Der Rathgeber bei mathematischen Beschäftigungen

Stöpel, August

Stendal, 1819

§. 302-343 Erklärungen und Gleichungen der elliptischen Linien; Zeichnung und Berechnung; Formeltafel.

Aus dem Kreise gilt

$FK : KL = KL : KG$, und $KL^2 = FK \,.\, KG$.

Wenn nun in der letzten Gleichung für FK und KG das gefundene Gleiche untergelegt wird, so ist

$$KL^2 = \frac{HK \,.\, DE \,.\, EK \,.\, HJ}{EH \,.\, EH}.$$

Nennt man $EH = a$, so wird $KL^2 = y^2 = \frac{DE \,.\, HJ \,.\, HK \,.\, EK}{a \,.\, a}$

und $EK = x$, so ist $HK = a - x$; $\frac{DE \,.\, HJ}{a}$ ist eine beständige Größe und heißt Parameter $= b$. Diese Zeichen untergelegt, giebt:

$$\frac{b.(a-x)x}{a} = \frac{b.(ax-x^2)}{a} = bx - \frac{bx^2}{a} = y^2 = \text{Ordinate}.$$

In der Ellipse ist also das Quadrat der Ordinate gleich der Absciſſe, multiplicirt mit dem Parameter, minus dem Parameter multiplicirt mit dem Quadrat der Absciſſe, dividirt durch die große Axe, d. h. $y^2 = bx - \frac{bx^2}{a}$.

§. 302. Die Fig. 57. ist eine Ellipse; in derselben ist $EH = a =$ große Axe, $JK =$ kleine Axe $= c$. Beide Axen theilen die Ellipse in 4 gleiche Quadranten; in C ist der Mittelpunct; E und H heißen Scheitel der Ellipse. EP ist eine Absciſſe auf der großen Axe, und PM die dazu gehörige Ordinate, desgleichen PN.

Man bemerkt leicht, daß die Ordinaten immer kleiner werden, je näher sie am Scheitel stehen; in E und H werden sie = Null, im Mittelpunct C aber am größten, d. h. gleich der kleinen Axe seyn. Eine Ellipse ist vollkommen bestimmt, wenn ihre beiden Axen bekannt sind; wenn beide Axen einander gleich werden, so ist die Ellipse ein Kreis; je mehr beide Axen verschieden sind, desto länglicher wird die Ellipse.

§. 303. Ist die halbe kleine Axe die größte Ordinate, so ist $x = \frac{1}{2}$ a und die Gleichung für die Ellipse wird

$\frac{ba}{2}$

$$\frac{ba}{2} - \frac{baa}{4a} = y^2$$

$$\frac{ba}{2} - \frac{ba}{4} = y^2 \quad (4$$

$$2ba - ba = 4y^2$$

$$ba = 4y^2$$

$$\frac{ba}{4} = y^2$$

$\sqrt{\frac{ba}{2}} = y = \frac{1}{2}\, C =$ halben kleinen Axe, folglich ist die **ganze kleine Axe** $= \sqrt{ba} = c$; und $c^2 = ba$, also $a : c = c : b$, d. h. die kleine Axe ist die mittlere Proportionalgröße zwischen der großen Axe und dem Parameter.

§. 304. Beide Axen und der Parameter sind beständige Größen, und aus zweien von ihnen ist allezeit die 3te zu finden.

Die **große Axe** $a = \frac{c^2}{b}$; die **kleine Axe** $c = \sqrt{ab}$;

der **Parameter** $b = \frac{c^2}{a}$.

§. 305. In jeder Ellipse sind zwei Brennpuncte F und f Fig. 58., welche gleich weit von den Scheiteln abstehen, und in den Puncten der großen Axe liegen, auf welchen die Ordinaten so groß sind, als der halbe Parameter. Folglich ist der ganze Parameter so groß, als die doppelte Ordinate auf dem Brennpunct. In Fig. 58. ist PM = Parameter.

