# Der Rathgeber bei mathematischen Beschäftigungen

Stöpel, August

Stendal, 1819

§. 345-376 Gleichungen für alle hyperbolische Linien: Zeichnung und Berechnung derselben; Formeltafel.

urn:nbn:de:hbz:466:1-63556

folglich ist $y = \sqrt{\left(bx + \frac{bx^2}{a}\right)}$.

§. 345. Die Wurzel kann + und — haben, folglich giebt es auch zweierlei Ordinaten, wovon man eine positiv und die andere negativ nehmen kann. Auf der Zwergaxe AB kann es keine Ordinaten geben. Die Arme der Hyperbel können unendlich lang seyn.

§. 346. Wenn man auf der Mitte der großen Axe in C ein Perpendikel errichtet, welches die halbe Quadratwurzel aus dem Product der großen Axe und des Parameters ist, so heißt diese CD, Fig. 67., die halbe kleine Axe; folglich ist $Dd = \sqrt{a \cdot b}$ = der kleinen Axe, welche daher die mittlere Proportionalgröße zwischen der großen Axe und dem Parameter ist. Bezeichnen wir sie mit c, so gilt $a : c = c : b$. Und $a = \frac{c^2}{b}$; $b = \frac{c^2}{a}$.

§. 347. In der Hyperbel giebt es zwei Brennpuncte. Sie liegen, wie in allen Kegelschnitten, da auf der Axe, wo die doppelte Ordinate dem Parameter gleicht. Fig. 67. ist mn = Parameter, in F und f sind die Brennpuncte.

Den Abstand der Brennpuncte von den Scheiteln giebt das Formular $AF = Bf = -\frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{(ab + a^2)}}{2}$.

Mechanisch findet man die Brennpuncte, indem man an den Scheiteln Perpendikel AE = halben kleinen Axe CD errichtet, und mit dem Radius CE einen Kreis beschreibt, welcher durch F und f gehen wird.

§. 348. Wäre große Axe und Brennpunct F bekannte, so würde durch einen Kreis, dessen Radius CF ist, auf dem Perpendikel AE im Scheitel, die halbe kleine Axe gefunden. Der Abstand der Brennpuncte $e = \frac{\sqrt{(a^2 + ab)}}{2}$.

§. 349. Das Rechteck aus AF und BF ist dem Quadrat der halben kleinen Axe gleich; oder $AF \cdot BF = c^2 = CD^2$.

§. 350. In der Hyperbel verhalten sich die Quadrate zweier Ordinaten y und z zu einander, wie $(a + x) x : (a + v) v$ oder $ax + x^2 : av + v^2$, wobei v die Abscisse zu z ist.

§. 351. Wenn große Axe und Parameter gegeben sind, so wird sich die Hyperbel zeichnen lassen, indem man die x willkührlich nimmt, nach der Formel $y = \sqrt{\left(bx + \frac{bx^2}{a}\right)}$ die dazugehörigen Ordinaten berechnet, und gehörigermaßen auf die Axe trägt. Die Endpuncte zieht man aus freier Hand zusammen, und daher müssen die x nicht sehr von einander verschieden seyn.

Gesetzt, man habe die große Axe $AB = 100 = a$; den Parameter $= 50 = b$, und die Abscissen vom Scheitel an folgendermaßen genommen:

| | | | |
|---|---|---|---|
| x = 3, so ist | y = 12,43 | x = 50, so ist | y = 61,24 |
| 6 — | — 17,83 | 55 — | — 65,28 |
| 9 — | — 22,15 | 60 — | — 69,28 |
| 12 — | — 25,92 | 65 — | — 73,23 |
| 15 — | — 29,35 | 70 — | — 77,13 |
| 18 — | — 32,59 | 75 — | — 81,01 |
| 21 — | — 35,64 | 80 — | — 84,85 |
| 24 — | — 38,57 | 85 — | — 88,67 |
| 27 — | — 41,41 | 90 — | — 92,46 |
| 30 — | — 44,16 | 95 — | — 96,24 |
| 33 — | — 46,84 | 100 — | — 100. |
| 36 — | — 49,48 | u. s. w. | |
| 39 — | — 52,06 | Hiernach sind die Hyper- | |
| 42 — | — 52,61 | beln Fig. 69, 70 und 73 | |
| 45 — | — 57,12 | gezeichnet; 1 Zoll = 100. | |

