UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Der Rathgeber bei mathematischen Beschäftigungen

Stöpel, August

Stendal, 1819

§. 238-251 Erklärungen, Lehrsätze und Anwendung derselben; allerlei Regeln.

urn:nbn:de:hbz:466:1-63556

Visual Library

VIII. Ebene Trigonometrie.

§. 238. Sie ist die Wissenschaft, aus drei gegebenen Stücken eines Dreiecks (worunter aber wenigstens 1 Seite seyn muß) die übrigen drei Stücke zu berechnen; und daher jedem guten Mathematiker unentbehrlich. Denn die geometrischen Auflösungen vieler Aufgaben sind theils nicht genau genug, theils unmöglich in der Ausübung, indem es in der angewandten Mathematik zuweilen Dreiecke giebt, worin Winkel von Sekunden, und Seiten von Millionen Meilen vorkommen, deren Construction nicht angeht. Die gehörig geführte Rechnung aber löst solche und überhaupt jede dahin gehörige Aufgabe mit der größten Schärfe auf.

Diese so äußerst wichtige Dreieckberechnung gründet sich auf den Satz, daß die ähnlichliegenden Seiten in ähnlichen Figuren einander proportional sind.

§. 239. Wir machen uns mit den dabei vorkommenden Kunstausdrücken bekannt.

Ein Perpendikel EB Fig. 35. vom Umkreise auf den Radius CA heißt Sinus des Winkels n, oder des Bogens AB. Er ist die halbe Chorde oder Sehne des Bogens BAJ, welcher 2n mißt. Wird $<$ n kleiner oder größer, so wird es auch sein Sinus; wird n ein rechter Winkel, so wird BE auf GC fallen, also gleich dem Halbmesser, oder Sinus totus, größter Sinus seyn. BE ist auch der Sinus des $<$ KCB, der eben so viel über 90° hat, als dem n zu einem rechten Winkel fehlt.

Was einem Winkel an 90° fehlt, heißt sein Complement, oder seine Ergänzung. Dem $<$ n fehlt der Bogen GB Fig. 36. oder der Winkel o, ehe er 90° wird, daher ist SB der Sinus complementi, oder Cosinus von n. Der Cosinus nimmt zu, wenn der Sinus abnimmt, und umgekehrt.

Die Linie TA heißt die Tangente des Winkels n. Sie nimmt mit dem Winkel n zu und ab, und ist, wenn n = 90° wird, unendlich, weil sie dann mit CB parallel läuft.

GH ist die Tangente des Winkels o, also die Cotangente des $<$ n.

CT ist der bis zur Tangente verlängerte Radius, und heißt Secante; und CH, welche die Cotangente schneidet, heißt Cosecante.

Das Stück EA des Radius CA heißt der Sinus versus, Quersinus, oder Pfeil. Er ist gleich Radius minus Cosinus oder CA — SB.

§. 240. Die Größe dieser Linien wird sich berechnen lassen, wenn der Radius CA oder CB und der Winkel n bekannt sind. Denn man kann dann $<$ n als den halben Centriwinkel, und BE als die halbe Seite eines Vielecks betrachten und berechnen. Ist aber BE gefunden, so ergiebt sich CE = SB durch den pythagorischen Satz, denn $CB^2 - BE^2 = SB^2$, oder r^2 — Sin. Quadrat = Cosin. Quadrat.

Aus CE und EB findet man die Tangente TA durch

$$CE : EB = CA : AT$$

oder Cos. n : Sin. n = r : AT (Tangente).

Die Sekante CT durch

$$CE : CB = CA : CT$$

d. i. Cos. n : r = r : Sekante.

Die Cotangente GH durch

$$CS : SB = CG : GH$$

d. i. Sin. n : Cos. n = r : Cotangente.

Die Cosekante CH durch

$$CS : CB = CG : CH$$

d. h. Sin. n : r = r : Cosekante.

§. 241. Nimmt man nun den Radius zu 10 Millionen Theilen an, so läßt sich für jeden gegebenen Winkel n die Größe aller genannten Linien in solchen Theilen angeben. Dies mühsame Geschäft ist längst vollendet, und die Berechnung findet man in den sogenannten trigonometrischen Tafeln von Black, Wolf, Schulze, Vega ꝛc., wo man die Größe des Sinus, Cosinus, der Tangente und Cotangente u. s. w. für jeden Winkel von Minute zu Minute, und in den größern Tafeln bei den ersten und letzten Graden des Quadranten von Sekunde zu Sekunde berechnet hat.