§. 306. Man findet die Brennpuncte, wenn man die halbe große Axe, vom Endpunct der kleinen Axe an, auf die große Axe trägt. Denn $FD = \frac{1}{2}a = AC$.

Der Abstand der Brennpuncte vom Mittelpuncte ist CF, und $CF^2 = FD^2 - CD^2$, oder

$CF^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}c^2$; also $CF = \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - \frac{c^2}{4}\right)} = \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{4}}$.

§. 307.

§. 307. In der Ellipse verhalten sich die Quadrate der Ordinaten zu einander, wie die Rechtecke, die aus der Multiplication der beiden zugehörigen Stücke der großen Axe entstehen.

Nach Fig. 57. $PM^2 : QN^2 = EP.PH : EQ.QH$
$y^2 : z^2 = x.(a-x) : v.(a-v)$
wobei z eine zweite Ordinate und v ihre Absciſſe iſt. Eigentlich hat jede Ordinate 2 Absciſſen, z. B. zu y oder oder PM gehören die Absciſſen EP und HP; daher kann man auch ſagen:

die Quadrate der Ordinaten verhalten ſich, wie die Rechtecke aus ihren Absciſſen.

§. 308. Zeichnung der Ellipſe.

1. Man beveſtige in den beiden Brennpuncten einen Faden, welcher länger, als der Abſtand der Brennpuncte von einander, und allemal gleich der großen Axe iſt. Mit einem ſchreibenden Stift ziehe man den Faden gleichmäßig an, und führe denſelben um die Brennpuncte herum, ſo wird der Stift die krumme elliptiſche Linie beſchreiben. Wenn in Fig. 58. in F und f die Brennpuncte, ſo iſt FDf der Faden und in D der ſchreibende Stift; rückt D nach M, ſo iſt fMF der Faden. Folglich iſt $fD + DF = fM + MF$ = der großen Axe.

Anmerk. Dieſe Zeichnungsart iſt zwar ſehr leicht, hat hat aber doch ihre Schwierigkeiten, denn der Faden wird während der Zeichnung durch das Anziehen länger. Bei großen Figuren, als elliptiſche Gewölbebogen, Stubendeckenmalerei u. dgl. iſt ſie indeſſen immer noch die anwendbarſte.

2. Mühſamer, aber auch genauer, iſt folgende Verfahrungsweiſe: Für die gegebene große Axe und den Parameter berechne man aus den willkührlich genommenen Abſciſſen die dazu gehörigen Ordinaten und trage ſie rechtwinklicht von den Scheiteln an auf beide Seiten der großen Axe.

Je weniger die Abſciſſen von einander verſchieden ſind, deſto enger liegen die Ordinaten an einander, und deſto mehr

mehr Puncte erhält man, durch welche sich die krumme Linie aus freier Hand ergänzen läßt. Da beide Axen die Ellipse in 4 völlig gleiche Quadranten theilen, so ist die Berechnung für einen hinlänglich. Weiter unten theilen wir eine solche Berechnung mit.

§. 309. Wenn die Abseissen vom Mittelpunct C Fig. 57. genommen werden, welches gewöhnlich geschieht und bequem ist, so erhält man folgende Gleichung für die Ordinaten y

$$y = \sqrt{\left(\frac{c^2}{4} - \frac{c^2 u^2}{a^2}\right)},$$

worin $u = CP$, Abscisse vom Mittelpunct, $c =$ kleine, $a =$ große Axe.

Der Parameter b ist nach dieser Formel $= \frac{a\,y^2}{\frac{1}{4}a^2 - u^2}$,

Die Abscisse $u = \frac{\sqrt{(a^2 - c^2)}}{2}$.

Anmerk. u ist das Stück der halben großen Axe, was x übrig läßt, also $U = \frac{1}{2}a - x$.