§. 352. Werden die Abscissen vom Mittelpunct C an genommen, so ist die Gleichung für die Ordinate

$$y^2 = \frac{c^2 u^2}{a^2} - \tfrac{1}{4} c^2, \text{ wobei } u = CP.$$

Dann ist das Verhältniß der Ordinaten y und z also:

$$y^2 : z^2 = \left(u - \frac{a}{2}\right) \cdot \left(u + \frac{a}{2}\right) : \left(v - \frac{a}{2}\right) \cdot \left(v + \frac{a}{2}\right).$$

Die

die Entfernung des Brennpuncts vom Scheitel

$$AF = -\tfrac{1}{2}a + \frac{\sqrt{(a^2+c^2)}}{2},$$

und vom Mittelpunct $CF = \frac{\sqrt{(a^2+c^2)}}{2}$.

§. 353. Der Unterschied zweier geraden Linien aus den Brennpuncten an irgend einem Punct N Fig. 67. ist allemal der großen Axe gleich. D. i. $NF - fN = AB$ oder $= a$.

Anmerk. In der Ellipse war die Summe dieser Linien $= a$.

§. 354. Wird die kleine Axe an die Scheitel senkrecht gesetzt, wie Fig. 68. AE und BE, und durch ihre Endpuncte E und durch's Centrum eine gerade Linie CELS, die verlängert CEWg, desgleichen nNCEV ist, so heißen diese Linien gCS und nCV Asymptoten, Niezusammenfallende. Sie nähern sich zwar den Hyperbelarmen immer mehr, erreichen sie aber nie.

§. 355. Nennt man die bis zur Asymptote verlängerte Ordinate $PL = Z$, und $PM = y$, so ist $Z - y$

$$= \frac{c^2}{4(Z-y)} = ML.$$

In den ähnlichen Dreiecken CAE und CPL gilt

$$CA : AE = CP : PL$$

$$\text{d. i. } \frac{a}{2} : \frac{c}{2} = u : z$$

$$\text{oder } a : c = u : z, \text{ und } z = \frac{cu}{a}.$$

Was von dem einen Arme gilt, wird für alle 4 Arme gelten.

§. 356. Das Rechteck $NM \cdot ML = AE^2 = \frac{c^2}{4}$.

Zieht man vom Endpunct einer Ordinate eine gerade Linie mit der großen Axe parallel, die Linie Md Fig. 68., bis zur gegenüberstehenden Asymptote, so ist das Rechteck

$Mq \cdot Md = CA^2 = \frac{a^2}{4}$.

§. 357. Man kann auch auf der Asymptote CL Ordinaten, als Fig. 68., JA, RT, QM errichten, welche mit der zweiten Asymptote Cn parallel laufen. Nimmt man die Absciſſe auf der Asymptote, die $CQ = u$, und $QM = y$, ſo iſt $CQ = u = \frac{a^2 + c^2}{16y}$; und $QM = y = \frac{a^2 + c^2}{16u}$.

§. 358. Eine Ordinate JA auf der Asymptote nach dem Scheitel A iſt beſonders merkwürdig. Sie iſt $= CJ = JE = \sqrt{(QC \cdot QM)} = \sqrt{\frac{a^2 + c^2}{16}}$. Das Quadrat von CJ, alſo $CJ^2 = \frac{a^2 + c^2}{16}$ heißt die **Potenz der Hyperbel.**

§. 359. Die außer den Hyperbelarmen zwiſchen dieſen und den Asymptoten befindlichen Linien LM und mN ſind einander gleich, LN mag liegen, wie ſie will.

§. 360. Wenn die Lage der Asymptoten, und ein Punct M in der Hyperbel gegeben iſt, ſo läßt ſie ſich zeichnen.

