



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Der Rathgeber bei mathematischen Beschäftigungen

Stöpel, August

Stendal, 1819

§. 251-263 Erklärungen; Sechs Gesetze zur Auflösung der rechtwinklichten Kugeldreiecke nebst Beispielen;

[urn:nbn:de:hbz:466:1-63556](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-63556)

fen ihre Werthe unter, und suche in der ersten und zweiten Spalte das Gegebene und Gesuchte auf, so findet man in der dritten Spalte die dazu gehörige Proportion.

§. 250. Die Auflösung der rechtwinklichten Dreiecke ist leichter, als die der schiefwinklichten; deshalb zerlegt man oft die letzteren durch Perpendikel in rechtwinklichte, wie §. 244. geschehen ist. Dabei ist darauf zu achten, ob das Perpendikel in oder außer dem Dreiecke steht. Bei verwickelten Fällen ist eine geometrische Zeichnung zur leichtern Übersicht zu empfehlen.

IX. Die sphärische Trigonometrie.

§. 251. Sie lehrt Dreiecke berechnen, deren Seiten Bogenstücke von Kreiskreisen, folglich krumme Linien sind. Zur Bildung eines Kugeldreiecks gehören 3 Bogenstücke von 3 größten Kreisen auf der Kugeloberfläche; und 3 Winkel, also ebenfalls 6 Stücke.

Die sphärischen Dreiecke werden, wie die ebenen, in recht- und schiefwinklichte, gleich- und ungleichseitige getheilt, je nachdem die Kreisbogen, woraus sie bestehen, beschaffen sind. Rechtwinklicht sind diejenigen, welche einen oder mehrere rechte Winkel haben; schiefwinklicht die, worin alle Winkel schief, d. h. stumpf oder spitz sind. In einem Kugeldreieck können mehrere rechte und stumpfe Winkel seyn; wodurch sich die sphärischen Dreiecke sehr von den ebenen unterscheiden.

Die Seiten werden, weil sie Bogen sind, nach Graden, Minuten und Sekunden gemessen, und keine Seite kann über, oder auch nur $\equiv 180^\circ$ seyn, weil mit so großen Bogen kein Dreieck gebildet werden kann.

§. 252. Ubrigens findet zwischen Seiten und ihren gegenüberstehenden Winkeln eben das Verhältniß statt, wie in der ebenen Dreiecksberechnung, d. h. die größte Seite ist dem größten, die kleinste dem kleinsten Winkel gegenüber; gleichen Seiten gehören in einem \triangle gleiche Winkel; zwei Seiten zusammengenommen sind größer,
J 2
als

als die dritte; und alle 3 Seiten sind allemal kleiner, als 360° . Jeder Winkel kann zwar größer, als 90° , aber niemals $= 180^\circ$ seyn, weil sonst beide Schenkel Eine Linie bilden würden.

Die Grenze der Größe aller 3 Winkel eines sphärischen Dreiecks ist über 180° , und unter 6 rechten < oder unter 540° .

§. 253. Weil die Seiten eines sphärischen Dreiecks Bogen sind, die nach den Sinus wachsen und abnehmen, so ist das allgemeine Gesetz, wodurch die Kugeldreiecke sich bestimmen lassen, von dem in der ebenen Trigonometrie etwas verschieden, und im Wesentlichen folgendes:

Im Kugeldreieck verhalten sich die Sinus der Seiten, wie die Sinus der ihnen entgegenstehenden Winkel.

Nach Fig. 40. mögen M, N, R Winkel, und a, b, c Seiten eines Kugeldreiecks seyn, so gilt

$$\text{Sin. M} : \text{Sin. b} = \text{Sin. R} : \text{Sin. a}$$

$$\text{und Sin. M} : \text{Sin. b} = \text{Sin. N} : \text{Sin. c}$$

Durch Versetzung kann jedes Glied zum letzten gemacht und durch Rechnung gefunden werden.

Wenn nun bei R ein rechter Winkel ist, so ist die Auflösung noch leichter, weil dem rechten Winkel der Logarithme 10,0000000 gehört.