§. 310. Linien aus den Brennpuncten nach irgend einem Punct M in der Ellipse Fig. 58. sind zusammengenommen so groß, als die große Axe. $FM + fM = a$, der Punct M mag liegen, wo er will; FM und fM heißen Vectoren oder Zuglinien.

§. 311. Liegt M nicht in D, so sind FM und fM ungleich. Ihr Unterschied wird gefunden:

$$fM = \tfrac{1}{2}a + \frac{u\sqrt{(a^2 - c^2)}}{a};\ FM = \tfrac{1}{2}a - \frac{u\sqrt{(a^2 - c^2)}}{a}.$$

Die Differenz $= \frac{2u\sqrt{(a^2 - c^2)}}{a}$.

§. 312. Die Puncte F und f heißen deshalb Brennpuncte, weil die Winkel, welche die Linien FM und fM mit der Ellipse machen, einander gleich sind, Fig. 58. ist $\angle m = \angle n$. Wenn daher in dem einen Brennpunct ein leuchtender Körper stände, und die innere Seite einer Ellipse eine glatte Ebene wäre, so würden die auf den Umkreis

kreis fallenden Lichtstrahlen von allen Puncten nach dem andern Brennpuncte hin zurück fallen, und sich dort sammeln.

§. 313. Eine gerade Linie durch das Centrum, wie mH Fig. 59., heißt ein Diameter, und theilt die Ellipse in 2 gleiche Hälften. Die Ordinaten vom Endpunct des Diameters zur Axe sind gleich groß, Pm = GH.

§. 314. Eine Linie, welche die Ellipse nur in einem Puncte berührt, als OM, heißt Tangente des Puncts M. Sie wird folgendermaßen gezogen:

Aus den Brennpuncten F und f ziehe gerade Linien an den Punct, den die Tangente berühren soll, hier an M, Fig. 59., verlängere fM bis R, daß MR = FM wird, und ziehe RF zusammen. Nun theile RF in 2 Theile in L, und ziehe ML, welche verlängert die Axe in O schneidet, so ist OM die Tangente.

§. 315. Zieht man mit der Tangente OM parallel einen Diameter Hm, so schneidet derselbe von fM ein Stück fT ab. Das übrige Stück TM ist der halben großen Axe gleich.

$$TM = \tfrac{1}{2} a; \text{ weil nun } fM = \tfrac{1}{2} a + \frac{u\sqrt{(a^2 - c^2)}}{a}$$

$$\text{so ist das Stück } fT = \frac{u\sqrt{(a^2 - c^2)}}{a}.$$

Das Stück $fR = a =$ der großen Axe.

§. 316. Ein Perpendikel auf der Tangente am Punct M, nach der Axe, theilt den Winkel, den die Vectoren an M machen, in zwei gleiche Theile. Winkel $n = < r$, und dM ist Perpendikel. Der Abstand des Perpendikels vom Brennpunct, oder

$$Fd = \frac{fF \cdot FM}{fR} = \frac{\sqrt{(a^2 - c^2)} \cdot \left(\tfrac{1}{2} a - \frac{u\sqrt{(a^2 - c^2)}}{a}\right)}{a}.$$

§. 317. Die OP heißt Subtangente und macht mit der Ordinate PM und Tangente OM einen recht-

winfwinklichten Triangel. Sieht man od als den Durchmesser eines Kreises an, so lassen sich die 3 Puncte O, M und d in die Kreislinie bringen.

$$PO = \frac{a^2 - 4u^2}{4u}; \; Pd = \frac{c^2 u}{a^2}.$$

§. 318. Die Tangente ist im rechtwinklichten Dreieck OPM die Hypotenuse, daher ist $OM = \sqrt{(PM^2 + OP^2)} = \sqrt{\left(\left(\frac{a^2 - 4u^2}{4u}\right)^2 + \left(\frac{c^2}{4} - \frac{c^2u^2}{a^2}\right)\right)}$.

