangle DEC$, folglich $AB = ED$.

§. 192. Weil die Dreiecke ABC und ECD gleichschenklicht sind, so theilt die CN, welche auf der Mitte von AB in N senkrecht steht, den Winkel ACB in zwei gleiche Theile, $< x = < y$; denn in den rechtwinklichten $\triangle ANC$ und NCB ist $AN = NB$; $AC = BC$, weil es Radien, $NC = NC$, also auch die ähnlichliegenden Winkel einander gleich, und $x = y$.

Das Perpendikel auf der Mitte einer Sehne geht daher allemal durch's Centrum, und theilt Sehne, Bogen und Winkel in zwei gleiche Theile.

§. 193. Der Abstand einer Sehne vom Centro wird auf dem aus dem Centro auf die Mitte der Sehne gefällten Perpendikel gemessen. Da nun die Sehnen gleicher Bogen gleich groß, und $\triangle ACB = DCE$, so muß auch der Abstand gleichgroßer Sehnen vom Mittelpunct eines Kreises gleich seyn.

§. 194. Eine gerade Linie, die an den Kreis hinstreift und ihn nur in einem einzigen Puncte g berührt, heißt Tangente (Berührende) Fig. 26. Weil eine gerade Linie aus dem Centro nach der Peripherie auf dem Puncte, den sie trifft, senkrecht steht, so wird auch der Radius Cg auf dem Berührungspuncte der Tangente Tg, und mithin auf Tg selbst senkrecht stehen. Folglich steht auch Tangente Tg auf dem Radius Cg senkrecht.

§. 195. Jeder Winkel an der Peripherie ist halb so groß, als der Winkel am Mittelpunct, der mit ihm auf gleichem Bogen steht. Oder $< y = \frac{1}{2} x$; denn $\triangle$ CDB Fig. 27. ist gleichschenklicht, daher $y = z$; und x ist der äußere Winkel am $\triangle$, folglich so groß, als $y + z = 2y$; und $y = \frac{1}{2} x$.

2. Der Satz gilt auch, wenn der Winkel an der Peripherie mit seinen Schenkeln das Centrum umschließt, Fig. 28.

$$< ADB \text{ oder } y + z = \tfrac{1}{2} ACB \text{ oder } \frac{u+x}{2}.$$

Man ziehe DE durch das Centrum, so ist $\triangle$ DCA gleichschenklicht, und $< y = < r$; $< u$ aber $= y + r$; also $u = 2y$; und $y = \frac{1}{2} u$. Dasselbe läßt sich auch auf der andern Seite beweisen, wo $x = 2z$, und $z = \frac{1}{2} x$.

$$\text{also } \tfrac{1}{2} u + \tfrac{1}{2} x = y + z$$
$$= < \frac{ACB}{2} = < ADB.$$

3. Und wenn die Schenkel des Peripheriewinkels z das Centrum nicht berühren noch umschließen, Fig. 29., so gilt doch

$$< x = < 2z, \text{ oder } z = \tfrac{1}{2} x.$$

Man ziehe die Hülfslinie DCE durch's Centrum, so ist im gleichschenklichten $\triangle$ CDB $< y + z = < n$, und der äußere Winkel $x + u$ am $\triangle$ CDB $= y + z + n$.

Nach dem ersten Falle ist $< u = 2y$
Aber $u + x = y + z + n$
und da $n = y + z$
so ist $u + x = 2y + 2z$
Da nun $u = 2y$
so muß $x = 2z$, oder $z = \frac{1}{2} x$ seyn.

§. 196. Das Perpendikel auf dem Diameter eines Kreises ist die mittlere Proportionallinie zwischen den durch dasselbe abgeschnittenen Stücken des Diameters, oder Fig. 30.

$$AE : ED = ED : EB, \text{ und } ED^2 = AE \cdot EB.$$

Ziehe die Hülfslinien AD und DB, so ist $< ADB$ ein Rech-

Rechter, weil er der Winkel an der Peripherie ist, dessen Schenkel einen Halbkreis $= 180^\circ$ abschneiden, also

$\triangle$ ADB rechtwinklicht, oder $z + n = 90^\circ$

$\triangle$ ADE ist bei E rechtwinklicht (oder $m = 90^\circ$), und hat mit jenem $\triangle$ den $< x$ gemein. Daher $\triangle$ ADB ähnlich dem $\triangle$ ADE; $m = z + n$;

$x \quad x$ und daher $z = y$.

Ferner ist auch $\triangle$ DEB den beiden ähnlich, denn er ist bei v rechtwinklicht und y ist zwei $\triangle$ gemeinschaftlich, folglich $< n = < x$.

