Der Rathgeber bei mathematischen Beschäftigungen

Stöpel, August

Stendal, 1819

§. 213-237 geometrische Körper.

§. 210. Eine gerade Ebene kann auf einer Ebene unter unzähligen Winkeln stehen. (Eine Nadel auf einer Tischfläche befestigt zeigt dies deutlich.) Sie steht aber senkrecht, wenn sie mit der Ebene rings herum rechte Winkel macht. Sie kann mit zwei, in einer geraden Linie liegenden Puncten rechte Winkel, und mit allen übrigen schiefe Winkel machen. Steht aber eine Linie so auf einer Ebene, daß sie mit 2 nicht in einer geraden Linie liegenden Puncten rechte Winkel macht, so steht sie auf der ganzen Ebene senkrecht. Giebt man daher einem gemeinen Winkelhaken noch einen 3ten Schenkel, so kann man mittelst desselben die senkrechte Stellung einer Linie auf einer Fläche bekommen.

§. 211. Zwei Linien, die auf einer Ebene senkrecht stehen, sind parallel, denn es befinden sich um beide rechte Winkel.

Wenn sich zwei senkrechte Ebenen schneiden, so ist die Durchschnittslinie auch senkrecht. Z. B. die senkrechten Seitenwände eines Zimmers durchschneiden sich in der Ecke senkrecht, die Ecke ist die Durchschnittslinie und steht auf dem Fußboden senkrecht.

Ein Perpendikel, welches durch mehrere parallele Ebenen geht, steht auf allen senkrecht.

Steht eine Ebene auf einer andern, so machen beide einen Winkel, welcher Flächenwinkel, Neigungswinkel heißt, und sehr verschieden seyn kann, nachdem sich die Ebenen gegen einander neigen.

§. 212. Mit 2 oder 3 Ebenen läßt sich noch kein Raum einschließen. Zum wenigsten gehören dazu 4 Ebenen, wie jeder Versuch beweist.

§. 213. Ein Körper wird von Ebenen, die man Seitenflächen nennt, eingeschlossen. Die Geometrie lehrt, wie der durch die Seitenflächen eingeschlossene Raum zu berechnen sey.

Das Gefundene heißt der kubische oder körperliche Inhalt. Die äußere Umgebung oder der Flächenraum aller Seiten heißt das Netz, auch die Oberfläche des Körpers; diejenige Seite desselben, worauf er steht, oder stehen könnte, nennt man Grundfläche; ein Perpendikel auf der Grundfläche aus dem höchsten Punct des

Körpers heißt seine Höhe, oft auch, um Mißdeutungen vorzubeugen, senkrechte oder gerade Höhe.

§. 214. Diejenigen Körper, deren Ebenen ihren Grund in geraden Linien oder im Kreis haben, sind: Prisma, Parallelopipedon, Kubus oder Würfel, Cylinder, Piramyde, Kegel und Kugel, und nur sie werden gemeiniglich in der Geometrie abgehandelt.

§. 215. Der sogenannten Platonischen Körper, deren Seiten Polygone, oder deren Ecken alle gleichen körperlichen Raum einschließen, sind nur fünf: Tetraeder, Würfel, Octoeder, Dodecaeder, Icosaeder; und mehrere sind auch nicht möglich.

Die Zeichnung und Berechnung dieser Körper folgt unten; hier nur eine allgemeine Betrachtung über die geometrischen Körper.

§. 216. Das Maaß, womit die Körper gemessen werden, ist der Würfel oder Kubus, daher es auch Kubikmaaß heißt. Eine Kubikruthe ist ein Körper, der rechtwinklicht eine Ruthe lang, eben so breit und hoch ist. Seine Grundfläche ist daher eine Ebene von einer Quadratruthe, oder 10. 10 = 100 Quadratfuß. Stellt man ihn sich auch 10 Fuß hoch vor, so besteht der ganze Körper aus 10. 10. 10 = 1000 Kubikfuß. Theilt man die Ruthe in 12 Theile, so hat die Grundfläche 12. 12 = 144 Quadratfuß, und der Körper 12. 12. 12 = 1728 Kubikfuß Duodecimalmaaß.