§. 319. Die Subtangente OP giebt auch die Proportion Fig. 59. und 60.

$$CP : AP = BP : OP$$

$$u : \tfrac{1}{2}a - u = \tfrac{1}{2}a + u : OP, \text{ und } OP = \frac{\frac{1}{4}a^2 - u^2}{u}.$$

Die Entfernung des Puncts O vom Centro C giebt

$$CP : AC = AC : OC$$

$$= u : \tfrac{1}{2}a = \tfrac{1}{2}a : OC$$

$$\text{und } OC = \frac{\frac{1}{4}a^2}{u}.$$

§. 320. Den Abstand OA giebt die Proportion

$$CP : AP = CA : OA$$

d. h. $u : \tfrac{1}{2}a - u = \tfrac{1}{2}a : OA$; und $OA = \frac{\frac{1}{4}a^2}{u} - \tfrac{1}{2}a$.

§. 321. Subtangente und Abscisse, mit einander multiplicirt, geben ein Rechteck, welches eben so groß ist, als dasjenige, was aus der Multiplication der beiden Stücke der großen Axe, die die Abscisse trennt, entsteht.

$$OP \,.\, PC = PB \,.\, AP.$$

§. 322. Das Perpendikel auf der Tangente in M heißt Normale; in Fig. 59. ist Md die Normale; Pd die Subnormale.

Die Subnormale $Pd = u - dC$, oder $\frac{c^2 u}{a^2}$.

Die Normale $Md = \sqrt{(y^2 + Pd^2)}$.

§. 323.

§. 323. Man ziehe Fig. 60. durch M einen Diameter MCV; und einen andern QCN mit der Tangente OM parallel, so hängen beide Diameter von der Tangente ab, und heißen conjugirte Diameter. Berührte die Tangente den Endpunct einer Axe, so müßte ihr die andere Axe parallel seyn; folglich sind beide Axen auch conjugirte Diameter.

§. 324. Wenn von den Endpuncten der Diameter Perpendikel auf die Axe fallen, NJ und PM, so ist

$$CJ^2 = AP . PB; \text{ und } CP^2 = AJ . JB$$

und es sey $CJ^2 = v^2 = \frac{a^2}{4} - u^2 \qquad u^2 = \frac{a^2}{4} - v^2.$

§. 325. Weil hiedurch die Abscisse $CJ = v$ gefunden ist, so ist auch NJ und NC zu finden.

$$NJ \text{ (Ordinate in J)} = \sqrt{\left(\frac{c^2}{4} - \frac{c^2 v^2}{a^2}\right)},$$

$$NC \text{ (Hypotenuse in } \triangle NCJ) = \sqrt{(CJ^2 + CJ^2)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{c^2}{4} - \frac{c^2 v^2}{a^2} + \frac{a^2}{4} - u^2\right)}; \; CM = \sqrt{(CP^2 + PM^2)}$$

$$= \sqrt{(u^2 + y^2)} = \sqrt{\left(u^2 + \frac{c^2}{4} - \frac{c^2 u^2}{a^2}\right)}.$$

Anmerk. Die durch die conjugirten Diameter und ihre Ordinaten gebildeten Dreiecke NJC und PMC sind einander der Fläche nach gleich.

§. 326. Wenn die Puncte P und J in einander fallen, so sind die Diameter einander gleich. Dann ist Abscisse $u = \sqrt{\frac{a^2}{8}}$.

§. 327. Reicht die Tangente OM bis zur verlängerten kleinen Axe in R, so ist $MR = \frac{NC^2}{OM}$, Fig. 60.

§. 328. Derjenige Diameter, der auf der Tangente steht, theilt den conjugirten Diameter und jede Parallele HK in z in 2 gleiche Theile. Es verhält sich

$$MZ . ZV : HZ^2 = MC^2 : CN^2.$$

Die

Die Linien HZ oder ZK heißen Ordinaten auf dem Diameter. Nennt man sie w, und ihre Absciſſen MZ = r; MV = d, so ist $w^2 = \frac{r.(d-r).CN^2}{\frac{1}{4}d^2}$.

