Der Rathgeber bei mathematischen Beschäftigungen

Stöpel, August

Stendal, 1819

X. Von den Kegelschnitten.

	log. Diff. I = Cos. 22° 12′ =	9,9665503
	log. Diff. II = Cos. 53° 46′ =	8,7716426
$\angle$ M	decad. Erg. log. Sin. 50° 36′ =	0,1119702
$\angle$ N	— — — Sin. 82° 10′ =	0,0040716
		19,8542347
	$\sqrt{}$ ausgez. durch 2:)	
	log. Cosin. $\frac{1}{2}$ A =	9,9271173 = 32° 16′ = $\frac{1}{2}$ A
		(2
	ganze Seite	= 64° 32, = A

§. 273. Zur bequemen Auflösung der schiefwinklichten Kugeldreiecke befindet sich im Anhange die zweite Abtheilung der XIII. Tafel. Man hat bei ihrem Gebrauch nur nöthig, zu untersuchen, was in einem Dreieck bekannt oder gegeben, und was das Gesuchte sey. Was man weiter zu thun habe, enthält die jedem Fall beigefügte Auflösung sehr deutlich. Caille ist der Verfasser derselben.

Die sphärische Trigonometrie wird denen, die geographische und astronomische Rechnungen zu machen haben, eine unentbehrliche Wissenschaft seyn; jedoch beschränken sich die Meisten darauf, eine Fertigkeit im Gebrauch der Tafel XIII. zu erlangen, mit der sie auch ziemlich ausreichen.

X. Von den Kegelschnitten.

§. 274. Zu den krummen Linien, welche ihren Ursprung aus dem senkrechten Kegel haben, gehören: Kreis, Parabel, Ellipse und Hyperbel. Die Lehre vom Kreis rechnet man mit zur Geometrie; die aber von der Parabel, Ellipse und Hyperbel gehört zur höhern Geometrie, von welcher wir die vorzüglichsten Lehren anführen wollen.

Der Kreis entsteht, wenn eine schneidende Ebene einen Kegel so durchdringt, daß die Durchschnittsfigur mit der Grundfläche parallel wird.

§. 275. Wird ein senkrechter Kegel ABC Fig. 46. so durchschnitten, daß die Durchschnittsfigur mit der Seite

Seite AB parallel wird, so entsteht auf der Oberfläche eine krumme Linie GLErS, welche Parabel heißt.

Es sey EF die schneidende Ebene. Man lege da, wo sie in den Kegel dringt, die Ebene ED, und an einem andern beliebigen Orte eine zweite Ebene KH, beide mit der Grundfläche parallel, durch den Kegel, so werden ihre Durchschnittsfiguren Kreise seyn. Wo der Parabelschnitt die Kreisfläche HJKL trifft, entsteht ein Durchschnitt, der zur Hälfte in der Figur angedeutet, und JL ist. Diese JL steht auf dem Diameter HK in J, und auch auf der Mitte des Parabelschnitts EF, welche Axe heißt, senkrecht, und berührt in L sowol den Kreis HLK, als die parabolische Linie ELG, welche letztere durch den Abstand JL von der Axe bestimmt wird. Da die Ebene HK beliebig gelegt ist, so wird der Werth, den wir für JL ausmitteln, allgemein gelten, die HK mag liegen, wo sie will; man sieht bald, daß JL größer wird, je weiter HK von E entfernt ist.

Die Dreiecke ADE und EJK sind einander ähnlich, daher gilt

$$AD : DE = EJ : JK, \text{ und } JK = \frac{DE \,.\, EJ}{AD}$$

Weil HK der Diameter eines Kreises ist, und JL senkrecht darauf steht, so gilt

$$HJ : JL = JL : JK, \text{ und } JK = \frac{JL^2}{HJ}; \text{ und } JL^2 = HJ \,.\, JK$$

Da $DE = HJ$, so kann auch DE für HJ gesetzt werden, dann ist $JL^2 = DE \,.\, JK$; und für JK hatten wir den Werth $\frac{DE \,.\, EJ}{AD}$ gefunden, wird nun dieser für JK gesetzt, so ist

$$JL^2 = \frac{DE \,.\, DE \,.\, EJ}{AD} = \frac{DE^2\, EJ}{AD}$$

In einer und derselben Parabel ist AD und DE beständig; EJ und JK aber hängen von der Höhe der Ebene HK ab; folglich ist $\frac{DE^2}{AD}$ eine beständige Größe, und heißt der **Parameter**. Man bezeichnet ihn mit a, b oder p; wir wählen das letztere Zeichen, und nennen den Parameter $= p$.

Die veränderliche JL heißt y; und die veränderliche EJ heißt x; dann ist obige Gleichung $JL^2 = \frac{DE^2}{AD} . EJ$ auch gleich: $y^2 = p . x$, welche man die **Gleichung für die Parabel** nennt.

§. 276. In Fig. 47. ist die Parabel außer dem Kegel zu sehen. Die krumme Linie SELG ist sie; in E ist der **Scheitel**; EB heißt **Axe**; ES, und EG sind ihre **Arme**, die unendlich lang seyn können. Ein beliebiges Stück EJ von der Axe heißt **Abscisse** $= x$; eine auf J senkrecht stehende Linie JL heißt **Ordinate** $= y$.

Wenn zwei von den Größen y, x, und p bekannt sind, so ist die dritte leicht zu finden. Denn

$$y^2 = x . p$$
$$\text{Also } y = \sqrt{(x . p)} = \text{Ordin.} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{und } x = \frac{y^2}{p} = \text{Abscisse.} \\ \text{und } p = \frac{y^2}{x} = \text{Parameter.} \end{array} \right.$$

§. 277. Die Gleichung für die Parabel läßt sich auch aus dem Kreise ableiten.

Es sey BmfD der eine Arm einer Parabel, BA die Axe; Ba $= x =$ Abscisse; ad $= p =$ Parameter; am $= y =$ Ordinate. Man sehe Bd als den Diameter eines Kreises an, aus dessen Mittelpunct c sich der Halbkreis dmB beschreiben läßt. Dann gilt nach §. 196.

$$da : am = am : AB: \text{ in unsern Zeichen}$$
$$p : y = y : x$$
$$\text{folglich } p . x = y^2$$

Dasselbe wird auch in dem Halbkreise gfB der Fall seyn, worin Be Abscisse, ef Ordinate, eg Parameter ist. Man bemerke, daß Abscisse und Ordinate wachsen, je weiter letztere vom Scheitel B absteht, aber ad $=$ eg bleibt, weil sie Parameter ist; und daß man jede der 3 Größen x, y und p durch Zeichnung finden kann, sobald zwei von ihnen bekannt sind.

Wäre

Wäre z. B. x und y gegeben, so findet man den Parameter, wenn man an den Punct m einen rechten Winkel setzt, dessen einer Schenkel in B liegt. Der andere Schenkel wird die Axe in d schneiden, und dadurch den Parameter ad bestimmen.

Wäre p und y, oder da und am gegeben, so fände man aB oder x eben so, weil die Lage des rechten Winkels an m durch die des einen Schenkels dm bestimmt wird, und der andere die Axe in B schneiden muß.

Die Ordinate y findet man, wenn man x und p in einer geraden Linie an einander setzt, im Endpunct von x (hier in a) ein Perpendikel am errichtet, dessen Länge durch den Kreis bestimmt wird, der sich aus der Mitte der $x + p$ durch B und d ziehen läßt.

§. 278. Wenn die Parabelarme glattpolirte Flächen wären, so würden alle mit der Axe parallel einfallende Lichtstrahlen SR Fig. 49. nach der Brechung in dem Punct F zusammen kommen, welcher **Brennpunct** heißt.

Der Abstand des Brennpuncts vom Scheitel ist $\frac{1}{4}$ p (Parameter), und die Ordinate auf demselben ist $\frac{1}{2}$ p; nach Fig. 49. ist

$$FM = \tfrac{1}{2} p; \text{ und } TM = p$$
$$AF = \tfrac{1}{4} p.$$

§. 279. Aus der Abscisse und zugehörigen Ordinate findet man den Brennpunct. $AF = \frac{y^2}{4x} = \frac{PR^2}{4.AP}$.

§. 280. Eine Linie FR vom Brennpunct der Parabel an den Arm derselben ist allezeit so groß, als die Abscisse der Ordinate, die aus diesem Punct R auf die Axe herabgelassen, plus der Entfernung des Brennpuncts vom Scheitel, d. h. Fig. 49.

$$FR = AP + AF = x + \tfrac{1}{4} p.$$

§. 281. Eine Linie AM, vom Scheitel zur Ordinate in der Parabel Fig. 50. heißt **Chorde**. Sie ist

$$AM = \surd(AP^2 + PM^2) = \surd(x^2 + y^2) = \surd(x^2 + px).$$

Jede gerade Linie, welche die Parabel in 2 Puncten schneidet, heißt Chorde, oder Sehne. Da alsdann die Sehnen mit der Axe nicht parallel laufen können, so wird die Axe oder ihre Verlängerung von den Sehnen unfehlbar getroffen werden.

§. 282. *Tangente* heißt eine Linie LF Fig. 51., welche die Parabel nur in Einem Puncte L berührt. Sie kann nie der Axe parallel werden, und muß also ihre Verlängerung durchschneiden.

§. 283. Die Linie, oder der Theil der Axe, FP, welche durch die auf den Berührungspunct der Tangente gezogene Ordinate PL bestimmt wird, heißt *Subtangente*.

§. 284. Ein Perpendikel auf der Tangente im Punct L, die LR, Fig. 51., heißt *Normale*; das Stück der Axe PR ist *Subnormale*.

§. 285. Die Werthe für diese Linien sind:

FA $=$ AP $= x$; folglich ist FP $= 2x =$ *Subtangente*; also liegt die Hälfte derselben innerhalb, und die andere außerhalb der Parabel.

Die *Tangente* FL $= \sqrt{(FP^2 + PL^2)} = \sqrt{(4x^2 + px)}$.

Die *Subnormale* PR $= \frac{1}{2} p$, $=$ dem halben Parameter, also beständig.

Die *Normale* RL $= \sqrt{\left(\frac{p^2 + 4px}{4}\right)} = \frac{\sqrt{(p^2 + 4px)}}{2}$.