Anmerk.	Decimalmaaß.	Duodecimalmaaß.
Ein Kubikfuß wird	10. 10. 10 = 1000 Kubikzoll,	od. 1728 Kubikz.
ein Kubikzoll —	10. 10. 10 = 1000 Kubiklin.,	od 1728 K. Linien
eine Kubiklinie —	10. 10. 10 = 1000 K. Scrupl.	od. 1728 K. Scpl.

§. 217. Körper, deren Seitenflächen senkrecht auf der Grundfläche stehen, haben oben eine Decke, welche der Grundfläche völlig gleich ist, und daher hat ein solcher Körper eigentlich 2 Grundflächen. Dazu gehören:

1. der Würfel, welcher in 6 gleiche Quadrate eingeschlossen ist;
2. das Parallelopipedon mit 2 Grund- und 4 Seitenflächen, wovon 2 gegenüberstehende gleich, alle

alle aber Parallelogramme sind. (Ein längliches Kästchen, der Raum eines rechtwinklichten 4eckigen Zimmers sind Körper dieser Art.)

3. Das Prisma, dessen 2 Grundflächen 3, 4, 5 und mehr Seiten haben, worauf eben so viel Seitenflächen senkrecht stehen, die Parallelogramme sind. (Ein senkrecht stehender überall gleich dicker Pfeiler, welcher 3, 4, 5 und mehr Ecken hat.)

4. Cylinder, dessen beide Grundflächen Kreise sind, und dessen Seitenfläche wie der Kreis gebogen ist. (Eine Walze, ein runder Thurm, eine Tubusröhre ꝛc.)

Man findet den körperlichen Inhalt dieser 4 Arten von Körpern dadurch, daß man den Flächenraum der Grundfläche mit ihrer senkrechten Höhe multiplicirt. Denn es können eben so viel Schichten von einer gewissen Dicke über der Grundfläche liegen, als die Höhe Theile hat, die einzeln so lang sind, als die Dicke der Schichten angenommen ist. Z. B. es sey die Grundfläche = ein Quadratfuß, so würde in einer Schicht von 1 Fuß Höhe, 1 Kubikfuß, und in jeder folgenden eben so viel körperlicher Inhalt enthalten seyn. Die Gestalt der Grundfläche mag noch so verschieden seyn, so wird sich doch ihr Quadratinhalt berechnen lassen, und immer die Regel gelten, daß Grundfläche mal Höhe den körperlichen Inhalt dieser Körper giebt.

§. 218. Wenn die Seitenflächen dieser 4 Körper, die man auch prismatische nennt, nicht auf der Grundfläche senkrecht stehen, so heißen sie schiefe, ihre Seitenflächen sind nicht mehr Rechtecke, sondern verschoben, und ihre Höhe mißt ein Perpendikel aus dem höchsten Punct auf die Grundfläche oder deren Verlängerung. Alsdann aber sind sie, wie die geraden, zu behandeln.

§. 219. Die Piramyde und der Kegel haben nur Eine Grundfläche, und ihre Seitenflächen laufen oben in einen Punct zusammen. Die Grundfläche der Piramyde kann 3, 4, 5 und mehr Seiten haben; die Seitenflächen derselben sind Dreiecke, deren Grundlinien mit den Seiten der Grundfläche einerlei sind.

Die

Die Grundfläche des Kegels ist ein Kreis; seine Seitenfläche (Mantel oder krumme Oberfläche genannt) ist, ausgebreitet, ein Kreissector, dessen Centrum in der Spitze des Kegels liegt. (Ein Zuckerhut giebt eine sinnliche Vorstellung des Kegels.)

§. 220. Ein Kegel ist eine Piramyde von unendlich vielen Seiten, und wenn die Grundflächen und Höhen dieser beiden Körper gleich sind, so sind es auch ihre körperlichen Inhalte. Denn gesetzt, man schnitte von beiden dünne Scheiben mit der Grundfläche parallel ab, so müßten sich diese nothwendig an Masse gleich seyn, und setzte man die Trennung fort, so würde man gleich viel und gleich große, obgleich verschieden gestaltete, Stücke oder Theile bekommen. Sind aber die Theile sich einzeln an Zahl und Inhalt gleich, so müssen es auch die Ganzen seyn. Piramyden von gleicher Grundfläche und Höhe schließen gleichgroße Räume ein, wenn sie auch in der Anzahl der Seiten noch so sehr verschieden sind.