Wie

Weil nun alle Kreise einander ähnlich sind, so läßt sich jede ähnliche Linie in einem Kreise, aus diesem so berechneten, durch die Proportion finden. Daher muß jedes zu berechnende Dreieck auf die trigonometrischen Linien, deren Größe für einen angenommnen Radius die logarithmischen Tafeln enthalten, zurückgeführt werden. Für Anfänger sind Blacks Tafeln immer noch brauchbar; Geübteren aber Vega's und Schulze's Tafeln zu empfehlen. Siehe §. 119. Ohne ein solches Werk können Dreiecke nicht berechnet werden.

§. 242. Die Anwendung der trigonometrischen Tabellen ergiebt sich aus folgendem Lehrsatz:

In jedem geradlinichten oder ebenen Dreieck verhalten sich die Seiten zu einander, wie die Sinus der ihnen gegenüberstehenden Winkel; und umgekehrt: die Sinus der Winkel verhalten sich zu einander, wie die ihnen gegenüberliegenden Seiten.

Es läßt sich nämlich um jedes Dreieck ein Kreis beschreiben. Die 3 Seiten werden dann Chorden. Fig. 37. ist ABO ein $\triangle$; man fälle aus C die Perpendikel auf die Chorden, so werden sie in zwei Theile getheilt, und $< A$ ist als Peripheriewinkel $= \frac{1}{2}$ BFO $=$ BF, oder der Bogen BF ist das Maaß von A. Wenn nun CF als Radius angesehen wird, so ist BE der Sinus des Winkels A und auch des Bogens BF; BE ist $= \frac{1}{2}$ BO. Weil sich das Gesagte auch auf die Seite AB anwenden läßt, so ist Be $=$ Sin. O $= \frac{1}{2}$ AB; und also

$$\tfrac{1}{2}\,BO : \tfrac{1}{2}\,AB = \text{Sin. } A : \text{Sin. } O$$
also auch
$$BO : AB = \text{Sin. } A : \text{Sin. } O,$$

§. 243. Aus der Lehre von den Proportionen ist uns bekannt, daß aus 3 Gliedern allezeit das 4te gefunden werden kann. Hiernach ergeben sich schon mancherlei Auflösungen.

Z. B. Es sey Fig. 6. in dem Dreieck abc die Seite ab $= 120$ Fuß; $< a = 40°$; $< b = 58°$ gegeben, so findet man 1. den Winkel c durch $180° - (40 + 58) = 180° - 98 = 82°$; und dann die Seite cb durch die Proportion

Sin. C

Sin. c : ab = Sin. a : cb
d. h. Sin. 81° : 120 = Sin. 40° : cb. In den Taf. findet man = 9902681 : 120 = 6427876

$$\frac{\text{und } 120 \,.\, 6427876}{9902681} = 77 \text{ Fuß, } 8 \text{ Zoll, } 9 \text{ Linien} = 77' \, 8'' \, 9''' \, 3''''$$

Durch die in den trigonometrischen Tafeln den Winkeln beigefügten Logarithmen wird das Multipliciren und Dividiren so großer Zahlen vermieden, und die Rechnung gewinnt folgende Gestalt:

Sin. 82° : 120 Fuß = Sin. 40° : cb
log. Sin. 40° = 9.8080675
log. 120 Fuß = 2.0791812

11.8872487
log. 82° = 9.9957528

log. cb = 1.8914959, wozu die Zahl 77,893 (d. h. 77 Fuß, 8 Zoll, 9 Linien, 3 Scrupel) gehört.

§. 244. Zur Dreieckberechnung gehören noch folgende Lehrsätze:

1. **Im rechtwinklichten Dreieck verhält sich der rechte Winkel (Sinus totus) zur Cathete, wie die Tangente des an dieser Cathete liegenden Winkels zur andern Cathete.** Nach Fig. 5. ist dies

Sin. tot. : ac = Tang. c : ab. Es sey ac = 120 Fuß und < c = 35° 50';
so ist 90 : 120 = Tang. 35° 50'
log. Tang. 35° 50' = 9,8586019
log. 120 Fuß = 2,0791812

11,9377831
log. 90° = 10,0000000

log. ab = 1,9377831
Hiezu gehört die natürliche Zahl 86,653 d. h. 86 Fuß, 6 Zoll, 5''' 3''''.

2. **In jedem Dreieck verhält sich die Summe der beiden Schenkel ab + ac Fig. 38. zu ihrem Unterschiede ac − ab, wie die Tangente**

gente der halben Summe der Winkel an der Grundlinie bc zur Tangente des halben Unterschiedes eben dieser Winkel. D. h.