Man kann sich FR als den Diameter eines Kreises vorstellen, in dessen Peripherie die drei Puncte F, L und R liegen.

§. 286. Wenn nun Fig. 51. in f der Brennpunct, so ist Ff $= x + \frac{1}{4} p$; fL ist auch $\frac{1}{4} p + x$; AR $= x + \frac{1}{4} p$, und fR $= x + \frac{1}{2} p - \frac{1}{4} p = x + \frac{1}{4} p$, folglich $\triangle$ FfL gleichschenklicht. Der Mittelpunct des Kreises FLR ist daher im Brennpunct f, woraus folgt, daß mit Hülfe eines Kreises, dessen Radius fL ist, sich *Tangente*, *Subtangente* und *Normale* mechanisch finden lassen.

§. 287. Eine mit einer Tangente TM Fig. 52. parallele Sehne GL wird durch eine mit der Axe parallel gezogene, und durch den Berührungspunct M der Tangente gende TM gehende Linie NS in zwei gleiche Theile getheilt, so daß $up = pL$.

§. 288. Die Linie NS, welche mit der Axe parallel läuft, heißt **Diameter**; up und pl sind seine **Ordinaten**, und der Punct M sein **Scheitel**; Mp Abscisse auf dem Diameter.

Es sind unzählig viele Diameter und Sehnen in einer Parabel möglich. Zieht man zwei oder mehrere parallele Sehnen, und theilt sie in 2 gleiche Theile, so wird man Puncte finden, durch welche der Diameter geht. Errichtet man auf dem Diameter mehrere senkrechte Linien und verlängert sie bis zur Parabel, so findet man auf ihrer Mitte die Puncte, durch welche die Axe derselben geht.

§. 289. Das Verhältniß der Abscissen und Ordinaten auf der Axe ist:

$$x : y = y : p;\ \text{also } y^2 = x . p;\ \text{oder} = x \frac{y^2}{p}$$

$$x' : y' = y' : p;\ \text{also } y'^2 = x' p;\ \text{oder } x' = \frac{y'^2}{p}$$

also verhalten sich x zu x' wie die Quadrate von y und y'. Sind nun Mp und Mv zwei verschiedene Abscissen, und $= u, u'$; up und wv dazu gehörige Ordinaten auf dem Diameter, und $= z, z'$: so verhält sich auch hier

$$u : u' = z^2 : z'^2$$

d. h. die **Abscissen verhalten sich zu einander, wie die Quadrate der Ordinaten.**

Die 3te Proportionalgröße zur Abscisse und Ordinate ist allezeit gleich dem Parameter, $x : y = y : p$; und bei dem Diameter $u : z = z : t$. Diese 3te Proportionalgröße ist constant oder beständig. Bei dem Diameter ist

der Parameter $t = \frac{z^2}{u}$

die Ordinate $z = \sqrt{(t . u)}$

die Abscisse $u = \frac{z^2}{t}$.

§. 290. Vergleicht man den Parameter t des Diameters mit dem Parameter p der Axe, so findet sich, daß

$\frac{a}{4}t = x + \frac{1}{4}p$, folglich ist t gleich der aus dem Brennpunct zum Durchschnittspunct des Diameters gezogenen geraden Linie FR (Fig. 49. §. 280.) viermal genommen; d. h. $t = 4(x + \frac{1}{4}p)$. Jeder Diameter hat seinen eignen Parameter.

§. 291. Jede Linie Fm oder FM, Fig. 53., vom Brennpunct zur Parabel heißt Radius vector, oder Vector, oder Zuglinie.

Wenn nun FR und Fr Perpendikel auf die Tangenten TM und tm sind, so verhalten sich $FR : Fr = \sqrt{FM} : \sqrt{Fm}$, d. h. die Perpendikel aus dem Brennpunct auf die Tangenten verhalten sich zu einander, wie die Quadratwurzeln aus den zugehörigen Zuglinien.

§. 292. Den Flächenraum, welchen die parabolische Linie einschließt, kann man nur dann angeben, wenn die Fläche durch eine doppelte Ordinate CB Fig. 55. geschlossen ist.

Der Triangel BAC ist in der parabolischen Fläche der größtmögliche. Nimmt man seinen Flächenraum $\frac{4}{3}$mal, so hat man den Flächenraum des parabolischen Abschnitts CGAHB. Die Grundlinie $CB = 2y$; die Höhe des △ ist $DA = x$, sein Inhalt $\frac{2y \cdot x}{2} = yx$ = Fläche des größten Dreiecks, und $\frac{4yx}{3}$ = Inhalt des parabolischen Abschnitts.

§. 293. Der parabolische Raum muß sich, wie jeder andere, in jede andere geometrische Figur verwandeln lassen, wozu der Abschnitt Verwandlung der Figuren Anleitung geben wird.

§. 294. Ein Parallelogramm auswärts um die Parabel verhält sich zur Fläche derselben, wie 3 zu 2; daher verhalten sich die parabolischen Räume zu einander, wie die Parallelogramme, die um sie beschrieben sind. Nach Fig. 55. verhält sich Parallelogramm JKBC zur parabolischen Fläche CGAHBC wie 3 zu 2.

§. 295. Parabeln sind einander ähnlich, wenn die darin beschriebenen größten Triangel einander ähnlich sind;

sind; daher ist es leicht, ähnliche Parabeln zu zeichnen, wenn man ähnliche Dreiecke beschreibt, aus der halben Grundlinie (= y) und Höhe (= x) nach §. 276. den Parameter sucht, und darnach die Parabeln construirt.

§. 296. Wenn der Parameter bekannt ist, so läßt sich die Parabel folgendermaßen zeichnen. Fig. 54.

Ziehe die gerade Linie dK, und auf derselben sey Bd = Parameter, BK = Axe, in B der Scheitel, auf dem das Perpendikel BN errichtet wird.

Mit dem Parameter Bd beschreibe aus B den Bogen a1d und mehrere Bogen aus andern beliebigen Puncten der Axe, so, daß sich die Bogen alle in d vereinigen und die aufgerichtete BN schneiden. In den Puncten a, e, h, i, wo die Kreise die Axe treffen, errichte senkrechte Ordinaten, und trage auf sie von der Axe aus die Weiten B1, B2 B3 ꝛc., so erhält man auf den Ordinaten die Puncte m, f, r, s ꝛc., durch welche sich der Parabelarm BD ziehen läßt. Es ist dann B1 = am, B2 = ef, B3 = hr ꝛc.

§. 297. Die richtigste Parabel erhält man aber, wenn man für die Abscissen Ba, Be, Bh ꝛc. die Ordinaten am, ef, hr ꝛc. berechnet, und nach dem Maaßstabe aufträgt. Je näher die Ordinaten an einander stehen, desto näher liegen die Puncte m, f, r, s an einander und desto genauer läßt sich der Parabelarm ziehen. Es versteht sich von selbst, daß die Ordinaten auch auf die andere Seite der Axe getragen werden müssen, um den andern Arm zu bekommen. Je größer man den Parameter Bd nimmt, desto weiter sperren sich die Parabelarme aus einander.

§. 298. Es bewege sich die Parabel, 55te Fig., um ihre Axe AD, so entsteht ein parabolischer Afterkegel, dessen unterster Durchmesser CB, dessen Höhe DA ist. Durch diese Bewegung beschreibt das Parallelogramm JKBC einen Cylinder, dessen Diameter CB und dessen Höhe DA ist. Dieser Cylinder ist doppelt so groß an körperlichem Inhalt, als der Afterkegel.

Nun ist AD = x; DB = y, folglich der Inhalt des Cylinders y^2 px; und des Afterkegels CGAHB = y^2

$= \frac{y^2 px}{2}$, wobei p die bekannte Zahl 3,14 .... bedeutet.

§. 299. Es ist gut, wenn Anfänger sich an der Berechnung und Zeichnung einer Parabel üben, daher wird ihnen folgende Berechnung nicht unwillkommen seyn.

Es sey der Parameter $= p = 30$, die erste Abscisse $= x = 5$, die zweite $= 10$ ꝛc., so finden wir die dazugehörigen Ordinaten durch

$$y = \sqrt{(xp)} = \sqrt{(5.30)} = \sqrt{150} = 12,24 .....$$

Wenn x = 5,	so ist	y =	12,247 .....
10	—	—	17,320
15	—	—	21,213
20	—	—	24,495
25	—	—	27,386
30	—	—	30,000
35	—	—	32,404
40	—	—	34,641
50	—	—	38,730
60	—	—	42,426
70	—	—	45,826
80	—	—	48,990
90	—	—	51,962
100	—	—	54,772
110	—	—	57,446
120	—	—	60,000
130	—	—	62,450
140	—	—	64,807
150	—	—	67,092.

Diese Werthe für x und y trägt man nach §. 297. auf eine gerade Linie von einem Punct, dem Scheitel, aus, und bekommt für jeden Arm 20 Puncte, durch welche er sich schon genau genug ziehen läßt.

§. 300. Um mit einem Blicke die Formulare für alle parabolische Linien übersehen zu können, sammeln wir sie in folgender Tabelle, in welcher auch die Zahlenwerthe, wie sie die Rechnung und Zeichnung in der Fig. 71. übereinstimmig gegeben haben, befindlich sind. Das Maaß ist $\frac{1}{2}$ Rheinl. Decimalzoll $= 100$.

Formeln und Berechnung für alle Linien in der Parabel Fig. 71.

