Der Rathgeber bei mathematischen Beschäftigungen

Stöpel, August

Stendal, 1819

XI. Von den Linien höherer Ordnungen.

Linien.	Formeln.	Zahlenwerth.
Körperlicher Inhalt der Hyperboloide MAmM	$= \frac{(2R^2+cR-c^2).P.H}{6}$ wob. $R = vl$; $c = $ kl. Axe $P = 3,14\ldots$; $H = AP = x$.	327075,8 Kubikmaaß.

XI. Von den Linien höherer Ordnungen.

§. 377. Unter diesem Namen versteht man solche Linien, in deren Gleichung eine höhere Potenz von x und y, als die zweite vorkommt. Wir wollen einige derselben betrachten und ihre Zeichnung und Berechnung kennen lernen.

§. 378. Die Cissoide Fig. 74. entsteht also:

In einem Kreise nehme man 2 gleich weit von A und B entfernte Puncte D und F, und ziehe die Linien PDh und GHF senkrecht auf den Diameter AB. Die Chorden DA und AFh durchschneiden die Perpendikel in H und h. Durch die Puncte h, H und L (auf dem Endpunct des senkrechten Diameters CL) geht eine krumme Linie AHLh, welche der eine Arm der Cissoide ist. Der andere Halbkreis enthält den andern Arm AMIN.

Der Diameter AB ist die Abscissenlinie $= a$; AG eine Abscisse $= x$, und GH die dazugehörige Ordinate $= y$. Zur Abscisse AP gehört die Ordinate Ph; zu AC gehört CL. Nimmt man nun mehrere von A und B gleich weit abstehende Puncte im Kreise, so findet man auch mehrere Puncte, die in der krummen Linie liegen, und die endlich zusammen gezogen, die krumme Linie darstellen.

Die Ordinate y findet man durch folgendes Formular: $y = \sqrt{\left(\frac{x^3}{a-x}\right)}$. Die Fig. 74. ist auf diese Weise construirt. $AC = 50$, also $AB = a = 100$; die Abscisscissen fangen in A an, und sind Am = 10; Av = 20, AG = 30 ꝛc. = x, wozu die Ordinaten mn, vg, GH ꝛc. = y berechnet, und rechtwinklicht auf ihre Abscissen getragen worden.

Wenn Am = x = 10,	so ist	mn =	y =	3,33
Av = x = 20	—	vg =	y =	10
30	—	=	=	19,64
40	—	=	=	32,66
50	—	=	=	50
60	—	=	=	73,5
70	—	=	=	106,9
80	—	=	=	160
90	—	=	=	270
100	—	BR	=	unendlich.

Jenseits der Linie Rr ist also nichts von der Cissoide, deren Erfinder Diokles ist. Alle Cissoiden sind einander ähnlich. Wenn man daher die Ordinaten für eine solche Figur berechnet hat, so gelten sie für alle besondere Fälle, und man hat nur nöthig, den Diameter a in 100 Theile zu theilen, und die Ordinaten in solchem Maaße rechtwinklicht aufgetragen.

§. 379. Die Conchoide oder Muschellinie entsteht so:

Auf der geraden Linie AB Fig. 75. errichte das Perpendikel CD, nimm C willkührlich, und mache EF = ED. Aus C, dem Pol dieser Linie, ziehe willkührliche gerade Linien, Cc, Cf, Cg, CM, welche alle die Linie AB durchschneiden. Nimm die Weite ED = EF, und trage sie auf jede der aus C gezogenen Linien, so, daß de = dc, hm = hf, on = og, pB = BM, jede = ED = EF wird. Die zusammengezogenen Endpuncte D, c, f, g, M geben die obere Hälfte, und die Puncte F, e, m, n, p die untere Hälfte der Muschellinie. Durch die Linie CD wird sie in zwei gleiche Hälften getheilt.

Aus der Construction dieser Linie ersieht man, daß die Arme DG und FJ die Linie AB nur dann erreichen werden, wenn die aus C gezogenen Linien mit den Theilen pM ganz in AB fallen, welches eigentlich nie geschehen kann. AB heißt daher die Asymptote, der sich die Arme ewig nähern, ohne sie je zu erreichen.

