



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Der Rathgeber bei mathematischen Beschäftigungen

Stöpel, August

Stendal, 1819

§. 161-196 die vornehmsten geometrischen Lehrsätze;

[urn:nbn:de:hbz:466:1-63556](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-63556)

VII. Beschreibung und Erklärung geometrischer Linien, Figuren und Lehrsätze.

§. 161. Jedes Ding, das eine Ausdehnung nach Länge, Breite und Höhe hat, heißt ein Körper. Der Körper wird von seiner ganzen Oberfläche eingeschlossen, welche mithin die Grenze des Raums ist, den der Körper ausfüllt. Die Grenze einer Fläche ist eine Linie, welche, wie jene, gerade oder krumm seyn kann, je nachdem sie einerlei Richtung behält, oder nicht. Das Ende einer Linie ist ein Punkt. Folglich kann der Punkt weder breit, noch lang, noch dick seyn. Eine Linie kann lang, aber weder breit noch dick; und eine Fläche zwar lang und breit, aber nicht dick seyn.

Anmerk. In der Ausübung begnügt man sich, Punkte und Linien so zart und fein als möglich zu machen; und auf die höchste mathematische Genauigkeit Verzicht zu leisten, weil sie alsdann nicht süssliche Darstellungen seyn würden, welche man durch Zeichnungen doch bezweckt.

§. 162. Wenn zwei gerade Linien ab und cd Fig. 1. einander durchschneiden, so geschieht dies nur in einem einzigen Punkte e, denn Linien haben keine Breite.

Die Neigung der sich durchschneidenden Linien heißt der Winkel, und die Linien selbst, in sofern sie den Winkel bestimmen, werden Schenkel genannt, bei denen es nicht auf die Länge, sondern nur auf die Neigung, die bei gleicher Länge sehr verschieden seyn kann, ankommt. So ist z. B. n ein Winkel, dessen Schenkel eb und cd sind; m ist ein eben so großer Winkel mit kürzern Schenkeln ac und fc. Der Kürze wegen schreibt man oft Winkel mit dem Zeichen \sphericalangle , und nennt den Winkel entweder mit 3 Buchstaben, die an seinen Schenkeln und seinem Scheitel stehen, als \sphericalangle bcd, wobei der Buchstabe am Scheitel allemal der mittlere seyn muß, oder mit einem einzigen Buchstaben, der am Scheitel oder zwischen den Schenkeln steht. Hier ist \sphericalangle n = \sphericalangle bcd, und \sphericalangle m = \sphericalangle fca genannt.

Die Linie df könnte auch eine andere Neigung zu ab haben, wobei die Winkel n und m größer, oder kleiner wär-

würden. Man denke sich cd um den Punct c beweglich, so könnte sie z. B. auch in die Richtung der punctirten Linie hi , und in alle mögliche andere Richtungen gebracht werden. In der Lage hi würde \sphericalangle ach eben so groß seyn, als \sphericalangle hcb , und die Linie hi die ab senkrecht durchschneiden.

§. 163. Wenn zwei gerade Linien ab und cd Fig. 2. einander senkrecht durchschneiden, so bilden sie an dem Durchschnittspuncte c vier gleichgroße Winkel, wo von jeder ein rechter Winkel heißt. So sind g , h , i , k rechte Winkel. Alle rechte Winkel sind gleich groß.

Man bringe die cd in die Lage hi Fig. 3., so sind die Winkel h und i um eben so viel größer geworden, als die Winkel g und k abgenommen haben. Was h und i gewinnen, verlieren die andern g und k .

Die Winkel h , i sind einander gleich, eben so g und k , und heißen Scheitelwinkel.

Die Winkel g und h heißen Nebenwinkel, haben einen gemeinschaftlichen Schenkel und machen zusammen so viel, als zwei rechte Winkel. So ist auch i Nebenwinkel von k ; k Nebenwinkel von h , denn $h + k = 2$ rechten u. s. w. Weil nun $g + h = h + k$ (die punctirte Linie weggedacht), so ist $g = k$; und da $h + k = k + i$, so ist $h = i$.

§. 164. Alle Winkel, die nicht rechte sind, heißen schiefe. Zu den schiefen Winkeln gehören:

- a. der spitze Winkel (z. B. \sphericalangle g), der kleiner, als ein rechter;
- b. der stumpfe Winkel (z. B. \sphericalangle h), der größer, als ein rechter;
- c. der hohle Winkel, der größer als 2 rechte, und nicht so gebräuchlich ist; oft wird er ein negativer Winkel genannt.

§. 165. Auf einer geraden Linie ab Fig. 4. können in dem Punct c die Scheitel mehrerer Winkel liegen; aber alle Winkel zusammengenommen sind nicht größer oder kleiner, als 2 rechte. Man nehme cd als senkrecht, so sind \sphericalangle bcd und \sphericalangle acd zwei rechte Winkel; im erstern liegen

liegen die spitzen Winkel m , n , und im letzteren o und p ; folglich sind $m + n + o + p = 2$ rechten Winkeln.