Es sey $a = 50^\circ$, $b = 35^\circ$; R ein rechter Winkel; man sucht $\angle M$.

$$\text{Sin. a} : \text{Sin. R (Sin. tot.)} = \text{Sin. b} : \text{Sin. M}$$

$$\text{d. i. Sin. } 50^\circ : 90^\circ = \text{Sin. } 35^\circ : \text{Sin. M}$$

$$\log. \text{Sin. } 35^\circ = 9,7585913$$

$$- \text{Sin. tot.} = 10,0000000$$

$$\hline 19,7585913$$

$$\log. \text{Sin. } 50^\circ = 9,8842540$$

$$\log. \text{Sin. M} = 9,8743373 = 45^\circ 28' 56''$$

§. 254. In der ebenen Trigonometrie wußten wir den 3ten Winkel aus den beiden andern zu finden, denn alle drei hatten 180° ; nicht so in der sphärischen, denn die 3 Winkel sind stets größer als 180° ; daher konnte:

wir nach dem vorigen §. nicht eher eine Seite finden, bis der gegenüberstehende Winkel bekannt war, und umgekehrt.

§. 255. Es sind also mehrere Gesetze aus der Natur der sphärischen Dreiecke abgeleitet worden, durch welche sich aus 3 bekannten Stücken allemal die übrigen finden lassen.

Zweites Gesetz.

Im rechtwinklichten sphärischen Dreieck verhält sich der Sinus totus zum Sinus einer Perpendicularseite, wie die Tangente des an dieser Seite befindlichen Winkels, zur Tangente der andern Perpendicularseite.

Es sey Fig. 40. bei R der rechte Winkel, so gilt

$$\begin{aligned} \text{Sin. tot.} : \text{Sin. } c &= \text{Tang. } M : \text{Tang. } b \\ \text{Sin. tot.} : \text{Sin. } b &= \text{Tang. } N : \text{Tang. } c. \end{aligned}$$

Durch Versetzung der Glieder wird jedes gefunden werden können.

Z. B. wenn $b = 35^\circ$; $M = 48^\circ 29'$, so findet man c durch

$$\text{Tang. } M : \text{Tang. } b = r = \text{Sin. } c$$

$$\log. r = 10,0000000$$

$$\log. \text{Tang. } b = 9,8452268$$

$$\hline 19,8452268$$

$$\text{Tang. } M = 10,0531916$$

$$\log. \text{Sin. } c = 9,7920352 = 38^\circ 17' = c$$

§. 256. Drittes Gesetz.

Im rechtwinklichten sphärischen Dreieck verhält sich der Sinus totus zum Cosinus einer Cathete, wie der Cosinus der andern Cathete zum Cosinus der Hypotenuse.

(Unter Cosinus verstehen wir allemal die Ergänzung einer Seite oder eines Winkels zu 90° .)

Es sey Fig. 41. bei R der rechte Winkel, a Hypotenuse; b und c sind Catheten.

Der

Der Kürze wegen wollen wir den Sinus totus $\equiv 90^\circ$ stets r nennen. Dann gelten

$$r : \text{Cos. } b \equiv \text{Cos. } c : \text{Cos. } a$$

$r : \text{Cos. } c \equiv \text{Cos. } b : \text{Cos. } a$, und durch Versetzung

$$\text{Cos. } b : r \equiv \text{Cos. } a : \text{Cos. } c$$

$$\text{Cos. } c : r \equiv \text{Cos. } a : \text{Cos. } b$$

3. B. Es sey $b \equiv 35^\circ$; $c \equiv 38^\circ 17'$, man sucht a , so ist

$$r : \text{Cos. } b \equiv \text{Cos. } c : \text{Cos. } a$$

$$\begin{array}{r} 35^\circ \quad 38^\circ 17' \\ \log. \text{Cos. } 38^\circ 17' \equiv 9,8948457 \\ - \quad - \quad 35^\circ \quad \equiv 9,9133645 \end{array}$$

$$\hline 19,8082102$$

$$\log. r \equiv 10,0000000$$

$$\text{Cos. } a \equiv 9,8082102 \equiv 49^\circ 59' = a$$

§. 257. Auf diese Weise die Winkel zu finden, ist folgendes

Viertes Gesetz.

Der Sin tot. verhält sich zum Cosinus einer Cathete, wie der Sinus des anliegenden Winkels, zum Cosinus des gegenüberstehenden Winkels.