§. 329. Aus dem Vorhergehenden läßt sich nun die Aufgabe lösen: in einer gegebenen Ellipse zu finden

1. jeden Diameter. Man ziehe zwei parallele Sehnen, wo man will, theile jede in 2 gleiche Theile, und ziehe durch diese Theilpuncte eine gerade Linie, welche ein Diameter seyn und durch's Centrum gehen wird. Es sey Fig 63. die Sw, und TJ eine Chorde, so ist LO der Diameter.
2. Das Centrum. Es liegt auf der Mitte des Diameters.
3. Die große Axe. Beschreibe aus dem Mittelpunct C mit willkührlicher Zirkelöffnung den Bogen GH, ziehe die Chorde GH und theile sie in 2 gleiche Theile. Durch ihre Mitte und durch das Centrum ziehe eine gerade Linie, welche die große Axe seyn wird.

   Rechtwinklicht auf der Mitte der großen Axe steht die kleine Axe DD.
4. Die Brennpuncte. Trage die halbe große Axe vom Endpunct der kleinen nach der großen Axe, also daß DF und Df Fig. 58. = AC.
5. Die beiden gleichen conjugirten Diameter. Ziehe AD und Ad, theile jede in m und n, Fig. 63., in 2 gleiche Theile, und ziehe durch C und m, so wie durch C und n die beiden Diameter MV und NQ.

§. 330. Die Lage der Ordinaten zu bestimmen, wenn der Diameter gegeben ist.

Es sey MV der gegebene Diameter, Fig. 62. Nimm w willkührlich, ziehe wM und verlängere sie bis MG = Mw. Von G ziehe eine Parallele mit dem Diameter, bis sie die Ellipse in A erreicht. Von A ziehe die Aw, welches die doppelte Ordinate seyn wird, welche die Lage aller andern bestimmt.

Parallel mit Aw geht NQ durch das Centrum und ist conjugirter Diameter.

§. 331. Das Parallelogramm RSFU, Fig. 64, welches die beiden Axen einer Ellipse bilden, hat eben so viel Fläche, als dasjenige, was sich aus den conjugirten Diametern MP und QN bilden läßt, und hier WXYZ ist. Überhaupt sind alle um die Ellipse beschriebene Parallelogramme der Fläche nach einander gleich.

§. 332. Die bis zur Tangente verlängerten Perpendikel auf den Endpuncten der großen Axe geben mit einander multiplicirt ein Rechteck, das dem Quadrat der halben kleinen Axe gleich ist.

$$AQ \,.\, BS = cd^2;\; AQ = \frac{a \,.\, y}{a + 2u};\; BS = \frac{a \,.\, y}{a - 2u}$$ Fig. 61.

§. 333. Wenn man aus den Brennpuncten Perpendikel auf die Tangente fallen läßt, so ist das Product dieser Linien ebenfalls dem Quadrat der halben kleinen Axe gleich. $FH \,.\, fh = cd^2 = \frac{c^2}{4}$, folglich sind die Rechtecke QA . SB und FH . fh einander gleich, Fig. 61.

§. 334. Bewegte sich ein Körper in der Ellipse um den Brennpunct F, Fig. 58., so würde sich seine Geschwindigkeit in einem Puncte M zu der Geschwindigkeit in D (der mittlern Entfernung von F) verhalten, wie $\sqrt{FM} : \sqrt{fM}$ d. i. wie die Quadratwurzeln aus den Vectoren.

§. 335. Beschreibt man mit der halben großen Axe aus dem Centrum einen Kreis, Fig. 65, und errichtet auf derselben die willkührlichen Ordinaten Pm, Qn, Ro, Cd, und verlängert sie bis zum Kreise in a, b, c, e, so verhalten sich die Ordinaten der Ellipse, wie die Ordinaten des Kreises; d. i.

$Pm : Pa = Qn : Qb$ u. s. w.

und $Pm : Pa = Cd : Ce$, d. h. wie die halbe kleine Axe zur halben großen Axe.