Linien.	Formeln.	Zahlenwerth.
LA = Parameter	$p = \frac{y^2}{x}$ (gegeben).	30.
AP = Abscisse	$x = \frac{y^2}{p}$ (gegeben).	60.
PM = Ordinate	$y = \sqrt{(x \cdot p)}$.	42,426
TP = Subtangente	$= 2x$	120.
TA = AP = =	x	60.
TM = Tangente	$= \sqrt{(4x^2 + y^2)}$	127,279
F = Brennpunct	$AF = \frac{1}{4} p = \frac{y^2}{4x}$	7,5
Fd = Ordinate in F	$= \frac{1}{2} p$	15.
PR = Subnormale	$= \frac{1}{2} p$	15.
PF — —	$= x - \frac{1}{4} p$	52,5
MR = Normale	$= \sqrt{(y^2 + \frac{p^2}{4})}$	45.
FM = Radius vector	$= x + \frac{1}{4} p$	67,5
AM = Chorde	$= \sqrt{(x^2 + y^2)}$	73,484
KL = Diameter		
Parameter d. Diam.	$t = 4\left(x + \frac{p}{4}\right)$ oder $= \frac{z^2}{v}$	270.
NO = Abscisse des Diameters	$= v = \frac{z^2}{t}$ (gegeben)	20,4
SO = OH = Ordinate des Diameters	$= z = \sqrt{(t \cdot v)}$	74,219
NE	$= \frac{y \cdot v}{2x}$	7,212
OE oder auch durch	TP : PN = NO : NE TP : TM = NO : OE	21,72
SE =	SO − OE =	52,6

PE

Linien.	Formeln.	Zahlen-Werth.
PE $=$	$y - NE =$	35,2
AQ eine größere Abscisse	x' (gegeben)	150.
BQ größere Ordinate	$y' = \sqrt{(x' \cdot p)}$	67,082
Fläche des größten $\triangle$ ABH	$= AQ \cdot BQ = x' \cdot y'$	10062,3 $\square$ Maaß.
Fläche des parab. Abschnitts HNAMB	$= \frac{4}{3}(AQ \cdot BQ) = \frac{4x'y'}{3}$	13416,4 $\square$ Maaß.
Inhalt des Afterkegels AMBHNA	$= \frac{y'^2 \cdot x' \cdot 3,14\ldots}{2}$	1060275. Kubikmaaß.

Von der Ellipse.

§ 301. Es dringe bei E eine schneidende Ebene in den senkrechten Kegel ABC Fig. 56., und spalte denselben nach der Richtung EKH so, daß die Axe mit getroffen wird, so entsteht die Durchschnittsfigur EKHL, welche Ellipse heißt, und in der Figur zur Hälfte sichtbar ist.

Man lege die mit der Grundfläche BC parallelen Ebenen DE und HJ da durch den Kegel, wo die Ellipse anfängt und endigt, so wie auch eine schneidende parallele Ebene FG irgendwo durch die Ellipse. Alsdann wird FG der Durchmesser eines Kreises, dessen Hälfte FLG; KL wird sowol auf EH als FG senkrecht stehen, und die Ordinate der Ellipse, EH Axe, und EK Abscisse derselben seyn. Aus der Beschaffenheit des Kegels und der Lage der schneidenden Ebenen suchen wir eine Gleichung für die Ordinate KL.

$\triangle$ DEH ist ähnlich $\triangle$ FKH, daher gilt

$$EH : DE = HK : FK, \text{ und } FK = \frac{DE \cdot HK}{EH},$$

$\triangle$ EHJ ist ähnlich $\triangle$ EKG, daher gilt

$$EH : HJ = EK : KG, \text{ und } KG = \frac{EK \cdot HJ}{EH}.$$

Aus dem Kreise gilt

$FK : KL = KL : KG$, und $KL^2 = FK . KG$.

Wenn nun in der letzten Gleichung für FK und KG das gefundene Gleiche untergelegt wird, so ist

$$KL^2 = \frac{HK . DE . EK . HJ}{EH . EH}.$$

Nennt man $EH = a$, so wird $KL^2 = y^2 = \frac{DE . HJ . HK . EK}{a . a}$

und $EK = x$, so ist $HK = a - x$; $\frac{DE . HJ}{a}$ ist eine beständige Größe und heißt Parameter $= b$. Diese Zeichen untergelegt, giebt:

$$\frac{b.(a-x)x}{a} = \frac{b.(ax-x^2)}{a} = bx - \frac{bx^2}{a} = y^2 = \text{Ordinate}.$$

In der Ellipse ist also das Quadrat der Ordinate gleich der Abscisse, multiplicirt mit dem Parameter, minus dem Parameter multiplicirt mit dem Quadrat der Abscisse, dividirt durch die große Axe, d. h. $y^2 = bx - \frac{bx^2}{a}$.

§. 302. Die Fig. 57. ist eine Ellipse; in derselben ist $EH = a$ = große Axe, JK = kleine Axe $= c$. Beide Axen theilen die Ellipse in 4 gleiche Quadranten; in C ist der Mittelpunct; E und H heißen Scheitel der Ellipse. EP ist eine Abscisse auf der großen Axe, und PM die dazu gehörige Ordinate, desgleichen PN.

Man bemerkt leicht, daß die Ordinaten immer kleiner werden, je näher sie am Scheitel stehen; in E und H werden sie = Null, im Mittelpunct C aber am größten, d. h. gleich der kleinen Axe seyn. Eine Ellipse ist vollkommen bestimmt, wenn ihre beiden Axen bekannt sind; wenn beide Axen einander gleich werden, so ist die Ellipse ein Kreis; je mehr beide Axen verschieden sind, desto länglicher wird die Ellipse.

§. 303. Ist die halbe kleine Axe die größte Ordinate, so ist $x = \frac{1}{2}$ a und die Gleichung für die Ellipse wird

$$\frac{ba}{2} - \frac{baa}{4a} = y^2$$

$$\frac{ba}{2} - \frac{ba}{4} = y^2 \quad (4$$

$$2ba - ba = 4y^2$$

$$ba = 4y^2$$

$$\frac{ba}{4} = y^2$$

$$\sqrt{\frac{ba}{2}} = y = \tfrac{1}{2}\,C =$$ halben kleinen Axe, folglich ist die ganze kleine Axe $= \sqrt{ba} = c$; und $c^2 = ba$, also $a : c = c : b$, d. h. die kleine Axe ist die mittlere Proportionalgröße zwischen der großen Axe und dem Parameter.

§. 304. Beide Axen und der Parameter sind beständige Größen, und aus zweien von ihnen ist allezeit die 3te zu finden.

Die große Axe $a = \frac{c^2}{b}$; die kleine Axe $c = \sqrt{ab}$; der Parameter $b = \frac{c^2}{a}$.

§. 305. In jeder Ellipse sind zwei Brennpuncte F und f Fig. 58., welche gleich weit von den Scheiteln abstehen, und in den Puncten der großen Axe liegen, auf welchen die Ordinaten so groß sind, als der halbe Parameter. Folglich ist der ganze Parameter so groß, als die doppelte Ordinate auf dem Brennpunct. In Fig. 58. ist PM = Parameter.

§. 306. Man findet die Brennpuncte, wenn man die halbe große Axe, vom Endpunct der kleinen Axe an, auf die große Axe trägt. Denn $FD = \tfrac{1}{2}a = AC$.

Der Abstand der Brennpuncte vom Mittelpuncte ist CF, und $CF^2 = FD^2 - CD^2$, oder

$$CF^2 = \tfrac{1}{4}a^2 - \tfrac{1}{4}c^2;\ \text{also}\ CF = \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - \frac{c^2}{4}\right)} = \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{4}}.$$

§. 307.

§. 307. In der Ellipse verhalten sich die Quadrate der Ordinaten zu einander, wie die Rechtecke, die aus der Multiplication der beiden zugehörigen Stücke der großen Axe entstehen.

Nach Fig. 57. $PM^2 : QN^2 = EP . PH : EQ . QH$
$y^2 : \quad z^2 = x . (a-x) : v . (a-v)$
wobei z eine zweite Ordinate und v ihre Abscisse ist. Eigentlich hat jede Ordinate 2 Abscissen, z. B. zu y oder oder PM gehören die Abscissen EP und HP; daher kann man auch sagen:

die Quadrate der Ordinaten verhalten sich, wie die Rechtecke aus ihren Abscissen.

§. 308. Zeichnung der Ellipse.

1. Man bevestige in den beiden Brennpuncten einen Faden, welcher länger, als der Abstand der Brennpuncte von einander, und allemal gleich der großen Axe ist. Mit einem schreibenden Stift ziehe man den Faden gleichmäßig an, und führe denselben um die Brennpuncte herum, so wird der Stift die krumme elliptische Linie beschreiben. Wenn in Fig. 58. in F und f die Brennpuncte, so ist FDf der Faden und in D der schreibende Stift; rückt D nach M, so ist fMF der Faden. Folglich ist $fD + DF = fM + MF =$ der großen Axe.

Anmerk. Diese Zeichnungsart ist zwar sehr leicht, hat hat aber doch ihre Schwierigkeiten, denn der Faden wird während der Zeichnung durch das Anziehen länger. Bei großen Figuren, als elliptische Gewölbebogen, Stubendeckenmalerei u. dgl. ist sie indessen immer noch die anwendbarste.

2. Mühsamer, aber auch genauer, ist folgende Verfahrungsweise: Für die gegebene große Axe und den Parameter berechne man aus den willkührlich genommenen Abscissen die dazu gehörigen Ordinaten und trage sie rechtwinklicht von den Scheiteln an auf beide Seiten der großen Axe.

Je weniger die Abscissen von einander verschieden sind, desto enger liegen die Ordinaten an einander, und desto mehr

mehr Puncte erhält man, durch welche sich die krumme Linie aus freier Hand ergänzen läßt. Da beide Axen die Ellipse in 4 völlig gleiche Quadranten theilen, so ist die Berechnung für einen hinlänglich. Weiter unten theilen wir eine solche Berechnung mit.

§. 309. Wenn die Abscissen vom Mittelpunct C Fig. 57. genommen werden, welches gewöhnlich geschieht und bequem ist, so erhält man folgende Gleichung für die Ordinaten y

$$y = \sqrt{\left(\frac{c^2}{4} - \frac{c^2 u^2}{a^2}\right)},$$

worin $u = CP$, Abscisse vom Mittelpunct, $c =$ kleine, $a =$ große Axe.

Der Parameter b ist nach dieser Formel $= \frac{a y^2}{\frac{1}{4}a^2 - u^2}$,

Die Abscisse $u = \frac{\sqrt{(a^2 - c^2)}}{2}$.

Anmerk. u ist das Stück der halben großen Axe, was x übrig läßt, also $U = \frac{1}{2} a - x$.

§. 310. Linien aus den Brennpuncten nach irgend einem Punct M in der Ellipse Fig. 58. sind zusammengenommen so groß, als die große Axe. $FM + fM = a$, der Punct M mag liegen, wo er will; FM und fM heißen Vectoren oder Zuglinien.