Nun sind in ähnlichen Dreiecken die Seiten, welche gleichen Winkeln gegenüber stehen, einander proportional,

$$AE : ED = ED : EB$$

(steht geg. $< z$) $\quad (y) = (x) \quad (n)$

denn $z = y$, und $x = n$.

Anmerk. Man nennt die ED auch Ordinate und bezeichnet sie gemeiniglich mit y; den Diameter AB mit a, und das Stück BE desselben (Abscisse genannt) mit x, und sucht dann einen Werth für y oder ED folgendermaßen: $AE = a - x$, $EB = x$, dies in die obige Gleichung gesetzt:

$$a - x : y = y : x$$

$$ax - x^2 = y^2$$

$\sqrt{(ax - x^2)} = y$, welchen Ausdruck man die Gleichung für den Kreis nennt.

§. 197. Vielecke, Polygone, sind Figuren, die mehr, als 4 Seiten, haben. Wenn alle Seiten gleich lang sind, so heißt das Vieleck regulär, im Gegentheil irregulär. Wir beschäftigen uns hier nur mit den regulären oder gleichseitigen Vielecken. Man beschreibt die Vielecke mit Hülfe eines Kreises, welchen man in so viel Theile theilt, als das Vieleck Seiten haben soll; die Theilpuncte zusammengezogen, bilden das Vieleck. Folglich sind die Seiten eines Vielecks als Sehnen gleicher Bogen anzusehen. Zieht man aus dem Mittelpunct des Kreises gerade Linien nach den Ecken, so erhält man eben so viel völlig gleiche Dreiecke, als das Vieleck Seiten hat.

§. 198. Centriwinkel heißen diejenigen Winkel, die am Mittelpunct entstehen, wenn Radien nach allen Ecken eines Vielecks gezogen werden.

Polygonwinkel sind die, welche zwei Seiten des Vielecks mit einander machen.

Alle Centriwinkel eines Vielecks, so wie alle Polygonwinkel sind einander gleich.

§. 199. Die Zeichnung des Sechsecks ist die leichteste, denn jede Seite desselben ist dem Radius gleich, und man erhält die Theilpuncte im Kreise, wenn man den Halbmesser 6 mal in demselben umschlägt. Fig. 31. ist GFEDBA ein in einem Kreise beschriebenes Sechseck. Die Winkel m, n, o, p, q, r sind Centriwinkel, und da die Summe aller Winkel um den Punct c nur 360° beträgt, so wird hier jeder $= \frac{360}{6} = 60°$ seyn (Im Fünfeck würde ein Centriwinkel $= \frac{360}{5} = 72°$ seyn). Die Winkel u, t, s, v sind halbe Polygonwinkel, und einander gleich.

Weil alle Radien einander gleich sind, so sind die Dreiecke in einem jeden Vieleck gleichschenklicht, und daher die < t und s gleich dem Rest, der bleibt, wenn ein Centriwinkel p von 180° (der Summe aller Winkel im Dreieck) abgezogen wird; weil $t = s$, so ist jeder = dem halben Reste.

Daher $\frac{360}{z} =$ Centriwinkel, wo z die Anzahl der Seiten bedeutet; und $\frac{360}{z}$ von 180° abgezogen = dem Polygonwinkel $= t + s$.

Man betrachte AB als Sehne, so wird ein Perpendikel aus C die AB und < p in 2 gleiche Theile theilen. Dies Perpendikel ist die Höhe eines jeden Dreiecks im Vieleck und wird durch den pythagorischen Satz gefunden, denn △ ACP ist bei P rechtwinklicht.

$$CA^2 = AP^2 + CP^2$$

$$CA^2 - AP^2 = CP^2$$

$$\sqrt{(CA^2 - AP^2)} = CP$$

so wie überhaupt jede von den 3 Linien AC (Radius) AP

AP (halbe Seite des Vielecks), und PC (Perpendikel) durch diesen Satz gefunden werden kann.

Eigentlich ist durch den Radius, und die Anzahl der Seiten eines Vielecks alles in der ganzen Figur bestimmt, d. h. Größe der Seiten und des Perpendikels, Winkel 2c. In der Flächenmessung werden Formulare mitgetheilt werden, allerlei Aufgaben bei Vielecken zu berechnen.

Weil im Sechseck alle Seiten Radien sind, so müssen auch die Winkel p, t, s einander gleich, d. h. jeder 60° seyn.

Der Flächenraum eines der Dreiecke im Polygon mit der Anzahl der Seiten multiplicirt, giebt den Flächenraum des Vielecks.

§. 200. Auch um einen Kreis läßt sich ein Vieleck zeichnen, wenn man zuvor ein eben so vielseitiges in demselben beschreibt, und dann des äußern Vielecks Seiten mit denen des innern parallel zieht. Fig. 32. ist dies zur Hälfte geschehen.