§. 336. Die Fläche der Ellipse = E verhält sich zur Fläche des Kreises (dessen Radius die halbe große Axe), = K, wie die kleine Axe zur großen Axe; d. i. $E : K = c : a$, und die Fläche der Ellipse

$$E = \frac{K \,.\, c}{a}$$

§. 337. Ist der Kreis mit der halben kleinen Axe beschrieben, so ist

$$E : K = a : c$$

$$\text{und } E = \frac{K \cdot a}{c}.$$

§. 338. Die elliptische Fläche ist auch gleich einer Kreisfläche, deren Diameter die mittlere Proportionalgröße zwischen beiden Axen ist. $a : d = d : c$, also ist $a \cdot c = d^2$, weil $\frac{d^2 p}{4}$ = Kreisfläche, so ist die elliptische Fläche $= \frac{a \cdot c \cdot p}{4}$, welches Formular das bequemste ist ($p = 3{,}14159 \ldots\ldots$).

§. 339. Bei Ellipsen, in denen die Brennpuncte nahe am Centro liegen, ist △ COM der Fläche nach fast gleich dem △ QCM, Fig. 65., wobei Q der Brennpunct der Ellipse. Dies giebt ein Mittel, die Ellipse nach einem gegebenen Verhältniß zu theilen. Wenn im Kreise BO der achte Theil der Peripherie wäre, so wäre Sector BCO $\frac{1}{8}$ der Kreisfläche. Zieht man nun aus dem Brennpunct Q die Linie QO, und zu ihr die Parallele CM, so ist auch BmQ $\frac{1}{8}$ der elliptischen Fläche.

Anmerk. Dieser Satz findet in der Astronomie Anwendung.

§. 340. Die Flächen der Ellipsen verhalten sich zu einander, wie die Producte aus ihren Axen; und wenn sich gleichnamige Axen gleich sind, wie die andern Axen.

§. 341. Wenn sich eine halbe Ellipse um die feststehende Axe bewegt, so entsteht eine Art Kugel, Sphäroid, die aber nach der Richtung der kleinen Axe eingedrückt erscheint. Ein solcher Körper heißt Ellipsoide. Der körperliche Inhalt derselben $= \frac{ac^2 p}{6}$, wobei $p = 3{,}14159 \ldots$

§. 342. Auch aus dem Cylinder läßt sich eine Ellipse schneiden. Der Durchmesser desselben wird dann jedesmal der kleinen Axe gleich. Die große Axe hängt von dem Winkel ab, unter welchem die schneidende Ebene den Cylinder trifft.

Die

Diesen Winkel $= w$ findet man durch

$\text{Sin.}\ w = \frac{\text{Sin. tot. } c}{a}$; und wenn w gegeben ist

$a = \frac{\text{Sin. tot. } c}{\text{Sin. } w}$.

§. 343. Wenn beide Axen bekannt sind, so läßt sich die Ellipse berechnen und zeichnen.

Es sey Fig. 72. AB die große Axe $= a = 176$; ED die kleine Axe $= c = 154$, und CP die eine Abscisse $= 51 = u$, vom Mittelpunct angenommen, so lassen sich alle in dieser Figur sichtbare gerade Linien darnach berechnen, welches in der weiterhin folgenden Tabelle geschehen ist. Allein die Ellipse selbst zu zeichnen, oder Puncte zu finden, durch welche die krumme Linie gezogen wird, nehme man u willkührlich, und nach und nach immer größer, bis es der halben großen Axe gleicht, und berechne dazu die Ordinaten. Weil sich aber die Ellipse in der Gegend der großen Axe schnell krümmt, so nehme man auch auf der kleinen Axe mehrere Abscissen und berechne dazu die Ordinaten, welche man gehörigermäßen auf beiden Seiten des Centrums und der Axe, auf der die Abscissen genommen, rechtwinklicht nach dem Maaßstabe (hier 1 Zoll $= 100$ Theile) aufträgt.