§. 380. Zur Berechnung gehört, daß CE = b, und ED = EF = a bekannt sind: EP ist dann eine Abscisse = x, und PM eine dazu gehörige Ordinate = y. In der auf Null gebrachten Gleichung erscheint x in der 4ten Potenz

$$x^4 + 2bx^3 + (y^2 + b^2 - a^2)\,x^2 - 2a^2bx - a^2b^2 = 0.$$

Um aber die Ordinaten, z. B. PM = y zu finden, ist folgendes Formular sehr bequem:

$$y = \frac{b + x \,.\, \sqrt{(a^2 - x^2)}}{x} = PM$$

und für die y in der untern Hälfte der Conchoide, die x von E an, ist

$$y = \frac{b - x \,.\, \sqrt{(a^2 - x^2)}}{x} = HM$$

Ist x = 0, so wird y unendlich und fällt auf AB; ist x = a, so wird y = 0; für negative x bekommt man positive Werthe von y, woraus sich ergiebt, daß unterhalb AB noch eine Muschellinie JFJ statt findet.

In Fig. 75. ist CE = b = 75; FE oder ED = a = 50, und die x von E aus nach D positiv, und von E nach F zu negativ genommen.

Wenn + x = 10,	so ist y =	416,41
15	— — =	286,17
20	— — =	217,67
25	— — =	173,20
30	— — =	140.
33	— — =	122,93
36	— — =	106,98
39	— — =	91,46
42	— — =	75,57
45	— — =	58,12
47	— — =	44,28
48	— — =	35,87
49	— — =	25,18
50	— — =	0.

Trägt man diese Werthe von y und die zugehörigen x auf ED und zieht die Endpuncte zusammen, so erhält man die

die Muschellinie. Nikomedes, welcher 150 Jahre vor Christo lebte, erfand diese Linie, um mit Hülfe derselben die berühmte Aufgabe, den Würfel zu verdoppeln, zu lösen.

§. 381. Die Schnecken- oder Spirallinie des Archimedes entsteht so:

Der Punct C im Kreise Fig. 76. bewege sich gleichförmig auf dem Halbmesser CA nach der Peripherie, während CA selbst sich gleichförmig um den Mittelpunct C bewegt, so daß der bewegte Punct z. B. in M ist, wenn der Halbmesser in der Lage CP liegt. Dann gilt

$$CM : CA = \angle ACP : 360^\circ \; (= p).$$

Nennt man nun $CM = y$, und $AP = x$; $CA = r$; die Peripherie $= p$, so ist obige Proportion

$$y : r = x : p; \text{ und } y = \frac{r \cdot x}{p},$$

welches die Gleichung für die Spirallinie ist.

Die Abscissen werden demnach auf der Peripherie und die Ordinaten vom Mittelpunct an genommen. Wenn $x = 0$, so ist $y = 0$ und M noch in C; so lange x kleiner, als die Peripherie p, so lange bleibt M innerhalb des Kreises und beschreibt die Spirallinie MNA; ist $x = p$, so ist $y = r$ und M in A, und man sagt: der beschreibende Punct M hat den ersten Gang gemacht; wird x größer, als p, so wird y größer, als r. und M beschreibt die krumme Linie außerhalb des Kreises. Ist nun CA zum zweitenmale in der Lage CP, so ist der Winkel $= p + x$, und

$$p : p + x = r : CM'; \text{ und } CM' = \frac{(p+x) \cdot r}{p}.$$

§. 382. Alle Schneckenlinien dieser Art sind einander ähnlich, und daher nach folgender Berechnung allemal zu zeichnen. Der Radius $r = CA = 50$; die Peripherie $= 360^\circ$ und die x von 10 zu 10° genommen, wozu die y oder der jedesmalige Abstand CM berechnet ist.

Wenn

Wenn x = 10°,	so ist y =	1,38
20	— — =	2,77
30	— — =	4,16
40	— — =	5,55
50	— — =	6,94
60	— — =	8,33
70	— — =	9,72
80	— — =	11,11
90	— — =	12,50
100	— — =	13,88
110	— — =	15,28
120	— — =	16,67
130	— — =	18,05
140	— — =	19,44
150	— — =	20,83
160	— — =	22,22
170	— — =	23,61
180	— — =	25
190	— — =	26,39
200	— — =	27,78
210	— — =	29,17
220	— — =	30,55
230	— — =	31,95
240	— — =	33,33
250	— — =	34,72
260	— — =	36,11
270	— — =	37,78
280	— — =	38,89
290	— — =	40,28
300	— — =	41,67
310	— — =	43,05
320	— — =	44,44
330	— — =	45,83
340	— — =	47,22
350	— — =	48,61
360	— — =	50
370	— — =	51,39
380	— — =	52,77
390	— — =	54,17
400	— — =	55,55.

