Der Rathgeber bei mathematischen Beschäftigungen

Stöpel, August

Stendal, 1819

III. Flächenmessung.

urn:nbn:de:hbz:466:1-63556

kel ad die bd in d. Ein Perpendikel aus d auf ab, hier dp, ist die Tiefe des Thales.

Aufl. II. Trigonometrisch. Im △ abc ist Sin. z : bc = Sin. x : ac; oder Sin. z : bc = Sin. y : ab.

Im △ abd gilt Sin. adb : ab = Sin. dab : bd, und < o + z = < dab; und < o + z + x vom 180° abgezogen, giebt < adb.

Die Tiefe pd giebt die Porportion:

Sin. tot. : bd = Sin. x : pd.

III. Flächenmessung.

§. 486. Die Flächen sind entweder von geraden oder krummen Linien, oder von beiden zugleich eingeschlossen. In allen Fällen suche man sie in regelmäßige geometrische Figuren zu zerlegen, welches durch Hülfslinien, Diagonalen ꝛc. geschieht, und bei einem nur einigermaßen geübten Scharfblick nicht schwer wird. Zu den regelmäßigen Figuren gehören Parallelogramme, Triangel, gleichseitige Vielecke, Trapezia, Kreise, Parabeln, Ellipsen und andere krumme Linien. Wir beschäftigen uns nun damit, die Flächen der regelmäßigen Figuren zu berechnen, und Formeln dazu zu geben. Vergleiche §. 190., wo vom Flächenmaaß das Nöthigste gesagt ist.

§. 487. Den Flächenraum eines Quadrats zu finden.

Aufl. Multiplicire eine Seite (= l) mit sich selbst. Der Flächenraum (= F) ist = l^2 oder l . l.

Z. B. Es sey eine Seite 12,5 Fuß, so ist F = 12,5 . 12,5 = 156,25 Quadratfuß; oder (weil 100 Quadratfuß = 1 Quadratruthe) = 1 Quadratruthe, 56 Quadratfuß, 25 Quadratzoll. Der Kürze wegen werden wir schreiben □ Rth. □ F. □ Z.

§. 488. Die Fläche eines Rechtecks zu finden.

Aufl. Multiplicire die Länge mit der Breite; daher ist $F = l \,.\, b$.

Z. B. Es sey ein Garten 15 Ruthen lang und 4 Ruthen breit, so ist sein Flächenraum $= 15 \,.\, 4 = 60$ □ Ruthen.

§. 489. Die Fläche eines jeden Parallelogramms zu finden.

Aufl. Nimm eine der 4 Seiten zur Grundlinie ($= g$), errichte auf dieser ein Perpendikel bis zur gegenüberstehenden Seite, welches die Höhe der Figur ($= h$) angiebt, und multiplicire Grundlinie und Höhe mit einander. Formel $F = g \,.\, h$.

Diese Regel gilt für das Quadrat, in welchem $h = g$ ist, für das Rechteck, in dem die Höhe oder Breite das Perpendikel ist, für den Rhombus und Rhomboides Fig. 19 und 20, in denen der senkrechte Abstand der Parallelen = dem Perpendikel.

§. 490. Den Flächenraum eines Trapeziums zu finden. Fig. 17.

Aufl. Addire die beiden parallelen Seiten ab und cd und halbire die Summe; multiplicire das, was kommt, mit dem senkrechten Abstande. Das ist $\left(\frac{ab + cd}{2}\right) . ac$; und wenn wir allgemein die Parallelen G und g, ihren Abstand h nennen, so kommt die Formel $F = \frac{(G + g) \,.\, h}{2}$.

Es sey $ab = G = 12'$; $cd = g = 8'$, und $ac = h = 6'$, so ist die Fläche $= \frac{(12 + 8) \,.\, 6}{2}$ $= \frac{20 \,.\, 6}{2} = \frac{120}{2} = 60$ □ Fuß.

§. 491. Die Fläche eines jeden Dreiecks zu finden. Fig. 6, 7 und 8.