Halbire Fig. 68. den Asymptotenwinkel SCn, und ziehe die CH, welche die Axe vorſtellt; ſuche die Potenz der Hyperbel, welche $= CJ^2 = CQ \cdot QM = \frac{a^2 + c^2}{16}$. Die Puncte Q, und M ſind gegeben; und QM iſt parallel CN. Es iſt alſo $CJ = \sqrt{(CQ \cdot QM)}$. Die Größe CJ trage auf die Asymptote CS, und ziehe $JA = CJ$, mit CN parallel, ſo iſt in A der Scheitel, CA die halbe große Axe, ein Perpendikel AE auf A iſt die halbe kleine Axe. Nun nehme man die CQ nach Belieben $= x$, und ſuche dazu die $QM = y$. Aber $x \cdot y = CJ^2$, folglich $y = \frac{CJ^2}{x}$. Berechnet man auf dieſe Weiſe recht viele nahe an einander liegende y, und trägt ſie auf die Puncte der Asymptote, für welche ſie berechnet ſind, ſo, daß ſie mit der andern Asymptote parallel laufen, zieht darauf
ihre

ihre Endpuncte zusammen, so erhält man den Hyperbelarm ATM, und auf gleiche Art auch die andern Arme.

§. 361. Die Lage der Asymptoten ist eine Hauptsache, und hängt von der Größe der beiden Axen ab. Es ist aber

$$CA : AE = \text{Sin. tot.} : \text{Tang. } o.$$

§. 362. Wenn, was oft der Fall ist, der Asymptotenwinkel nCS und ein Punct M in der Hyperbel, also CQ und QM, gegeben sind, so findet man:

die kleine Axe $c = 4 \text{ Sin.} < o . \sqrt{(CQ . MQ)}$,
die große Axe $a = 4 \text{ Cos.} < o . \sqrt{(CQ . MQ)}$.

§. 363. Wenn in einer Hyperbel beide Axen gleich sind, so ist auch der Parameter jeder Axe gleich, und die Hyperbel heißt gleichseitig.

Die Gleichung ist dann $y^2 = u^2 - \frac{1}{4} a^2$; oder $y^2 = x^2 + ax$, je nachdem die Abscisse vom Mittelpunct oder vom Scheitel an genommen worden. Der Asymptoten-Winkel ist $= 90^\circ$; der halbe, oder $< o = 45^\circ$.

Die Ordinaten in der gleichseitigen Hyperbel verhalten sich, die Abscissen vom Mittelpunct an genommen,

$$y^2 : z^2 = u^2 - \tfrac{1}{4} a^2 : v^2 - \tfrac{1}{4} a^2,$$

wobei v Abscisse zu z. Wenn aber die Abscissen vom Scheitel an genommen werden:

$$y^2 : z^2 = x^2 + ax \quad : t^2 + at$$
$$= (a+x) . x) : (a+t) . t,$$ wobei t und x Abscisse zu z und y.

§. 364. Eine Tangente Tm Fig. 68. berührt die Hyperbel nur in einem Punct m, und trifft verlängert sowol die große Axe in T, als auch beide Asymptoten in t und g.

Man zieht die Tangente folgendermaßen:

Ziehe aus dem Punct m eine mit der andern Asymptote parallele Linie mh nach der nächsten Asymptote; trage Ch nach hg, so sind g und m zwei Puncte, durch welche die Tangente geht. Dann gilt in den ähnlichen Dreiecken ghm und gCt

$$gh ; gC = gm : gt; \text{ oder } gh : hC = gm : mt;$$

weil

weil nun $gk = hC$, so ist auch $gm = mt$, und die zwischen den Asymptoten eingeschlossene Tangente wird durch den Berührungspunct m stets in 2 gleiche Theile getheilt.

§. 365. Man fälle in m ein Perpendikel mp auf die Axe, ein Perpendikel Vm auf die Tangente, so ist Tp Subtangente, mV Normale, pV Subnormale; pm Ordinate $= y$; Bp Abscisse $= x$ und Cp Abscisse $= u$.

Die Subnormale $Vp = \frac{ab + 2bx}{2a}$, oder $\frac{c^2u}{a^2}$.