Da nun dasselbe auch für alle Winkel unterhalb der ab um den Punct c gilt, so folgt, daß alle Winkel um einen Punct c zusammengenommen gerade so viel, als 4 rechte Winkel betragen.

§. 166. Eine Fläche läßt sich durch nicht weniger, als 3 gerade Linien einschließen, wovon aber eine nicht länger, oder eben so lang seyn darf, als die Summe der beiden übrigen, weil sonst die längste Linie in die beiden andern fallen, und sie decken würde.

Eine von 3 Seiten eingeschlossene Figur heißt Triangel oder Dreieck, und wird oft durch \triangle bezeichnet. Im Dreieck sind 3 Winkel und 3 Seiten zu merken. Auch ohne vieles Nachdenken entdeckt man bald, daß der größte Winkel im \triangle der größten Seite, und der kleinste Winkel der kleinsten Seite gegenüber steht, daß eine jede Seite, bei übrigens gleichen Verhältnissen, mit ihrem gegenüberstehenden Winkel wächst und abnimmt. Denn wollte man den Schenkel eines Winkels im \triangle eine andere Lage geben, also ihre Neigung verändern, so würde die 3te Seite nothwendig auch länger oder kürzer werden müssen, wenn der \triangle geschlossen bleiben soll.

§. 167. Ein Dreieck heißt rechtwinklich, wenn ein rechter Winkel darin ist. Die beiden Seiten, welche den rechten Winkel einschließen, Catheten, und die, dem rechten Winkel gegenüberstehende heißt Hypotenuse. In der Fig. 5. ist bei a der rechte Winkel; ab und ac sind also Catheten, und bc Hypotenuse.

In keinem Dreieck kann es 2 rechte Winkel geben. Dem wäre z. B. $\angle c$ auch ein rechter, so läge bc da, wo die punctirte Linie ed hintrifft, ab und ed würden nie zusammen kommen, und der Figur die Eigenschaften eines Dreiecks fehlen.

§. 168. Schiefwinklich heißen alle Dreiecke, worin kein rechter Winkel ist. Dazu gehören

1. das gleichseitige abc , Fig. 6., worin alle Seiten, folglich auch alle Winkel einander gleich sind;

2. das

2. das gleichschenklliche des Fig. 7., worin 2 Seiten und 2 Winkel einander gleich sind. Ist $de = df$, so ist $\angle n = \angle o$.
3. das stumpfwinklliche, worin 1 Winkel größer, als ein rechter ist. In Fig. 8. ist $\angle m$ stumpf;
4. Das spitzwinklliche, worin jeder Winkel kleiner, als ein rechter ist. Fig. 6. und 7.

§. 169. Zwei gerade Linien ab und cd Fig. 9., die nach einerlei Richtung laufen, und in jedem Punkte gleichweit von einander abstehen, heißen Parallelen.

Es durchschneide eine dritte gerade Linie hk die Parallelen, so entstehen 8 Winkel o, p, q, r, s, t, u, v . Da die hk gegen beide Parallelen einerlei Neigung hat, so muß $\angle o = \angle s, p = t; q = u; r = v$. Nun sind o und r , so wie s und v Scheitewinkel, und einander gleich, folglich ist auch $r = s$; da die Scheitelwinkel p und q, t und u einander auch gleich sind, so ist $t = q$. Überhaupt sind $\angle o, r, s$ und v einander gleich; so wie auch p, q, t und u einander gleich sind.

Die Winkel q, t oder r, s heißen Wechselwinkel, und übereinstimmende Wechselwinkel sind einander gleich.

§. 170. In jedem Dreieck sind alle 3 Winkel zusammen genommen nicht größer und nicht kleiner, als zwei rechte Winkel. Es sey das Dreieck ABC Fig. 10., und m, t, o die 3 Winkel desselben. Man ziehe durch c die Linie DE parallel mit AB .

Nun ist $\angle t = \angle q$; und $\angle o = \angle r$, weil es Wechselwinkel (Siehe §. 169.); und $\angle m = \angle m$; folglich sind die 3 Winkel $q + m + r$ eben so groß, als $m + t + o$, und, da sie unter der geraden Linie DE an dem Punkte C liegen, zwei rechten Winkeln gleich (Siehe §. 165.).

Weil Winkel o und $\angle n$ zwei Nebenwinkel auf der AB um den Punkt B sind, so machen beide eben so viel, als 2 rechte Winkel. Wenn aber $m + t + o = n + o$

so ist $m + t = n$ (o subtr.)

Also ist der Winkel n außerhalb des Dreiecks ABC ,

ABC, an der verlängerten Seite AB so groß, als die beiden innern gegenüberliegenden Winkel $t + m$.

§. 171. Wenn von den 6 Stücken eines Dreiecks 3 bekannt sind, so lassen sich die andern 3 durch Zeichnung (und Rechnung) finden. Unter den bekannten muß wenigstens eine Seite seyn, weil ein großes Dreieck eben solche Winkel haben kann, als ein kleines. Z. B. in dem kleinen \triangle wären die Seiten 3, 4, 5; im großen aber 9, 12, 15, so wären in beiden die Seiten verschieden, aber die Winkel gleich.

Aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel kann nur Ein Triangel gebildet werden, denn es ist die Neigung und Länge jedes Schenkels gegeben, folglich paßt zur 3ten Seite auch nur Eine Linie. Daher sind sich zwei Dreiecke völlig gleich und decken sich, wenn zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel des einen \triangle gleichen Stücken im andern \triangle gleich sind.

Ein Dreieck ist bestimmt, wenn eine Seite und die beiden anliegenden Winkel gegeben sind. Es sey ab und $\angle o$ und $\angle m$ Fig. II. gegeben, so ist die Neigung der Seiten ac und bc gegeben, und sie können sich nur in dem Punkte c schneiden. Gesezt, es könnte dies auch in einem andern Punkte d geschehen, so müßte $\angle o$ zweierlei Neigungen des Schenkels ab zulassen, welches ein Widerspruch ist. Zwei Dreiecke sind einander völlig gleich und decken sich, wenn die eine Seite und die anliegenden Winkel in dem einen \triangle der einen Seite und den anliegenden Winkeln im andern \triangle gleich sind.

Da alle 3 Winkel eines Dreiecks zusammen genommen = 2 Rechten sind, so ist aus 2 Winkeln allemal der 3te zu finden, wenn man die Summe der beiden bekannten von 2 Rechten abzieht. Zwei Dreiecke müssen daher gleiche Winkel haben, wenn 2 Winkel des einen \triangle zweien Winkeln des andern \triangle gleich sind.

Drei Seiten bestimmen ein Dreieck vollkommen. Zwei Dreiecke, in denen die 3 Seiten übere-

S

ein-

einstimmen, d. h. wo die 3 Seiten des einen den 3 Seiten des andern gleich sind, sind sich völlig gleich und decken sich.

172. Die Größe eines Winkels ist ein Bogen, der aus der Winkelspitze mit einem Zirkel durch beide Schenkel gezogen wird. — Dies führt zum Kreis.

Ein Kreis entsteht, wenn eine gerade Linie Ac Fig. 12., die um den Punct c beweglich, mit dem andern Ende A um c herumgeführt wird. Die krumme, von A beschriebene, Linie heißt Peripherie, Umfang, Kreislinie, Kreis, Zirkel. Die cA heißt Radius oder Halbmesser. Der Punct c ist Centrum oder Mittelpunct, und steht vom Umfange überall gleich weit ab; eine Linie, die den Kreis trifft und durch's Centrum geht, AD , heißt Diameter oder Durchmesser, und theilt sowol die Kreislinie, als die von ihr eingeschlossene Fläche in 2 gleiche Theile. Sie ist $= 2$ Radien oder Halbmessern. Es sind unzählig viele Radien und Diameter im Kreise möglich, aber alle berühren den Mittelpunct.

Steht der Halbmesser Bc auf AD senkrecht, so theilt er den Halbkreis $DABD$ in zwei Viertelkreise, Quadranten. Betrachtet man Ac und cB als Schenkel des rechten Winkels \circ , so ist AB der diesem Winkel gehörige Bogen, und also das Maas desselben. Nun ist $AB \frac{1}{4}$ von der Kreislinie, folglich auch die Größe oder das Maas eines rechten Winkels $= \frac{1}{4}$ Peripherie.

§. 173. Um einen Bogen in Zahlen ausdrücken zu können, theilt man den ganzen Umfang, er sey groß oder klein, in 360 Theile, Grade genannt, den Grad in 60 Minuten, die Minute in 60 Sekunden, diese wieder in 60 Tertien, oder, was gewöhnlicher ist, in Decimalssekunden, und bezeichnet sie der Kürze wegen mit $^{\circ}$ (Grad), $'$ (Minute), $''$ (Sekunde), $'''$ (Tertie). So heißt $50^{\circ} 20' 30'' 12'''$ so viel als: 50 Grad, 20 Minuten, 30 Sekunden, 12 Tertien.

Ein Viertelkreis (das Maas eines rechten Winkels) ist $\frac{360}{4} = 90^{\circ}$; ein Halbkreis $= 2$ rechten Winkeln $= 180^{\circ}$; das Maas eines spitzen Winkels muß kleiner, als 90° , eines stumpfen größer, als 90° seyn. In Fig. 12 ist

$\angle o = \angle m =$ rechtem Winkel oder 90° ; $\angle n$ ist spitz, denn sein Bogen ist unter 90° ; und $\angle p$ größer, als 90° , also stumpf.

Unter Kreisfläche versteht man den von der Peripherie eingeschlossenen Raum. Ein Stück derselben ACE, welches von 2 Radien abgeschnitten wird, heißt Sector, Ausschnitt. Eine gerade Linie, die den Umfang an 2 Punkten durchschneidet und nicht durch's Centrum geht, heißt Sehne oder Chorde, als FG. Das von der Kreisfläche durch die Sehne abgeschnittene Stück FGH heißt Sehnenabschnitt.