Aufl. I. Nimm eine Seite zur Grundlinie, fälle aus der gegenüberstehenden Winkelspitze ein Perpendikel auf die, nöthigenfalls verlängerte, Grundlinie, und mul-

multiplicire Grundlinie und Perpendikel, oder Grundlinie und Höhe mit einander; endlich dividire das Product durch 2. Formel $F = \frac{g \cdot h}{2}$.

Es sey Fig. 8. die $ac = g = 12'$; die $bp = h = 6',2$, so ist die Fläche $= \frac{12 \cdot 6,2}{2} = \frac{74,4}{2} = 37,2$ □ Fuß.

Im rechtwinklichten Dreieck ist die eine Cathete die Grundlinie und die andere die Höhe.

Aufl. II. Wenn alle drei Seiten des Dreiecks bekannt sind, und a, b, c heißen, so giebt folgendes Formular den Flächenraum

$$F = \frac{\sqrt{(a+b+c).(a+c-b).(a+b-c).(b+c-a)}}{4}$$

Es sey Seite $a = 6$, so sind die 4 Factoren $6+5+4 = 15$
$b = 5$ $\quad 6+4-5 = 5$
$c = 4$ $\quad 6+5-4 = 7$
$\quad 5+4-6 = 3$

und $15 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 3 = 1575$; $\sqrt{1575} = 39,68$; und $\frac{39,68}{4} = 9,92$ □ Maaß.

Sind die Seiten groß, so verrichtet man die Multiplication und Ausziehung der Wurzel sehr bequem mit Logarithmen.

§. 492. Die Fläche jeder geradlinichten Figur zu finden.

Aufl. Zerlege die Figur durch Diagonalen in Dreiecke, berechne jedes besonders, und addire alle Dreiecke zusammen, so ist die Summe = dem Flächenraum.

§. 493. Den Flächenraum einer in einem Kreise beschriebenen gleichseitigen Figur zu finden.

Aufl. Im Kreise lassen sich gleichseitige Drei- Vier- Fünf- Sechs- und andere Vielecke zeichnen, deren Flächen dann vom Radius des Kreises, worin sie beschrieben sind, abhängen.

Es sey das Vieleck, welches es wolle, so läßt es sich durch Diagonalen in Dreiecke zerlegen, und berechnen. Allein durch algebraische und trigonometrische Kunstgriffe kann man aus einer Seite und der Anzahl derselben den Flächenraum viel genauer und ohne Zeichnung finden. Sucht man aus Fig. 188., worin DF eine Seite eines Vielecks $= m$, $GD = \frac{1}{2} m$; $< x = \frac{1}{2}$ Centriwinkel; $< y = \frac{1}{2}$ Polygonwinkel, Werthe für GD und CG, aus deren Multiplication der Flächenraum des $\triangle$ DCF hervorgeht, so findet man Sin. tot. : $\frac{1}{2} m =$ Tang. $< y$: CG; und

$$CG = \frac{\frac{1}{2} m \,.\, \text{Tang.} < y}{\text{Sin. tot.}}$$, und multiplicirt man dies

mit $DG = \frac{1}{2} m$, so kommt $$\frac{\frac{1}{4} m^2 \,.\, \text{Tang.} < y}{\text{Sin. tot.}}$$

$$= \frac{m^2 \,.\, \text{Tang.} \tfrac{1}{2}\,\text{Polygonwinkel}}{4\ \text{Sin. tot.}};$$ und also ist Fläche

eines Vielecks von n Seiten $$= \frac{m^2 . n . \text{Tang.} \frac{1}{2} p}{4\ \text{Sin. tot.}},$$

worin $m =$ einer Seite, $n =$ Anzahl der Seiten, und $p =$ Polygonwinkel. Den Polygonwinkel p findet man, indem man mit der Anzahl der Seiten in 360° dividirt, und den Quotienten von 180° abzieht. Also ist $p = 180° - \frac{360}{n}$.

Daraus entsteht folgende Tafel für die Flächen der Vielecke, deren Seiten bekannt sind.