Die Subtangente $Tp = \frac{(a+x)x}{\frac{1}{2}a+x}$, oder $\frac{u^2 - \frac{1}{4}a^2}{u}$, oder $\frac{4u^2 - a^2}{4u}$.

Die $TB = \frac{ax}{a+2x}$, oder $\frac{2au - a^2}{4u}$ = Abstand der Tangente vom Scheitel.

Die $CT = \frac{a^2}{4u}$ oder $= \frac{a^2}{2a+4x}$ = Abstand der Tangente vom Centro.

Die Tangente Tm ist Hypotenuse im $\triangle$ Tpm, also $= \sqrt{(Tp^2 + y^2)}$.

Die Normale $Vm = \sqrt{\left(y^2 + \left(\frac{c^2.u}{a^2}\right)^2\right)}$

$= \sqrt{(pm^2 + pV^2)}$.

§. 366. Eine Linie, welche durch das Centrum C geht, sich innerhalb der Asymptoten hält, und also beide entgegengesetzte Hyperbeln in H und h Fig. 70. schneidet, heißt ein Diameter, und der Theil hH der Zwergdiameter.

Zieht man vom Punct H eine Linie Hp, parallel mit der Asymptote CL, verlängert sie, bis $pG = Hp$; und eine andere Hn mit der Asymptote CQ parallel, und verlängert sie bis $ng = Hn$, so ergeben sich zwei Puncte G und g, durch welche und durch das Centrum sich die gerade Linie Gg ziehen läßt, die zweiter, oder conjugirter Diameter genannt wird.

GC ist dann gleich gC. Die Tangente zum Punck H, also die Linie SQ ist gleich dem zweiten Diameter gG; $SH = CG$, und $HG = CS$; $HQ = Cg = GC = HS$. Die $CH = \sqrt{(u^2 + y^2)}$.

§. 367. Sind die beiden Diameter hH und gG gegeben, so findet man die Lage der Asymptoten, indem man HG halbirt, und durch C und p die Asymptote CpQ zieht.

§. 368. Eine mit der Tangente SH parallel gezogene Linie tw durchschneidet die Hyperbel in zwei Puncten in v und w. Der Diameter ZO theilt sie in r in 2 gleiche Theile, so daß $vr = rw$. Die Linien vr und rw heißen Ordinaten des Diameters. Nennt man eine Ordinate des Diameters z, den Diameter $hH = a$, $Gg = b$, und Cr Abscisse vom Centro an auf dem Diameter $= s$, so ist $Z^2 = \frac{b^2 s^2}{a^2} - \frac{b^2}{4}$, welches die Gleichung für die Ordinaten des Diameters ist.

§. 369. Zieht man beliebige gerade Linien von einer Assymptote zur andern, z. B. HJ und LT Fig. 69. und wo beide die Hyperbel schneiden, mit der andern Asymptote Parallelen, wie nK und No, so sind die Rechtecke $Hn . nK$, und $LN . NO$ einander, und auch dem Quadrat der halben kleinen Axe gleich.

§. 370. Das Parallelogramm aus den beiden Axen AB (Fig. 73.) und EE, oder $a . c$ ist gleich dem Parallelogramm der beiden conjugirten Diameter hM und gG.

§. 371. Wenn man von beiden Brennpuncten F und f an einen Punct M Fig. 70. gerade Linien fM und MF zieht, und den Winkel fMF durch eine gerade Linie MT halbirt, so ist die Linie TM eine Tangente; und

$$fM : FM = fT : FT$$

$$\text{Aber } fM = \frac{\sqrt{(a^2 + c^2)}\,u}{a} + \frac{a}{2}$$

$$\text{und } FM = \frac{\sqrt{(a^2 + c^2)}\,u}{a} - \frac{a}{2}$$

$$CT = \frac{a^2}{4u};\ fC = \frac{\sqrt{(a^2 + c^2)}}{2}$$

also $fT = \frac{\sqrt{(a^2 + c^2)}\ 2u + a^2}{4u}$; und $FT$

$$= \frac{\sqrt{(a^2 + c^2)}\ 2u - a^2}{4u}.$$

§. 372. Weil die Winkel $x = y = n = o$, so würde ein Lichtstrahl bM Fig. 70., dessen Richtung nach dem Brennpunct f geht, vom Hyperbelarm AM so gebrochen werden, daß er in den Brennpunct F gelangen müßte. Daher heißen F und f die Brennpuncte.