Formular für die Ordinaten auf der großen Axe

$$\sqrt{\left(\frac{c^2}{4} - \frac{c^2 \cdot u^2}{a^2}\right)},$$

auf der kleinen Axe $\sqrt{\left(\frac{a_2}{4} - \frac{a^2 \cdot u^2}{c^2}\right)}$.

Wenn CP oder u =	5,	so ist	PM	oder y =	76,9
	10	—	—	—	76,5
	15	—	—	—	75,9
	20	—	—	—	75,0
	25	—	—	—	73,8
	30	—	—	—	72,4
	35	—	—	—	70,7
	40	—	—	—	68,6
	45	—	—	—	66,2

 Wenn

Wenn CP oder u =	50, so ist PM oder y =			63,5
	55	—	— —	60,3
	60	—	— —	56,5
	65	—	— —	52,1
	70	—	— —	47,0
Abscissen auf der kleinen Axe = u	5	—	— —	87,8
	10	—	— —	87,3
	15	—	— —	86,3
	20	—	— —	84,9
	25	—	— —	83,2
	30	—	— —	81,1
	35	—	— —	78,4
	40	—	— —	75,2

Diese für 1 Quadranten berechneten Ordinaten gelten für alle vier, und sind völlig hinreichend, die Ellipse zu ziehen.

Formelntafel zur Berechnung aller Linien in der Ellipse Fig. 72.

Linien.	Formeln.	Werth in Zahlen.	
AB = große Axe	$a = \frac{c^2}{b}$	176.	Beständige Größen.
AC = halbe große Axe	$\frac{1}{2} a = \frac{c^2}{2b}$	88.	
DE = kleine Axe	$c = \sqrt{ab}$ . . .	154.	
DC = halbe kleine Axe	$\frac{1}{2} c = \frac{\sqrt{ab}}{2}$ . . .	77.	
CF = Cf Brennpuncte	$= \sqrt{\left(\frac{a^2 - c^2}{4}\right)}$	42,6	
Ff = Abstand der Brennpuncte	$= 2\sqrt{\left(\frac{a^2 - c^2}{4}\right)}$	85,2	
Parameter . .	$b = \frac{c^2}{a}$	134,75	

PC

Linien.	Formeln.	Werth in Zahlen.
PC = Abscisse, gegeben,	$u = \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - \frac{a^2 y^2}{c^2}\right)}$	51.
PM = Ordinate zu u	$y = \sqrt{\left(\frac{c^2}{4} - \frac{c^2 u^2}{a^2}\right)}$	62,75
PO = Subtangente	$= \frac{a^2 - 4u^2}{4u} \ldots$	100, 84
OM = Tangente	$= \sqrt{(OP^2 + PM^2)}$ $= \sqrt{\left(\frac{(a^2-4u^2)^2}{4u} + \left(\frac{c^2}{4} - \frac{c^2 u^2}{a^2}\right)\right)}$	118,77
FM = Radius vector	$= \frac{1}{2} a - \frac{u\sqrt{(a^2-c^2)}}{a}$	63,31
fM = Radius vector	$= \frac{1}{2} a + \frac{u\sqrt{(a^2-c^2)}}{a}$	112,69
Fd	$= \frac{\sqrt{(a^2-c^2)} \cdot \left(\frac{1}{2}a - \frac{u\sqrt{(a^2-c^2)}}{a}\right)}{a}$	30,65
Cd = — —	$= \frac{u(a^2-c^2)}{a^2} \ldots$	11,95
AP — —	$= \frac{1}{2} a - u \ldots$	37.
PF — —	$= u - \sqrt{\left(\frac{a^2-c^2}{4}\right)}$	8,4
Pf — —	$= u + \sqrt{\left(\frac{a^2-c^2}{4}\right)}$	93,6
AF, Brennpunct vom Scheitel	$= \frac{1}{2} a - \sqrt{\left(\frac{a^2-c^2}{4}\right)}$	45,4
Ad — —	$= \frac{1}{2} a - \frac{u(a^2-c^2)}{a^2}$ oder $\frac{1}{2} a - Cd$	76,05
Pd = Subnormale	$= \frac{c^2 u}{a^2} \ldots$	39,05