§. 311. Liegt M nicht in D, so sind FM und fM ungleich. Ihr Unterschied wird gefunden:

$$fM = \tfrac{1}{2}a + \frac{u\sqrt{(a^2 - c^2)}}{a}; \; FM = \tfrac{1}{2}a - \frac{u\sqrt{(a^2 - c^2)}}{a}.$$

Die Differenz $= \frac{2u\sqrt{(a^2 - c^2)}}{a}$.

§. 312. Die Puncte F und f heißen deshalb Brennpuncte, weil die Winkel, welche die Linien FM und fM mit der Ellipse machen, einander gleich sind, Fig. 58. ist $\angle m = \angle n$. Wenn daher in dem einen Brennpunct ein leuchtender Körper stände, und die innere Seite einer Ellipse eine glatte Ebene wäre, so würden die auf den Umkreis

kreis fallenden Lichtstrahlen von allen Puncten nach dem andern Brennpuncte hin zurück fallen, und sich dort sammeln.

§. 313. Eine gerade Linie durch das Centrum, wie mH Fig. 59., heißt ein Diameter, und theilt die Ellipse in 2 gleiche Hälften. Die Ordinaten vom Endpunct des Diameters zur Axe sind gleich groß, Pm = GH.

§. 314. Eine Linie, welche die Ellipse nur in einem Puncte berührt, als OM, heißt Tangente des Puncts M. Sie wird folgendermaßen gezogen:

Aus den Brennpuncten F und f ziehe gerade Linien an den Punct, den die Tangente berühren soll, hier an M, Fig. 59., verlängere fM bis R, daß MR = FM wird, und ziehe RF zusammen. Nun theile RF in 2 Theile in L, und ziehe ML, welche verlängert die Axe in O schneidet, so ist OM die Tangente.

§. 315. Zieht man mit der Tangente OM parallel einen Diameter Hm, so schneidet derselbe von fM ein Stück fT ab. Das übrige Stück TM ist der halben großen Axe gleich.

$$TM = \tfrac{1}{2}a; \text{ weil nun } fM = \tfrac{1}{2}a + \frac{u\sqrt{(a^2-c^2)}}{a}$$

$$\text{so ist das Stück } fT = \frac{u\sqrt{(a^2-c^2)}}{a}.$$

Das Stück fR = a = der großen Axe.

§. 316. Ein Perpendikel auf der Tangente am Punct M, nach der Axe, theilt den Winkel, den die Vectoren an M machen, in zwei gleiche Theile. Winkel n = < r, und dM ist Perpendikel. Der Abstand des Perpendikels vom Brennpunct, oder

$$Fd = \frac{fF \cdot FM}{fR} = \frac{\sqrt{(a^2-c^2)} \cdot \left(\tfrac{1}{2}a - \frac{u\sqrt{(a^2-c^2)}}{a}\right)}{a}.$$

§. 317. Die OP heißt Subtangente und macht mit der Ordinate PM und Tangente OM einen recht-

winkֿ

winklichten Triangel. Sieht man od als den Durchmesser eines Kreises an, so lassen sich die 3 Puncte O, M und d in die Kreislinie bringen.

$$PO = \frac{a^2 - 4u^2}{4u};\ Pd = \frac{c^2 u}{a^2}.$$

§. 318. Die Tangente ist im rechtwinklichten Dreieck OPM die Hypotenuse, daher ist $OM = \sqrt{(PM^2 + OP^2)} = \sqrt{\left(\left(\frac{a^2 - 4u^2}{4u}\right)^2 + \left(\frac{c^2}{4} - \frac{c^2u^2}{a^2}\right)\right)}$.

§. 319. Die Subtangente OP giebt auch die Proportion Fig. 59. und 60.

$$CP : AP = BP : OP$$

$$u : \tfrac{1}{2}a - u = \tfrac{1}{2}a + u : OP, \text{ und } OP = \frac{\frac{1}{4}a^2 - u^2}{u}.$$

Die Entfernung des Puncts O vom Centro C giebt

$$CP : AC = AC : OC$$

$$= u : \tfrac{1}{2}a = \tfrac{1}{2}a : OC$$

$$\text{und } OC = \frac{\frac{1}{4}a^2}{u}.$$

§. 320. Den Abstand OA giebt die Proportion

$$CP : AP = CA : OA$$

d. h. $u : \tfrac{1}{2}a - u = \tfrac{1}{2}a : OA$; und $OA = \frac{\frac{1}{4}a^2}{u} - \tfrac{1}{2}a$;

§. 321. Subtangente und Abscisse, mit einander multiplicirt, geben ein Rechteck, welches eben so groß ist, als dasjenige, was aus der Multiplication der beiden Stücke der großen Axe, die die Abscisse trennt, entsteht.

$$OP \cdot PC = PB \cdot AP.$$

§. 322. Das Perpendikel auf der Tangente in M heißt Normale; in Fig. 59. ist Md die Normale; Pd die Subnormale.

Die Subnormale $Pd = u - dC$, oder $\frac{c^2 u}{a^2}$.

Die Normale $Md = \sqrt{(y^2 + Pd^2)}$.

§. 323. Man ziehe Fig. 60. durch M einen Diameter MCV; und einen andern QCN mit der Tangente OM parallel, so hängen beide Diameter von der Tangente ab, und heißen **conjugirte Diameter.** Berührte die Tangente den Endpunct einer Axe, so müßte ihr die andere Axe parallel seyn; folglich sind **beide** Axen auch **conjugirte Diameter.**

§. 324. Wenn von den Endpuncten der Diameter Perpendikel auf die Axe fallen, NJ und PM, so ist

$$CJ^2 = AP.PB; \text{ und } CP^2 = AJ.JB$$

und es sey $CJ^2 = v^2 = \frac{a^2}{4} - u^2 \qquad u^2 = \frac{a^2}{4} - v^2.$

§. 325. Weil hiedurch die Abscisse CJ = v gefunden ist, so ist auch NJ und NC zu finden.

$$NJ \text{ (Ordinate in J)} = \sqrt{\left(\frac{c^2}{4} - \frac{c^2 v^2}{a^2}\right)},$$

$$NC \text{ (Hypotenuse in } \triangle \text{ NCJ)} = \sqrt{(CJ^2 + CJ^2)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{c^2}{4} - \frac{c^2 v^2}{a^2} + \frac{a^2}{4} - u^2\right)}; \; CM = \sqrt{(CP^2 + PM^2)}$$

$$= \sqrt{(u^2 + y^2)} = \sqrt{\left(u^2 + \frac{c^2}{4} - \frac{c^2 u^2}{a^2}\right)}.$$

Anmerk. Die durch die conjugirten Diameter und ihre Ordinaten gebildeten Dreiecke NJC und PMC sind einander der Fläche nach gleich.

§. 326. Wenn die Puncte P und J in einander fallen, so sind die Diameter einander gleich. Dann ist Abscisse $u = \sqrt{\frac{a^2}{8}}$.

§. 327. Reicht die Tangente OM bis zur verlängerten kleinen Axe in R, so ist $MR = \frac{NC^2}{OM}$, Fig. 60.

§. 328. Derjenige Diameter, der auf der Tangente steht, theilt den conjugirten Diameter und jede Parallele HK in z in 2 gleiche Theile. Es verhält sich

$$MZ.ZV : HZ^2 = MC^2 : CN^2.$$

Die

Die Linien HZ oder ZK heißen Ordinaten auf dem Diameter. Nennt man sie w, und ihre Abscissen MZ = r; MV = d, so ist $w^2 = \frac{r \cdot (d - r) \cdot CN^2}{\frac{1}{4} d^2}$.

§. 329. Aus dem Vorhergehenden läßt sich nun die Aufgabe lösen: in einer gegebenen Ellipse zu finden

1. jeden Diameter. Man ziehe zwei parallele Sehnen, wo man will, theile jede in 2 gleiche Theile, und ziehe durch diese Theilpuncte eine gerade Linie, welche ein Diameter seyn und durch's Centrum gehen wird. Es sey Fig 63. die Sw, und TJ eine Chorde, so ist LO der Diameter.
2. Das Centrum. Es liegt auf der Mitte des Diameters.
3. Die große Axe. Beschreibe aus dem Mittelpunct C mit willkührlicher Zirkelöffnung den Bogen GH, ziehe die Chorde GH und theile sie in 2 gleiche Theile. Durch ihre Mitte und durch das Centrum ziehe eine gerade Linie, welche die große Axe seyn wird.

   Rechtwinklicht auf der Mitte der großen Axe steht die kleine Axe DD.
4. Die Brennpuncte. Trage die halbe große Axe vom Endpunct der kleinen nach der großen Axe, also daß DF und Df Fig. 58. = AC.
5. Die beiden gleichen conjugirten Diameter. Ziehe AD und Ad, theile jede in m und n, Fig. 63., in 2 gleiche Theile, und ziehe durch C und m, so wie durch C und n die beiden Diameter MV und NQ.

§. 330. Die Lage der Ordinaten zu bestimmen, wenn der Diameter gegeben ist.

Es sey MV der gegebene Diameter, Fig. 62. Nimm w willkührlich, ziehe wM und verlängere sie bis MG = Mw. Von G ziehe eine Parallele mit dem Diameter, bis sie die Ellipse in A erreicht. Von A ziehe die Aw, welches die doppelte Ordinate seyn wird, welche die Lage aller andern bestimmt.

Parallel mit Aw geht NQ durch das Centrum und ist conjugirter Diameter.

§. 331. Das Parallelogramm RSFU, Fig. 64, welches die beiden Axen einer Ellipse bilden, hat eben so viel Fläche, als dasjenige, was sich aus den conjugirten Diametern MP und QN bilden läßt, und hier WXYZ ist.

Überhaupt sind alle um die Ellipse beschriebene Parallelogramme der Fläche nach einander gleich.

§. 332. Die bis zur Tangente verlängerten Perpendikel auf den Endpuncten der großen Axe geben mit einander multiplicirt ein Rechteck, das dem Quadrat der halben kleinen Axe gleich ist.

$$AQ \cdot BS = cd^2;\ AQ = \frac{a \cdot y}{a + 2u};\ BS = \frac{a \cdot y}{a - 2u}\ \text{Fig. 61.}$$

§. 333. Wenn man aus den Brennpuncten Perpendikel auf die Tangente fallen läßt, so ist das Product dieser Linien ebenfalls dem Quadrat der halben kleinen Axe gleich. $FH \cdot fh = cd^2 = \frac{c^2}{4}$, folglich sind die Rechtecke $QA \cdot SB$ und $FH \cdot fh$ einander gleich, Fig. 61.