Fig. 41.

$$r : \text{Cos. } b \equiv \text{Sin. } N : \text{Cos. } M$$

$$r : \text{Cos. } c \equiv \text{Sin. } M : \text{Cos. } N.$$

Hiernach kann aus 3 Winkeln eine Seite gefunden werden, denn M , N und r sind Winkel, und b und c Seiten; versetzt man die Glieder, so kommt

$$\text{Sin. } N : \text{Cos. } M \equiv r : \text{Cos. } b$$

$$\text{Sin. } M : \text{Cos. } N \equiv r : \text{Cos. } c.$$

Es sey $c \equiv 38^\circ 17'$, so ist $r : \text{Cos. } c \equiv \text{Sin. } M : \text{Cos. } N$

$$\begin{array}{r} M \equiv 48^\circ 30' \\ \text{Gesucht } N \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} M \\ N \end{array}} \right\} \begin{array}{r} \log. \text{Sin. } M \equiv 9,8744561 \\ - \text{Cos. } c \equiv 9,8948457 \end{array}$$

$$\hline 19,7693018$$

$$\log. r \equiv 10,0000000$$

$$\log. \text{Cos. } M \equiv 9,7693018 \\ \equiv 53^\circ 59' = N.$$

§. 258.

§. 258. Fünftes Gesetz.

Im rechtwinklichten sphärischen Dreieck verhält sich der Sinus totus zur Cotangente eines der übrigen Winkel, wie die Cotangente des andern Winkels zum Cosinus der Hypotenuse.

Nach Fig. 41. $r : \text{Cot. M} = \text{Cot. N} : \text{Cosin. a}$
 $r : \text{Cot. N} = \text{Cot. M} : \text{Cosin. a}.$

Nach diesem Gesetz ist aus den 3 Winkeln die Hypotenuse zu finden.

Es sey $M = 48^\circ 30'$ } $r : \text{Cot. M} = \text{Cot. N} : \text{Cos. a}$
 $N = 53^\circ 59'$ } $\log. \text{Cot. N} = 9.8615267$
 Gesucht a } $-\text{Cot. M} = 9.9468084$

$\log. \text{Cosin.} = \cancel{9}9,8083351 = 49^\circ 58'$

(Wenn r Divisor ist, so braucht man nur die Kennziffer um 10 zu vermindern oder die 1 auszustreichen.)

§. 259. Sechstes Gesetz.

Der Sinus totus verhält sich zum Cosinus eines der beiden übrigen Winkel, wie die Cotangente der an diesem Winkel liegenden Cathete zur Cotangente der Hypotenuse.

Nach Fig. 41. $r : \text{Cos. N} = \text{Cotang. b} : \text{Cotang. a}$
 $r : \text{Cos. M} = \text{Cot. c} : \text{Cot. a}$

Es sey $b = 35^\circ$ } $r : \text{Cos. } 53^\circ 59' = \text{Cot. } 35^\circ : \text{Cot. a}$
 $N = 53^\circ 59'$ } $\log. \text{Cotang. } 35^\circ = 10,1547732$
 Gesucht a } $-\text{Cos. } 53^\circ 59' = 9,7693925$

$\log. \text{Cotang. a} = \cancel{9}9,9241657$
 $= 49^\circ 59'$

§. 260. Diese angeführten Gesetze sind völlig hinreichend, alle Aufgaben bei rechtwinklichten Kugeldreiecken aufzulösen. Es sind überhaupt 30 Fälle bei rechtwinklichten Kugeldreiecken durch diese 6 Gesetze aufgelöst. Die erste Hälfte der XIII. Tafel im Anhang enthält sie alle. Mittelst derselben ist jede Auflösung leicht; denn man benenne das gegebene Kugeldreieck nur so, daß A
 aus

am rechten Winkel, B und C an den andern Winkeln stehen, unterscheide das Gegebene und Gesuchte gehörig, und suche es in der 2ten und 3ten Spalte auf, so enthält die 4te Spalte die dazugehörige Proportion, und in der 5ten steht, ob das Gefundene größer oder kleiner als 90° ist.

