UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Der Rathgeber bei mathematischen Beschäftigungen

Stöpel, August

Stendal, 1819

§. 275-299 die Parabel mit ihren Gleichungen, Zeichnung und Berechnung aller ihrer Linien nebst einer Formeltafel.

urn:nbn:de:hbz:466:1-63556

Visual Library

log. Diff. I = Cos. 22° 12′ = 9,9665503
log. Diff. II = Cos. 53° 46′ = 8,7716426
$\angle$ M decad. Erg. log. Sin. 50° 36′ = 0,1119702
$\angle$ N — — — Sin. 82° 10′ = 0,0040716

19,8542347

$\sqrt{}$ ausgez. durch 2 :)
log. Cosin. $\frac{1}{2}$ A = 9,9271173 = 32° 16′ = $\frac{1}{2}$ A
(2
ganze Seite = 64° 32, = A

§. 273. Zur bequemen Auflösung der schiefwinklichten Kugeldreiecke befindet sich im Anhange die zweite Abtheilung der XIII. Tafel. Man hat bei ihrem Gebrauch nur nöthig, zu untersuchen, was in einem Dreieck bekannt oder gegeben, und was das Gesuchte sey. Was man weiter zu thun habe, enthält die jedem Fall beigefügte Auflösung sehr deutlich. Caille ist der Verfasser derselben.

Die sphärische Trigonometrie wird denen, die geographische und astronomische Rechnungen zu machen haben, eine unentbehrliche Wissenschaft seyn; jedoch beschränken sich die Meisten darauf, eine Fertigkeit im Gebrauch der Tafel XIII. zu erlangen, mit der sie auch ziemlich ausreichen.

X. Von den Kegelschnitten.

§. 274. Zu den krummen Linien, welche ihren Ursprung aus dem senkrechten Kegel haben, gehören: Kreis, Parabel, Ellipse und Hyperbel. Die Lehre vom Kreis rechnet man mit zur Geometrie; die aber von der Parabel, Ellipse und Hyperbel gehört zur höhern Geometrie, von welcher wir die vorzüglichsten Lehren anführen wollen.

Der Kreis entsteht, wenn eine schneidende Ebene einen Kegel so durchdringt, daß die Durchschnittsfigur mit der Grundfläche parallel wird.

§. 275. Wird ein senkrechter Kegel ABC Fig. 46. so durchschnitten, daß die Durchschnittsfigur mit der Seite

Seite AB parallel wird, so entsteht auf der Oberfläche eine krumme Linie GLErS, welche Parabel heißt.

Es sey EF die schneidende Ebene. Man lege da, wo sie in den Kegel dringt, die Ebene ED, und an einem andern beliebigen Orte eine zweite Ebene KH, beide mit der Grundfläche parallel, durch den Kegel, so werden ihre Durchschnittsfiguren Kreise seyn. Wo der Parabelschnitt die Kreisfläche HJKL trifft, entsteht ein Durchschnitt, der zur Hälfte in der Figur angedeutet, und JL ist. Diese JL steht auf dem Diameter HK in J, und auch auf der Mitte des Parabelschnitts EF, welche Axe heißt, senkrecht, und berührt in L sowol den Kreis HLK, als die parabolische Linie ELG, welche letztere durch den Abstand JL von der Axe bestimmt wird. Da die Ebene HK beliebig gelegt ist, so wird der Werth, den wir für JL ausmitteln, allgemein gelten, die HK mag liegen, wo sie will; man sieht bald, daß JL größer wird, je weiter HK von E entfernt ist.