Die Berechnung des äußern Vielecks gründet sich auf Folgendes:

Wenn ad, db, bf Seiten des Vielecks im Kreise, und AD, DB, BF Seiten des Vielecks außerhalb, und Radius und Seite des innern bekannt sind, so theilt das Perpendikel cm nicht nur bf, sondern auch BF in 2 gleiche Theile, und bildet rechte Winkel.

Nun ist $cm^2 = cb^2 - mb^2$

$$cm = \sqrt{(cb^2 - mb^2)}$$

Da cn = Radius, und die △ Cmb und CnB einander ähnlich, so gilt:

$$Cm : mb = Cn : nB$$

$$\text{und } nB = \frac{mb \cdot Cn}{Cm}, \text{ und } 2nB = BF$$

§. 201. Will man die Seite eines Vielecks von doppelt so vielen Seiten berechnen, so verfahre man also: Fig. 32.

Wenn EF die Seite des gegebenen Vielecks, Cp das Perpendikel; fq = qE die Seiten des doppelt so vielseitigen, so ist nach vorigem §. die Cp und Pq zu finden.

Im

Im rechtwinklichten $\triangle$ pfq ist

$$pf^2 + pq^2 = fq^2$$

$$\sqrt{(pf^2 + pq^2)} = fq =$$ der Seite des gesuchten Vielecks.

Setzt man die Vervielfältigung der Seiten eines im Kreise beschriebenen Vielecks fort, bis die Seiten so klein werden, daß sie von der krummen Linie nicht zu unterscheiden sind, so wird man durch die Addition aller Seiten beinahe die Kreislinie selbst bekommen. Thut man dasselbe auch bei einem Vielecke außer dem Kreise, so erhält man die Kreislinie auch beinahe, jedoch etwas zu groß. Der Unterschied zwischen beiden Resultaten halbirt und zu dem kleinern Resultat addirt, wird die krumme Linie noch genauer, aber niemals völlig genau, angeben.

§. 202. Ludolf nahm den Diameter eines Kreises = 1, oder 1000000 und fand nach angezeigter Art die Kreislinie zu 3,141592; oder wenn der Durchmesser 1000000 ist, so ist der Umfang 3141592, welches Verhältniß des Diameters zur Peripherie das Ludolfische genannt, und sehr gewöhnlich ist. Ein anderes Verhältniß ist 113 : 355; oder 3183 : 10000.

Wir wollen uns des Ludolfischen bedienen, und das Verhältniß 1 : 3,141592 beständig durch p ausdrükken, welcher Buchstabe demnach die Zahl 3,141592 bedeutet, von der wir so viel Decimalstellen nehmen können, als wir wollen, und als die gewünschte Genauigkeit fordert. Gewöhnlich werden 2 Decimalstellen genügen.

Da die Kreise ähnliche Figuren sind, so findet man den Umfang eines jeden Kreises, wenn man den Durchmesser und Umfang eines einzigen weiß, durch die Proportion.

Es sey D der Durchmesser und U der Umfang eines Kreises, so giebt $1 : 3,14159.. = D : U$

$$= p$$

$$pD = U = \text{Umfang},$$

und also $\frac{U}{p} = D =$ Durchmesser.

Weil alle Kreise in 360° getheilt werden, so kann man auch die Länge eines Bogenstückes für einzelne Grade bestimmen.

§. 203. Man kann die Kreislinie als ein Vieleck von unendlich vielen Seiten ansehen, und ein bestimmtes Stück davon für eine solche Seite nehmen, von der sich Linien nach dem Centro ziehen lassen, wodurch ein Dreieck entsteht, dessen Höhe der Radius, und dessen Grundlinie der Bogen ist. Der Flächenraum eines solchen Sectors würde durch das halbe Product des Bogens in den Radius gefunden werden. Setzt man statt des Bogens den ganzen Umfang, so erhält man den Flächenraum des Kreises, welcher demnach einem Dreieck gleicht, dessen Grundlinie der Umfang, und dessen Höhe der Radius ist. Drücken wir dies in Zeichen aus, so ist Fläche des Kreises $= \frac{U \cdot r}{2}$, wobei r = Radius; oder da $U = Dp$, und $D = 2r$, so haben wir das Formular $\frac{2r \cdot r \cdot p}{2} = r^2 p =$ Kreisfläche.

Das Quadrat des Diameters muß 4 mal größer seyn, als das des Radius, weil letzterer nur $\frac{1}{2}$ D ist, folglich wird man auch die Kreisfläche finden durch $\frac{D^2 p}{4}$.

§. 204. Der Kreis ist die vollkommenste Figur. Kommt es darauf an, mit einer gegebenen Umfassung die größtmögliche Fläche einzuschließen: so wähle man die kreisförmige, denn der Kreis schließt bei gleichem Umfange von allen möglichen Figuren die größte Fläche ein.