§. 261. Da der Sinus und Cosinus eines Winkels unter 90° gleich sind mit einem andern über 90° , so muß das Gesuchte zuweilen zweifelhaft seyn, zumal da wir mit Bogen und Winkeln zu thun haben, die nahe an 180° seyn können. Es ist daher nothwendig, daß man bei den 3 gegebenen Stücken in einer Proportion auch darauf Rücksicht nimmt, ob sie stumpf oder spitz sind, und wo es sich thun läßt (nur bei den Sinus wird es nicht angehen) die spitzen Winkel oder Bogen mit +, und die stumpfen durch — ausdrückt. Es wird sich dann bei dem 4ten Gliede durch das ihm zuvommende Zeichen entwickeln, ob das Gefundene größer, oder kleiner, als 90° sey. Eigentlich ist nur der eine Fall zweifelhaft, wenn alle 4 Glieder Sinus sind. (Hat man eine Kugel (Globus), auf welcher sich zur richtigen Übersicht das Dreieck zeichnen läßt, so bleibt kein Fall zweifelhaft; überhaupt ist zur bessern Einsicht in die Einrichtung und Gestalt der Kugeldreiecke eine Kugel nothwendig.)

Die Sinus der Winkel und Bogen (stumpfe und Spitze) erhalten stets das Zeichen +.

Die Cosinus der spitzen Winkel sind +; der stumpfen —; bei 90° werden sie Null.

Die Tangenten haben bis 90° +; bei 90° sind sie unendlich; über 90° haben sie —.

Die Cotangenten unter 90° +; bei $90^\circ = 0$; über $90^\circ = -$.

§. 262. Gleichartig heißen zwei Winkel oder Bogen, wenn sie beide über, oder unter 90° haben; ungleichartig, wenn der eine über, der andere unter 90° hat.

§. 263. Wenn der Radius $r = 1$ gesetzt wird, so werden alle Sinus und Cosinus zu Brüchen von 1; die Tangenten unter 45° sind auch Brüche, bei $45^\circ = 1$; über

über 45° unächte Brüche. In Rechnungen und Formeln kommt dies oft vor und ist bequem. Will man die natürlichen Sinus, Tangenten u. s. w. suchen, so lassen sie sich, wie andere Brüche, durch einander multipliciren und dividiren, und der Quotient wird unter den natürlichen Sinus, Tangenten u. c. in den Tafeln aufgesucht.

Es läßt sich aber in solchen Formeln, worin $r = 1$ ist, das r leicht wieder herstellen. Sind die trigonometrischen Linien mit einander bloß multiplicirt, so ist r Divisor gewesen. Z. B. $\text{Cot. H} = \text{Cos. N} \cdot \text{Cot. b}$. Hier ist r Divisor, und die Formel aus der Proportion $r : \text{Cos. N} = \text{Cot. b} : \text{Cot. H}$ entstanden. Bei Formeln, wie

$$\text{Cot. H} = \frac{\text{Cos. M}}{\text{Tang. c}},$$

ist r im Zähler gewesen, und es

$$\text{gentlich Cot. H} = \frac{r \cdot \text{Cos. M}}{\text{Tang. c}} \text{ zu lesen.}$$

Man muß dann darnach die Kennziffer ordnen, und wenn man den Logarithmen des Divisors von dem des Dividendus nicht abziehen kann, zur Kennziffer des letztem 10 addiren; ist r Divisor, von der Kennziffer des Quotienten 10 abziehen.

§. Die schiefwinklichten Kugeldreiecke sind von zweierlei Art:

1. solche, deren Winkel an der Grundlinie gleichartig sind. Ein von ihrer Spitze herabgelassenes Perpendikel fällt innerhalb des Dreiecks, und ist mit den Winkeln gleichartig;
2. solche, deren Winkel an der Basis ungleichartig sind. Das Perpendikel fällt außerhalb der Basis, und ist mit dem, ihm im Dreieck am nächsten liegenden Winkel ungleichartig.

Das Perpendikel theilt die Dreiecke der erstern Art in zwei rechtwinklichte; auch die der 2ten Art werden dadurch in rechtwinklichte verwandelt, wodurch die Rechnung sehr erleichtert wird.

§. 265. Man hat 7 Hauptgesetze zur Auflösung schiefwinklichter Dreiecke.