Die Dreiecke ADE und EJK sind einander ähnlich, daher gilt

$$AD : DE = EJ : JK, \text{ und } JK = \frac{DE \,.\, EJ}{AD}$$

Weil HK der Diameter eines Kreises ist, und JL senkrecht darauf steht, so gilt

$$HJ : JL = JL : JK, \text{ und } JK = \frac{JL^2}{HJ}; \text{ und } JL^2 = HJ \,.\, JK$$

Da DE = HJ, so kann auch DE für HJ gesetzt werden, dann ist $JL^2 = DE \,.\, JK$; und für JK hatten wir den Werth $\frac{DE \,.\, EJ}{AD}$ gefunden, wird nun dieser für JK gesetzt, so ist

$$JL^2 = \frac{DE \,.\, DE \,.\, EJ}{AD} = \frac{DE^2\, EJ}{AD}$$

In einer und derselben Parabel ist AD und DE beständig; EJ und JK aber hängen von der Höhe der Ebene HK ab; folglich ist $\frac{DE^2}{AD}$ eine beständige Größe, und

heißt

heißt der **Parameter**. Man bezeichnet ihn mit a, b oder p; wir wählen das letztere Zeichen, und nennen den Parameter $= p$.

Die veränderliche JL heißt y; und die veränderliche EJ heißt x; dann ist obige Gleichung $JL^2 = \frac{DE^2}{AD} . EJ$ auch gleich: $y^2 = p . x$, welche man die **Gleichung für die Parabel** nennt.

§. 276. In Fig. 47. ist die Parabel außer dem Kegel zu sehen. Die krumme Linie SELG ist sie; in E ist der **Scheitel**; EB heißt **Axe**; ES, und EG sind ihre **Arme**, die unendlich lang seyn können. Ein beliebiges Stück EJ von der Axe heißt **Abscisse** $= x$; eine auf J senkrecht stehende Linie JL heißt **Ordinate** $= y$.

Wenn zwei von den Größen y, x, und p bekannt sind, so ist die dritte leicht zu finden. Denn

$$\left.\begin{array}{l} y^2 = x . p \\ \text{Also } y = \sqrt{(x . p)} = \text{Ordin.} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{und } x = \frac{y^2}{p} = \text{Abscisse.} \\ \text{und } p = \frac{y^2}{x} = \text{Parameter.} \end{array}$$

§. 277. Die Gleichung für die Parabel läßt sich auch aus dem Kreise ableiten.

Es sey BmfD der eine Arm einer Parabel, BA die Axe; Ba $= x =$ Abscisse; ad $= p =$ Parameter; am $= y =$ Ordinate. Man sehe Bd als den Diameter eines Kreises an, aus dessen Mittelpunct c sich der Halbkreis dmB beschreiben läßt. Dann gilt nach §. 196.

$$\begin{array}{l} da : am = am : AB : \text{ in unsern Zeichen} \\ \underline{\quad p : y = y : x \quad} \\ \text{folglich } p . x = y^2 \end{array}$$

Dasselbe wird auch in dem Halbkreise gfB der Fall seyn, worin Be Abscisse, ef Ordinate, eg Parameter ist. Man bemerke, daß Abscisse und Ordinate wachsen, je weiter letztere vom Scheitel B absteht, aber ad $=$ eg bleibt, weil sie Parameter ist; und daß man jede der 3 Größen x, y und p durch Zeichnung finden kann, sobald zwei von ihnen bekannt sind.

Wäre z. B. x und y gegeben, so findet man den Parameter, wenn man an den Punct m einen rechten Winkel setzt, dessen einer Schenkel in B liegt. Der andere Schenkel wird die Axe in d schneiden, und dadurch den Parameter ad bestimmen.

Wäre p und y, oder da und am gegeben, so fände man aB oder x eben so, weil die Lage des rechten Winkels an m durch die des einen Schenkels dm bestimmt wird, und der andere die Axe in B schneiden muß.

Die Ordinate y findet man, wenn man x und p in einer geraden Linie an einander setzt, im Endpunct von x (hier in a) ein Perpendikel am errichtet, dessen Länge durch den Kreis bestimmt wird, der sich aus der Mitte der x + p durch B und d ziehen läßt.

§. 278. Wenn die Parabelarme glattpolirte Flächen wären, so würden alle mit der Axe parallel einfallende Lichtstrahlen SR Fig. 49. nach der Brechung in dem Punct F zusammen kommen, welcher Brennpunct heißt.