§. 205. Die Flächen mehrerer Kreise verhalten sich zu einander, wie die Quadrate ihrer Halbmesser oder Radien, oder ihrer Diameter. Denn wenn A und B zwei Kreise vorstellen, so ist

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{D^2 p}{4} \\ B &= \frac{d^2 p}{4} \end{aligned}\right\} \text{ also } A : B = \frac{D^2 p}{4} : \frac{d^2 p}{4}$$

$$A : B = D^2 p : d^2 p \quad \text{(4 dividirt.}$$

$$A : B = D^2 : d^2 \quad \text{(p divid.}$$

Oder

$$\left.\begin{aligned} A &= R^2 p \\ B &= r^2 p \end{aligned}\right\} \text{ also } A : B = R^2 p : r^2 p$$

$$A : B = R^2 : r^2$$

§. 206. Wie allerlei Vielecke gezeichnet und berechnet werden, wie die Fläche der Kreisstücke, und allerlei anderer krummlinigten Figuren zu finden sey, wird in der Lehre von Linien- und Flächenmessung vorkommen.

§. 207. Ehe wir zur Betrachtung der Körper schreiten, müssen wir noch Einiges über die Lage der Ebenen gegen einander berühren.

Unter einer Ebene stelle man sich eine völlig gerade Fläche nach beliebiger Länge und Breite vor, in welcher gerade Linien, die man von allen Puncten ihres Umfanges über dieselbe zieht, mit allen ihren Puncten liegen. Die Begrenzung der Ebene kann krumm, eckig oder gerade seyn, es gehören diese Eigenschaften nicht mit zu ihrem Begriff. (Ein Spiegel, stillstehendes Wasser kann die sinnliche Anschauung einer Ebene erleichtern.) Obgleich die Ebene ohne alle Dicke und Tiefe seyn muß, so kann man sich doch ihre Ausdehnung nach Länge und Breite unbegrenzt vorstellen.

§. 208. Die Vorstellung mehrerer Ebenen gegen einander auf dem Papier ist deshalb schwierig, weil das Papier nur eine Ebene vorstellt, und darauf Linien und Puncte zu zeichnen sind, die außerhalb desselben liegen. (Durch Kartenblätter, welche man also legt, wie es die Betrachtungen erfordern, kommt man der Einbildungskraft des Ungeübten sehr zu Hülfe. Die auf einer Ebene stehenden Linien können durch Drathstücke oder Nadeln versinnlicht werden.)

§. 209. Zwei Puncte bestimmen die Lage einer Ebene nicht, denn ein, nur in 2 Puncten befestigtes Kartenblatt kann sich um sie, wie um eine Axe drehen, und allerlei Lagen haben. Drei Puncte, die nicht in einer geraden Linie liegen, bestimmen die Lage einer Ebene vollkommen. Ein Tisch steht auf drei Beinen auf jedem Boden fest. Ein vierbeinigter Tisch kann wanken, weil die Füße 4 Puncte vorstellen, durch welche 2 Ebenen gelegt werden können. Jeder Triangel und jeder Kreis wird nur in einer Ebene liegen, denn 3 Puncte bestimmen diese Figuren.

§. 210.

§. 210. Eine gerade Ebene kann auf einer Ebene unter unzähligen Winkeln stehen. (Eine Nadel auf einer Tischfläche befestigt zeigt dies deutlich.) Sie steht aber senkrecht, wenn sie mit der Ebene rings herum rechte Winkel macht. Sie kann mit zwei, in einer geraden Linie liegenden Puncten rechte Winkel, und mit allen übrigen schiefe Winkel machen. Steht aber eine Linie so auf einer Ebene, daß sie mit 2 nicht in einer geraden Linie liegenden Puncten rechte Winkel macht, so steht sie auf der ganzen Ebene senkrecht. Giebt man daher einem gemeinen Winkelhaken noch einen 3ten Schenkel, so kann man mittelst desselben die senkrechte Stellung einer Linie auf einer Fläche bekommen.

§. 211. Zwei Linien, die auf einer Ebene senkrecht stehen, sind parallel, denn es befinden sich um beide rechte Winkel.

Wenn sich zwei senkrechte Ebenen schneiden, so ist die Durchschnittslinie auch senkrecht. Z. B. die senkrechten Seitenwände eines Zimmers durchschneiden sich in der Ecke senkrecht, die Ecke ist die Durchschnittslinie und steht auf dem Fußboden senkrecht.

Ein Perpendikel, welches durch mehrere parallele Ebenen geht, steht auf allen senkrecht.

Steht eine Ebene auf einer andern, so machen beide einen Winkel, welcher Flächenwinkel, Neigungswinkel heißt, und sehr verschieden seyn kann, nachdem sich die Ebenen gegen einander neigen.