Die Fläche, welche die Spirallinie einschließt, findet man durch $\frac{rx^3}{6p^2}$ = einem unbestimmten Raum derselben, je nachdem x einen größern oder kleinern Bogen bedeutet. Wenn x = p wird, so ist dieser Raum $\frac{rp}{6}$ oder = $\frac{1}{3}$ von der Kreisfläche, darin die Spirale beschrieben werden.

§. 383. Mechanisch erhält man eine Art Spirallinie, indem man um eine runde Scheibe einen Faden, dessen Länge dem Umfange der Scheibe gleicht, legt, den einen Endpunct an der Scheibe bevestigt, und den straff angezogenen Faden um die Scheibe bewegt, oder abwikkelt. Der zweite Endpunct des Fadens beschreibt dann die Spirallinie.

Der Umfang derjenigen Scheibe, von der sich oben berechnete Schneckenlinie mit einem Faden beschreiben läßt, muß gleich r seyn, folglich ist $\frac{50}{3,14}$ = 15,9 der Diameter, und 7,96 der Radius der erwähnten Scheibe.

§. 384. Cykloide oder Radlinie. Sie entsteht, wenn sich ein Punct A Fig. 77. in einem beweglichen um C beschriebenen Kreise durch's Fortrollen desselben auf der Ebene AM, durch N, F, P ꝛc. bewegt. Die krumme Linie ANFPZ heißt deshalb Radlinie, weil ein Radnagel A im Rade C beim Fortrollen dieselbe in der Luft beschreibt. Die Linie AM heißt Grundlinie, der Kreis um C, der beschreibende Kreis; der Punct A der beschreibende Punct.

Der beschreibende Punct A berührt die Ebene AB zum zweiten Male, wenn alle Theile der Peripherie sie berührt haben, folglich ist die Linie AZ der ganzen Peripherie, und AD, wenn der Punct A sich in F befindet, der halben Peripherie gleich.

Der zurückgelegte Weg des Rades heiße u, die Peripherie = 2rp, so verhält sich

$$u : 2rp = \angle ACG (= NCE) : 360$$

Steht nun z. B. das Rad in E, so ist der Punct A in N, und G in E, folglich u = AG = AE.

§. 385. Die Zeichnung einer Radlinie geschieht am leichtesten also: Mache AD der halben Peripherie, DF dem Durchmesser des beschreibenden Kreises gleich. In dem um DF beschriebenen Kreis nehme man den Punct R willkührlich, und ziehe durch R die NRLSP mit AM parallel und also auf DF senkrecht. Die Länge des Bogens FR = FS trage auf die Parallele von R nach N, und von S nach P, so sind N und P zwei Puncte in der Radlinie. Viele auf diese Weise gefundene Puncte zusammengezogen stellen endlich die verlangte Radlinie dar. Bei dieser Verfahrungsweise ist aber immer die Länge des Bogens RF zu berechnen nöthig.

Legt man an AM ein Lineal und rollt an demselben eine runde Scheibe, deren Radius AC, so läßt sich der bezeichnete Punct A genau verfolgen, und auf dem Papiere nachzeichnen.

Genauer und sicherer, obgleich mühsamer, ist die algebraische Construction dieser Linie.

Nennt man den Bogen $FR = x$, und $RN = y$, so ist $y = x$, welches die Gleichung der Cykloide ist.

Will man aber die y von der Linie DF an rechnen, so ist $y = x + \sqrt{(r^2 - z^2)}$, wobei $z = QL =$ dem Abstand der Ordinate vom Centro. Die x oder Bogenstücke müssen in Theilen des Halbmessers genommen werden. Nun ist QL = Cosinus, und SL = Sin. < FQS, dessen Bogen FS ist. Nimmt man QL willkührlich, so findet man dazu in den trigonometrischen Tafeln LS und FS, und FS = SP, also $FS + LS = PL = y =$ Ordinate.

§. 386. Daraus folgt:

Man theile QF in 100, und also DF, als Abscissenlinie in 200 Theile, so werden die Angaben der trigonometrischen Tafeln keiner weitern Rechnung bedürfen. Nimmt man z. B. QL = 30 = Cosin. < FQS, so findet man LS = 95,39 und Bogen FS = 126,53, ihre Summe = 221,92 = y = PL. Folgende Berechnung ist auf diese Weise gemacht. Die Abscissen fangen in F an, ihre Ordinaten stehen rechtwinklicht zu beiden Seiten.