Fläche des Dreiecks $$= \frac{m^2 \,.\, 3 \,.\, \text{Tang. } 30°}{4 \,.\, \text{Sin. totus}},$$

des Vierecks $$= \frac{m^2 . 4 . \text{Tang. } 45°}{4 . \text{Sin. tot.}} = m^2,$$

denn Tang. 45° = Sin. tot.

des Fünfecks $$= \frac{m^2 \,.\, 5 \,.\, \text{Tang. } 54°}{4 \,.\, \text{Sin. tot.}},$$

des Sechsecks $$= \frac{m^2 \,.\, 6 \,.\, \text{Tang. } 60}{4 \,.\, \text{Sin. tot.}},$$

Fläche

Fläche des Siebenecks $= \frac{m^2 \cdot 7 \cdot \text{Tang. } 64^\circ 17'}{4 \cdot \text{Sin. tot.}}$,

des Achtecks $= \frac{m^2 \cdot 8 \cdot \text{Tang. } 67^\circ 30'}{4 \cdot \text{Sin. tot.}}$,

des Neunecks $= \frac{m^2 \cdot 9 \cdot \text{Tang. } 70^\circ}{4 \cdot \text{Sin. tot.}}$,

des Zehnecks $= \frac{m^2 \cdot 10 \cdot \text{Tang. } 72^\circ}{4 \cdot \text{Sin. tot.}}$ u. s. w.

Z. B. Es sey die Seite eines Fünfecks $= 4,312$ Fuß $= m$, so ist $n = 5$, und das Formular $= \frac{4,312^2 \cdot 5 \cdot \text{Tang. } 54^\circ}{4 \cdot \text{Sin. tot.}}$.

$$
\begin{array}{rl}
\text{Nun ist log. Tang. } 54^\circ = & 10,1387390 \\
\text{log. } 5 = & 0,6989700 \\
\text{log. } 4,312^2 = & 1,2695184 \\
\hline
& 12,1072274 \\
\text{log. } 4 = & 0,6020600 \\
\text{log. Sin. tot.} = & 10, \\
\hline
\text{log. der Fläche} = & 1,5051674 = 32 \,\square\, \text{Fuß.}
\end{array}
$$

(Der log. 4 Sin. tot. ist beständig $= 10,6020600$).

§. 494. Will oder kann man nicht mit Logarithmen rechnen, so dient folgende bequeme Tafel, in welcher die Zahl mit dem Decimalbruch nichts anders ist, als die Tangente des halben Polygonwinkels, und m die gegebene Seite.

Fläche des Dreiecks $= \frac{m^2 \cdot 3 \cdot 0,5773}{4}$,

des Vierecks $= m^2$,

des Fünfecks $= \frac{m^2 \cdot 5 \cdot 1,376}{4}$,

des Sechsecks $= \frac{m^2 \cdot 6 \cdot 1,732}{4}$,

des Siebenecks $= \frac{m^2 \cdot 7 \cdot 2,0763}{4}$,

des Achtecks $= \frac{m^2 \cdot 8 \cdot 2,4142}{4}$,

Fläche

Fläche des Neunecks $= \frac{m^2 \cdot 9 \cdot 2,7475}{4}$,

des Zehnecks $= \frac{m^2 \cdot 10 \cdot 3,0777}{4}$,

des Zwölfecks $= \frac{m^2 \cdot 12 \cdot 3,732}{4}$,

des Funfzehnecks $= \frac{m^2 \cdot 15 \cdot 4,7046}{4}$,

des Sechzehnecks $= \frac{m^2 \cdot 16 \cdot 5,0273}{4}$.

Z. B. Es sey die Seite m eines Achtecks $= 2$ Fuß, so ist seine Fläche $= \frac{2^2 \cdot 8 \cdot 2,4142}{4} = \frac{4 \cdot 8 \cdot 2,4142}{4}$ $= 8 \cdot 2,4142 = 19,3136$ d. i. 19 □ Fuß, 31 □ Zoll, 36 □ Linien.

§. 495. Es ist ein Kreis gegeben, man sucht die Seite eines in demselben beschriebenen Vielecks. Fig. 188.