§. 212. Mit 2 oder 3 Ebenen läßt sich noch kein Raum einschließen. Zum wenigsten gehören dazu 4 Ebenen, wie jeder Versuch beweist.

§. 213. Ein Körper wird von Ebenen, die man Seitenflächen nennt, eingeschlossen. Die Geometrie lehrt, wie der durch die Seitenflächen eingeschlossene Raum zu berechnen sey.

Das Gefundene heißt der kubische oder körperliche Inhalt. Die äußere Umgebung oder der Flächenraum aller Seiten heißt das Netz, auch die Oberfläche des Körpers; diejenige Seite desselben, worauf er steht, oder stehen könnte, nennt man Grundfläche; ein Perpendikel auf der Grundfläche aus dem höchsten Punct des Kör-

Körpers heißt seine Höhe, oft auch, um Mißdeutungen vorzubeugen, senkrechte oder gerade Höhe.

§. 214. Diejenigen Körper, deren Ebenen ihren Grund in geraden Linien oder im Kreis haben, sind: Prisma, Parallelopipedon, Kubus oder Würfel, Cylinder, Piramyde, Kegel und Kugel, und nur sie werden gemeiniglich in der Geometrie abgehandelt.

§. 215. Der sogenannten Platonischen Körper, deren Seiten Polygone, oder deren Ecken alle gleichen körperlichen Raum einschließen, sind nur fünf: Tetraeder, Würfel, Octoeder, Dodecaeder, Icosaeder; und mehrere sind auch nicht möglich.

Die Zeichnung und Berechnung dieser Körper folgt unten; hier nur eine allgemeine Betrachtung über die geometrischen Körper.

§. 216. Das Maaß, womit die Körper gemessen werden, ist der Würfel oder Kubus, daher es auch Kubikmaaß heißt. Eine Kubikruthe ist ein Körper, der rechtwinklicht eine Ruthe lang, eben so breit und hoch ist. Seine Grundfläche ist daher eine Ebene von einer Quadratruthe, oder 10. 10 = 100 Quadratfuß. Stellt man ihn sich auch 10 Fuß hoch vor, so besteht der ganze Körper aus 10. 10. 10 = 1000 Kubikfuß. Theilt man die Ruthe in 12 Theile, so hat die Grundfläche 12. 12 = 144 Quadratfuß, und der Körper 12. 12. 12 = 1728 Kubikfuß Duodecimalmaaß.

Anmerk.	Decimalmaaß.	Duodecimalmaaß.
Ein Kubikfuß wird	10. 10. 10 = 1000 Kubikzoll,	od. 1728 Kubikz.
ein Kubikzoll —	10. 10. 10 = 1000 Kubiklin.,	od 1728 K. Linien
eine Kubiklinie —	10. 10. 10 = 1000 K. Scrupl.	od. 1728 K. Scpl.

§. 217. Körper, deren Seitenflächen senkrecht auf der Grundfläche stehen, haben oben eine Decke, welche der Grundfläche völlig gleich ist, und daher hat ein solcher Körper eigentlich 2 Grundflächen. Dazu gehören:

1. der Würfel, welcher in 6 gleiche Quadrate eingeschlossen ist;
2. das Parallelopipedon mit 2 Grund- und 4 Seitenflächen, wovon 2 gegenüberstehende gleich, alle

alle aber Parallelogramme sind. (Ein längliches Kästchen, der Raum eines rechtwinklichten 4eckigen Zimmers sind Körper dieser Art.)

3. Das Prisma, dessen 2 Grundflächen 3, 4, 5 und mehr Seiten haben, worauf eben so viel Seitenflächen senkrecht stehen, die Parallelogramme sind. (Ein senkrecht stehender überall gleich dicker Pfeiler, welcher 3, 4, 5 und mehr Ecken hat.)

4. Cylinder, dessen beide Grundflächen Kreise sind, und dessen Seitenfläche wie der Kreis gebogen ist. (Eine Walze, ein runder Thurm, eine Tubusröhre ꝛc.)

Man findet den körperlichen Inhalt dieser 4 Arten von Körpern dadurch, daß man den Flächenraum der Grundfläche mit ihrer senkrechten Höhe multiplicirt. Denn es können eben so viel Schichten von einer gewissen Dicke über der Grundfläche liegen, als die Höhe Theile hat, die einzeln so lang sind, als die Dicke der Schichten angenommen ist. Z. B. es sey die Grundfläche = ein Quadratfuß, so würde in einer Schicht von 1 Fuß Höhe, 1 Kubikfuß, und in jeder folgenden eben so viel körperlicher Inhalt enthalten seyn. Die Gestalt der Grundfläche mag noch so verschieden seyn, so wird sich doch ihr Quadratinhalt berechnen lassen, und immer die Regel gelten, daß Grundfläche mal Höhe den körperlichen Inhalt dieser Körper giebt.