Es sind unzählig viele Sehnen möglich, aber die größte von allen ist der Diameter selbst.

§. 174. Eine Figur von 4 gleichgroßen Seiten und 4 rechten Winkeln heißt Quadrat Fig. 13. Die Linie ad nach gegenüberstehenden Winkeln heißt Diagonale und theilt das Quadrat in 2 gleiche rechtwinklichte Dreiecke. Denn

$ab = cd$; $ac = bd$, weil es Seiten eines Quadrats sind; und $cb = cb$; folglich haben beide Dreiecke übereinstimmige Seiten, und sind also einander gleich.

§. 175. Eine Figur von 4 gleichen Seiten, aber zweierlei Winkeln, wovon die gegenüberstehenden nur einander gleich sind, heißt Rhombus, Raute oder verschobenes Quadrat. Fig. 14.

Die Diagonale ad theilt auch diese Figur in 2 gleiche Dreiecke abd und adc, wie leicht zu erweisen. Die \triangle sind schiefwinklicht.

§. 176. Wenn in einer Figur zwar 4 rechte Winkel, aber nur die gegenüberstehenden Seiten einander gleich sind, so heißt sie Rechteck oder Oblongum. Die Diagonale cb Fig. 15. theilt es in 2 gleiche rechtwinklichte Dreiecke abc und cbd.

§. 177. Die Figur 15 kann auch zwei spitze und zwei stumpfe Winkel haben, verschoben seyn (s. Fig. 16.), dann heißt sie Rhomboides (verschobenes Oblongum) oder längliche Raute. Die durch die Diagonale cb entstandenen Triangel sind einander gleich und schiefwinklicht.

§. 178. Quadrat, Rhombus, Rechteck (Oblongum) und Rhomboides haben auch den gemeinschaftlichen Namen Parallelogramme, weil ihre gegenüberstehende Seiten stets parallel sind. Ein Triangel ist allezeit die Hälfte desjenigen Parallelogramms, aus dem er durch die Diagonale gebildet wurde. Die rechtwinklichten Triangel entspringen aus dem Quadrat, oder aus dem Rechteck; die schiefwinklichten aus dem Rhombus oder Rhomboides. Man daher ein Dreieck beschaffen seyn, wie es will, so wird immer wieder ein Parallelogramm daraus werden, indem man einen gleichen Triangel schieflich daran fügt (ein Geschäft, das seiner Leichtigkeit wegen Anfängern zu empfehlen ist).

§. 179. Wenn in einer Figur nur 2 Seiten parallel sind, die beiden andern aber verschiedene Neigung haben, Fig. 17, so heißt sie Trapezium. Eine Diagonale *cb* theilt es in 2 ungleiche Dreiecke *abc* und *cbd*.

§. 180. Die Figur heißt Trapezoides, wenn keine der 4 Seiten mit einer andern parallel läuft Fig. 18. Die Diagonale *ad* theilt sie in 2 ungleiche Dreiecke *abd*, und *adc*.

§. 181. Eine von den Linien, die eine Figur umschließen, nennt man Grundlinie, Basis.

Unter der Höhe einer Figur versteht man die Länge des Perpendikels oder derjenigen Linie, die auf der Grundlinie senkrecht steht, und den entferntesten (höchsten) Punkt der Figur berührt. Im Quadrat und Rechteck ist die Höhe allemal die eine, auf der Grundlinie stehende, Seite; im rechtwinklichten Triangel ist die eine Cathete als Grundlinie, und die andere als die Höhe anzusehen; im Rhombus und Rhomboides ist die Höhe = dem Abstände der mit der Grundlinie parallelen Seite; im schiefwinklichten Dreieck ist die Höhe = dem Abstände der Winkelspitze, welche der Grundlinie gegenüber steht, von der (nöthigenfalls verlängerten) Grundlinie. Im gleichseitigen und gleichschenkligten Dreieck fällt das Perpendikel auf die Mitte der Grundlinie, und halbiert den Winkel an der Spitze, denn es entstehen 2 völlig gleiche rechtwinklichte Dreiecke

Dreiecke durch dasselbe, deren Congruenz leicht in die Augen fällt.

Das Perpendikel fällt noch in den \triangle , wenn die Winkel an der Grundlinie spitz sind. (In der Fig. 6 und 8 sind die Perpendikel durch punktirte Linien hp angegeben.) Es fällt außerhalb des \triangle , wenn ein Winkel an der angenommenen Grundlinie stumpf ist, wie in Fig. 8.

Die Flächen, welche die Parallelogramme einschließen, findet man dadurch, daß man Grundlinie und Höhe mit einander multiplicirt. Das Product ist Quadratmaß oder Quadratinhalt. — Sich davon zu überzeugen, zerlege man z. B. ein Rechteck durch Parallelen in kleine Quadrate von beliebiger Größe, so wird man gerade so viel Reihen von kleinen Quadraten bekommen, als die Seite eines solchen Quadrats in der Höhe des Parallelogramms enthalten ist. Bei schiefwinklichten Parallelogrammen hängt auf der Seite, wo der stumpfe Winkel liegt, gerade eben so viel über die Grundlinie, als auf der andern Seite fehlt; folglich wird auch ihr Flächeninhalt das Product der Grundlinie und Höhe seyn.