§. 373. Eine Linie aus dem Brennpunct an den Berührungspunct M der Tangente TM heißt Radius vector, Zuglinie oder Träger. Ihr Werth ist §. 371. angegeben.

§. 374. Eine hyperbolische Fläche läßt sich nur dann berechnen, wenn die beiden Arme durch eine doppelte Ordinate rs Fig. 68. abgeschnitten sind. Es müssen dann bekannt seyn beide Axen, Abscisse CD, und Ordinate Dr nebst deren Verlängerung rV und sw. Nun findet man DV

$$CB : BE = CD : DV$$

$$= \frac{a}{2} : \frac{c}{2} = u : DV,\ \text{und}\ DV = \frac{cu}{a}.$$

Zieht man davon $Dr = y$ ab, so bleibt rV.

Auf gleiche Weise läßt sich aa, bb, cc, dd etc., die man mit BE parallel zieht, finden. Die dadurch entstehenden kleinen Trapezia BEaa, aabb u. s. w., worin die krumme hyperbolische Linie für gerade anzunehmen ist, lassen sich berechnen, ihre Summe vom Trapezio BEVD abziehen, so wird der Raum BrDB $= \frac{1}{2}$ Hyperbel übrig bleiben.

Diese Verfahrungsweise ist mühsam, aber der einzige Weg, ohne die Kunstgriffe der Integralrechnung zu einem erträglichen Resultat zu gelangen.

Aus der Integralrechnung findet man für die Hyperbel eine ziemlich brauchbare Formel:

$\frac{2}{3}\sqrt{}$

$$\tfrac{2}{3}\sqrt{bx^3} + \sqrt{\frac{bx^3}{2a}} = \text{halben hyperbol. Fläche,}$$

hiebei ist x eine Abscisse vom Scheitel.

§. 375. Wenn sich der Hyperbelarm Br mit der Asymptote EV um die Axe BD bewegt, so entsteht ein abgekürzter Kegel VEEW, in welchem die Hyperboloide rBsr steckt, deren körperlicher Inhalt gefunden wird durch

$$\frac{(2R^2 + cR - c^2) \cdot P \cdot H}{6},$$

wobei $R = DV$; $c =$ kleinen Axe; $P = 3{,}141 \ldots$, $H = BD =$ Höhe.

§. 376. Wir sammeln nun die sämmtlichen Formulare in eine Tafel, und fügen ihre Zahlenwerthe, welche in der Fig. 73. Zeichnung und Rechnung übereinstimmig gegeben haben, bei. Diese Figur ist nach der Berechnung §. 351. gezeichnet, 1 Decimalzoll = 100 Theile.

## Formeltafel für die hyperbolischen Linien.

| Linien. | Formeln. | Zahlenwerth. | |
|---|---|---|---|
| AB = großen Axe gegeben | $= a = \frac{c^2}{b} \ldots$ | 100. | Beständige Größen. |
| ECE = kleinen Axe | $= c = \sqrt{(ab)}$ . | 70,71 | |
| Parameter — gegeben . | $= b = \frac{c^2}{a} \ldots$ | 50. | |
| AC = CB = halben großen Axe | $= \frac{1}{2} a = \frac{1}{2} \frac{c^2}{b} \ldots$ | 50. | |
| CE = AE = BE = halben kl. Axe | $= \frac{1}{2} c = \frac{\sqrt{(a \cdot b)}}{2}$ | 35,355 | |
| AF = Bf = Abst. d. Brp. v. Scheitel | $= \frac{\sqrt{(ab + a^2)}}{2} - \frac{1}{2} a$ | 11,237 | |
| CF = Cf = Abst. d. Brp. v. Centro | $= \frac{\sqrt{(ab + a^2)}}{2}$ . | 61,237 | |