§. 218. Wenn die Seitenflächen dieser 4 Körper, die man auch prismatische nennt, nicht auf der Grundfläche senkrecht stehen, so heißen sie schiefe, ihre Seitenflächen sind nicht mehr Rechtecke, sondern verschoben, und ihre Höhe mißt ein Perpendikel aus dem höchsten Punct auf die Grundfläche oder deren Verlängerung. Alsdann aber sind sie, wie die geraden, zu behandeln.

§. 219. Die Piramyde und der Kegel haben nur Eine Grundfläche, und ihre Seitenflächen laufen oben in einen Punct zusammen. Die Grundfläche der Piramyde kann 3, 4, 5 und mehr Seiten haben; die Seitenflächen derselben sind Dreiecke, deren Grundlinien mit den Seiten der Grundfläche einerlei sind.

Die

Die Grundfläche des Kegels ist ein Kreis; seine Seitenfläche (Mantel oder krumme Oberfläche genannt) ist, ausgebreitet, ein Kreissector, dessen Centrum in der Spitze des Kegels liegt. (Ein Zuckerhut giebt eine sinnliche Vorstellung des Kegels.)

§. 220. Ein Kegel ist eine Piramyde von unendlich vielen Seiten, und wenn die Grundflächen und Höhen dieser beiden Körper gleich sind, so sind es auch ihre körperlichen Inhalte. Denn gesetzt, man schnitte von beiden dünne Scheiben mit der Grundfläche parallel ab, so müßten sich diese nothwendig an Masse gleich seyn, und setzte man die Trennung fort, so würde man gleich viel und gleich große, obgleich verschieden gestaltete, Stücke oder Theile bekommen. Sind aber die Theile sich einzeln an Zahl und Inhalt gleich, so müssen es auch die Ganzen seyn. Piramyden von gleicher Grundfläche und Höhe schließen gleichgroße Räume ein, wenn sie auch in der Anzahl der Seiten noch so sehr verschieden sind.

§. 221. Jedes dreieckte Prisma läßt sich in 3 gleichgroße Piramyden zerschneiden.

Anmerk. Durch Linien auf dem Papiere läßt sich der Beweis dieses Satzes nie dem Anfänger ganz deutlich und überzeugend machen. Der Lehrer führe ihn aber sinnlich, indem er z. B. ein dreieckiges Prisma aus Holz verfertigen, und nach der Anweisung, die jedes Lehrbuch giebt, durchschneiden läßt. Er wird 3 gleichgroße Piramyden, wovon 2 völlig gleich, und eine schiefwinklicht, erhalten. Daß sich aber diese 3 Piramyden an Masse gleich sind, beweise er so: die Gleichheit der beiden ersten fällt in die Augen, denn sie haben die Grundfläche des Prisma's zur Grundfläche, und seine Länge zur Höhe; legt man nun eine Seitenfläche der ersten Piramyde auf eine Seitenfläche der 3ten (schiefen) Piramyde, so decken sich beide, und folglich nehme man diese zur Grundfläche bei der Vergleichung; die Höhe dieser so gelegten Körper ist die Dicke des Prisma. Daher haben auch sie gleiche Grundfläche und Höhe und sind dem Inhalte nach einander gleich.

§. 222. Wenn die Piramyde der 3te Theil eines prismatischen Körpers ist, so muß es der Kegel auch seyn. §. 220.

§. 220. Man wird ihren Körperinhalt also finden, wenn man ihre Grundfläche mit der Höhe multiplicirt und durch 3 dividirt.

§. 223. Kegel und Piramyde heißen **abgekürzt**, wenn die Spitze durch einen der Grundfläche parallelen Schnitt davon getrennt worden ist. Man wird den Inhalt derselben finden, wenn man die fehlende Spitze für sich als einen Kegel oder eine Piramyde berechnet, und vom ganzen Körper (wie er mit der Spitze seyn würde) abzieht. Die Länge der fehlenden Spitze findet man durch eine leichte Rechnung aus den Durchmessern der Grund- und Durchschnittsfläche, und Höhe. Es sey R = Halbmesser der Grundfläche, r = Halbmesser der Durchschnittsfläche, H die Höhe des **ganzen**, und h die Höhe des abgekürzten Körpers, so folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke Fig. 121.

ep : po = cm : mb, d. i. in angenommenen Zeichen

$$(R-r) : h = R : H, \text{ also } H = \frac{h \cdot R}{R-r}$$

und H — h ist die Höhe der fehlenden Spitze bno.

Anmerk. Ueberhaupt ist es gut, mit dieser Betrachtung über die Körper zugleich die Zeichnung und Netze derselben zu vergleichen, wozu unter § 424 bis 443 Anleitung gegeben wird. Dann wird es auch nicht schwer werden, die Oberflächen der Piramyde Fig. 120, und Fig. 122 zu berechnen.