Aufl. Wenn DF die Seite m des Vielecks, so ist $CD = CF = R$; $< x = \frac{1}{2}$ Centriwinkel $= \frac{1}{2} c$; und

Sin. tot. : CD = Sin. x : DG
= Sin. tot. : R = Sin. $\frac{1}{2}$ c : $\frac{1}{2}$ m; also $\frac{1}{2}$ m $= \frac{R \cdot \text{Sin.} \frac{1}{2} C}{\text{Sin. tot.}}$.

Weil nun der Sin. tot. $= 1$, so ist die allgemeine Formel $= m = 2 R \cdot \text{Sin.} \frac{1}{2} C$; und $C = \frac{360°}{n}$, wenn $n =$ Anzahl der Seiten.

Daraus entsteht folgende kleine Tafel, welche angiebt, wie groß die Seite eines Vielecks, wenn der Halbmesser $= R$ gegeben ist. Die Zahl $2 R = D$ = Diameter, und Sin. $\frac{1}{2}$ c = dem Decimalbruch.

Die Seite des Dreiecks $= D. 0,866$, oder $\sqrt{3 R^2}$,
des Vierecks $= D. 0,7071$ oder $\sqrt{2 R^2}$,
des Fünfecks $= D. 0,5878$ oder $\sqrt{(R^2 + \frac{6}{4} R^2 - R \sqrt{\frac{5}{4} R^2})}$

Die

Die Seite des Sechsecks $=$ D. 0,5 oder R,
des Siebenecks $=$ D. 0,4339,
des Achtecks $=$ D. 0,3827 oder $\sqrt{(2R^2 - 2R\sqrt{\tfrac{1}{2}R^2})}$,
des Neunecks $=$ D. 0,342,
des Zehnecks $=$ D. 0,309 oder $\sqrt{\tfrac{5}{4} . R^2} - \tfrac{1}{2} R$,
des Eilfecks $=$ D. 0,2818,
des Zwölfecks $=$ D. 0,2588,
des Funfzehnecks $=$ D. 0,2079,
des Sechzehnecks $=$ D. 0,1994,
des Vierundzwanzigecks $=$ D. 0,1305.

Z. B. Man sucht die Seite eines Neunecks in einem Kreise, dessen Diameter $= 4$, so giebt die Tafel $4 . 0{,}342 = 1{,}368$ als die Größe derselben an. — Die Seite eines Dreiecks in demselben Kreise $= 4 . 0{,}866 = 3{,}464 = m$.

§. 496. Den Flächenraum eines Vierecks zu finden, in welchem nur 1 rechter Winkel ist, und dessen sämmliche Seiten bekannt sind. Fig. 164.

Aufl. Die Seiten heißen a, b, c, d; bei A ist der rechte Winkel; BD eine Diagonale $=$ f.

Die $f = \sqrt{(d^2 + a^2)}$, nach dem pythagorischen Lehrsatz; die Fläche des $\triangle$ BAD $= \frac{ad}{2}$; und weil nun im $\triangle$ BCD alle Seiten bekannt sind, so ist der Inhalt nach §. 491. zu finden. Die Fläche vom ganzen Viereck ist also

$$= \frac{ad}{2} + \tfrac{1}{4}\sqrt{(b+c+f).(b+c-f).(b+f-c).(f+c-b)}.$$

§. 497. Die Fläche eines Kreises zu finden.

Aufl. Multiplicire den Halbmesser mit sich selbst und mit der Zahl 3,14159 (oder bei weniger Genauigkeit nur mit 3,14), welche wir stets, wenn vom Kreise die Rede ist, mit p benennen wollen. Im Formular ist $F = r^2 p$, wo $r =$ Radius ist, oder $F = \frac{d^2 p}{4}$, wo $d =$ Diameter ist.

