Der Rathgeber bei mathematischen Beschäftigungen

Stöpel, August

Stendal, 1819

§. 265-273 Sieben Gesetze zur Auflösung der schiefwinklichten Kugeldreiecke nebst Beispielen.

über 45° unechte Brüche. In Rechnungen und Formeln kommt dies oft vor und ist bequem. Will man die natürlichen Sinus, Tangenten u. s. w. suchen, so lassen sie sich, wie andere Brüche, durch einander multipliciren und dividiren, und der Quotient wird unter den natürlichen Sinus, Tangenten rc. in den Tafeln aufgesucht.

Es läßt sich aber in solchen Formeln, worin r = 1 ist, das r leicht wieder herstellen. Sind die trigonometrischen Linien mit einander bloß multiplicirt, so ist r Divisor gewesen. Z. B. Cot. H = Cos. N . Cot. b. Hier ist r Divisor, und die Formel aus der Proportion r : Cos. N = Cot. b : Cot. H entstanden. Bei Formeln, wie

$\text{Cot. H} = \frac{\text{Cos. M}}{\text{Tang. c}}$, ist r im Zähler gewesen, und eigentlich $\text{Cot. H} = \frac{\text{r . Cos. M}}{\text{Tang. c}}$ zu lesen.

Man muß dann darnach die Kennziffer ordnen, und wenn man den Logarithmen des Divisors von dem des Dividendus nicht abziehen kann, zur Kennziffer des letztern 10 addiren; ist r Divisor, von der Kennziffer des Quotienten 10 abziehen.

§. Die schiefwinklichten Kugeldreiecke sind von zweierlei Art:

1. solche, deren Winkel an der Grundlinie gleichartig sind. Ein von ihrer Spitze herabgelassenes Perpendikel fällt innerhalb des Dreiecks, und ist mit den Winkeln gleichartig;
2. solche, deren Winkel an der Basis ungleichartig sind. Das Perpendikel fällt außerhalb der Basis, und ist mit dem, ihm im Dreieck am nächsten liegenden Winkel ungleichartig.

Das Perpendikel theilt die Dreiecke der erstern Art in zwei rechtwinklichte; auch die der 2ten Art werden dadurch in rechtwinklichte verwandelt, wodurch die Rechnung sehr erleichtert wird.

§. 263. Man hat 7 Hauptgesetze zur Auflösung schiefwinklichter Dreiecke.

Er=

Erstes Gesetz.

Im schiefwinklichten Kugeldreieck verhalten sich die Sinus der Seiten, wie die Sinus der ihnen entgegenstehenden Winkel.

Wir haben dies Gesetz als das erste bei den rechtwinklichten Kugeldreiecken kennen gelernt,

§. 266. Zweites Gesetz.

Wenn das Perpendikel Pa Fig. 42. auf der Grundlinie steht, so verhalten sich die Sinus der beiden Winkel x und y, welche durch das Perpendikel entstehen, wie die Cosinus der beiden Winkel an der Grundlinie M und T.

$$\text{Sin. } x : \text{Sin. } y = \text{Cosin. } M : \text{Cosin. } T.$$

Es sey A (oder Seite bp) $= 66° 45'$; Winkel $M = 43° 20'$; $< N = 79° 9'$; man sucht den Winkel T.

Durch das Perpendikel Pa entstehen 2 rechtwinklichte Dreiecke bpa, und apd. Im erstern ist Seite A, $< M$, und der rechte Winkel bei a bekannt, man sucht erst $< x$ durch

$$1 : \text{Cos. } A = \text{Tang. } M : \text{Cot. } x.$$ (Siehe Tafel XIII. Fall 24, wo $A = BC$; $M = B$; $x = c$ genannt).

$$\text{log. Tang. } 43° 20' = 9{,}9747195$$
$$\text{— Cos. } 66° 45' = 9{,}5963154$$
$$\text{log. Cot. } x = \cancel{1}9{,}5710349 = 69° 34' = x.$$

Nun ist $N - x = y$, d. h. $79° 9' - 69° 34' = 9° 35' = y$.

Ferner: $\text{Sin. } x : \text{Sin. } y = \text{Cos. } M : \text{Cos. } T$
$$69° 34' : 9° 35' = 43° 20' : \text{Cos. } T$$

$$\text{log. Cos. } M = 9{,}8617576$$
$$\text{— Sin. } y = 9{,}2213671$$
$$19{,}0831247$$
$$\text{log. Sin. } x = 9{,}9717762$$
$$\text{log. Cos. } T = 9{,}1113485 = 82° 34' = T.$$

Man

Man hat also mehrentheils zwei Proportionen nöthig. (Siehe Anhang Tafel XIII. 2. 5te der schiefwinklichten Dreiecke).