Der Abstand des Brennpuncts vom Scheitel ist $\frac{1}{4}$ p (Parameter), und die Ordinate auf demselben ist $\frac{1}{2}$ p; nach Fig. 49. ist

$$FM = \tfrac{1}{2}p; \text{ und } TM = p$$
$$AF = \tfrac{1}{4}p.$$

§. 279. Aus der Abscisse und zugehörigen Ordinate findet man den Brennpunct. $AF = \frac{y^2}{4x} = \frac{PR^2}{4.AP}$.

§. 280. Eine Linie FR vom Brennpunct der Parabel an den Arm derselben ist allezeit so groß, als die Abscisse der Ordinate, die aus diesem Punct R auf die Axe herabgelassen, plus der Entfernung des Brennpuncts vom Scheitel, d. h. Fig. 49.

$$FR = AP + AF = x + \tfrac{1}{4}p.$$

§. 281. Eine Linie AM, vom Scheitel zur Ordinate in der Parabel Fig. 50. heißt Chorde. Sie ist

$$AM = \sqrt{(AP^2 + PM^2)} = \sqrt{(x^2 + y^2)} = \sqrt{(x^2 + px)}.$$

Jede gerade Linie, welche die Parabel in 2 Puncten schneidet, heißt Chorde, oder Sehne. Da alsdann die Sehnen mit der Axe nicht parallel laufen können, so wird die Axe oder ihre Verlängerung von den Sehnen unfehlbar getroffen werden.

§. 282. Tangente heißt eine Linie LF Fig. 51., welche die Parabel nur in Einem Puncte L berührt. Sie kann nie der Axe parallel werden, und muß also ihre Verlängerung durchschneiden.

§. 283. Die Linie, oder der Theil der Axe, FP, welche durch die auf den Berührungspunct der Tangente gezogene Ordinate PL bestimmt wird, heißt Subtangente.

§. 284. Ein Perpendikel auf der Tangente im Punct L, die LR, Fig. 51., heißt Normale; das Stück der Axe PR ist Subnormale.

§. 285. Die Werthe für diese Linien sind:

$FA = AP = x$; folglich ist $FP = 2x =$ Subtangente; also liegt die Hälfte derselben innerhalb, und die andere außerhalb der Parabel.

Die Tangente $FL = \sqrt{(FP^2 + PL^2)} = \sqrt{(4x^2 + px)}$.

Die Subnormale $PR = \frac{1}{2} p$, = dem halben Parameter, also beständig.

Die Normale $RL = \sqrt{\left(\frac{p^2+4px}{4}\right)} = \frac{\sqrt{(p^2+4px)}}{2}$.

Man kann sich FR als den Diameter eines Kreises vorstellen, in dessen Peripherie die drei Puncte F, L und R liegen.

§. 286. Wenn nun Fig. 51. in f der Brennpunct, so ist $Ff = x + \frac{1}{4} p$; fL ist auch $\frac{1}{4} p + x$; $AR = x + \frac{1}{2} p$, und $fR = x + \frac{1}{2} p - \frac{1}{4} p = x + \frac{1}{4} p$, folglich $\triangle FfL$ gleichschenklicht. Der Mittelpunct des Kreises FLR ist daher im Brennpunct f, woraus folgt, daß mit Hülfe eines Kreises, dessen Radius fL ist, sich Tangente, Subtangente und Normale mechanisch finden lassen.

§. 287. Eine mit einer Tangente TM Fig. 52. parallele Sehne GL wird durch eine mit der Axe parallel gezogene, und durch den Berührungspunct M der Tan-

gente

gente TM gehende Linie NS in zwei gleiche Theile getheilt, so daß up = pL.

§. 288. Die Linie NS, welche mit der Axe parallel läuft, heißt Diameter; up und pl sind seine Ordinaten, und der Punct M sein Scheitel; Mp Abscisse auf dem Diameter.

