# Der Rathgeber bei mathematischen Beschäftigungen

Stöpel, August

Stendal, 1819

§. 197-206 Vielecke und Kreis;

urn:nbn:de:hbz:466:1-63556

Rechter, weil er der Winkel an der Peripherie ist, dessen Schenkel einen Halbkreis $= 180°$ abschneiden, also

$\triangle$ ADB rechtwinklicht, oder $z + n = 90°$

$\triangle$ ADE ist bei E rechtwinklicht (oder $m = 90°$), und hat mit jenem $\triangle$ den $< x$ gemein. Daher

$\triangle$ ADB ähnlich dem $\triangle$ ADE; $m = z + n$;

$x \quad x$ und daher $z = y$.

Ferner ist auch $\triangle$ DEB den beiden ähnlich, denn er ist bei v rechtwinklicht und y ist zwei $\triangle$ gemeinschaftlich, folglich $< n = < x$.

Nun sind in ähnlichen Dreiecken die Seiten, welche gleichen Winkeln gegenüber stehen, einander proportional,

$$AE : ED = ED : EB$$

(steht geg. $< z$) $\quad (y) = (x) \quad (n)$

denn $z = y$, und $x = n$.

**Anmerk.** Man nennt die ED auch Ordinate und bezeichnet sie gemeiniglich mit y; den Diameter AB mit a, und das Stück BE desselben (Abscisse genannt) mit x, und sucht dann einen Werth für y oder ED folgendermaßen: $AE = a - x$, $EB = x$, dies in die obige Gleichung gesetzt:

$$a - x : y = y : x$$

$$ax - x^2 = y^2$$

$\sqrt{(ax - x^2)} = y$, welchen Ausdruck man die **Gleichung für den Kreis** nennt.

§. 197. Vielecke, Polygone, sind Figuren, die mehr, als 4 Seiten, haben. Wenn alle Seiten gleich lang sind, so heißt das Vieleck regulär, im Gegentheil irregulär. Wir beschäftigen uns hier nur mit den regulären oder gleichseitigen Vielecken. Man beschreibt die Vielecke mit Hülfe eines Kreises, welchen man in so viel Theile theilt, als das Vieleck Seiten haben soll; die Theilpuncte zusammengezogen, bilden das Vieleck. Folglich sind die Seiten eines Vielecks als Sehnen gleicher Bogen anzusehen. Zieht man aus dem Mittelpunct des Kreises gerade Linien nach den Ecken, so erhält man eben so viel völlig gleiche Dreiecke, als das Vieleck Seiten hat.

§. 198. Centriwinkel heißen diejenigen Winkel, die am Mittelpunct entstehen, wenn Radien nach allen Ecken eines Vielecks gezogen werden.

Polygonwinkel sind die, welche zwei Seiten des Vielecks mit einander machen.

Alle Centriwinkel eines Vielecks, so wie alle Polygonwinkel sind einander gleich.

§. 199. Die Zeichnung des Sechsecks ist die leichteste, denn jede Seite desselben ist dem Radius gleich, und man erhält die Theilpuncte im Kreise, wenn man den Halbmesser 6 mal in demselben umschlägt. Fig. 31. ist GFEDBA ein in einem Kreise beschriebenes Sechseck. Die Winkel m, n, o, p, q, r sind Centriwinkel, und da die Summe aller Winkel um den Punct c nur 360° beträgt, so wird hier jeder $= \frac{360}{6} = 60°$ seyn (Im Fünfeck würde ein Centriwinkel $= \frac{360}{5} = 72°$ seyn). Die Winkel u, t, s, v sind halbe Polygonwinkel, und einander gleich.

Weil alle Radien einander gleich sind, so sind die Dreiecke in einem jeden Vieleck gleichschenklicht, und daher die < t und s gleich dem Rest, der bleibt, wenn ein Centriwinkel p von 180° (der Summe aller Winkel im Dreieck) abgezogen wird; weil $t = s$, so ist jeder = dem halben Reste.

Daher $\frac{360}{z}$ = Centriwinkel, wo z die Anzahl der Seiten bedeutet; und $\frac{360}{z}$ von 180° abgezogen = dem Polygonwinkel $= t + s$.

Man betrachte AB als Sehne, so wird ein Perpendikel aus C die AB und < p in 2 gleiche Theile theilen. Dies Perpendikel ist die Höhe eines jeden Dreiecks im Vieleck und wird durch den pythagorischen Satz gefunden, denn △ ACP ist bei P rechtwinklicht.

$$CA^2 = AP^2 + CP^2$$
$$CA^2 - AP^2 = CP^2$$
$$\sqrt{(CA^2 - AP^2)} = CP$$

so wie überhaupt jede von den 3 Linien AC (Radius) AP

AP (halbe Seite des Vielecks), und PC (Perpendikel) durch diesen Satz gefunden werden kann.