§. 221. Jedes dreieckte Prisma läßt sich in 3 gleichgroße Piramyden zerschneiden.

Anmerk. Durch Linien auf dem Papiere läßt sich der Beweis dieses Satzes nie dem Anfänger ganz deutlich und überzeugend machen. Der Lehrer führe ihn aber sinnlich, indem er z. B. ein dreieckiges Prisma aus Holz verfertigen, und nach der Anweisung, die jedes Lehrbuch giebt, durchschneiden läßt. Er wird 3 gleichgroße Piramyden, wovon 2 völlig gleich, und eine schiefwinklicht, erhalten. Daß sich aber diese 3 Piramyden an Masse gleich sind, beweise er so: die Gleichheit der beiden ersten fällt in die Augen, denn sie haben die Grundfläche des Prisma's zur Grundfläche, und seine Länge zur Höhe; legt man nun eine Seitenfläche der ersten Piramyde auf eine Seitenfläche der 3ten (schiefen) Piramyde, so decken sich beide, und folglich nehme man diese zur Grundfläche bei der Vergleichung; die Höhe dieser so gelegten Körper ist die Dicke des Prisma. Daher haben auch sie gleiche Grundfläche und Höhe und sind dem Inhalte nach einander gleich.

§. 222. Wenn die Piramyde der 3te Theil eines prismatischen Körpers ist, so muß es der Kegel auch seyn. §. 220.

§. 220. Man wird ihren Körperinhalt also finden, wenn man ihre Grundfläche mit der Höhe multiplicirt und durch 3 dividirt.

§. 223. Kegel und Piramyde heißen abgekürzt, wenn die Spitze durch einen der Grundfläche parallelen Schnitt davon getrennt worden ist. Man wird den Inhalt derselben finden, wenn man die fehlende Spitze für sich als einen Kegel oder eine Piramyde berechnet, und vom ganzen Körper (wie er mit der Spitze seyn würde) abzieht. Die Länge der fehlenden Spitze findet man durch eine leichte Rechnung aus den Durchmessern der Grund- und Durchschnittsfläche, und Höhe. Es sey R = Halbmesser der Grundfläche, r = Halbmesser der Durchschnittsfläche, H die Höhe des ganzen, und h die Höhe des abgekürzten Körpers, so folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke Fig. 121.

ep : po = cm : mb, d. i. in angenommenen Zeichen

$$(R-r) : h = R : H, \text{ also } H = \frac{h \cdot R}{R-r}$$

und H — h ist die Höhe der fehlenden Spitze bno.

Anmerk. Ueberhaupt ist es gut, mit dieser Betrachtung über die Körper zugleich die Zeichnung und Netze derselben zu vergleichen, wozu unter § 424. bis 443 Anleitung gegeben wird. Dann wird es auch nicht schwer werden, die Oberflächen der Piramyde Fig. 120, und Fig. 122 zu berechnen.

§. 224. Eine Kugel entsteht, wenn sich ein Halbkreis um den Diameter bewegt. Daher

a. stehen alle Puncte auf ihrer krummen Oberfläche gleichweit vom Mittelpunct ab;
b. sind alle Radien gleich lang;
c. sind alle Kugeln ähnliche Körper;
d. ist jede Durchschnittsfigur, welche durch eine schneidende Ebene, die durch die Kugel dringt, entsteht, ein Kreis, und jeder Kugelschnitt eine Kreisfläche;
e. steht ein Perpendikel aus dem Centro auf der Durchschnittsfigur allemal in ihrer Mitte;

f. trifft

f. trifft der größte Schnitt allemal das Centrum, und theilt die Kugel in zwei Halbkugeln;

g. schneiden diejenigen Ebenen, welche in gleichen Entfernungen vom Mittelpunct die Kugel durchdringen, gleichgroße Stücke ab.

Von der Wahrheit dieser Sätze wird sich jeder, der die Lehre vom Kreis wohl begriffen, leicht überzeugen, daher übergehen wir die Beweise.