Es sind unzählig viele Diameter und Sehnen in einer Parabel möglich. Zieht man zwei oder mehrere parallele Sehnen, und theilt sie in 2 gleiche Theile, so wird man Puncte finden, durch welche der Diameter geht. Errichtet man auf dem Diameter mehrere senkrechte Linien und verlängert sie bis zur Parabel, so findet man auf ihrer Mitte die Puncte, durch welche die Axe derselben geht.

§. 289. Das Verhältniß der Abscissen und Ordinaten auf der Axe ist:

$$x : y = y : p; \text{ also } y^2 = x.p; \text{ oder} = x \frac{y^2}{p}$$

$$x' : y' = y' : p; \text{ also } y'^2 = x'\,p; \text{ oder } x' = \frac{y'^2}{p}$$

also verhalten sich x zu x′ wie die Quadrate von y und y′. Sind nun Mp und Mv zwei verschiedene Abscissen, und = u, u′; up und wv dazu gehörige Ordinaten auf dem Diameter, und = z, z′: so verhält sich auch hier

$$u : u' = z^2 : z'^2$$

d. h. die Abscissen verhalten sich zu einander, wie die Quadrate der Ordinaten.

Die 3te Proportionalgröße zur Abscisse und Ordinate ist allezeit gleich dem Parameter, $x : y = y : p$; und bei dem Diameter $u : z = z : t$. Diese 3te Proportionalgröße ist constant oder beständig. Bei dem Diameter ist

der Parameter $t = \frac{z^2}{u}$

die Ordinate $z = \sqrt{(t\,.\,u)}$

die Abscisse $u = \frac{z^2}{t}$.

§. 290. Vergleicht man den Parameter t des Diameters mit dem Parameter p der Axe, so findet sich, daß

$\frac{a}{4}\,t = x + \frac{1}{4}p$, folglich ist t gleich der aus dem Brennpunct zum Durchschnittspunct des Diameters gezogenen geraden Linie FR (Fig. 49. §. 280.) viermal genommen; d. h. $t = 4\,(x + \frac{1}{4}p)$. Jeder Diameter hat seinen eignen Parameter.

§. 291. Jede Linie Fm oder FM, Fig. 53., vom Brennpunct zur Parabel heißt Radius vector, oder Vector, oder Zuglinie.

Wenn nun FR und Fr Perpendikel auf die Tangenten TM und tm sind, so verhalten sich $FR : Fr = \sqrt{FM} : \sqrt{Fm}$, d. h. die Perpendikel aus dem Brennpunct auf die Tangenten verhalten sich zu einander, wie die Quadratwurzeln aus den zugehörigen Zuglinien.

§. 292. Den Flächenraum, welchen die parabolische Linie einschließt, kann man nur dann angeben, wenn die Fläche durch eine doppelte Ordinate CB Fig. 55. geschlossen ist.

Der Triangel BAC ist in der parabolischen Fläche der größtmögliche. Nimmt man seinen Flächenraum $\frac{4}{3}$mal, so hat man den Flächenraum des parabolischen Abschnitts CGAHB. Die Grundlinie $CB = 2y$; die Höhe des $\triangle$ ist $DA = x$, sein Inhalt $\frac{2y \,.\, x}{2} = yx$ = Fläche des größten Dreiecks, und $\frac{4yx}{3}$ = Inhalt des parabolischen Abschnitts.

§. 293. Der parabolische Raum muß sich, wie jeder andere, in jede andere geometrische Figur verwandeln lassen, wozu der Abschnitt Verwandlung der Figuren Anleitung geben wird.

§. 294. Ein Parallelogramm auswärts um die Parabel verhält sich zur Fläche derselben, wie 3 zu 2; daher verhalten sich die parabolischen Räume zu einander, wie die Parallelogramme, die um sie beschrieben sind. Nach Fig. 55. verhält sich Parallelogramm JKBC zur parabolischen Fläche CGAHBC wie 3 zu 2.