Eigentlich ist durch den Radius, und die Anzahl der Seiten eines Vielecks alles in der ganzen Figur bestimmt, d. h. Größe der Seiten und des Perpendikels, Winkel rc. In der Flächenmessung werden Formulare mitgetheilt werden, allerlei Aufgaben bei Vielecken zu berechnen.

Weil im Sechseck alle Seiten Radien sind, so müssen auch die Winkel p, t, s einander gleich, d. h. jeder $60^\circ$ seyn.

Der Flächenraum eines der Dreiecke im Polygon mit der Anzahl der Seiten multiplicirt, giebt den Flächenraum des Vielecks.

§. 200. Auch um einen Kreis läßt sich ein Vieleck zeichnen, wenn man zuvor ein eben so vielseitiges in demselben beschreibt, und dann des äußern Vielecks Seiten mit denen des innern parallel zieht. Fig. 32. ist dies zur Hälfte geschehen.

Die Berechnung des äußern Vielecks gründet sich auf Folgendes:

Wenn ad, db, bf Seiten des Vielecks im Kreise, und AD, DB, BF Seiten des Vielecks außerhalb, und Radius und Seite des innern bekannt sind, so theilt das Perpendikel cm nicht nur bf, sondern auch BF in 2 gleiche Theile, und bildet rechte Winkel.

Nun ist $cm^2 = cb^2 - mb^2$

$$cm = \sqrt{(cb^2 - mb^2)}$$

Da cn = Radius, und die $\triangle$ Cmb und CnB einander ähnlich, so gilt:

$$Cm : mb = Cn : nB$$

$$\text{und } nB = \frac{mb \cdot Cn}{Cm}, \text{ und } 2nB = BF$$

§. 201. Will man die Seite eines Vielecks von doppelt so vielen Seiten berechnen, so verfahre man also: Fig. 32.

Wenn EF die Seite des gegebenen Vielecks, Cp das Perpendikel; fq = qE die Seiten des doppelt so vielseitigen, so ist nach vorigem §. die Cp und pq zu finden.

Im

Im rechtwinklichten $\triangle$ pfq ist

$$pf^2 + pq^2 = fq^2$$

$$\sqrt{(pf^2 + pq^2)} = fq = \text{der Seite des gesuchten Vielecks.}$$

Setzt man die Vervielfältigung der Seiten eines im Kreise beschriebenen Vielecks fort, bis die Seiten so klein werden, daß sie von der krummen Linie nicht zu unterscheiden sind, so wird man durch die Addition aller Seiten beinahe die Kreislinie selbst bekommen. Thut man dasselbe auch bei einem Vielecke außer dem Kreise, so erhält man die Kreislinie auch beinahe, jedoch etwas zu groß. Der Unterschied zwischen beiden Resultaten halbirt und zu dem kleinern Resultat addirt, wird die krumme Linie noch genauer, aber niemals völlig genau, angeben.

§. 202. Ludolf nahm den Diameter eines Kreises = 1, oder 1000000 und fand nach angezeigter Art die Kreislinie zu 3,141592; oder wenn der Durchmesser 1000000 ist, so ist der Umfang 3141592, welches Verhältniß des Diameters zur Peripherie das Ludolfische genannt, und sehr gewöhnlich ist. Ein anderes Verhältniß ist 113 : 355; oder 3183 : 10000.

Wir wollen uns des Ludolfischen bedienen, und das Verhältniß 1 : 3,141592 beständig durch p ausdrücken, welcher Buchstabe demnach die Zahl 3,141592 bedeutet, von der wir so viel Decimalstellen nehmen können, als wir wollen, und als die gewünschte Genauigkeit fordert. Gewöhnlich werden 2 Decimalstellen genügen.

Da die Kreise ähnliche Figuren sind, so findet man den Umfang eines jeden Kreises, wenn man den Durchmesser und Umfang eines einzigen weiß, durch die Proportion.

Es sey D der Durchmesser und U der Umfang eines Kreises, so giebt $1 : 3,14159.. = D : U$

$$= p$$

$$pD = U = \text{Umfang,}$$

$$\text{und also } \frac{U}{p} = D = \text{Durchmesser.}$$

Weil alle Kreise in 360° getheilt werden, so kann man auch die Länge eines Bogenstückes für einzelne Grade bestimmen.

§. 203.