§. 224. Eine **Kugel** entsteht, wenn sich ein Halbkreis um den Diameter bewegt. Daher

a. stehen alle Puncte auf ihrer krummen Oberfläche gleichweit vom Mittelpunct ab;

b. sind alle Radien gleich lang;

c. sind alle Kugeln ähnliche Körper;

d. ist jede Durchschnittsfigur, welche durch eine schneidende Ebene, die durch die Kugel dringt, entsteht, ein Kreis, und jeder Kugelschnitt eine Kreisfläche;

e. steht ein Perpendikel aus dem Centro auf der Durchschnittsfigur allemal in ihrer Mitte;

f. trifft

f. trifft der größte Schnitt allemal das Centrum, und theilt die Kugel in zwei Halbkugeln;

g. schneiden diejenigen Ebenen, welche in gleichen Entfernungen vom Mittelpunct die Kugel durchdringen, gleichgroße Stücke ab.

Von der Wahrheit dieser Sätze wird sich jeder, der die Lehre vom Kreis wohl begriffen, leicht überzeugen, daher übergehen wir die Beweise.

§. 225. Eine gerade Linie durch den Mittelpunct der Kugel bis zum Umfange heißt Diameter, die Hälfte ist Radius der Kugel. Die Endpuncte eines Diameters, um welche sich die Kugel wälzen läßt, heißen Pole, ihr Diameter Axe.

§. 226. Eine schneidende Ebene, welche den Mittelpunct der Kugel trifft, bildet auf ihrer Oberfläche einen größten Kreis. Das Centrum eines größten Kreises ist also zugleich der Mittelpunct der Kugel. Es sind unzählig viel größte Kreise möglich.

§. 227. Ein kleinerer Kreis entsteht auf der Oberfläche, wenn die schneidende Ebene nicht durch das Centrum geht. Es sind unzählig viele möglich.

§. 228. Weil die Oberfläche der Kugel durch den Kreis gebildet wurde, so theilt man sowol die größten, als die kleinern Kreise auch in 360 Grade und ihre Unterabtheilungen.

§. 229. Ein größter Kreis, der von den Polen überall 90° weit absteht, heißt Aquator oder Gleicher.

§. 230. Um das Verhältniß der Oberfläche zum Diameter zu finden, legte man unendlich nahe schneidende Ebenen durch die Kugel und nahm die dadurch abgeschnittenen Stücke für abgekürzte Kegel, deren Oberfläche man addirte.

§. 231. Eine bestimmte Menge solcher neben einander liegender Kegelstücke wird einen Kugelabschnitt ausmachen. Weil nun die Durchmesser jedes solchen Kegelstücks unendlich wenig von einander unterschieden seyn werden, so kann man in der Gleichung für die Oberfläche des abgekürzten Kegels $(R+r)p.h$ anstatt $R+r$ auch $2R$ setzen, folglich $2R.p.h$.

Die Oberfläche eines Kugelabschnitts KAGH Fig. 33. wird daher auch gefunden werden durch

$$2R.p.AH.$$

Es sey der Radius R einer Kugel 8 Zoll, die Höhe des Stückes $AH = 2$ Zoll, so ist $2.8.3,14.2 = 100,512...$ Quadratzoll Oberfläche.

Für AH läßt sich ein anderer Ausdruck finden. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ADG und AGH ergiebt sich, daß

$$AH = \frac{AG^2}{2R}$$

Diesen Ausdruck in vorige Gleichung gebracht, giebt

$$\frac{2R.p.AG^2}{2R} = AG^2.p = \text{Oberfläche eines Kugelabschnitts.}$$

Weil nun jede Kreisfläche durch die allgemeine Formel r^2p gefunden wird, so kann AG als Radius desjenigen Kreises gelten, dessen Fläche der Oberfläche des Kugelabschnitts gleicht, und daher der Satz:

Der Flächenraum eines Kugelabschnitts ist gleich dem Flächenraum eines Kreises, dessen Radius die Sehne zwischen dem Pol und dem Abschnitt ist.

§. 232. Je näher die schneidende Ebene dem Mittelpunct kommt, desto größer wird der Abschnitt. Im Mittelpunct ist er = Halbkugel. Dann wird die Sehne AJ der Radius eines Kreises seyn, der so viel Flächenraum hat, als die Oberfläche der halben Kugel. Es ist aber $AJ^2 = CA^2 + CJ^2$
$= R^2 + R^2 = 2R^2$.
Und $AJ^2.p = 2R^2p$ = zweien größten Kreisen; folglich ist der Flächenraum der ganzen Kugel der Fläche von 4 größten Kreisen gleich, $= 4R^2p$.

