Der Rathgeber bei mathematischen Beschäftigungen

Stöpel, August

Stendal, 1819

§. 301 die Ellipse;

urn:nbn:de:hbz:466:1-63556

Linien.	Formeln.	Zahlen-Werth.
PE =	$y - NE$ =	35,2
AQ eine größere Abscisse	x' (gegeben)	150.
BQ größere Ordinate	$y' = \sqrt{(x' \cdot p)}$	67,082
Fläche des größten $\triangle$ ABH	$= AQ \cdot BQ = x' \cdot y'$	10062,3 □ Maaß.
Fläche des parab. Abschnitts HNAMB	$= \frac{4}{3}(AQ \cdot BQ) = \frac{4x'y'}{3}$	13416,4 □ Maaß.
Inhalt des Afterkegels AMBHNA	$= \frac{y'^2 \cdot x' \cdot 3{,}14\ldots}{2}$	1060275. Kubikmaaß.

Von der Ellipse.

§. 301. Es dringe bei E eine schneidende Ebene in den senkrechten Kegel ABC Fig. 56., und spalte denselben nach der Richtung EKH so, daß die Axe mit getroffen wird, so entsteht die Durchschnittsfigur EKHL, welche Ellipse heißt, und in der Figur zur Hälfte sichtbar ist.

Man lege die mit der Grundfläche BC parallelen Ebenen DE und HJ da durch den Kegel, wo die Ellipse anfängt und endigt, so wie auch eine schneidende parallele Ebene FG irgendwo durch die Ellipse. Alsdann wird FG der Durchmesser eines Kreises, dessen Hälfte FLG; KL wird sowol auf EH als FG senkrecht stehen, und die Ordinate der Ellipse, EH Axe, und EK Abscisse derselben seyn. Aus der Beschaffenheit des Kegels und der Lage der schneidenden Ebenen suchen wir eine Gleichung für die Ordinate KL.

$\triangle$ DEH ist ähnlich $\triangle$ FKH, daher gilt

$$EH : DE = HK : FK, \text{ und } FK = \frac{DE \cdot HK}{EH},$$

$\triangle$ EHJ ist ähnlich $\triangle$ EKG, daher gilt

$$EH : HJ = EK : KG, \text{ und } KG = \frac{EK \cdot HJ}{EH}.$$

Aus

Aus dem Kreise gilt

FK : KL = KL : KG, und $KL^2 = FK . KG$.

Wenn nun in der letzten Gleichung für FK und KG das gefundene Gleiche untergelegt wird, so ist

$$KL^2 = \frac{HK . DE . EK . HJ}{EH . EH}.$$

Nennt man EH = a, so wird $KL^2 = y^2 = \frac{DE . HJ . HK . EK}{a . a}$

und EK = x, so ist HK = a − x; $\frac{DE . HJ}{a}$ ist eine beständige Größe und heißt Parameter = b. Diese Zeichen untergelegt, giebt:

$$\frac{b.(a-x)x}{a} = \frac{b.(ax-x^2)}{a} = bx - \frac{bx^2}{a} = y^2 = \text{Ordinate}.$$

In der Ellipse ist also das Quadrat der Ordinate gleich der Abscisse, multiplicirt mit dem Parameter, minus dem Parameter multiplicirt mit dem Quadrat der Abscisse, dividirt durch die große Axe, d. h. $y^2 = bx - \frac{bx^2}{a}$.

§. 302. Die Fig. 57. ist eine Ellipse; in derselben ist EH = a = große Axe, JK = kleine Axe = c. Beide Axen theilen die Ellipse in 4 gleiche Quadranten; in C ist der Mittelpunct; E und H heißen Scheitel der Ellipse. EP ist eine Abscisse auf der großen Axe, und PM die dazu gehörige Ordinate, desgleichen PN.

Man bemerkt leicht, daß die Ordinaten immer kleiner werden, je näher sie am Scheitel stehen; in E und H werden sie = Null, im Mittelpunct C aber am größten, d. h. gleich der kleinen Axe seyn. Eine Ellipse ist vollkommen bestimmt, wenn ihre beiden Axen bekannt sind; wenn beide Axen einander gleich werden, so ist die Ellipse ein Kreis; je mehr beide Axen verschieden sind, desto länglicher wird die Ellipse.

§. 303. Ist die halbe kleine Axe die größte Ordinate, so ist $x = \frac{1}{2}$ a und die Gleichung für die Ellipse wird $\frac{ba}{2}$