§. 334. Bewegte sich ein Körper in der Ellipse um den Brennpunct F, Fig. 58., so würde sich seine Geschwindigkeit in einem Puncte M zu der Geschwindigkeit in D (der mittlern Entfernung von F) verhalten, wie $\sqrt{FM} : \sqrt{fM}$ d. i. wie die Quadratwurzeln aus den Vectoren.

§. 335. Beschreibt man mit der halben großen Axe aus dem Centrum einen Kreis, Fig. 65, und errichtet auf derselben die willkührlichen Ordinaten Pm, Qn, Ro, Cd, und verlängert sie bis zum Kreise in a, b, c, e, so verhalten sich die Ordinaten der Ellipse, wie die Ordinaten des Kreises; d. i.

$Pm : Pa = Qn : Qb$ u. s. w.

und $Pm : Pa = Cd : Ce$, d. h. wie die halbe kleine Axe zur halben großen Axe.

§. 336. Die Fläche der Ellipse $= E$ verhält sich zur Fläche des Kreises (dessen Radius die halbe große Axe), $= K$, wie die kleine Axe zur großen Axe; d. i.

$E : K = c : a$, und die Fläche der Ellipse

$$E = \frac{K \cdot c}{a}$$

§. 337. Ist der Kreis mit der halben kleinen Axe beschrieben, so ist

$$E : K = a : c$$

$$\text{und } E = \frac{K \cdot a}{c}.$$

§. 338. Die elliptische Fläche ist auch gleich einer Kreisfläche, deren Diameter die mittlere Proportionalgröße zwischen beiden Axen ist. $a : d = d : c$, also ist $a \cdot c = d^2$, weil $\frac{d^2 p}{4}$ = Kreisfläche, so ist die elliptische Fläche $= \frac{a \cdot c \cdot p}{4}$, welches Formular das bequemste ist ($p = 3{,}14159\ldots\ldots$).

§. 339. Bei Ellipsen, in denen die Brennpuncte nahe am Centro liegen, ist $\triangle$ COM der Fläche nach fast gleich dem $\triangle$ QCM, Fig. 65., wobei Q der Brennpunct der Ellipse. Dies giebt ein Mittel, die Ellipse nach einem gegebenen Verhältniß zu theilen. Wenn im Kreise BO der achte Theil der Peripherie wäre, so wäre Sector BCO $\frac{1}{8}$ der Kreisfläche. Zieht man nun aus dem Brennpunct Q die Linie QO, und zu ihr die Parallele CM, so ist auch BmQ $\frac{1}{8}$ der elliptischen Fläche.

Anmerk. Dieser Satz findet in der Astronomie Anwendung.

§. 340. Die Flächen der Ellipsen verhalten sich zu einander, wie die Producte aus ihren Axen; und wenn sich gleichnamige Axen gleich sind, wie die andern Axen.

§. 341. Wenn sich eine halbe Ellipse um die feststehende Axe bewegt, so entsteht eine Art Kugel, Sphäroid, die aber nach der Richtung der kleinen Axe eingedrückt erscheint. Ein solcher Körper heißt Ellipsoide. Der körperliche Inhalt derselben $= \frac{ac^2 p}{6}$, wobei $p = 3{,}14159\ldots$

§. 342. Auch aus dem Cylinder läßt sich eine Ellipse schneiden. Der Durchmesser desselben wird dann jedesmal der kleinen Axe gleich. Die große Axe hängt von dem Winkel ab, unter welchem die schneidende Ebene den Cylinder trifft.

Die

Diesen Winkel = w findet man durch

$\text{Sin. } w = \frac{\text{Sin. tot. } c}{a}$; und wenn w gegeben ist

$a = \frac{\text{Sin. tot. } c}{\text{Sin. } w}$.

§. 343. Wenn beide Axen bekannt sind, so läßt sich die Ellipse berechnen und zeichnen.

Es sey Fig. 72. AB die große Axe = a = 176; ED die kleine Axe = c = 154, und CP die eine Abscisse = 51 = u, vom Mittelpunct angenommen, so lassen sich alle in dieser Figur sichtbare gerade Linien darnach berechnen, welches in der weiterhin folgenden Tabelle geschehen ist. Allein die Ellipse selbst zu zeichnen, oder Puncte zu finden, durch welche die krumme Linie gezogen wird, nehme man u willkührlich, und nach und nach immer größer, bis es der halben großen Axe gleicht, und berechne dazu die Ordinaten. Weil sich aber die Ellipse in der Gegend der großen Axe schnell krümmt, so nehme man auch auf der kleinen Axe mehrere Abscissen und berechne dazu die Ordinaten, welche man gehörigermäßen auf beiden Seiten des Centrums und der Axe, auf der die Abscissen genommen, rechtwinklicht nach dem Maaßstabe (hier 1 Zoll = 100 Theile) aufträgt.

Formular für die Ordinaten auf der großen Axe

$$\sqrt{\left(\frac{c^2}{4} - \frac{c^2 \cdot u^2}{a^2}\right)},$$

auf der kleinen Axe $\sqrt{\left(\frac{a_2}{4} - \frac{a^2 \cdot u^2}{c^2}\right)}$.

Wenn CP oder u =	5,	so ist PM	oder y =		76,9
	10	—	—	—	76,5
	15	—	—	—	75,9
	20	—	—	—	75,0
	25	—	—	—	73,8
	30	—	—	—	72,4
	35	—	—	—	70,7
	40	—	—	—	68,6.
	45	—	—	—	66,2

Wenn CP oder u = 50,	so ist PM oder y =			63,5
55	—	—	—	60,3
60	—	—	—	56,5
65	—	—	—	52,1
70	—	—	—	47,0
Abscissen auf der kleinen Axe = u 5	—	—	—	87,8
10	—	—	—	87,3
15	—	—	—	86,3
20	—	—	—	84,9
25	—	—	—	83,2
30	—	—	—	81,1
35	—	—	—	78,4
40	—	—	—	75,2

Diese für 1 Quadranten berechneten Ordinaten gelten für alle vier, und sind völlig hinreichend, die Ellipse zu ziehen.

Formelntafel zur Berechnung aller Linien in der Ellipse Fig. 72.

Linien.	Formeln.	Werth in Zahlen.	
AB = große Axe	$a = \frac{c^2}{b}$	176.	Beständige Größen.
AC = halbe große Axe	$\frac{1}{2} a = \frac{c^2}{2b}$	88.	
DE = kleine Axe	$c = \sqrt{ab}$ . . .	154.	
DC = halbe kleine Axe	$\frac{1}{2} c = \frac{\sqrt{ab}}{2}$ . . .	77.	
CF = Cf Brennpuncte	$= \sqrt{\left(\frac{a^2 - c^2}{4}\right)}$	42,6	
Ff = Abstand der Brennpuncte	$= 2\sqrt{\left(\frac{a^2 - c^2}{4}\right)}$	85,2	
Parameter . .	$b = \frac{c^2}{a}$	134,75	

PG

Linien.	Formeln.	Werth in Zahlen.
PC = Abſciſſe, gegeben,	$u = \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - \frac{a^2 y^2}{c^2}\right)}$	51.
PM = Ordinate zu u	$y = \sqrt{\left(\frac{c^2}{4} - \frac{c^2 u^2}{a^2}\right)}$	62,75
PO = Subtangente	$= \frac{a^2 - 4u^2}{4u}$ . . .	100, 84
OM = Tangente	$= \sqrt{(OP^2 + PM^2)}$	
	$= \sqrt{\left(\frac{(a^2 - 4u^2)^2}{4u}\right.}$	118,77
	$\left. + \left(\frac{c^2}{4} - \frac{c^2 u^2}{a^2}\right)\right)$	
fM = Radius vector	$= \frac{1}{2} a - \frac{u\sqrt{(a^2 - c^2)}}{a}$	63,31
fM = Radius vector	$= \frac{1}{2} a + \frac{u\sqrt{(a^2 - c^2)}}{a}$	112,69
Fd	$= \frac{\sqrt{(a^2 - c^2)}.(\frac{1}{2} a - \frac{u\sqrt{(a^2 - c^2)}}{a}}{a}$	30,65
Cd = — —	$= \frac{u(a^2 - c^2)}{a^2}$ . .	11,95
AP — —	$= \frac{1}{2} a - u$ . . .	37.
PF — —	$= u - \sqrt{\left(\frac{a^2 - c^2}{4}\right)}$	8,4
Pf — —	$= u + \sqrt{\left(\frac{a^2 - c^2}{4}\right)}$	93,6
AF, Brennpunct vom Scheitel	$= \frac{1}{2} a - \sqrt{\left(\frac{a^2 - c^2}{4}\right)}$	45,4
Ad — —	$= \frac{1}{2} a - \frac{u(a^2 - c^2)}{a^2}$ oder $\frac{1}{2} a - Cd$	76,05
Pd = Subnormale	$= \frac{c^2 u}{a^2}$	39,05

Linien.	Formeln.	Werth in Zahlen.
CO = — —	$= \frac{\frac{1}{4} a^2}{u}$	151,84
OA — —	$= \frac{\frac{1}{4} a^2}{u} - \frac{1}{2} a$ . .	63,84
Md = Normale	$= \sqrt{(y^2 + Pd^2)}$.	73,89
CM — —	$= \sqrt{(u^2 + y^2)}$.	80,86
MV = Diameter	$= 2\sqrt{(u^2 + y^2)}$.	161,72
AZ — —	$= \frac{PM . OA}{OP}$ . .	39,63
BS — —	$= \frac{PM . OB}{OP}$ . . .	149,24
CR — —	$= \frac{PM . OC}{OP}$ . .	94,48
CJ = Abscisse des Diameters	$v = \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - u^2\right)}$	71,71
NJ = Ordinate darauf	$= \sqrt{\left(\frac{c^2}{4} - \frac{c^2 v^2}{a^2}\right)}$	44,63
NC = halber conjugirter Diamet.	$= \sqrt{(JC^2 + JN^2)}$	
oder	$= \sqrt{\left(\frac{c^2}{4} - \frac{c^2 v^2}{a^2} + \frac{a^2}{4} - u^2\right)}$	84,47
NQ = conjugirter Diameter	$2\sqrt{\left(\frac{c^2}{4} - \frac{c^2 v^2}{a^2} + \frac{a^2}{4} - u^2\right)}$	168,93
MR — —	$= \frac{NC^2}{OM}$	60,07
OS — —	$= \frac{OM . OB}{OP}$ . .	282,48
OZ — —	$= \frac{OM . OA}{OP}$ . .	75,19

OB

Linien.	Formeln.	Werth in Zahlen.
OB = — —	$= a + \left(\frac{\frac{1}{4}a^2}{u} - \frac{1}{2}a \right)$	239,84
VX = Abscisse auf dem Diameter	gegeben	22,5
XM — —	MV — VX	139,22
GX = WX Ordinate a. d. Diameter	$= \sqrt{\left(\frac{MX.XV.NC^2}{MC^2} \right)}$	58,46
Fh Perp. auf die Tangente aus d. Brennpunct	$= \frac{dM \,.\, OF}{Od}$ . . .	57,7
OF — —	= OP + PF . .	109,24
Od — — oder	= OP + Pd = OC — dC . .	139,89
fH Perpendikel a. d. Tangente	$= \frac{dM \,.\, Of}{Od}$ . . .	102,75
Of — —	= OC + Cf . . .	194,44
Fläche der Ellipse	$= \frac{a.c.3,1415....}{4} =$	21786,8 □Maaß
Inhalt der Ellipsoide	$= \frac{a.c^2.3,1415....}{6} =$	2185445 Kubik-Maaß

Von der Hyperbel.