Ist

Ist FL =	1,	so ist	LP =	28,23
	5	—	— =	62,91
	10	—	— =	88,66
	15	—	— =	108,17
	20	—	— =	124,32
	30	—	— =	150,99
	40	—	— =	172,66
	50	—	— =	191,32
	60	—	— =	207,54
	70	—	— =	221,93
	80	—	— =	234,88
	90	—	— =	246,54
	100	—	— =	257,08
	110	—	— =	266,62
	120	—	— =	275,13
	130	—	— =	283,02
	140	—	— =	289,92
	150	—	— =	296,04
	160	—	— =	301,45
	170	—	— =	305,98
	180	—	— =	309,75
	185	—	— =	311,33
	190	—	— =	312,64
	195	—	— =	313,65
	199	—	— =	314,11
	200	—	— =	314,16

Weil alle Cykloiden einander ähnlich sind, so ist vorstehende Berechnung für alle Fälle brauchbar. — Man empfiehlt die Cykloide zu Brücken- und Gewölbbogen.

§. 387. Die logarithmische oder logistische Linie acfghiklmb Fig. 78. entsteht, wenn man auf der geraden Linie AB in gleichen Abständen senkrechte Ordinaten errichtet, welche eine geometrische Progression bilden.

Dies zu bewerkstelligen, nehme man Bb willkührlich, multiplicire sie mit einer Zahl, größer, als 1, so bekommt man Mm; multiplicirt man Mm wieder mit jener Zahl, so erhält man Li. Heißt nun der Multiplicator oder Exponent = n; die Ordinate Bb = y, so ist Mn = ny.

Es

Es sey z. B. $n = \frac{4}{3}$ und Bb oder $y = 16,85$; so ist $ny = \frac{4}{3} . 16,85 = 22,5 = Mm$; und setzt man die Rechnung fort, so bekommt man folgende Ordinaten:

Bb	= 16,85	Gg	= 94,81
Mm	= 22,5	Ff	= 126,42
Ll	= 30	Cc	= 168,56
Kk	= 40	Aa	= 224,75
Ii	= 53,33		u. s. w.
Hh	= 71,11		

Anmerk. Fängt man von Aa an, die Ordinaten zu berechnen, so muß der Exponent kleiner, als 1 (hier $\frac{3}{4}$) seyn.

Die Krümmung dieser Linie hängt von dem Unterschied der Ordinaten, und ihrem Abstande von einander ab. Weil die Abscissen Bm, BL, BK rc. in arithmetischer, und die Ordinaten in geometrischer Progression zunehmen, so stellt diese Linie eigentlich ein logarithmisches System dar, wovon ihr Name entstanden ist.

§. 388. Eine krumme Linie von angenehmer Biegung ist die Schlangenlinie oder, wie ich sie lieber nennen mögte, die Glockenlinie EASBF Fig. 76. b., deren Entstehung folgende ist.

In einem Parallelogramm ACDB soll das Rechteck AP . PB gleich seyn PM . AC. Nennt man $AB = a$; $AC = b$, weil es beständige Größen sind, und $PM = y$; $PB = x$, so ist AB die Abscissenlinie, und

$$AP . PB = PM . AC \text{ einerlei mit } (a - x) . x = by$$

$$ax - x^2 = by$$

$$\text{und } \frac{ax - x^2}{b} = y$$

welches die Gleichung für die Ordinaten dieser Linie ist. Die Ordinate wird am größten seyn, wenn $x = \frac{1}{2} a$; wird x größer, als $\frac{1}{2} a$, so wird das Parallelogramm $(a - x) . x$ kleiner, folglich, weil b beständig, y anfangen, abzunehmen. Man braucht daher nur die Ordinaten zu den Abscissen von A bis Z, oder B bis Z zu berechnen, und wenn $Ap = BP$, so wird auch $pm = PM$ seyn.

Setzt man die Abscissenpuncte in A und B, so können die Abscissen sowol positiv, als negativ, oder von A nach Z, und von A nach q zu, genommen werden. Ist Aq = Ap, und PB = Br, so wird auch qn = pm, und rz = PM.

Wenn $b = \frac{1}{2}a$, so wird die größte Ordinate = b, und s fällt in v; je näher der Werth von b dem von a kommt, desto flacher wird der Bogen, und die krumme Linie windet sich um HJ, wie eine Schlange; je mehr hingegen b von a unterschieden ist, desto höher steigt der Bogen, oder desto größer wird die mittelste Ordinate ZS. Überhaupt gestattet diese Linie die größte Mannichfaltigkeit, und ahmt mancherlei Gestalten der Körper nach.