§. 295 Parabeln sind einander ähnlich, wenn die darin beschriebenen größten Triangel einander ähnlich sind;

sind; daher ist es leicht, ähnliche Parabeln zu zeichnen, wenn man ähnliche Dreiecke beschreibt, aus der halben Grundlinie ($=y$) und Höhe ($=x$) nach §. 276. den Parameter sucht, und darnach die Parabeln construirt.

§. 296. Wenn der Parameter bekannt ist, so läßt sich die Parabel folgendermaßen zeichnen. Fig. 54.

Ziehe die gerade Linie dK, und auf derselben sey Bd = Parameter, BK = Axe, in B der Scheitel, auf dem das Perpendikel BN errichtet wird.

Mit dem Parameter Bd beschreibe aus B den Bogen a1d und mehrere Bogen aus andern beliebigen Puncten der Axe, so, daß sich die Bogen alle in d vereinigen und die aufgerichtete BN schneiden. In den Puncten a, e, h, i, wo die Kreise die Axe treffen, errichte senkrechte Ordinaten, und trage auf sie von der Axe aus die Weiten B1, B2 B3 2c., so erhält man auf den Ordinaten die Puncte m, f, r, s 2c., durch welche sich der Parabelarm BD ziehen läßt. Es ist dann B1 = am, B2 = ef, B3 = hr 2c.

§. 297. Die richtigste Parabel erhält man aber, wenn man für die Abscissen Ba, Be, Bh 2c. die Ordinaten am, ef, hr 2c. berechnet, und nach dem Maaßstabe aufträgt. Je näher die Ordinaten an einander stehen, desto näher liegen die Puncte m, f, r, s an einander und desto genauer läßt sich der Parabelarm ziehen. Es versteht sich von selbst, daß die Ordinaten auch auf die andere Seite der Axe getragen werden müssen, um den andern Arm zu bekommen. Je größer man den Parameter Bd nimmt, desto weiter sperren sich die Parabelarme aus einander.

§. 298. Es bewege sich die Parabel, 55te Fig., um ihre Axe AD, so entsteht ein parabolischer Afterkegel, dessen unterster Durchmesser CB, dessen Höhe DA ist. Durch diese Bewegung beschreibt das Parallelogramm JKBC einen Cylinder, dessen Diameter CB und dessen Höhe DA ist. Dieser Cylinder ist doppelt so groß an körperlichem Inhalt, als der Afterkegel.

Nun ist AD $= x$; DB $= y$, folglich der Inhalt des Cylinders $y^2 px$; und des Afterkegels CGAHB $= y^2$

$= \frac{y^2 px}{2}$, wobei p die bekannte Zahl 3,14 .... bedeutet.

§. 299. Es ist gut, wenn Anfänger sich an der Berechnung und Zeichnung einer Parabel üben, daher wird ihnen folgende Berechnung nicht unwillkommen seyn.

Es sey der Parameter $= p = 30$, die erste Abscisse $= x = 5$, die zweite $= 10$ ꝛc., so finden wir die dazugehörigen Ordinaten durch

$$y = \sqrt{(xp)} = \sqrt{(5.30)} = \sqrt{150} = 12,24.....$$

Wenn $x = 5$,	so ist	$y =$	12,247 ....
10	—	—	17,320
15	—	—	21,213
20	—	—	24,495
25	—	—	27,386
30	—	—	30,000
35	—	—	32,404
40	—	—	34,641
50	—	—	38,730
60	—	—	42,426
70	—	—	45,826
80	—	—	48,990
90	—	—	51,962
100	—	—	54,772
110	—	—	57,446
120	—	—	60,000
130	—	—	62,450
140	—	—	64,807
150	—	—	67,092.

Diese Werthe für x und y trägt man nach §. 297. auf eine gerade Linie von einem Punct, dem Scheitel, aus, und bekommt für jeden Arm 20 Puncte, durch welche er sich schon genau genug ziehen läßt.