Da jeder Triangel $\frac{1}{2}$ Parallelogramm ist, das gleiche Grundlinie und gleiche Höhe mit ihm hat, so wird sein Flächenraum das halbe Product der Grundlinie und Höhe seyn.

Bei der Berechnung der Fläche einer Figur nimmt man die Grundlinie ohne etwanige Verlängerung wegen Fällung des Perpendikels.

§. 182. Parallelogramme von gleicher Grundlinie und Höhe sind einander der Fläche nach gleich, sie mögen in Hinsicht der Winkel auch noch so verschieden seyn.

Es sey $ABCD$ das eine, und $CBDF$ das andere Parallelogramm. Beide haben die gemeinschaftliche Grundlinie CD , und Höhe DB . Das Parallelogramm $ABDC$ besteht aus den Dreiecken 1 und 2, Fig. 20.; das Parallelogramm $BFDC$ aus den \triangle 2 und 3. Diese drei Dreiecke sind einander gleich. Denn

$\triangle 1$

$\triangle 1 = \triangle 2$, weil CB die Diagonale im Parallelogramm ist.

$\triangle 2 = \triangle 3$, weil beide übereinstimmende Seiten haben und DB die Diagonale des Parallelogramms CBFD ist.

Also ist $\triangle 1 + \triangle 2 = \triangle 2 + \triangle 3$

und Parall. ABDC = BFGD.

Zwar können die zu vergleichenden Parallelogramme in sehr verschiedenen Lagen erscheinen, allein der angeführte Satz behält immer seine Richtigkeit.

Weil Dreiecke als Hälften der Parallelogramme anzusehen sind, so gilt auch von ihnen der Satz:

Dreiecke von gleicher Grundlinie und Höhe schließen gleich große Flächen ein, mögen ihre Winkel auch noch so verschieden seyn.

§. 183. Parallelogramme und Dreiecke von gleicher Grundlinie, aber verschiedenen Höhen, verhalten sich zu einander, wie ihre Höhen.

P und p bezeichnen Parallelogramme; H und h ihre Höhen; und B die gemeinschaftliche Grundlinie: dann ist

$$P = B \cdot H$$

$$\text{und } p = B \cdot h$$

Und $P : p = B \cdot H : B \cdot h$ eine Proportion; (B dividirt

$$P : p = H : h$$

Sind die Höhen H und h gleich, so verhalten sie sich, wie ihre Grundlinien B und b. D. h.

$$P : p = B : b.$$

Und wenn Grundlinien und Höhen verschieden sind, wie die Producte aus beiden. $P : p = B \cdot H : b \cdot h.$

Was in Hinsicht dieser Verhältnisse von den Parallelogrammen gesagt worden, muß natürlicherweise auch von den Dreiecken gelten.

§. 184. Einer der wichtigsten Lehrsätze in der ganzen Mathematik ist der vom Pythagoras erfundene:

Im rechtwinklichten Dreieck ABC Fig. 21. ist das auf der Hypotenuse AC errichtete

tete Quadrat $ADFC$ eben so groß, als die beiden auf den Catheten errichteten Quadrate $ABJK$ und $BCGH$ zusammen genommen sind. Oder

$$AC \text{ Quadrat} = AB \text{ Quadrat} + BC \text{ Quadrat.}$$

Beweis. Ziehe BE parallel mit CF , so ist das Quadrat $ADFC$ dadurch in 2 Parallelogramme $ADEL$ und $LEFC$ getheilt, wovan ersteres dem Quadrat $ABJK$, und letzteres dem Quadrat $BCGH$ gleich ist. Diese Gleichheit ist eigentlich zu erweisen.

Man ziehe die beiden Hülfslinien AG und BF , so hat man 2 Dreiecke, die einander gleich sind,

$$\triangle AGC = \triangle BFC, \text{ denn}$$

$$AC = CF; CB = CG \text{ aus Bedingung.}$$

$\angle y + z = \angle x + z$, weil y und x rechte Winkel, folglich sind in beiden Dreiecken ACG und BFC zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel, also auch die \triangle einander gleich.

Aber $\triangle BCF = \frac{1}{2} LEFC$, weil beide gleiche Grundlinie CF und senkrechte Höhe CL haben; und $\triangle ACG = \frac{1}{2} CGHB$, weil sie gleiche Grundlinie CG und gleiche Höhe CB haben.

Sind aber die Hälften zweier Dinge einander gleich, so sind es auch die Ganzen. Folglich ist das Quadrat $BCGH =$ dem Rechteck $LEFC$.

Zöge man eine Hülfslinie von K nach C , und eine andere von B nach D , so ließe sich der Beweis, daß das Quadrat $ABJK =$ dem Rechteck $ADEL$, wie vorher führen.