Es

Es sey der Durchmesser d eines Kreises $= 6$ Zoll, also der Radius $= 3$ Zoll $= r$; und $r^2 = 3^2$, folglich $r^2 . p = 9 . 3{,}14 \ldots = 28{,}26$ d. i. 28 □ Zoll 26 □ Linien. Nach dem 2ten Formular ist $\frac{d^2 p}{4}$

$$= \frac{6^2 . 3{,}14 \ldots}{4} = \frac{36 . 3{,}14}{4} = 28{,}26, \text{ wie vorher.}$$

§. 498. Die Fläche eines Kreissectors zu finden.

Aufl. Ist die ganze Kreisfläche $= r^2 p$; so ist die Fläche eines Halbkreises $= \frac{r^2 p}{2}$; eines Quadranten $= \frac{r^2 p}{4}$; eines Sextanten $= \frac{r^2 p}{6}$; eines Octanten $= \frac{r^2 p}{8}$ u. s. w. Überhaupt aber ist der Bogen jedes Sectors als die Grundlinie eines Dreiecks, dessen Höhe der Halbmesser ist, anzusehen, wobei der Bogen $= b$, der gewöhnlich in Graden gegeben wird, in Theilen des Radius gesucht werden muß. Nun ist die ganze Kreislinie $= d . p$ (siehe §. 202.); also für n Grade

$$360^\circ : d . p = n : b, \text{ und der Bogen } b = \frac{d . p n.}{360}$$

Multiplicirt man den Bogen mit $\frac{r}{2}$, so kommt $\frac{d . p . n . r}{2 . 360}$, und (weil $d = 2r$) $= \frac{r^2 . p . n}{360} =$ Fläche jedes Sectors von n Graden.

Z. B. Es sey der Radius $= 3 = AC$, Fig. 165.; und der Bogen $AB = n = 60^\circ$, so ist

$$\text{Fläche des Sectors } BCA = \frac{3^2 . 314 . 60}{360} = 4{,}71.$$

§. 499. Die Fläche eines Sehnenabschnitts AnBs zu finden. Fig. 165.

Aufl. Berechne den Flächeninhalt des Sectors AnBC, und ziehe davon den Inhalt des △ ABC ab, so bleibt der Inhalt vom Abschnitt AnBsA.

$\triangle$ ABC hat zur Grundlinie AC = r, und zur Höhe GB, welche gefunden wird durch

Sin. tot. : CB = Sin. x : GB,

d. i. Sin. tot. : r = Sin. n : GB, und GB $= \frac{r \,.\, \text{Sin. n}}{\text{Sin. tot.}}$;

Fläche des $\triangle$ BCA $= \frac{r^2 \,.\, \text{Sin. n}}{2 \,.\, \text{Sin. tot.}}$

Fläche des Sehnenabschnitts AnBsA $= \frac{r^2 \,.\, p \,.\, n}{360} - \frac{r^2 \,.\, \text{Sin. n}}{2 \text{ Sin. tot.}}$.

Z. B. Es sey, wie vorher, r = 3; n = 60°, so war $\frac{r^2 \,.\, p \,.\, n}{360} = 4{,}71$ nach §. 498.; und $\frac{r^2 \,.\, \text{Sin. n}}{2 \text{ Sin. tot.}}$ $= \frac{3^2 \,.\, \text{Sin. } 60^\circ}{2 \text{ Sin. tot.}}$, und log. $3^2 = 0{,}9542425$

$$
\begin{array}{rl}
\text{Sin. } 60^\circ = & 9{,}9375306 \\
\hline
 & 10{,}8917731 \\
\text{log. } 2 = & \left\{ \begin{array}{l} 0{,}3010300 \\ 10 \end{array} \right. \\
\text{Sin. tot.} = & \\
\hline
\text{log. } \triangle \text{ ACB} = & 0{,}5907431 \\
\text{Fläche ACB} = & 3{,}8971.
\end{array}
$$

Aber 4,71 = Fläche des Sectors
und 3,8971 = Fläche des $\triangle$ ACB

bleibt 0,8129 = Fläche des Sehnenabschnitts AnBsA.

§. 500. **Die Fläche eines Kreisabschnitts ABED Fig. 166. zu finden.**

Aufl. Ziehe die Radien CD, CE, und die Perpendikel DH und GC; alsdann besteht das Kreisstück ABED aus den beiden gleichen Sectoren ACD und BCE, und dem $\triangle$ DCE, dessen halbe Grundlinie DG = HC, und dessen Höhe CG ist.