| Linien. | Formeln. | Zahlenwerth. | |
|---|---|---|---|
| Oder AF = Bf, in Werthen der Axen | $= \frac{\sqrt{(a^2+c^2)}}{2} - \frac{1}{2}a$ | 11,237 | Beständige Größen. |
| CF = Cf, in Werthen der Axen | $= \frac{\sqrt{(a^2+c^2)}}{2}$ . | 61,237 | |
| HCR und WCK, lich, wie Hyperbel | Asymptoten sind unend- arme. | | |
| JB = EJ = CJ | $= \sqrt{\left(\frac{a^2+c^2}{16}\right)}$ . | 30,618 | |
| $CJ^2$ = Potenz der Hyperbel | $= \frac{a^2+c^2}{16}$ . . . | 937,5 | |
| Winkel RCW = Asymptoten-Winkel | $\frac{1}{2}$ Tang. RCW $= \frac{c \,.\, \text{Sin. tot.}}{a}$ | 35°16′ | |
| | und < RCW | 70°32′ | |
| AP = Absciſſe vom Scheitel | = x, gegeben . . | 25. | |
| PM = Ordinate dazu | $= y = \sqrt{\left(bx + \frac{bx^2}{a}\right)}$ | 39,528 | |
| CP = Absciſſe vom Mittelpunct | = u, gegeben, oder $= \frac{a^2 y^2}{c^2} - \frac{a^2}{4}$ | 75. | |
| PM, Ordinate zur Absciſſe v. Centro | $y = \sqrt{\left(\frac{c^2 u^2}{a^2} - \frac{1}{4}c^2\right)}$ | 39,528 | |
| Fm Radius vector | $= \frac{\sqrt{(a^2+c^2)}u}{a} - \frac{a}{2}$ | 41,855 | |
| fm — — | $= \frac{\sqrt{(a^2+c^2)}u}{a} + \frac{a}{2}$ | 141,855 | |
| PF Abſt. d. Brennpuncte v. d. Ordin. | $= \frac{\sqrt{(a^2+c^2)}}{2} - u$ | 13,763 | |
| Pl verlängerte Ordinate z. Asympt. | $= \frac{cu}{a}$ . . . . | 53,032 | |

Linien.

| Linien. | Formeln. | Zahlenwerth. |
|---|---|---|
| Ml, Verlängerung der Ordinate | $= \frac{cu}{a} - y$, oder $\frac{cu}{a} - \sqrt{\left(\frac{c^2u^2}{a^2} - \frac{c^2}{4}\right)}$ | 13,504 |
| Rechteck vM . Ml | $= \frac{c^2}{4}$ | |
| vM . . . | $= \frac{\frac{1}{4}c^2}{Ml}$ . . . | 92,561 |
| Ci = Abscisse auf der Asymptote | $u' = \frac{a^2 + c^2}{16y'}$, gegeben | 78. |
| Mi = Ordinate auf der Asymptote | $y' = \frac{a^2 + c^2}{16u'}$ . . | 12,019 |
| TM Tangente zum Punct M | $= \sqrt{\left(\left(\frac{u^2 - \frac{1}{4}a^2}{u}\right)^2 + \frac{c^2u^2}{a^2} - \frac{c^2}{4}\right)}$ | 57,433 |
| TP Subtangente | $= \frac{(a + x) . x}{\frac{1}{2}a + x}$ oder $= \frac{u^2 - \frac{1}{4}a^2}{u}$ . | 41,666 |
| MR Normale | $= \sqrt{\left(\left(\frac{c^2u}{a^2}\right)^2 + \frac{c^2u^2}{a^2} - \frac{c^2}{4}\right)}$ . . | 54,486 |
| PR Subnormale | $= \frac{c^2u}{a^2}$ . . . . | 37,5 |
| TA Abst. d. Tang. vom Scheitel | $= \frac{ax}{a + 2x}$ oder $\frac{2au - a^2}{4u}$ | 16,667 |
| CT Abst. d. Tang. v. Mittelpunct | $= \frac{a^2}{2a + 4x}$ oder $\frac{a^2}{4u}$ . | 33,3 |
| ZD Diam., unendl. | | |