$ab + ac : ab - ac = \text{Tang.} \frac{1}{2}(x+y) : \text{Tang.} \frac{1}{2}(x-y)$

Dieser Satz lehrt, wie aus zwei bekannten Seiten und dem eingeschlossenen Winkel die übrigen Winkel zu finden sind.

Es sey $ac = 2115$
$ab = 1738$

Summe $= 3853$
Unterschied $= 377$
und $< m = 63° 36'$
also $x + y = 116° 24'$
daher $\frac{1}{2}(x+y) = 58° 12'$

Also $3853 : 377 = \text{Tang.} 58° 12' : \text{Tang.} \frac{1}{2}(x-y)$
log. Tang. $58° 12' = 10,2075899$
log. $337 = 2,5763414$
$12,7839313$
log. $3853 = 3,5857990$

log. Tang. $\frac{1}{2}(x-y = 9,1981323$
wozu der $< 8° 58'$ gehört. Wird derselbe zu $58° 12'$ addirt, so erhält man den größern $< y = 67° 10'$, und davon subtrahirt, den $< x = 49° 14'$.

3. Wenn aus einem Punct A Fig. 39. zwei gerade Linien einen Kreis in E und H, D und C schneiden, so ist

$AC : AH = AE : AD.$

Mit Hülfe dieses Satzes findet man aus den gegebenen 3 Seiten eines Dreiecks ABC die Winkel.

Beschreibe mit der kleinsten Seite eines Dreiecks, hier mit BC, einen Kreis, der alle 3 Seiten schneidet; dann ist $AB + BH = AB + BC$ (denn $BC = BH = EB$ = Halbmesser; $AE = AB - BC$. Durch obige Proportion findet man AD, folglich auch CD und CG, denn das Perpendikel GB steht auf der Mitte von CD.

Jetzt

Jetzt ist das Dreieck ABC in 2 rechtwinklichte $\triangle$ AGB und BGC zerlegt; in einem jeden sind 2 Seiten und der rechte Winkel bekannt, folglich können auch die übrigen Winkel gefunden werden.

Es sey $BC = 7$ so ist $AH = 9 + 7 = 16$; $AE = 9 - 7 = 2$

$AB = 9$ und

$AC = 11$ $AC : AH = AE : AD$

$11 : 16 = 2 : 2{,}9\ldots\ldots$

$AC - AD = 11 - 2{,}9 = 8{,}1 = DC$; und $\frac{1}{2}$ DC $= 4{,}05 = CG$; also $AG = 11 - 4{,}05 = 6{,}95$.

$AB : \text{Sin. tot.} = AG : \text{Sin. } x$

d. h. $9 : 90° = 6{,}95 : \text{Sin. } x$

$$\begin{aligned} \log. 6{,}95 &= 0{,}8419848 \\ \log. \text{Sin. t.} &= 10{,}0000000 \\ \hline & 10{,}8419848 \\ \log. 9 &= 0{,}9542425 \\ \hline \log. \text{Sin. } x &= 9.8877423 = 50°33' < x \end{aligned}$$

folglich ist $< y$, als seine Ergänzung zu $90° = 39° 27'$

Ferner $BC : CG = \text{Sin. tot.} : \text{Sin. } v$

$7 : 4{,}05 = 90°$

$$\begin{aligned} \log. 90° &= 10{,}0000000 \\ - 4{,}05 &= 0{,}6074550 \\ \hline & 10{,}6074550 \\ \log. 7 & 0{,}8450980 \\ \hline \log. v & 9.7623570 = 35°21, < v \end{aligned}$$

Also Z = Complement $= 54° 39'$; und $x + v = 85° 54'$.

§. 245. Wenn die Sinus und Tangenten von stumpfen Winkeln vorkommen, so nimmt man, weil die Tafeln nur bis 90° berechnet sind, die Ergänzung zu 180°. z. B. Man sucht den Sinus von 110° 20′, so zieht man 110° 20′ von 180° ab, und erhält 69° 40′, wozu man in den Tafeln den Sinus findet. Aus dem Verhältniß der Seiten und Winkel ergiebt sich, ob ein gefundener Winkel unter 90°, oder die Ergänzung zu 180 ist. Im letzten Fall muß der gefundene Winkel von 180° subtrahirt werden.