§. 300. Um mit einem Blicke die Formulare für alle parabolische Linien übersehen zu können, sammeln wir sie in folgender Tabelle, in welcher auch die Zahlenwerthe, wie sie die Rechnung und Zeichnung in der Fig. 71. übereinstimmig gegeben haben, befindlich sind. Das Maaß ist $\frac{1}{2}$ Rheinl. Decimalzoll $= 100$.

Fol-

Formeln und Berechnung für alle Linien in der Parabel Fig. 71.

Linien.	Formeln.	Zahlenwerth.
LA = Parameter	$p = \frac{y^2}{x}$ (gegeben).	30.
AP = Abscisse	$x = \frac{y^2}{p}$ (gegeben).	60.
PM = Ordinate	$y = \sqrt{(x \cdot p)}$.	42,426
TP = Subtangente	$= 2x$	120.
TA = AP = =	x	60.
TM = Tangente	$= \sqrt{(4x^2 + y^2)}$	127,279
F = Brennpunct	$AF = \frac{1}{4} p = \frac{y^2}{4x}$	7,5
Fd = Ordinate in F	$= \frac{1}{2} p$	15.
PR = Subnormale	$= \frac{1}{2} p$	15.
PF — —	$= x - \frac{1}{4} p$	52,5
MR = Normale	$= \sqrt{(y^2 + \frac{p^2}{4})}$	45.
FM = Radius vector	$= x + \frac{1}{4} p$	67,5
AM = Chorde	$= \sqrt{(x^2 + y^2)}$	73,484
KL = Diameter		
Parameter d. Diam.	$t = 4\left(x + \frac{p}{4}\right)$ oder $= \frac{z^2}{v}$	270.
NO = Abscisse des Diameters	$= v = \frac{z^2}{t}$ (gegeben)	20,4
SO = OH = Ordinate des Diameters	$= z = \sqrt{(t \cdot v)}$	74,219
NE	$= \frac{y \cdot v}{2x}$	7,212
oder auch	TP : PN = NO : NE	
OE durch	TP : TM = NO : OE	21,72
SE =	SO — OE =	52,6

Linien.	Formeln.	Zahlen-Werth.
PE =	$y - NE =$	35,2
AQ eine größere Abscisse	x' (gegeben)	150.
BQ größere Ordinate	$y' = \sqrt{(x' \cdot p)}$	67,082
Fläche des größten △ ABH	$= AQ \cdot BQ = x' \cdot y'$	10062,3 □ Maaß.
Fläche des parab. Abschnitts HNAMB	$= \frac{4}{3}(AQ \cdot BQ) = \frac{4x'y'}{3}$	13416,4 □ Maaß.
Inhalt des Afterkegels AMBHNA	$= \frac{y'^2 \cdot x' \cdot 3{,}14\ldots}{2}$	1060275. Kubikmaaß.

Von der Ellipse.

§. 301. Es dringe bei E eine schneidende Ebene in den senkrechten Kegel ABC Fig. 56., und spalte denselben nach der Richtung EKH so, daß die Axe mit getroffen wird, so entsteht die Durchschnittsfigur EKHL, welche Ellipse heißt, und in der Figur zur Hälfte sichtbar ist.

Man lege die mit der Grundfläche BC parallelen Ebenen DE und HJ da durch den Kegel, wo die Ellipse anfängt und endigt, so wie auch eine schneidende parallele Ebene FG irgendwo durch die Ellipse. Alsdann wird FG der Durchmesser eines Kreises, dessen Hälfte FLG; KL wird sowol auf EH als FG senkrecht stehen, und die Ordinate der Ellipse, EH Axe, und EK Abscisse derselben seyn. Aus der Beschaffenheit des Kegels und der Lage der schneidenden Ebenen suchen wir eine Gleichung für die Ordinate KL.

△ DEH ist ähnlich △ FKH, daher gilt

$$EH : DE = HK : FK, \text{ und } FK = \frac{DE \cdot HK}{EH}.$$

△ EHJ ist ähnlich △ EKG, daher gilt

$$EH : HJ = EK : KG, \text{ und } KG = \frac{EK \cdot HJ}{EH}.$$

Aus