§. 344 Wenn zwei Kegel ECD und RCS Fig. 66. mit den Spitzen gegen einander stehen, und eine schneidende Ebene VABQ durch beide Kegel dringt, so entstehen auf den Oberflächen der Kegel zwei krumme Linien UMAN und ZBQ, welche Hyperbel heißen. In A und B sind die Scheitel derselben; QB und BZ sind die Arme der Hyperbel im obern, und OA und AN im untern Kegel. Die Figur im obern Kegel ist stets der im untern gleich, der Schnitt mag liegen, wie er will, wenn er nur beide Kegel trifft.

Der

Der Abstand der Scheitel von einander, also die Linie AB heißt die große Axe oder Zwergaxe, die verlängert beide Hyperbeln in gleiche Hälften theilt.

Eine mit der Grundfläche parallel gelegte Ebene HG durchdringt nun auch die Axe AV in P und die ganze Hyperbel, und bildet einen Kreis, der hier zur Hälfte GMH zu sehen ist. Die MP ist auf der Axe AV und auf dem Diameter GH in P senkrecht, mißt den Abstand des Puncts M von der Axe in P, und heißt Ordinate. Der Abstand vom Scheitel, die AP, heißt Abscisse und wird durch x, so wie die Ordinate mit y bezeichnet, weil beide veränderliche Größen sind, und von der Lage der GH abhängen.

Die Gleichung für die Ordinate PM = y finden wir folgendermaßen.

Man lege da, wo die schneidende Ebene in die Kegel dringt, die parallelen Ebenen BL, und AF durch die Kegel, dann ist △ BFA ähnlich dem △ BGP; und △ BAL ähnlich dem △ APH, daher

$$BA : AF = BP : PG, \text{ und } PG = \frac{AF \cdot BP}{BA}$$

$$AB : BL = AP : PH, \text{ und } PH = \frac{BL \cdot AP}{AB}$$

$$GP : PM = PM : PH, \text{ und } PM^2 = GP \cdot PH.$$

Setzt man nun für GP und PH die eben gefundenen Werthe, so wird $PM^2 = y^2 = \frac{AF \cdot BP}{BA} \cdot \frac{BL \cdot AP}{AB}$.

In einer und derselben Hyperbel sind beständige Größen AB = a, AF und BL, und bringt man sie zusammen, so ist $\frac{BL \cdot AF}{AB} \cdot \frac{AP \cdot BP}{AB} = y^2 = PM^2$. Die Größe $\frac{BL \cdot AF}{AB}$ heißt Parameter = b; da nun AP = x; BP = a + x; AB = a, so wird die Gleichung für die Ordinate der Hyperbel:

$$y^2 = b \cdot \left(\frac{a+x}{a}\right) x = \frac{bax}{a} + \frac{bx^2}{a} = bx + \frac{bx^2}{a},$$

folglich ist $y = \sqrt{\left(bx + \frac{bx^2}{a}\right)}$.

§. 345. Die Wurzel kann + und — haben, folglich giebt es auch zweierlei Ordinaten, wovon man eine positiv und die andere negativ nehmen kann. Auf der Zwergaxe AB kann es keine Ordinaten geben. Die Arme der Hyperbel können unendlich lang seyn.

§. 346. Wenn man auf der Mitte der großen Axe in C ein Perpendikel errichtet, welches die halbe Quadratwurzel aus dem Product der großen Axe und des Parameters ist, so heißt diese CD, Fig. 67., die halbe kleine Axe; folglich ist $Dd = \sqrt{a \cdot b}$ = der kleinen Axe, welche daher die mittlere Proportionalgröße zwischen der großen Axe und dem Parameter ist. Bezeichnen wir sie mit c, so gilt $a : c = c : b$. Und $a = \frac{c^2}{b}$; $b = \frac{c^2}{a}$.

§. 347. In der Hyperbel giebt es zwei Brennpuncte. Sie liegen, wie in allen Kegelschnitten, da auf der Axe, wo die doppelte Ordinate dem Parameter gleicht. Fig. 67. ist mn = Parameter, in F und f sind die Brennpuncte.

Den Abstand der Brennpuncte von den Scheiteln giebt das Formular $AF = Bf = -\frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{(ab + a^2)}}{2}$.

Mechanisch findet man die Brennpuncte, indem man an den Scheiteln Perpendikel AE = halben kleinen Axe CD errichtet, und mit dem Radius CE einen Kreis beschreibt, welcher durch F und f gehen wird.

§. 348. Wäre große Axe und Brennpunct F bekannte, so würde durch einen Kreis, dessen Radius CF ist, auf dem Perpendikel AE im Scheitel, die halbe kleine Axe gefunden. Der Abstand der Brennpuncte $e = \frac{\sqrt{(a^2 + ab)}}{2}$.

§. 349. Das Rechteck aus AF und BF ist dem Quadrat der halben kleinen Axe gleich; oder $AF \cdot BF = c^2 = CD^2$.

§. 350. In der Hyperbel verhalten sich die Quadrate zweier Ordinaten y und z zu einander, wie $(a+x)x : (a+v)v$ oder $ax + x^2 : av + v^2$, wobei v die Absciſſe zu z iſt.

§. 351. Wenn große Axe und Parameter gegeben ſind, ſo wird ſich die Hyperbel zeichnen laſſen, indem man die x willkührlich nimmt, nach der Formel $y = \sqrt{\left(bx + \frac{bx^2}{a}\right)}$ die dazugehörigen Ordinaten berechnet, und gehörigermaßen auf die Axe trägt. Die Endpuncte zieht man aus freier Hand zuſammen, und daher müſſen die x nicht ſehr von einander verſchieden ſeyn.

Geſetzt, man habe die große Axe $AB = 100 = a$; den Parameter $= 50 = b$, und die Abſciſſen vom Scheitel an folgendermaßen genommen:

x = 3, ſo iſt y =	12,43	x = 50, ſo iſt y =	61,24
6 — —	17,83	55 — —	65,28
9 — —	22,15	60 — —	69,28
12 — —	25,92	65 — —	73,23
15 — —	29,35	70 — —	77,13
18 — —	32,59	75 — —	81,01
21 — —	35,64	80 — —	84,85
24 — —	38,57	85 — —	88,67
27 — —	41,41	90 — —	92,46
30 — —	44,16	95 — —	96,24
33 — —	46,84	100 — —	100.
36 — —	49,48	u. ſ. w.	
39 — —	52,06		
42 — —	52,61		
45 — —	57,12		

Hiernach ſind die Hyperbeln Fig. 69, 70 und 73 gezeichnet; 1 Zoll = 100.

§. 352. Werden die Abſciſſen vom Mittelpunct C an genommen, ſo iſt die Gleichung für die Ordinate

$$y^2 = \frac{c^2 u^2}{a^2} - \tfrac{1}{4} c^2 \text{, wobei } u = CP.$$

Dann iſt das Verhältniß der Ordinaten y und z alſo:

$$y^2 : z^2 = \left(u - \frac{a}{2}\right) \cdot \left(u + \frac{a}{2}\right) : \left(v - \frac{a}{2}\right) \cdot \left(v + \frac{a}{2}\right).$$

Die

die Entfernung des Brennpuncts vom Scheitel

$$AF = -\tfrac{1}{2} a + \frac{\sqrt{(a^2 + c^2)}}{2},$$

und vom Mittelpunct $CF = \frac{\sqrt{(a^2 + c^2)}}{2}$.

§. 353. Der Unterschied zweier geraden Linien aus den Brennpuncten an irgend einem Punct N Fig. 67. ist allemal der großen Axe gleich. D. i. NF — fN = AB oder = a.

Anmerk. In der Ellipse war die Summe dieser Linien = a.

§. 354. Wird die kleine Axe an die Scheitel senkrecht gesetzt, wie Fig. 68. AE und BE, und durch ihre Endpuncte E und durch's Centrum eine gerade Linie CELS, die verlängert CEWg, desgleichen nNCEV ist, so heißen diese Linien gCS und nCV Asymptoten, Niezusammenfallende. Sie nähern sich zwar den Hyperbelarmen immer mehr, erreichen sie aber nie.

§. 355. Nennt man die bis zur Asymptote verlängerte Ordinate PL = Z, und PM = y, so ist Z — y

$$= \frac{c^2}{4(Z-y)} = ML.$$

In den ähnlichen Dreiecken CAE und CPL gilt

$$CA : AE = CP : PL$$

$$\text{d. i. } \frac{a}{2} : \frac{c}{2} = u : z$$

$$\text{oder } a : c = u : z, \text{ und } z = \frac{cu}{a}.$$

Was von dem einen Arme gilt, wird für alle 4 Arme gelten.

§. 356. Das Rechteck $NM \cdot ML = AE^2 = \frac{c^2}{4}$.