§. 246. In allen trigonometrischen Tafeln hat man dafür gesorgt, daß auf einer Seite Sinus, Tangente, Secanten u. s. w. und dieser gegenüber die Cosinus, Cotangenten u. s. w. befindlich sind. Daher kommt es, daß Anfang und Ende der Tafeln beisammen stehen. Sucht man z. B. den Cosinus eines Winkels von 50° 30′, so findet man ihn gegenüber, wo er Sinus bei 39° 30′ ist.

§. 247. Man muß bei trigonometrischen Rechnungen wohl darauf achten, ob der gefundene Logarithmus unter den Logarithmen der natürlichen Zahlen, oder unter denen der Winkel zu suchen sey. Das Maaß jeder Linie ist eine natürliche Zahl; das eines Winkels ein Sinus, eine Tangente. — Anfänger thun wohl, wenn sie das Aufsuchen der Logarithmen an schon ausgerechneten Exempeln üben.

Beim Anordnen einer Proportion merke man, daß jede Seite aus ihrem gegenüberstehenden Winkel, und umgekehrt, zu finden ist nach §. 242. Im rechtwinklichten Dreieck ist schon allemal der rechte Winkel bekannt; nach §. 244 sind die Catheten und Winkel zu finden, indem man jedes Glied der dort gegebenen Proportion zum letzten machen kann.

§. 248. Setzt man den Radius = 1, so sind die Sinus, Tangenten ꝛc. nur Decimaltheile desselben, welches in den Rechnungen nichts weiter ändert, als daß der Sin. tot., den man gewöhnlich mit R oder r bezeichnet, aus derselben wegbleibt, weil 1 weder multiplicirt noch dividirt. Rechnet man mit Logarithmen, und ist r Multiplicator, so vermehrt man die Kennziffer um 10, und wenn r Divisor ist, so vermindert man sie um 10.

§. 249. Weil man bei der Dreiecksberechnung doch nothwendig die trigonometrischen Tafeln gebraucht, und man nicht alle Formeln für die sehr verschiedenen Fälle, welche vorkommen können, im Gedächtniß zu behalten im Stande ist, so pflegt man kleine Tabellen, wie Tafel XII. im Anhange, den trigonometrischen Handbüchern anzuhängen. Mittelst derselben kann jede Aufgabe gelöst werden. Zuvörderst benenne man das gegebene Dreieck mit den Buchstaben A, B, C, wie die Figuren bei dieser Tafel auch benannt sind; lege dann den gegebenen Stük-

ken

ken ihre Werthe unter, und suche in der ersten und zweiten Spalte das Gegebene und Gesuchte auf, so findet man in der dritten Spalte die dazu gehörige Proportion.

§. 250. Die Auflösung der rechtwinklichten Dreiecke ist leichter, als die der schiefwinklichten; deshalb zerlegt man oft die letzteren durch Perpendikel in rechtwinklichte, wie §. 244. geschehen ist. Dabei ist darauf zu achten, ob das Perpendikel in oder außer dem Dreiecke steht. Bei verwickelten Fällen ist eine geometrische Zeichnung zur leichtern Übersicht zu empfehlen.

IX. Die sphärische Trigonometrie.

§. 251. Sie lehrt Dreiecke berechnen, deren Seiten Bogenstücke von Kugelkreisen, folglich krumme Linien sind. Zur Bildung eines Kugeldreiecks gehören 3 Bogenstücke von 3 größten Kreisen auf der Kugeloberfläche, und 3 Winkel, also ebenfalls 6 Stücke.

Die sphärischen Dreiecke werden, wie die ebenen, in recht- und schiefwinklichte, gleich- und ungleichseitige getheilt, je nachdem die Kreisbogen, woraus sie bestehen, beschaffen sind. Rechtwinklicht sind diejenigen, welche einen oder mehrere rechte Winkel haben; schiefwinklicht die, worin alle Winkel schief, d. h. stumpf oder spitz sind. In einem Kugeldreieck können mehrere rechte und stumpfe Winkel seyn, wodurch sich die sphärischen Dreiecke sehr von den ebenen unterscheiden.

Die Seiten werden, weil sie Bogen sind, nach Graden, Minuten und Sekunden gemessen, und keine Seite kann über, oder auch nur $= 180°$ seyn, weil mit so großen Bogen kein Dreieck gebildet werden kann.

§. 252. Übrigens findet zwischen Seiten und ihren gegenüberstehenden Winkeln eben das Verhältniß statt, wie in der ebenen Dreiecksberechnung, d. h. die größte Seite ist dem größten, die kleinste dem kleinsten Winkel gegenüber; gleichen Seiten gehören in einem △ gleiche Winkel; zwei Seiten zusammengenommen sind größer, als