§. 203. Man kann die Kreislinie als ein Vieleck von unendlich vielen Seiten ansehen, und ein bestimmtes Stück davon für eine solche Seite nehmen, von der sich Linien nach dem Centro ziehen lassen, wodurch ein Dreieck entsteht, dessen Höhe der Radius, und dessen Grundlinie der Bogen ist. Der Flächenraum eines solchen Sectors würde durch das halbe Product des Bogens in den Radius gefunden werden. Setzt man statt des Bogens den ganzen Umfang, so erhält man den Flächenraum des Kreises, welcher demnach einem Dreieck gleicht, dessen Grundlinie der Umfang, und dessen Höhe der Radius ist. Drücken wir dies in Zeichen aus, so ist Fläche des Kreises $= \frac{U \cdot r}{2}$, wobei $r =$ Radius; oder da $U = Dp$, und $D = 2r$, so haben wir das Formular $\frac{2r \cdot r \cdot p}{2} = r^2 p =$ Kreisfläche.

Das Quadrat des Diameters muß 4 mal größer seyn, als das des Radius, weil letzterer nur $\frac{1}{2} D$ ist, folglich wird man auch die Kreisfläche finden durch $\frac{D^2 p}{4}$.

§. 204. Der Kreis ist die vollkommenste Figur. Kommt es darauf an, mit einer gegebenen Umfassung die größtmögliche Fläche einzuschließen: so wähle man die kreisförmige, denn der Kreis schließt bei gleichem Umfange von allen möglichen Figuren die größte Fläche ein.

§. 205. Die Flächen mehrerer Kreise verhalten sich zu einander, wie die Quadrate ihrer Halbmesser oder Radien, oder ihrer Diameter. Denn wenn A und B zwei Kreise vorstellen, so ist

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{D^2 p}{4} \\ B &= \frac{d^2 p}{4} \end{aligned}\right\} \text{ also } A : B = \frac{D^2 p}{4} : \frac{d^2 p}{4}$$

$$A : B = D^2 p : d^2 p \quad \text{(4 dividirt.}$$

$$A : B = D^2 : d^2 \quad \text{(p divid.}$$

Oder

$$\left.\begin{aligned} A &= R^2 p \\ B &= r^2 p \end{aligned}\right\} \text{ also } A : B = R^2 p : r^2 p$$

$$A : B = R^2 : r^2$$

§. 206. Wie allerlei Vielecke gezeichnet und berechnet werden, wie die Fläche der Kreisstücke, und allerlei anderer krummlinigten Figuren zu finden sey, wird in der Lehre von Linien- und Flächenmessung vorkommen.

§. 207. Ehe wir zur Betrachtung der Körper schreiten, müssen wir noch Einiges über die Lage der Ebenen gegen einander berühren.

Unter einer Ebene stelle man sich eine völlig gerade Fläche nach beliebiger Länge und Breite vor, in welcher gerade Linien, die man von allen Puncten ihres Umfanges über dieselbe zieht, mit allen ihren Puncten liegen. Die Begrenzung der Ebene kann krumm, eckig oder gerade seyn, es gehören diese Eigenschaften nicht mit zu ihrem Begriff. (Ein Spiegel, stillstehendes Wasser kann die sinnliche Anschauung einer Ebene erleichtern.) Obgleich die Ebene ohne alle Dicke und Tiefe seyn muß, so kann man sich doch ihre Ausdehnung nach Länge und Breite unbegrenzt vorstellen.

§. 208. Die Vorstellung mehrerer Ebenen gegen einander auf dem Papier ist deshalb schwierig, weil das Papier nur eine Ebene vorstellt, und darauf Linien und Puncte zu zeichnen sind, die außerhalb desselben liegen. (Durch Kartenblätter, welche man also legt, wie es die Betrachtungen erfordern, kommt man der Einbildungskraft des Ungeübten sehr zu Hülfe. Die auf einer Ebene stehenden Linien können durch Drathstücke oder Nadeln versinnlicht werden.)

§. 209. Zwei Puncte bestimmen die Lage einer Ebene nicht, denn ein, nur in 2 Puncten befestigtes Kartenblatt kann sich um sie, wie um eine Axe drehen, und allerlei Lagen haben. Drei Puncte, die nicht in einer geraden Linie liegen, bestimmen die Lage einer Ebene vollkommen. Ein Tisch steht auf drei Beinen auf jedem Boden fest. Ein vierbeinigter Tisch kann wanken, weil die Füße 4 Puncte vorstellen, durch welche 2 Ebenen gelegt werden können. Jeder Triangel und jeder Kreis wird nur in einer Ebene liegen, denn 3 Puncte bestimmen diese Figuren.