Zieht man vom Endpunct einer Ordinate eine gerade Linie mit der großen Axe parallel, die Linie Md Fig. 68., bis zur gegenüberstehenden Asymptote, so ist das Rechteck

$$Mq \cdot Md = CA^2 = \frac{a^2}{4}.$$

§. 357. Man kann auch auf der Asymptote CL Ordinaten, als Fig. 68., JA, RT, QM errichten, welche mit der zweiten Asymptote Cn parallel laufen. Nimmt man die Abscisse auf der Asymptote, die CQ = u, und QM = y, so ist $CQ = u = \frac{a^2 + c^2}{16y}$; und $QM = y = \frac{a^2 + c^2}{16u}$.

§. 358. Eine Ordinate JA auf der Asymptote nach dem Scheitel A ist besonders merkwürdig. Sie ist $= CJ = JE = \sqrt{(QC \cdot QM)} = \sqrt{\frac{a^2 + c^2}{16}}$. Das Quadrat von CJ, also $CJ^2 = \frac{a^2 + c^2}{16}$ heißt die **Potenz der Hyperbel.**

§. 359. Die außer den Hyperbelarmen zwischen diesen und den Asymptoten befindlichen Linien LM und mN sind einander gleich, LN mag liegen, wie sie will.

§. 360. Wenn die Lage der Asymptoten, und ein Punct M in der Hyperbel gegeben ist, so läßt sie sich zeichnen.

Halbire Fig. 68. den Asymptotenwinkel SCn, und ziehe die CH, welche die Axe vorstellt; suche die Potenz der Hyperbel, welche $= CJ^2 = CQ \cdot QM = \frac{a^2 + c^2}{16}$. Die Puncte Q, und M sind gegeben; und QM ist parallel CN. Es ist also $CJ = \sqrt{(CQ \cdot QM)}$. Die Größe CJ trage auf die Asymptote CS, und ziehe JA = CJ, mit CN parallel, so ist in A der Scheitel, CA die halbe große Axe, ein Perpendikel AE auf A ist die halbe kleine Axe. Nun nehme man die CQ nach Belieben = x, und suche dazu die QM = y. Aber $x \cdot y = CJ^2$, folglich $y = \frac{CJ^2}{x}$. Berechnet man auf diese Weise recht viele nahe an einander liegende y, und trägt sie auf die Puncte der Asymptote, für welche sie berechnet sind, so, daß sie mit der andern Asymptote parallel laufen, zieht darauf ihre Endpuncte zusammen, so erhält man den Hyperbelarm ATM, und auf gleiche Art auch die andern Arme.

§. 361. Die Lage der Asymptoten ist eine Hauptsache, und hängt von der Größe der beiden Axen ab. Es ist aber

$$CA : AE = \text{Sin. tot.} : \text{Tang. } o.$$

§. 362. Wenn, was oft der Fall ist, der Asymptotenwinkel nCS und ein Punct M in der Hyperbel, also CQ und QM, gegeben sind, so findet man:

die kleine Axe $c = 4 \text{ Sin.} < o . \sqrt{(CQ . MQ)}$,
die große Axe $a = 4 \text{ Cos.} < o . \sqrt{(CQ . MQ)}$.

§. 363. Wenn in einer Hyperbel beide Axen gleich sind, so ist auch der Parameter jeder Axe gleich, und die Hyperbel heißt gleichseitig.

Die Gleichung ist dann $y^2 = u^2 - \frac{1}{4} a^2$; oder $y^2 = x^2 + ax$, je nachdem die Abscisse vom Mittelpunct oder vom Scheitel an genommen worden. Der Asymptoten-Winkel ist $= 90°$; der halbe, oder $< o = 45°$.

Die Ordinaten in der gleichseitigen Hyperbel verhalten sich, die Abscissen vom Mittelpunct an genommen,

$$y^2 : z^2 = u^2 - \tfrac{1}{4} a^2 : v^2 - \tfrac{1}{4} a^2,$$

wobei v Abscisse zu z. Wenn aber die Abscissen vom Scheitel an genommen werden:

$$y^2 : z^2 = x^2 + ax \quad : t^2 + at$$
$$= (a+x) . x) : (a+t) . t,$$ wobei t und x Abscisse zu z und y.

§. 364. Eine Tangente Tm Fig. 68. berührt die Hyperbel nur in einem Punct m, und trifft verlängert sowol die große Axe in T, als auch beide Asymptoten in t und g.

Man zieht die Tangente folgendermaßen:

Ziehe aus dem Punct m eine mit der andern Asymptote parallele Linie mh nach der nächsten Asymptote; trage Ch nach hg, so sind g und m zwei Puncte, durch welche die Tangente geht. Dann gilt in den ähnlichen Dreiecken ghm und gCt

$$gh : gC = gm : gt; \text{ oder } gh : hC = gm : mt;$$

weil nun $gk = hC$, so ist auch $gm = mt$, und die zwischen den Asymptoten eingeschlossene Tangente wird durch den Berührungspunct m stets in 2 gleiche Theile getheilt.

§. 365. Man fälle in m ein Perpendikel mp auf die Axe, ein Perpendikel Vm auf die Tangente, so ist Tp Subtangente, mV Normale, pV Subnormale; pm Ordinate $= y$; Bp Abscisse $= x$ und Cp Abscisse $= u$.

Die Subnormale $Vp = \frac{ab + 2bx}{2a}$, oder $\frac{c^2u}{a^2}$.

Die Subtangente $Tp = \frac{(a+x)x}{\frac{1}{2}a + x}$, oder $\frac{u^2 - \frac{1}{4}a^2}{u}$, oder $\frac{4u^2 - a^2}{4u}$.

Die $TB = \frac{ax}{a+2x}$, oder $\frac{2au - a^2}{4u}$ = Abstand der Tangente vom Scheitel.

Die $CT = \frac{a^2}{4u}$ oder $= \frac{a^2}{2a+4x}$ = Abstand der Tangente vom Centro.

Die Tangente Tm ist Hypotenuse im $\triangle$ Tpm, also $= \sqrt{(Tp^2 + y^2)}$.

Die Normale $Vm = \sqrt{\left(y^2 + \left(\frac{c^2 . u}{a^2}\right)^2\right)}$

$= \sqrt{(pm^2 + pV^2)}$.

§. 366. Eine Linie, welche durch das Centrum C geht, sich innerhalb der Asymptoten hält, und also beide entgegengesetzte Hyperbeln in H und h Fig. 70. schneidet, heißt ein Diameter, und der Theil hH der Zwergdiameter.

Zieht man vom Punct H eine Linie Hp, parallel mit der Asymptote CL, verlängert sie, bis $pG = Hp$; und eine andere Hn mit der Asymptote CQ parallel, und verlängert sie bis $ng = Hn$, so ergeben sich zwei Puncte G und g, durch welche und durch das Centrum sich die gerade Linie Gg ziehen läßt, die zweiter, oder conjugirter Diameter genannt wird.

GC ist dann gleich gC. Die Tangente zum Punck H, also die Linie SQ ist gleich dem zweiten Diameter gG; SH = CG, und HG = CS; HQ = Cg = GC = HS. Die CH = $\sqrt{(u^2+y^2)}$.

§. 367. Sind die beiden Diameter hH und gG gegeben, so findet man die Lage der Asymptoten, indem man HG halbirt, und durch C und p die Asymptote CpQ zieht.

§. 368. Eine mit der Tangente SH parallel gezogene Linie tw durchschneidet die Hyperbel in zwei Puncten in v und w. Der Diameter ZO theilt sie in r in 2 gleiche Theile, so daß vr = rw. Die Linien vr und rw heißen Ordinaten des Diameters. Nennt man eine Ordinate des Diameters z, den Diameter hH = a, Gg = b, und Cr Abscisse vom Centro an auf dem Diameter = s, so ist $Z^2 = \frac{b^2 s^2}{a^2} - \frac{b^2}{4}$, welches die Gleichung für die Ordinaten des Diameters ist.

§. 369. Zieht man beliebige gerade Linien von einer Assymptote zur andern, z. B. HJ und LT Fig. 69. und wo beide die Hyperbel schneiden, mit der andern Asymptote Parallelen, wie nK und No, so sind die Rechtecke Hn . nK, und LN . NO einander, und auch dem Quadrat der halben kleinen Axe gleich.

§. 370. Das Parallelogramm aus den beiden Axen AB (Fig. 73.) und EE, oder a . c ist gleich dem Parallelogramm der beiden conjugirten Diameter hM und gG.

§. 371. Wenn man von beiden Brennpuncten F und f an einen Punct M Fig. 70. gerade Linien fM und MF zieht, und den Winkel fMF durch eine gerade Linie MT halbirt, so ist die Linie TM eine Tangente; und

$$fM : FM = fT : FT$$

$$\text{Aber } fM = \frac{\sqrt{(a^2+c^2)u}}{a} + \frac{a}{2}$$

$$\text{und } FM = \frac{\sqrt{(a^2+c^2)u}}{a} - \frac{a}{2}$$

$$CT = \frac{a^2}{4u}; \; fC = \frac{\sqrt{(a^2 + c^2)}}{2}$$

also $fT = \frac{\sqrt{(a^2 + c^2)}\,2u + a^2}{4u}$; und FT

$$= \frac{\sqrt{(a^2 + c^2)}\,2u - a^2}{4u}.$$

§. 372. Weil die Winkel $x = y = n = o$, so würde ein Lichtstrahl bM Fig. 70., dessen Richtung nach dem Brennpunct f geht, vom Hyperbelarm AM so gebrochen werden, daß er in den Brennpunct F gelangen müßte. Daher heißen F und f die Brennpuncte.

§. 373. Eine Linie aus dem Brennpunct an den Berührungspunct M der Tangente TM heißt Radius vector, Zuglinie oder Träger. Ihr Werth ist §. 371. angegeben.

§. 374. Eine hyperbolische Fläche läßt sich nur dann berechnen, wenn die beiden Arme durch eine doppelte Ordinate rs Fig. 68. abgeschnitten sind. Es müssen dann bekannt seyn beide Axen, Absciffe CD, und Ordinate Dr nebst deren Verlängerung rV und sw. Nun findet man DV

$$CB : BE = CD : DV$$

$$= \frac{a}{2} : \frac{c}{2} = u : DV, \text{ und } DV = \frac{cu}{a}.$$

Zieht man davon $Dr = y$ ab, so bleibt rV.