Im rechtwinklichten $\triangle$ HCD, in welchem < n und Seite CD = r bekannt sind, findet man durch

Sin. tot. : r = Cos. n : HC oder DG

und Sin. tot. : r = Sin. n : DH oder CG.

Nun

Nun ist DG . CG = Fläche des $\triangle$ DCE, d. h.
$\frac{r^2 . \text{Sin. } n . \text{Cos. } n}{\text{Sin. tot. Sin. tot.}}$ und die Fläche eines Sectors
$ACD = \frac{r^2 . p . n}{360}$.

Aber 2. ACD + $\triangle$ DCE = ABED; in vorigen Zeichen ist

$$\text{Fläche ABED} = \frac{2r^2 . p . n}{360} + \frac{r^2 . \text{Sin. } n . \text{Cos. } n}{\text{Sin. tot. Sin. tot.}}$$

Z. B. Es sey r = 96; n = 30°; so ist Sector
$ACD = \frac{96^2 . 3,14 . 30}{360} = 2412,7$ Fläche.

$$\text{Fläche des } \triangle \text{ DCE} = \frac{96^2 . \text{Sin. } 30^\circ . \text{Cos. } 30^\circ}{\text{Sin. tot. Sin. tot.}}$$

log. 96^2 = 3,9645424
\+ Sin. 30° = 9,6989700
\+ Cos. 30° = 9,9375306

23,6010430

Sin. tot. { = 10 abgezogen
Sin. tot. { = 10

3,6010430 = 3990,7 = $\triangle$ DCE.

Sector ACD = 2412,7
Sector BCE = 2412,7
Dreieck DCE = 3990,7

Fläche des Kreisstücks = 8816,1 □ Maaß.

Das Stück
AHD = Sector ACD − $\triangle$ HCD.
und
ACGD = Sector ACD + $\triangle$ CGD.

§. 501. Aus dem gegebenen Sehnenabschnitt FBEM Fig. 167. den Durchmesser AB eines zugehörigen Kreises zu finden.

Aufl. Ziehe die Linien FB und BE nach der Mitte des gegebenen Bogens FE, so geht die gerade Linie BMA durch das Centrum und die Mitte der Sehne FE. Ziehe in Gedanken die EA; dann sind die

 Dreiecke

Dreiecke MBE und BEA einander ähnlich. Daher gilt

$$MB : ME = ME : MA, \text{ und } MA = \frac{ME^2}{MB}$$

$$\text{und der Diameter } BA = \frac{ME^2}{MB} + MB.$$

Z. B. Es sey $MB = 10$; $ME = 50$, so ist $MA = \frac{50^2}{10} = \frac{2500}{10} = 250$, und $BA = 250 + 10 = 260$.

Der Bogen BE kann auch in Graden gefunden werden; denn er ist $= 2 < n$, weil n ein Peripheriewinkel, dessen Maaß bekanntlich der halbe Bogen BE ist.

$$MA : \text{Sin. tot.} = ME : \text{Tang. } n; \text{ und } 2n = BE \text{ in Graden.}$$

§. 502. Die Fläche eines Ringes gggg Fig. 168 zwischen zwei concentrischen Kreisen zu finden.

Aufl. Ziehe die Fläche des kleinern Kreises, dessen Radius CD, von der Fläche des größern, dessen Radius CA ist, ab. Der Rest ist die Fläche des Ringes.

Wenn R und r die Halbmesser, $p = 3,14\ldots$, bedeutet, so ist das allgemeine Formular für jede Ringfläche

$$F = (R^2 - r^2) \cdot p.$$

Z. B. Es sey $CD = r = 30$; $CA = R = 40$, so ist $(40^2 - 30^2) \cdot 3,14 = (1600 - 900) \cdot 3,14 = 700 \cdot 3,14 = 2198$ □ Maaß Fläche.