§. 267. Drittes Gesetz.

Steht das Perpendikel auf der Grundlinie, so verhalten sich die Sinus der beiden Stücke derselben umgekehrt, wie die Tangenten der beiden anliegenden Winkel. Nach Fig. 42.

Sin. ba : Sin. da = Tang. T : Tang. M
oder Cot. M : Cot. T.

§. 268. Viertes Gesetz.

Die Cosinus der durch das Perpendikel entstandenen Stücke der Grundlinie verhalten sich, wie die Cosinus der anliegenden Seiten. Fig. 42.

Cos. ba : Cos. da = Cosin. A : Cos. B.

§. 269. Fünftes Gesetz.

Die Cosinus der beiden Winkel, die das Perpendikel macht, verhalten sich verkehrt, wie die Tangenten der beiden anliegenden Seiten. Nach Fig. 42.

Cos. x : Cos. y = Taug. B : Tang. A.

§. 270. Es falle das Perpendikel außerhalb des Dreiecks, so ist < Z die Ergänzung zu 180°, oder Fig. 43. Nebenwinkel von T, und beide haben einerlei Sinus.

$$\text{Es sey Seite } A = 70^\circ \\ \left.\begin{array}{r} \text{Seite } C = 60^\circ \\ < M = 30^\circ \end{array}\right\} \text{man sucht} < T.$$

Hier sind nun 2 Seiten und der eingeschlossene Winkel bekannt, man sucht den einer Seite gegenüber liegenden Winkel. (Vergl. Anhang Tafel XIII. 2. 9ten Fall; wo B = M; A = T; C = p gesetzt ist.)

r : Tang.

$$r : \text{Tang. } A = \text{Cos. } M : \text{Tang. } ab$$

$$\begin{array}{lr} \log. \text{Cos. } M = 30^\circ = & 9{,}9375306 \\ - \text{Tang. } A = 70^\circ = & 10{,}4389341 \\ \hline & 20{,}3764647 \\ \log. r = & 10{,}0000000 \\ \hline \end{array}$$

$$\log. \text{Tang. } ab = 10{,}3764647 = 67^\circ\, 12' = ab.$$

Da nun Seite C nur 60° hat, so ist $da = 7^\circ\, 12'$ und das Perpendikel fällt außerhalb.

Ferner: $\text{Sin. } da : \text{Sin. } ab = \text{Tang. } M : \text{Tang. } T$

$$\begin{array}{lr} \log. \text{Tang. } M = 30^\circ = & 9{,}7614394 \\ - \text{Sin. } ab = 67^\circ 12' = & 9{,}9646665 \\ \hline & 19{,}7261059 \\ - \text{Sin. } da = 7^\circ 12' = & 9{,}0980662 \\ \hline \end{array}$$

$$\log. \text{Tang. } T = 10{,}6280397 = 76^\circ 45'$$

Weil das Perpendikel außerhalb liegt, so ist M und T ungleichartig, also der gefundene Winkel = dem Nebenwinkel von T, oder = z, und $T = 180^\circ - 76^\circ 45' = 103^\circ 15'$, folglich stumpf.

§. 271. **Sechstes Gesetz.** Aus 3 gegebenen Seiten einen Winkel zu finden.

> **Das Product der Sinus der beiden, den gesuchten Winkel einschließenden, Seiten, verhält sich zum Product der Sinus beider Überschüsse der halben Summe der 3 Seiten über jede von beiden Seiten, wie das Quadrat des Sinus totus zum Quadrat des Sinus des halben gesuchten Winkels.** Fig. 44. Aus 3 Seiten $< M$ zu finden:

$$\text{Sin. } A \,.\, \text{Sin. } C : \text{Sin. } \tfrac{1}{2}\,(B + A - C) \,.\, \text{Sin. } \tfrac{1}{2}\,(B + C - A) = r^2 : \text{Sin.}^2\, \tfrac{1}{2}\, M.$$

Diese in der Astronomie häufig vorkommende Formel läßt sich folgendermaßen auflösen:

Es sey $= A = 65^\circ\, 31'$ halbe Sum̄e $85^\circ\, 52'$
$B = 39^\circ\, 29'$ $\qquad A = 65^\circ\, 31'$ abgez.
$C = 66^\circ\, 45'$
Summe $= 171^\circ\, 45'$ $\qquad$ Diff. I $= 20^\circ\, 21' = \frac{B+C-A}{2}$
halbe Summe $85^\circ\, 52'$ { halbeSum̄e $85^\circ\, 52'$
$C = 66^\circ\, 45'$ abgez.
Diff. II $= 19^\circ\, 7' = \frac{B+A-C}{2}$

Diff. I = log. Sin. $20^\circ\, 21' = 9{,}5412721$
Diff. II = log. Sin. $19^\circ\, 7' = 9{,}5152017$
A dec. Erg. log. Sin. $65^\circ\, 31' = 0{,}0409195$
C dec. Erg. log. Sin. $66^\circ\, 45' = 0{,}0367832$
$19{,}1341765$
$\sqrt{\ }$ ausgez. durch 2 :)
log. $\frac{1}{2}$ M $= 9{,}5670882 = 21^\circ\, 40' = \frac{1}{2}M$
(2
$43^\circ\, 20' = M$

§. 272. **Siebentes Gesetz.** Aus 3 gegebenen Winkeln eine Seite zu finden.

Das Product der Sinus der Winkel, welche die gesuchte Seite einschließen, verhält sich zum Product der Cosinus beider Überschüsse der halben Summe über jeden von beiden Winkeln, wie das Quadrat des Halbmessers, zum Quadrat des Cosinus der halben Seite. Nach Fig. 45., wenn Seite A gesucht wird,

$$\text{Sin. } M \,.\, \text{Sin. } N : \text{Cos. } \tfrac{1}{2}\,(T+M-N) \,.\, \text{Cos. } \tfrac{1}{2}\,(T+N-M) = r^2, \text{Cosin.}^2\, \tfrac{1}{2}\, A.$$

Es sey $M = 50^\circ\, 36'$ $\qquad$ halbe S. $104^\circ\, 22'$
$T = 75^\circ\, 58'$ $\qquad < N = 82^\circ\, 10'$
$N = 82^\circ\, 10'$
Summe $208^\circ\, 44'$ $\qquad$ Diff. I $= 22^\circ\, 12' = \frac{T+M-N}{2}$
halbe S. $= 104^\circ\, 22'$ $\qquad$ halbe S. $104^\circ\, 22'$
$< M = 50^\circ\, 36'$
Diff. II $= 53^\circ\, 46' = \frac{T+N-M}{2}$

log.

log. Diff. I = Cos. 22° 12′ = 9,9665503
log. Diff. II = Cos. 53° 46′ = 8,7716426
∠M decad. Erg. log. Sin. 50° 36′ = 0,1119702
∠N — — — Sin. 82° 10′ = 0,0040716

19,8542347

$\sqrt{}$ ausgez. durch 2:)

log. Cosin. $\frac{1}{2}$ A = 9,9271173 = 32° 16′ = $\frac{1}{2}$ A

(2

ganze Seite = 64° 32, = A

§. 273. Zur bequemen Auflösung der schiefwinklichten Kugeldreiecke befindet sich im Anhange die zweite Abtheilung der XIII. Tafel. Man hat bei ihrem Gebrauch nur nöthig, zu untersuchen, was in einem Dreieck bekannt oder gegeben, und was das Gesuchte sey. Was man weiter zu thun habe, enthält die jedem Fall beigefügte Auflösung sehr deutlich. Caille ist der Verfasser derselben.

Die sphärische Trigonometrie wird denen, die geographische und astronomische Rechnungen zu machen haben, eine unentbehrliche Wissenschaft seyn; jedoch beschränken sich die Meisten darauf, eine Fertigkeit im Gebrauch der Tafel XIII. zu erlangen, mit der sie auch ziemlich ausreichen.

X. Von den Kegelschnitten.

§. 274. Zu den krummen Linien, welche ihren Ursprung aus dem senkrechten Kegel haben, gehören: Kreis, Parabel, Ellipse und Hyperbel. Die Lehre vom Kreis rechnet man mit zur Geometrie; die aber von der Parabel, Ellipse und Hyperbel gehört zur höhern Geometrie, von welcher wir die vorzüglichsten Lehren anführen wollen.

Der Kreis entsteht, wenn eine schneidende Ebene einen Kegel so durchdringt, daß die Durchschnittsfigur mit der Grundfläche parallel wird.

§. 275. Wird ein senkrechter Kegel ABC Fig. 46. so durchschnitten, daß die Durchschnittsfigur mit der

Seite