§. 185, Mit Hülfe des pythagorischen Lehrsatzes lassen sich zwei und mehrere Quadrate in eins verwandeln, oder auch Differenzquadrate finden.

I. Man setze die gegebenen Seiten zweier Quadrate rechtwinklicht zusammen, und ziehe die Hypotenuse, welche die Seite des verlangten Quadrats ist, das so viel Fläche hat, als beide gegebene Quadrate. In Fig. 22. sind die gegebenen Seiten a und b rechtwinklicht zusammen gesetzt, und dadurch die Seite c gefunden,

Setzte

Setze man an die gefundene c abermals die Seite eines Quadrats rechtwinklich, so würde sich durch die neue Hypotenuse die Seite desjenigen Quadrats ergeben, das alle 3 Quadrate vereinigte.

- 2, Ein Quadrat zu machen, das so groß ist, als der Unterschied zweier Quadrate, ziehe man EA Fig. 22. unbestimmt lang, nehme die kleinste der gegebenen Quadratseite a und setze sie an E rechtwinklich; von B aus trage die andere Quadratseite b nach EA , wo sie nach D hintrifft. ED ist dann die Seite des gesuchten Unterschiedsquadrates

S. 186. Ähnlich sind zwei Dreiecke, wenn jeder Winkel des einen einem übereinstimmig liegenden Winkel des andern \triangle gleich ist, und die Dreiecke nur in der Größe der Seiten und nicht in den Winkeln verschieden sind. In Fig. 23. ist das innere Dreieck abc dem äußern größern ABC ähnlich, denn $\angle A = \angle a$; $\angle B = \angle b$; $\angle C = \angle c$. Da nun die Seiten von den Winkeln, die ihnen gegenüberstehen, abhängig und in beiden Dreiecken übereinstimmige Winkel sind, so stehen auch die Seiten des einen Dreiecks zu einander in demselben Verhältnis, wie die des andern \triangle zu einander. Ist z. B. die Seite x im großen \triangle um die Hälfte größer, als Seite M , so ist auch Seite z im kleinern \triangle um die Hälfte größer, als n ; wenn x und z parallel sind, so wird auch M und n ; so wie W und v parallel seyn, weil sie gleiche Neigungen zu einander haben. Dies drückt der Satz aus:

In ähnlichen Dreiecken sind diejenigen Seiten, die gleichen Winkeln gegenüberliegen, einander proportional, d. h. die Verhältnisse sind einander gleich, und geben eine Proportion.

$$\begin{aligned} x : M &= z : n \\ \text{und } x : W &= z : v \\ \text{also } z : v &= x : W \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

wenn also zwei Seiten des einen \triangle , und eine ähnlichliegende im andern \triangle bekannt sind, so läßt sich die andere ähnlichliegende Seite im 2ten Dreieck durch die Regel de tri finden.

§. 187. Wird in einem Dreieck eine Linie mit der Grundlinie parallel gezogen, so sind die dadurch abgeschnittenen Stücke einander proportional, denn es entstehen dadurch 2 Dreiecke ABC und dBg (wenn dg die Parallele ist) Fig. 24., welche gleiche Winkel haben und einander ähnlich sind. Es ist nämlich $\angle o = \angle m$ und $\angle B$ gemeinschaftlich, $\angle g = \angle c$. Daher gelten die Proportionen

$$\begin{aligned} Bd : dA &= Bg : gC \\ Bd : dg &= BA : AC \\ Bg : BC &= Bd : BA \\ AC : dg &= AB : dB. \end{aligned}$$

In allen Figuren, die einander ähnlich sind, sind die ähnlich liegenden Seiten einander proportional, sie mögen Dreiecke, oder andere Figuren bilden.

§. 188. Die Flächen ähnlicher Figuren verhalten sich zu einander, wie die Quadrate der ähnlich liegenden Seiten.

In den beiden ähnlichen Dreiecken ABC und abc ist $AG = H$ und $ag = h$ die Höhe; BC und bc Grundlinie = G, g Fig. 25. Dann gilt

$$\begin{aligned} g : G &= h : H \\ \text{also ist } \frac{G \cdot h}{g} &= H \end{aligned}$$

Man findet aber den Inhalt eines \triangle , wenn Grundlinie und Höhe mit einander multiplicirt und durch 2 dividirt wird, oder $\frac{G \cdot H}{2}$ Also verhalten sich auch

$$\begin{aligned} \triangle ABC : \triangle abc &= \frac{G \cdot H}{2} : \frac{gh}{2} \\ \triangle ABC : \triangle abc &= G \cdot H : gh \quad \text{durch 2 divid.} \\ \text{Für H seinen} & \\ \text{Werth } \frac{G \cdot h}{g} & \\ \text{gesetzt.} & \left. \begin{aligned} \triangle ABC : \triangle abc &= G \cdot \frac{G \cdot h}{g} : gh \\ \triangle ABC : \triangle abc &= G^2 \cdot h : g^2 h \quad \text{m. g mult.} \\ &= G^2 : g^2 \quad \text{durch h divid.} \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

Weil

Weil jede Seite Grundlinie oder G, g heißen kann, so gilt der Satz für jede Seite.