§. 225. Eine gerade Linie durch den Mittelpunct der Kugel bis zum Umfange heißt Diameter, die Hälfte ist Radius der Kugel. Die Endpuncte eines Diameters, um welche sich die Kugel wälzen läßt, heißen Pole, ihr Diameter Axe.

§. 226. Eine schneidende Ebene, welche den Mittelpunct der Kugel trifft, bildet auf ihrer Oberfläche einen größten Kreis. Das Centrum eines größten Kreises ist also zugleich der Mittelpunct der Kugel. Es sind unzählig viel größte Kreise möglich.

§. 227. Ein kleinerer Kreis entsteht auf der Oberfläche, wenn die schneidende Ebene nicht durch das Centrum geht. Es sind unzählig viele möglich.

§. 228. Weil die Oberfläche der Kugel durch den Kreis gebildet wurde, so theilt man sowol die größten, als die kleinern Kreise auch in 360 Grade und ihre Unterabtheilungen.

§. 229. Ein größter Kreis, der von den Polen überall 90° weit absteht, heißt Aquator oder Gleicher.

§. 230. Um das Verhältniß der Oberfläche zum Diameter zu finden, legte man unendlich nahe schneidende Ebenen durch die Kugel und nahm die dadurch abgeschnittenen Stücke für abgekürzte Kegel, deren Oberfläche man addirte.

§. 231. Eine bestimmte Menge solcher neben einander liegender Kegelstücke wird einen Kugelabschnitt ausmachen. Weil nun die Durchmesser jedes solchen Kegelstücks unendlich wenig von einander unterschieden seyn werden, so kann man in der Gleichung für die Oberfläche

des

des abgekürzten Kegels $(R+r)p \cdot h$ anstatt $R+r$ auch $2R$ setzen, folglich $2R \cdot p \cdot h$.

Die Oberfläche eines Kugelabschnitts KAGH Fig. 33. wird daher auch gefunden werden durch

$$2R \cdot p \cdot AH.$$

Es sey der Radius R einer Kugel 8 Zoll, die Höhe des Stückes $AH = 2$ Zoll, so ist $2 \cdot 8 \cdot 3{,}14 \cdot 2 = 100{,}512 \ldots$ Quadratzoll Oberfläche.

Für AH läßt sich ein anderer Ausdruck finden. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ADG und AGH ergiebt sich, daß

$$AH = \frac{AG^2}{2R}$$

Diesen Ausdruck in vorige Gleichung gebracht, giebt

$$\frac{2R \cdot p \cdot AG^2}{2R} = AG^2 \cdot p = \text{Oberfläche eines Kugelabschnitts.}$$

Weil nun jede Kreisfläche durch die allgemeine Formel $r^2 p$ gefunden wird, so kann AG als Radius desjenigen Kreises gelten, dessen Fläche der Oberfläche des Kugelabschnitts gleicht, und daher der Satz:

Der Flächenraum eines Kugelabschnitts ist gleich dem Flächenraum eines Kreises, dessen Radius die Sehne zwischen dem Pol und dem Abschnitt ist.

§. 232. Je näher die schneidende Ebene dem Mittelpunct kommt, desto größer wird der Abschnitt. Im Mittelpunct ist er = Halbkugel. Dann wird die Sehne AJ der Radius eines Kreises seyn, der so viel Flächenraum hat, als die Oberfläche der halben Kugel. Es ist aber

$$AJ^2 = CA^2 + CJ^2$$
$$= R^2 + R^2 = 2R^2.$$

Und $AJ^2 \cdot p = 2R^2 p$ = zweien größten Kreisen; folglich ist der Flächenraum der ganzen Kugel der Fläche von 4 größten Kreisen gleich, $= 4R^2 p$.

§. 233. Da $4R^2 = D^2$, so kann auch die Oberfläche der Kugel durch $D^2 p$ gefunden werden, oder sie ist einer Kreisfläche gleich, deren Radius der Durchmesser der Kugel ist.

§. 234.