Auf gleiche Weise läßt sich aa, bb, cc, dd 2c., die man mit BE parallel zieht, finden. Die dadurch entstehenden kleinen Trapezia BEaa, aabb u. s. w., worin die krumme hyperbolische Linie für gerade anzunehmen ist, lassen sich berechnen, ihre Summe vom Trapezio BEVD abziehen, so wird der Raum BrDB $= \frac{1}{2}$ Hyperbel übrig bleiben.

Diese Verfahrungsweise ist mühsam, aber der einzige Weg, ohne die Kunstgriffe der Integralrechnung zu einem erträglichen Resultat zu gelangen.

Aus der Integralrechnung findet man für die Hyperbel eine ziemlich brauchbare Formel:

$$\frac{2}{3}\sqrt{bx^3} + \sqrt{\frac{bx^3}{2a}} =$$ halben hyperbol. Fläche,

Hiebei ist x eine Abscisse vom Scheitel.

§. 375. Wenn sich der Hyperbelarm Br mit der Asymptote EV um die Axe BD bewegt, so entsteht ein abgekürzter Kegel VEEW, in welchem die Hyperboloide rBsr steckt, deren körperlicher Inhalt gefunden wird durch

$$\frac{(2R^2 + cR - c^2) \cdot P \cdot H}{6},$$

wobei $R = DV$; $c =$ kleinen Axe; $P = 3{,}141 \ldots,$ $H = BD =$ Höhe.

§. 376. Wir sammeln nun die sämmtlichen Formulare in eine Tafel, und fügen ihre Zahlenwerthe, welche in der Fig. 73. Zeichnung und Rechnung übereinstimmig gegeben haben, bei. Diese Figur ist nach der Berechnung §. 351. gezeichnet, 1 Decimalzoll = 100 Theile.

Formeltafel für die hyperbolischen Linien.

Linien.	Formeln.	Zahlenwerth.	
AB = großen Axe gegeben	$= a = \frac{c^2}{b} \ldots$	100.	Beständige Größen.
ECE = kleinen Axe	$= c = \sqrt{(ab)}\ .$	70,71	
Parameter — gegeben .	$= b = \frac{c^2}{a} \ldots$	50.	
AC = CB = halben großen Axe	$= \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}\frac{c^2}{b} \ldots$	50.	
CE = AE = BE = halben kl. Axe	$= \frac{1}{2}c = \frac{\sqrt{(a \cdot b)}}{2}$	35,355	
AF = Bf = Abst. d. Brp. v. Scheitel	$= \frac{\sqrt{(ab + a^2)}}{2} - \frac{1}{2}a$	11,237	
CF = Cf = Abst. d. Brp. v. Centro	$= \frac{\sqrt{(ab + a^2)}}{2}\ .$	61,237	

Linien.	Formeln.	Zahlenwerth.	
Oder AF = Bf, in Werthen der Axen	$=\frac{\sqrt{(a^2+c^2)}}{2}-\frac{1}{2}a$	11,237	Beständige Größen.
CF = Cf, in Werthen der Axen	$=\frac{\sqrt{(a^2+c^2)}}{2}$.	61,237	
HCR und WCK, lich, wie Hyperbel	Asymptoten sind unend- arme.		
JB = EJ = CJ	$=\sqrt{\left(\frac{a^2+c^2}{16}\right)}$.	30,618	
CJ^2 = Potenz der Hyperbel	$=\frac{a^2+c^2}{16}$	937,5	
Winkel RCW = Asymptoten-Winkel	$\frac{1}{2}$ Tang. RCW $=\frac{c\,.\,\text{Sin. tot.}}{a}$	35°16'	
	und < RCW	70°32'	
AP = Abscisse vom Scheitel	= x, gegeben . .	25.	
PM = Ordinate dazu	$=y=\sqrt{\left(bx+\frac{bx^2}{a}\right)}$	39,528	
CP = Abscisse vom Mittelpunct	= u, gegeben, oder $=\frac{a^2y^2}{c^2}-\frac{a^2}{4}$	75.	
PM, Ordinate zur Abscisse v. Centro	$y=\sqrt{\left(\frac{c^2u^2}{a^2}-\frac{1}{4}c^2\right)}$	39,528	
Fm Radius vector	$=\frac{\sqrt{(a^2+c^2)}u}{a}-\frac{a}{2}$	41,855	
fm — —	$=\frac{\sqrt{(a^2+c^2)}u}{a}+\frac{a}{2}$	141,855	
PF Abst. d. Brennpuncte v. d. Ordin.	$=\frac{\sqrt{(a^2+c^2)}}{2}-u$	13,763	
Pl verlängerte Ordinate z. Asympt.	$=\frac{cu}{a}$	53,032	

Linien.

Linien.	Formeln.	Zahlenwerth.
Ml, Verlängerung der Ordinate	$= \frac{cu}{a} - y$, oder $\frac{cu}{a}$ $\sqrt{\left(\frac{c^2u^2}{a^2} - \frac{c^2}{4}\right)}$	13,504
Rechteck vM, Ml	$= \frac{c^2}{4}$	
vM . . .	$= \frac{\frac{1}{4}c^2}{Ml}$ . . .	92,561
Ci = Abſciſſe auf der Aſymptote	$u' = \frac{a^2 + c^2}{16y'}$, gegeben	78.
Mi = Ordinate auf der Aſymptote	$y' = \frac{a^2 + c^2}{16u'}$ . .	12,019
TM Tangente zum Punct M	$= \sqrt{\left(\left(\frac{u^2 - \frac{1}{4}a^2}{u}\right)^2 + \frac{c^2u^2}{a^2} - \frac{c^2}{4}\right)}$	57,433
TP Subtangente	$= \frac{(a + x) \cdot x}{\frac{1}{2}a + x}$ oder $= \frac{u^2 - \frac{1}{4}a^2}{u}$.	41,666
MR Normale	$= \sqrt{\left(\left(\frac{c^2u}{a^2}\right)^2 + \frac{c^2u^2}{a^2} - \frac{c^2}{4}\right)}$ . .	54,486
PR Subnormale	$= \frac{c^2u}{a^2}$	37,5
TA Abſt. d. Tang. vom Scheitel	$= \frac{ax}{a + 2x}$ oder $\frac{2au - a^2}{4u}$	16,667
CT Abſt. d. Tang. v. Mittelpunct	$= \frac{a^2}{2a + 4x}$ oder $\frac{a^2}{4u}$.	33,3
ZD Diam., unendl.		

Linien.	Formeln.	Zahlenwerth.
Mb Zwergdiamet.	$\alpha = 2\sqrt{(u^2 + y^2)}$.	169,556
CM halber Zwergdiameter	$\frac{\alpha}{2} = \sqrt{(u^2 + y^2)}$	84,778
Gg conjugirter Diameter	$\beta = Vt = 2Mt = \frac{2 . \text{Sin. i . Mi}}{\text{Sin. tot.}}$	149,691
VM = Mt = gC = CG = $\frac{1}{2}\beta$ = $\frac{\text{Sin. i . Mi}}{\text{Sin. tot.}}$	jede dieser Linien = Mt, und im △ Mti ist Mi und it (= Ci) so wie < Mit (= Asymptot. Wink.) bekannt.	
op = pq, Ordinate auf d. Diameter	$= z = \sqrt{\left(\frac{\beta^2 s^2}{\alpha^2} - \frac{\beta^2}{4}\right)}$	71,186
Cp Abscisse auf dem Diameter	= s, gegeben, oder $= \sqrt{\left(\frac{\alpha^2 z^2}{\beta^2} - \frac{\alpha^2}{4}\right)}$	117,
Die Rechtecke QN . NO, Lw . wU, xr . rs, Od . dL wovon immer e. Größe gegeben.	$= \frac{e^2}{4}$	
Der Winkel CVt	$= \frac{\text{Sin. VCt . Ct}}{Vt}$.	100°43′
Wink. CtV = 180° − (< VCt + < CVt) das ist im gegenwärtigen Fall	= 180° − (100° 43′ + 70° 32′	8°45′
Hyperbolische Fläche MAPM	$= \frac{2}{3}\sqrt{bx^3} + \sqrt{\frac{bx^2}{2a}}$	601,57
Ganze hyperbol. Fläche MAmPM	$= \left(\frac{2}{3}\sqrt{bx^3} + \sqrt{\frac{bx^2}{2a}}\right) . 2$	1203,14 □Maaß

Linien.	Formeln.	Zahlenwerth.
Körperlicher Inhalt der Hyperboloide MAmM	$= \frac{(2R^2 + cR - c^2) . P . H}{6}$ wob. $R = vl$; $c = $ kl. Axe $P = 3,14 \ldots$; $H = AP = x$.	327075,8 Kubikmaaß.

XI. Von den Linien höherer Ordnungen.

§. 377. Unter diesem Namen versteht man solche Linien, in deren Gleichung eine höhere Potenz von x und y, als die zweite vorkommt. Wir wollen einige derselben betrachten und ihre Zeichnung und Berechnung kennen lernen.

§. 378. Die Cissoide Fig. 74. entsteht also:

In einem Kreise nehme man 2 gleich weit von A und B entfernte Puncte D und F, und ziehe die Linien PDh und GHF senkrecht auf den Diameter AB. Die Chorden DA und AFh durchschneiden die Perpendikel in H und h. Durch die Puncte h, H und L (auf dem Endpunct des senkrechten Diameters CL) geht eine krumme Linie AHLh, welche der eine Arm der Cissoide ist. Der andere Halbkreis enthält den andern Arm AMIN.

Der Diameter AB ist die Abscissenlinie $= a$; AG eine Abscisse $= x$, und GH die dazugehörige Ordinate $= y$. Zur Abscisse AP gehört die Ordinate Ph; zu AC gehört CL. Nimmt man nun mehrere von A und B gleich weit abstehende Puncte im Kreise, so findet man auch mehrere Puncte, die in der krummen Linie liegen, und die endlich zusammen gezogen, die krumme Linie darstellen.

Die Ordinate y findet man durch folgendes Formular: $y = \sqrt{\left(\frac{x^3}{a - x}\right)}$. Die Fig. 74. ist auf diese Weise construirt. $AC = 50$, also $AB = a = 100$; die Abscis-