Aus der Betrachtung ähnlicher Figuren ergeben sich noch folgende Wahrheiten:

In ähnlichen Figuren verhalten sich die Umfänge (Perimeter) wie ähnlich liegende Seiten; und

die Flächen ähnlicher Figuren verhalten sich, wie die Quadrate ähnlichliegender Seiten (ihrer Diagonalen, ihrer Höhen oder Grundlinien); und, weil alle Kreise einander ähnlich sind, die Kreisflächen, wie die Quadrate der Diameter oder Radien, die Umfänge aber, wie die Diameter oder Radien selbst.

§. 189. Zur Ausmessung der Linien bedient man sich des Längenmaßes Ruthen, Fuß, Zoll, Linien und Scrupel. Die Ruthe gilt für die Einheit und wird im bürgerlichen Leben in 12 Fuß, der Fuß in 12 Zoll, der Zoll in 12 Linien, die Linie in 12 Scrupel; bei Mathematikern aber, des bequemern Rechnens wegen in 10 Fuß, 1 Fuß in 10 Zoll, dieser in 10 Linien, und diese in 10 Scrupel getheilt. Man bezeichnet in den Rechnungen die Ruthe mit ρ , den Fuß mit ρ' , den Zoll mit ρ'' , die Linie mit ρ''' , den Scrupel mit ρ'''' . Je nachdem nun die Ruthe in 10 oder 12 Theile getheilt wird, so nennt man die Eintheilung Decimal- oder Duodecimalmaß.

§. 190. Zur Ausmessung der Flächen nimmt man das Quadratmaß. Eine Quadratruthe ist eine Fläche, die rechtwinklicht eine Ruthe lang und eben so breit ist. Theilt man jede Seite derselben in Fuß, und zieht die Theilpunkte zusammen, so erhält man kleinere Quadrate, und zwar bei der Decimaltheilung 100, bei der Duodecimaltheilung 144 Quadratfüße. So läßt sich wieder der Quadratfuß in 100 oder 144 Quadratzolle, jeder dieser Zolle in 100 oder 144 Quadratlinien u. s. w. zerlegen.

Die Frage: wie viel Flächenraum eine Figur habe, sagt so viel: wie viel Quadratruthen, Quadratfuß, Quadratzolle u. s. w. lassen sich in die Fläche legen?

Anmerk.

Anmerk. In der Preussischen Monarchie ist das ehemalige Rheinländische Maas gesetzlich eingeführt, und seine wahre Größe soll nach dem Secundenpendel angegeben werden. In Vega's logarithmischen Tafeln findet man eine sehr ausführliche Tabelle zur Vergleichung allerlei Längen: Quadrat- und Höhlmaas im pariser Maas angegeben.

§. 191. In Kreise sind die Sehnen gleicher Bogen gleich.

Man ziehe zur Sehne AB Fig. 26. die Radien CA und CB, welche einen Winkel bei C einschließen, dessen Maas der Bogen AFB ist. Wenn nun DGE ein eben so großer Bogen ist, so ist $\sphericalangle m$, den die Radien CE und CD einschließen, auch dem $\sphericalangle x + y$ gleich. Daher ist $\triangle ABC = \triangle DEC$, folglich $AB = ED$.

§. 192. Weil die Dreiecke ABC und ECD gleichschenkllich sind, so theilt die CN, welche auf der Mitte von AB in N senkrecht steht, den Winkel ACB in zwei gleiche Theile, $\sphericalangle x = \sphericalangle y$; denn in den rechtwinklichten $\triangle ANC$ und NCB ist $AN = NB$; $AC = BC$, weil es Radien, $NC = NC$, also auch die ähnlichliegenden Winkel einander gleich, und $x = y$.

Das Perpendikel auf der Mitte einer Sehne geht daher allemal durch's Centrum, und theilt Sehne, Bogen und Winkel in zwei gleiche Theile.

§. 193. Der Abstand einer Sehne vom Centro wird auf dem aus dem Centro auf die Mitte der Sehne gefällten Perpendikel gemessen. Da nun die Sehnen gleicher Bogen gleich groß, und $\triangle ACB = DCE$, so muß auch der Abstand gleichgroßer Sehnen vom Mittelpunct eines Kreises gleich seyn.

§. 194. Eine gerade Linie, die an den Kreis hinstreift und ihn nur in einem einzigen Puncte g berührt, heißt Tangente (Berührende) Fig. 26. Weil eine gerade Linie aus dem Centro nach der Peripherie auf dem Puncte, den sie trifft, senkrecht steht, so wird auch der Radius Cg auf dem Berührungspuncte der Tangente Tg, und mithin auf Tg selbst senkrecht stehen. Folglich steht auch Tangente Tg auf dem Radius Cg senkrecht.

§. 195.