§. 234. Wenn zwei parallele Ebenen FG und fg eine Kugel schneiden, Fig. 34., so heißt der Raum auf der Oberfläche zwischen beiden eine *Zone*, als fgGF. Zieht man die Oberfläche des Stückes fgA von der Oberfläche der Halbkugel ab, so giebt der Rest den Flächenraum der Zone:

$$(2R . p . AH) - (2R . p . Ah) = \text{Zone}$$

oder $2R . p . (AH - Ah)$; und da $AH - Ah = Hh$, so ist sie $= 2R . p . Hh$.

Nun ist Hh die Höhe der Zone; $2R . p = Dp =$ der Peripherie eines größten Kreises. Daher giebt $D . p Hh$, *oder die Peripherie eines größten Kreises multiplicirt mit der Höhe der Zone, den Flächenraum derselben.*

§. 235. *Der körperliche Inhalt der Kugel ist dem eines Kegels oder einer Piramyde gleich, deren Grundflächen der ganzen Oberfläche der Kugel, und deren Höhen der Hälfte ihres Diameters gleichen.*

Theilt man die Oberfläche der Kugel in lauter sehr kleine Quadrate, so stellen diese die Grundflächen einer eben so großen Menge von Piramyden, deren Spitzen sämmtlich im Mittelpunct liegen, vor. Ihre Höhen sind also dem Radius gleich; und ihr gemeinschaftlicher Inhalt macht den Kugelinhalt aus.

Nun giebt $\frac{1}{3} G . H$ oder $G . \frac{H}{3}$ (Grundfläche mal $\frac{1}{3}$ Höhe) den Inhalt einer Piramyde; und $\frac{1}{3} H = \frac{1}{3}$ Radius oder $\frac{1}{6}$ Diameter. *Folglich wird die Kugelfläche mit $\frac{1}{6}$ Diameter multiplicirt den Inhalt derselben geben.* Weil die Oberfläche $= D^2 p$, so ist nun körperlicher Inhalt $= D^2 . p . \frac{D}{6} = \frac{D^3 p}{6}$.

§. 236. Vergleicht man die Kugel mit einem Cylinder, dessen Durchmesser und Höhe dem Durchmesser der Kugel gleicht, so findet sich, *daß der Inhalt der Kugel $\frac{2}{3}$ vom Inhalt des Cylinders sey.* Den weitläufigen gewöhnlichen geometrischen Beweis mag folgender kürzere ersetzen:

Der

Der Inhalt des Cylinders ist $= G . H$, d. h. $r^2 . p . H$ oder $\frac{D^2 . p . H}{4}$, oder (weil $H = D$) $= \frac{D^3 . p}{4}$; Inhalt der Kugel $= \frac{D^3 . p}{6}$.

Wenn nun $K =$ Kugel; $Z =$ Cylinder, so verhalten sich

$$K : Z = \frac{D^3 p}{6} : \frac{D^3 . p}{4} \qquad (4$$

$$K : Z = \frac{4 D^3 . p}{6} : D^3 p \qquad (6$$

$$K : Z = 4 D^3 p : 6 D^3 p \qquad (D^3 p$$

$$K : Z = 4 : 6 \qquad (:2$$

$$K : Z = 2 : 3$$

$K = 2\frac{Z}{3} = \frac{2}{3} Z$ d. i. die Kugel ist $\frac{2}{3}$ des Cylinders.

§. 237. Da der Kegel $\frac{1}{3}$ des Cylinders oder eines Prismas von gleicher Grundfläche und Höhe, die Kugel aber $\frac{2}{3}$ Cylinder, so ist das Verhältniß dieser drei Körper: Kegel, Kugel, Cylinder, wie 1, 2, 3; oder 1 : 2 : 3.

Anmerk. Die bisher vorgetragenen geometrischen Wahrheiten sind zum völligen Verstehen der in den folgenden Abschnitten gegebenen Formeln erforderlich, aber für denjenigen, welcher gründliche Kenntnisse in der Mathematik zu erlangen wünscht, noch nicht genügend. Ihm empfehlen wir

Häseler's Anfangsgründe der reinen Mathematik rc. 3 Theile. (Zum Selbstunterricht vorzüglich geeignet.)

Kästner, Buria's, Kiesewetter's und andere Schriften, deren Menge sehr groß ist.