| Linien. | Formeln. | Zahlenwerth. |
|---|---|---|
| Mb Zwergdiamet. | $\alpha = 2\sqrt{(u^2 + y^2)}$ . | 169,556 |
| CM halber Zwergdiameter | $\frac{\alpha}{2} = \sqrt{(u^2 + y^2)}$ | 84,778 |
| Gg conjugirter Diameter | $\beta = Vt = 2\,Mt = \frac{2 \,.\, \text{Sin. } i \,.\, Mi}{\text{Sin. tot.}}$ | 149,691 |
| VM = Mt = gC = CG = $\frac{1}{2}\beta$ $= \frac{\text{Sin. } i \,.\, Mi}{\text{Sin. tot.}}$ | jede dieser Linien = Mt, und im △ Mti ist Mi und it (= Ci) so wie < Mit (= Asympt. Wink.) bekannt. | |
| op = pq, Ordinate auf d. Diameter | $= z = \sqrt{\left(\frac{\beta^2 s^2}{\alpha^2} - \frac{\beta^2}{4}\right)}$ | 71,186 |
| Cp Abscisse auf dem Diameter | = s, gegeben, oder $= \sqrt{\left(\frac{a^2 z^2}{\beta^2} - \frac{\alpha^2}{4}\right)}$ | 117, |
| Die Rechtecke QN . NO, Lw . wU, xr . rs, Od . dL wovon immer e. Größe gegeben. | $= \frac{e^2}{4}$ | |
| Der Winkel CVt | $= \frac{\text{Sin. VCt . Ct}}{Vt}$ . | 100° 43′ |
| Wink. CtV = 180° − (< VCt + < CVt) das ist im gegenwärtigen Fall | $= 180^\circ - (100^\circ\, 43' + 70^\circ\, 32'$ | 8° 45′ |
| Hyperbolische Fläche MAPM | $= \frac{2}{3}\sqrt{bx^3} + \sqrt{\frac{bx^2}{2a}}$ | 601,57 |
| Ganze hyperbol. Fläche MAmPM | $= \left(\frac{2}{3}\sqrt{bx^3} + \sqrt{\frac{bx^2}{2a}}\right) . 2$ | 1203,14 □Maaß |

| Linien. | Formeln. | Zahlenwerth. |
|---|---|---|
| Körperlicher Inhalt der Hyperboloide MAmM | $=\frac{(2R^2+cR-c^2).P.H}{6}$ wob. $R=vl$; $c=$ kl. Axe $P=3,14\ldots$; $H=AP=x$. | 327075,8 Kubikmaaß. |

## XI. Von den Linien höherer Ordnungen.

§. 377. Unter diesem Namen versteht man solche Linien, in deren Gleichung eine höhere Potenz von x und y, als die zweite vorkommt. Wir wollen einige derselben betrachten und ihre Zeichnung und Berechnung kennen lernen.

§. 378. Die Cissoide Fig. 74. entsteht also:

In einem Kreise nehme man 2 gleich weit von A und B entfernte Puncte D und F, und ziehe die Linien PDh und GHF senkrecht auf den Diameter AB. Die Chorden DA und AFh durchschneiden die Perpendikel in H und h. Durch die Puncte h, H und L (auf dem Endpunct des senkrechten Diameters CL) geht eine krumme Linie AHLh, welche der eine Arm der Cissoide ist. Der andere Halbkreis enthält den andern Arm AMIN.

Der Diameter AB ist die Abscissenlinie $=a$; AG eine Abscisse $=x$, und GH die dazugehörige Ordinate $=y$. Zur Abscisse AP gehört die Ordinate Ph; zu AC gehört CL. Nimmt man nun mehrere von A und B gleich weit abstehende Puncte im Kreise, so findet man auch mehrere Puncte, die in der krummen Linie liegen, und die endlich zusammen gezogen, die krumme Linie darstellen.

Die Ordinate y findet man durch folgendes Formular: $y=\sqrt{\left(\frac{x^3}{a-x}\right)}$. Die Fig. 74. ist auf diese Weise construirt. $AC=50$, also $AB=a=100$; die Abscis-