Mittelst der Integralrechnung findet man die Fläche BPM oder für jedes beliebige Stück durch folgendes Formular $\frac{ax^2}{2b} - \frac{x^3}{3b}$, wobei die x von A oder B nach Z hin genommen werden müssen. Ist x = a, so giebt das Formular die Fläche ABSA. Eben so viel betragen die Flächen AHE + JBF; werden nun diese vom Parallelogramm HJFE abgezogen, so bleibt die Fläche ABFE = AHGS + SgJB, und daher ist die ganze Fläche der Glockenlinie EASBF dem Parallelogramm GgHJ gleich, dessen Grundlinie HJ = 2a, dessen Höhe = der größten Ordinate. Diese aber steht da, wo $x = \frac{1}{2}a$, folglich wird anstatt $\frac{ax - x^2}{b}$ stehen können $\frac{a \cdot a}{2b} - \frac{a^2}{4b}$ $= \frac{\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}a^2}{b} = \frac{\frac{1}{4}a^2}{b} = \frac{a^2}{4b} = ZS$. Daher ist die Fläche des Parallelogramms HG . HJ $= \frac{a^2}{4b} \cdot 2a = \frac{2a^3}{4b}$ $= \frac{a^3}{2b}$ = der ganzen Fläche der Glockenlinie EASBF.

Die Fig. 76. b. ist nach folgender Berechnung gezeichnet: AB = a = 100; AC = b = 30; die x sind von den Abscissenpuncten A und B vor- und rückwärts, und die Ordinaten oder die y = PM = rz = pm = qn gehörigermaßen senkrecht auf und unter AB, AH und BJ getragen.

Wenn

Wenn x oder Ap = 5, so ist y = 15,84

10	— — —	30,
15	— — —	42,5
20	— — —	53,33
25	— — —	62,5
30	— — —	70,
35	— — —	75,83
40	— — —	80,
45	— — —	82,5
50	— — —	83,33.

Die Fläche der ganzen Glockenlinie $= \frac{a^3}{2b} = \frac{1000000}{60}$

$= 16666\frac{2}{3}$ Quadratmaaß.

§. 389. Die Blattlinie Fig. 78. b. entsteht, wenn man folgende Proportion construirt:

$$AB^2 : PA^2 = PB : PM$$

Nennt man $AB = a$; $AP = x$; $PB = a - x$; und $PM = y$, so ist $a^2 : x^2 = a - x : y$

und $a^2y = x^2 . (a - x)$

$$y = \frac{ax^2 - x^3}{a^2}.$$

Ist in A der Anfang der Absciſſen, und werden die y zu beiden Seiten der Axe AB rechtwinklicht aufgetragen, so entsteht die krumme Linie AMBmA, die ich Blattlinie genannt habe, weil ihre Gestalt mit einem Blatt die meiste Ähnlichkeit hat.

Anmerk.

Differenziirt man die Gleichung $a^2y = ax^2 - x^3$

$$a^2dy = 2axdx - 3x^2dx$$

und setzt das Differenzial $dy =$ Null $= dy = \frac{2axdx - 3x^2dx}{a^2}$

so ist $0 = 2axdx - 3x^2dx$:xdx

$$0 = 2a - 3x$$

$$3x = 2a$$

und die größte Ordinate ist da, wo $x = \frac{2}{3}a$.

Die

Die Fläche, welche die Blattlinie einschließt, giebt das Formular $\frac{x^3}{3a} - \frac{x^4}{4a^2}$, wodurch man ein Stück APM findet. Setzt man $x = a$, so wird das Formular $\frac{a^3}{3a} - \frac{a^4}{4a^2} = \frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{4}$ = der Fläche ABMA; und doppelt $= \frac{2}{3}a^2 - \frac{2}{4}a^2 = \frac{a^2}{6}$ = der ganzen Fläche.

Die Fig. 78. b. ist nach folgenden Angaben gezeichnet: $AB = a = 100$, und $AP = x = 5, 10, 15$ rc. genommen, die so gefundenen Ordinaten über und unter AB rechtwinklicht aufgetragen, und die Endpuncte zusammengezogen.