§. 233. Da $4R^2 = D^2$, so kann auch die Oberfläche der Kugel durch D^2p gefunden werden, oder sie ist einer Kreisfläche gleich, deren Radius der Durchmesser der Kugel ist.

§. 234.

§. 234. Wenn zwei parallele Ebenen FG und fg eine Kugel schneiden, Fig. 34., so heißt der Raum auf der Oberfläche zwischen beiden eine *Zone*, als fgGF. Zieht man die Oberfläche des Stückes fgA von der Oberfläche der Halbkugel ab, so giebt der Rest den Flächenraum der Zone:

$$(2R \,.\, p \,.\, AH) - (2R \,.\, p \,.\, Ah) = \text{Zone}$$

oder $2R \,.\, p \,.\, (AH - Ah)$; und da $AH - Ah = Hh$, so ist sie $= 2R \,.\, p \,.\, Hh$.

Nun ist Hh die Höhe der Zone; $2R \,.\, p = Dp =$ der Peripherie eines größten Kreises. Daher giebt $D.pHh$, *oder die Peripherie eines größten Kreises multiplicirt mit der Höhe der Zone, den Flächenraum derselben.*

§. 235. *Der körperliche Inhalt der Kugel ist dem eines Kegels oder einer Piramyde gleich, deren Grundflächen der ganzen Oberfläche der Kugel, und deren Höhen der Hälfte ihres Diameters gleichen.*

Theilt man die Oberfläche der Kugel in lauter sehr kleine Quadrate, so stellen diese die Grundflächen einer eben so großen Menge von Piramyden, deren Spitzen sämmtlich im Mittelpunct liegen, vor. Ihre Höhen sind also dem Radius gleich; und ihr gemeinschaftlicher Inhalt macht den Kugelinhalt aus.

Nun giebt $\frac{1}{3} G \,.\, H$ oder $G \,.\, \frac{H}{3}$ (Grundfläche mal $\frac{1}{3}$ Höhe) den Inhalt einer Piramyde; und $\frac{1}{3} H = \frac{1}{3}$ Radius oder $\frac{1}{6}$ Diameter. *Folglich wird die Kugelfläche mit $\frac{1}{6}$ Diameter multiplicirt den Inhalt derselben geben.* Weil die Oberfläche $= D^2p$, so ist nun körperlicher Inhalt $= D^2 \,.\, p \,.\, \frac{D}{6} = \frac{D^3p}{6}$.

§. 236. Vergleicht man die Kugel mit einem Cylinder, dessen Durchmesser und Höhe dem Durchmesser der Kugel gleicht, so findet sich, *daß der Inhalt der Kugel $\frac{2}{3}$ vom Inhalt des Cylinders sey.* Den weitläufigen gewöhnlichen geometrischen Beweis mag folgender kürzere ersetzen:

Der

Der Inhalt des Cylinders ist $= G \,.\, H$, d. h. $r^2 \,.\, p \,.\, H$ oder $\frac{D^2 \,.\, p \,.\, H}{4}$, oder (weil $H = D$) $= \frac{D^3 \,.\, p}{4}$; Inhalt der Kugel $= \frac{D^3 \,.\, p}{6}$.

Wenn nun $K =$ Kugel; $Z =$ Cylinder, so verhalten sich

$$K : Z = \frac{D^3 p}{6} : \frac{D^3 \,.\, p}{4} \qquad (4$$

$$K : Z = \frac{4 D^3 \,.\, p}{6} : D^3 p \qquad (6$$

$$K : Z = 4 D^3 p : 6 D^3 p \qquad (D^3 p$$

$$K : Z = 4 : 6 \qquad (:2$$

$$K : Z = 2 : 3$$

$$K = 2 \frac{Z}{3} = \tfrac{2}{3} Z$$ d. i. die Kugel ist $\frac{2}{3}$ des Cylinders.

§. 237. Da der Kegel $\frac{1}{3}$ des Cylinders oder eines Prismas von gleicher Grundfläche und Höhe, die Kugel aber $\frac{2}{3}$ Cylinder, so ist das Verhältniß dieser drei Körper: Kegel, Kugel, Cylinder, wie 1, 2, 3; oder 1 : 2 : 3.

Anmerk. Die bisher vorgetragenen geometrischen Wahrheiten sind zum völligen Verstehen der in den folgenden Abschnitten gegebenen Formeln erforderlich, aber für denjenigen, welcher gründliche Kenntnisse in der Mathematik zu erlangen wünscht, noch nicht genügend. Ihm empfehlen wir

Häseler's Anfangsgründe der reinen Mathematik rc. 3 Theile. (Zum Selbstunterricht vorzüglich geeignet.)

Kästner, Buria's, Kiesewetter's und andere Schriften, deren Menge sehr groß ist.