§. 195. Jeder Winkel an der Peripherie ist halb so groß, als der Winkel am Mittelpunct, der mit ihm auf gleichem Bogen steht. Oder $\angle y = \frac{1}{2} x$; denn $\triangle CDB$ Fig. 27. ist gleichschenkllich, daher $y = z$; und x ist der äußere Winkel am \triangle , folglich so groß, als $y + z = 2y$; und $y = \frac{1}{2} x$.

2. Der Satz gilt auch, wenn der Winkel an der Peripherie mit seinen Schenkeln das Centrum umschließt, Fig. 28.

$$\angle ADB \text{ oder } y + z = \frac{1}{2} \text{ACB} \text{ oder } \frac{u+x}{2}.$$

Man ziehe DE durch das Centrum, so ist $\triangle DCA$ gleichschenkllich, und $\angle y = \angle r$; $\angle u$ aber $= y + r$; also $u = 2y$; und $y = \frac{1}{2} u$. Dasselbe läßt sich auch auf der andern Seite beweisen, wo $x = 2z$, und $z = \frac{1}{2} x$.

$$\begin{aligned} & \text{also } \frac{1}{2} u + \frac{1}{2} x = y + z \\ & = \angle \frac{\text{ACB}}{2} = \angle ADB. \end{aligned}$$

3. Und wenn die Schenkel des Peripheriewinkels z das Centrum nicht berühren noch umschließen, Fig. 29, so gilt doch

$$\angle x = \angle 2z, \text{ oder } z = \frac{1}{2} x.$$

Man ziehe die Hülfslinie DCE durch's Centrum, so ist im gleichschenkllichen $\triangle CDB$ $\angle y + z = \angle n$, und der äußere Winkel $x + u$ am $\triangle CDB = y + z + n$.

Nach dem ersten Falle ist $\angle u = 2y$

$$\text{Aber } u + x = y + z + n$$

$$\text{und da } n = y + z$$

$$\text{so ist } u + x = 2y + 2z$$

$$\text{Da nun } u = 2y$$

$$\text{so muß } x = 2z, \text{ oder } z = \frac{1}{2} x \text{ seyn.}$$

§. 196. Das Perpendikel auf dem Diameter eines Kreises ist die mittlere Proportionallinie zwischen den durch dasselbe abgeschnittenen Stücken des Diameter, oder Fig. 30.

$$AE : ED = ED : EB, \text{ und } ED^2 = AE \cdot EB.$$

Ziehe die Hülfslinien AD und DB , so ist $\angle ADB$ ein

Recht-

Rechter, weil er der Winkel an der Peripherie ist, dessen
Ecken einen Halbkreis $= 180^\circ$ abschneiden, also

$\triangle ADB$ rechtwinklicht, oder $z + n = 90^\circ$

$\triangle ADE$ ist bei E rechtwinklicht (oder $m = 90^\circ$),
und hat mit jenem \triangle den $\sphericalangle x$ gemein. Daher

$\triangle ADB$ ähnlich dem $\triangle ADE$; $m = z + n$;
 $x = x$ und daher $z = y$.

Ferner ist auch $\triangle DEB$ den beiden ähnlich, denn er ist
bei v rechtwinklicht und y ist zwei \triangle gemeinschaftlich,
folglich $\sphericalangle n = \sphericalangle x$.

Nun sind in ähnlichen Dreiecken die Seiten, welche
gleichen Winkeln gegenüber stehen, einander proportional,

$$AE : ED = ED : EB$$

(sieht geg. $\sphericalangle z$) $(y) = (x) (n)$

denn $z = y$, und $x = n$.

Anmerk. Man nennt die ED auch Ordinate und bezeich-
net sie gemeinlich mit y ; den Diameter AB mit a ,
und das Stück BE desselben (Abscisse genannt) mit x ,
und sucht dann einen Werth für y oder ED folgender-
maßen: $AE = a - x$, $EB = x$, dies in die obige
Gleichung gesetzt:

$$\frac{a - x : y = y : x}{ax - x^2 = y^2}$$

$\sqrt{ax - x^2} = y$, welchen Ausdruck man die Gleichung für den Kreis nennt.

S. 197. Vielecke, Polygone, sind Figuren,
die mehr, als 4 Seiten, haben. Wenn alle Seiten gleich
lang sind, so heißt das Vieleck regulär, im Gegentheil
irregulär. Wir beschäftigen uns hier nur mit den re-
gulären oder gleichseitigen Vielecken. Man beschreibt die
Vielecke mit Hilfe eines Kreises, welchen man in so viel
Theile theilt, als das Vieleck Seiten haben soll; die
Theilpunkte zusammengezogen, bilden das Vieleck. Folg-
lich sind die Seiten eines Vielecks als Sehnen gleicher
Bogen anzusehen. Zieht man aus dem Mittelpunct des
Kreises gerade Linien nach den Ecken, so erhält man eben
so viel völlig gleiche Dreiecke, als das Vieleck Seiten hat.

S. 198. Centriwinkel heißen diejenigen Winkel,
die am Mittelpunct entstehen, wenn Radien nach allen
Ecken eines Vielecks gezogen werden.