Linien.	Formeln.	Werth in Zahlen.
CO — —	$=\frac{\frac{1}{4}a^2}{u}$	151,84
OA — —	$=\frac{\frac{1}{4}a^2}{u}-\frac{1}{2}a$ . .	63,84
Md = Normale	$=\sqrt{(y^2+Pd^2)}$.	73,89
CM — —	$=\sqrt{(u^2+y^2)}$.	80,86
MV = Diameter	$=2\sqrt{(u^2+y^2)}$.	161,72
AZ — —	$=\frac{PM\,.\,OA}{OP}$ . .	39,63
BS — —	$=\frac{PM\,.\,OB}{OP}$ . . .	149,24
CR — —	$=\frac{PM\,.\,OC}{OP}$ . .	94,48
CJ = Abscisse des Diameters	$v=\sqrt{\left(\frac{a^2}{4}-u^2\right)}$	71,71
NJ = Ordinate darauf	$=\sqrt{\left(\frac{c^2}{4}-\frac{c^2v^2}{a^2}\right)}$	44,63
NC = halber conjugirter Diamet.	$=\sqrt{(JC^2+JN^2)}$	
oder	$=\sqrt{\left(\frac{c^2}{4}-\frac{c^2v^2}{a^2}+\frac{a^2}{4}-u^2\right)}$	84,47
NQ = conjugirter Diameter	$2\sqrt{\left(\frac{c^2}{4}-\frac{c^2v^2}{a^2}+\frac{a^2}{4}-u^2\right)}$	168,93
MR — —	$=\frac{NC^2}{OM}$	60,07
OS — —	$=\frac{OM\,.\,OB}{OP}$ . .	282,48
OZ — —	$=\frac{OM\,.\,OA}{OP}$ . .	75,19

Linien.	Formeln.	Werth in Zahlen.
OB = — —	$= a + \left(\frac{\frac{1}{4}a^2}{u} - \frac{1}{2}a\right)$	239,84
VX = Absciſſe auf dem Diameter	gegeben	22,5
XM — —	$MV - VX$	139,22
GX = WX Ordinate a. d. Diameter	$= \sqrt{\left(\frac{MX.XV.NC^2}{MC^2}\right)}$	58,46
Fh Perp. auf die Tangente aus d. Brennpunct	$= \frac{dM \,.\, OF}{Od}$ . . .	57,7
OF — —	$= OP + PF$ . .	109,24
Od — — oder	$= OP + Pd$ $= OC - dC$ . .	139,89
fH Perpendikel a. d. Tangente	$= \frac{dM \,.\, Of}{Od}$ . . .	102, 75
Of — —	$= OC + Cf$ . . .	194,44
Fläche der Ellipſe	$= \frac{a.c.3,1415\ldots.}{4} =$	21786,8 □Maaß
Inhalt der Ellipſoide	$= \frac{a.c^2.3,1415\ldots.}{6} =$	2185445 Kubik-Maaß

Von der Hyperbel.

§. 344 Wenn zwei Kegel ECD und RCS Fig. 66. mit den Spitzen gegen einander ſtehen, und eine ſchneidende Ebene VABQ durch beide Kegel dringt, ſo entſtehen auf den Oberflächen der Kegel zwei krumme Linien UMAN und ZBQ, welche Hyperbel heißen. In A und B ſind die Scheitel derſelben; QB und BZ ſind die Arme der Hyperbel im obern, und OA und AN im untern Kegel. Die Figur im obern Kegel iſt ſtets der im untern gleich, der Schnitt mag liegen, wie er will, wenn er nur beide Kegel trifft.