Ist x = 5,	so ist y = 0,23	größte Ordin., wenn x = 66,6,	ist y = 14,81
10	— — 0,9	70	— — 14,7
15	— — 1,91	75	— — 14,06
20	— — 3,2	80	— — 12,8
25	— — 4,68	85	— — 10,84
30	— — 6,3	90	— — 8,1
35	— — 7,96	93	— — 6,05
40	— — 9,6	95	— — 4,51
45	— — 11,14	97	— — 2,82
50	— — 12,5	98	— — 1,92
55	— — 13,61	99	— — 0,89
60	— — 14,4	100	— — 0.
65	— — 14,78		

Die ganze Fläche dieser Linie $= \frac{a^2}{6} = \frac{10000}{6} = 1666\frac{2}{3}$ Quadratmaaß.

§. 390. Die Quadratrix des Dinostratus.

Diese krumme Linie entsteht also:

Der Halbmesser CB im Quadranten BAC Fig. 79. bewege sich um C und komme nach und nach in die Lage CE, CJ, CK bis in CA; mit ihm parallel bewege sich eine andere Linie längs CA hinauf, die nach und nach in die Lage NP, kp, mn komme. Der beständige Durchschnitt der beiden sich bewegenden Linien erzeugt die krumme Linie DFGHA, welche Quadratrix heißt.

Die geometrische Construction besteht darin, daß man CA in beliebige gleiche Theile theilt, und durch die Theilpuncte Parallelen mit CB zieht; darauf den Bogen AB in eben so viele Theile theilt, als CA hat, und nach den Theilungspuncten die Halbmesser CE, CJ, CK zieht. Die erhaltenen Durchschnittspuncte F, G, H liegen in der Quadratrix. Nennt man CA die Abscissenlinie, so sind CN, Ck, Cm ꝛc. Abscissen, und NF, kG, mH die dazu gehörigen Ordinaten. Weil nun z. B. in △ CmH drei Stücke, nämlich Cm = x, Winkel mCH = Bogen AK, und der rechte Winkel bekannt sind, so findet man mH oder y durch

$$\text{Sin. tot.} : Cm = \text{Tang. } HCm : mH$$

d. i. $$\text{Sin. tot.} : x = \text{Tang. } C : y$$

und $$y = \frac{x \cdot \text{Tang. } C}{\text{Sin. tot.}}$$

Durch dies leichte Formular sind für einen angenommenen Radius CA = 100 und Bogen AB in 100 Theilen, folgende Ordinaten berechnet, wornach jede Quadratrix gezeichnet werden kann.

Wenn CN = x 1,111, so ist y oder NF = 63,65 u. s. w.

x	y	x	y
x = 1,111,	y = 63,65	x = 70,	y = 35,67
5	— 63,53	80	— 25,99
10	— 63,14	90	— 14,25
20	— 61,55	95	— 7,47
30	— 58,88	100	— 0
40	— 55,06		
50	— 50.		
60	— 43,59		

§. 391. Die Spirallinie, Radlinie und Quadratrix heißen auch zuweilen **transcendente Linien**, im Gegentheil von den **algebraischen**, deren Ordinaten durch algebraische Formeln gefunden werden. — Es sind unzählig viele krumme Linien möglich, und es ist eine angenehme Beschäftigung, sich sowol im Construiren und Berechnen, als auch im Erfinden derselben zu üben. Daher wird man die ausführlichere Betrachtung der krummen Linien, welche als Verzierungen in der Baukunst, als mechanische Krümmungen bei bewegten Körpern häufig vorkommen, gern verzeihen.

Wer sich in der Berechnung und Zeichnung solcher krummen Linien üben will, versuche z. B. nach der Formel

$$a : x = a^3 - x^3 : y^3, \text{ worin } y = \sqrt[3]{\left(\frac{a^3 x - x^4}{a}\right)}$$

für eine beständige Größe $a = 100$, die x willkührlich genommen, die dazu gehörigen Ordinaten zu berechnen, und auf a, worauf die Abscissen genommen, rechtwinklicht zu setzen. Er wird eine krumme Linie, fast dem steigenden Bogen Fig. 137. ähnlich, bekommen, worin die größte Ordinate hk, da auf der $bc = a$ steht, wo bh, oder $x = \frac{a}{\sqrt[3]{4}} = 63$ ist. Werden die Ordinaten zu beiden Seiten der Linie a (in der Figur bc) aufgetragen, und ihre Endpuncte zusammengezogen, so bekommt man eine geschlossene krumme Linie, die einer gedrückten Ellipse gleicht.

Zweite