§. 503. Die Fläche zu berechnen, welche von den gothischen Bogen AC und BC und deren Radius AB eingeschlossen wird. Fig. 169.

Aufl. In der gothischen Bauart findet man diesen Bogen recht häufig zu Fenster= Thür= und andern Gewölbebogen angewendet. Mit dem Radius AB wird aus A und B der Bogen BC und AC beschrieben; folglich ist △ ACB gleichseitig, und $< n = < m = 60°$, der Anzahl Grade des Bogens.

Die

Die Fläche, welche die beiden Bogen und der Radius AB einschließen, besteht aus dem Sector BAGCHB, und dem Sehnenabschnitt AJCGA; oder auch aus zwei gleichen Sectoren, weniger dem $\triangle$ ACB. Daher paßt das allgemeine Formular $\frac{2 \cdot r^2 \cdot n \cdot p}{360} - \frac{r^2 \cdot 3 \cdot 0{,}5773}{4} = F$, wobei $r = AB$; $n = 60°$; $p = 3{,}14$ ist, und weil n beständig $= 60°$, so erhält man das Formular etwas abgekürzter

$$F = \frac{2 \cdot r^2 \cdot p}{6} - \frac{r^2 \cdot 3 \cdot 0{,}5773}{4} = r^2 \cdot 0{,}61422.$$

z. B. Wenn AB $= 5$ Fuß $= r$, so ist

$$\frac{2 \cdot 5^2 \cdot 3{,}14 \ldots}{6} = 26{,}1797$$

und $\frac{5^2 \cdot 3 \cdot 0{,}5773 \ldots}{4} = -\ 10{,}8243$

Fläche des Bogens 15,3556,

d. h. 15 □ Fuß, 35 □ Zoll, 56 □ Linien.

(Vergl. §. 494. und §. 498.).

§. 504. Die Fläche CABD Fig. 170, die von 2 krummen und 2 geraden Linien eingeschlossen ist, zu berechnen.

Aufl. In kurzen Entfernungen miß die Stücke cb, bf, fh, so wie ba, fd, hg rc., wodurch die Trapezia chaD, bfda, fhgd u. s. w. entstehen, worin die krummen Seiten für gerade gelten können, und zerlege sie durch Diagonalen ca, bd, fg in Dreiecke, so läßt sich jedes leicht berechnen, und ihre Summe finden, welche = der sich schlängelnden Fläche ist.

Von dieser Beschaffenheit sind viele Ackerstücke auf einer Feldmark, das Bette eines Stroms u. dgl.

§. 505. Die Fläche, welche ein parabolischer Bogen CGAHB Fig. 55. einschließt, zu finden.

Aufl. Multiplicire die Höhe DA mit der halben Breite DB, und nimm das Product $\frac{4}{3}$ mal. Im allge-

allgemeinen Formular $= \frac{b \cdot h \cdot 2}{3}$, worin b $=$ Breite CB; und h $=$ DA $=$ Höhe.

Z. B. Es sey b $= 134$; h $= 150$; dann ist $\frac{134 \cdot 150 \cdot 2}{3} = 13400$ Quadratmaaß.

Zu Gewölbebogen, auf denen große Lasten ruhen, ist der parabolische Bogen sehr zu empfehlen.

§. 506. Eine elliptische Fläche zu berechnen.

Aufl. Multiplicire die große Axe $=$ A mit der kleinen Axe $=$ a, und mit p $= 3{,}1415\ldots$; dividire das Product durch 4.

Formular. $F = \frac{A \cdot a \cdot p}{4}$.

Z. B. Es sey die große Axe A $= 145$; die kleine a $= 105$ Zoll, so ist $\frac{145 \cdot 105 \cdot 3{,}1415\ldots}{4}$ $= 11955{,}431$ □ Zoll, d. h. 1 □ Ruthe, 19 □ Fuß, 55 □ Zoll, 43 □ Linien, 1 □ Scrupel Decimalmaaß; nach zwölftheiligem Maaße müßte 11955 □ Zoll durch 144 zu □ Fußen, diese wieder durch 144 zu □ Ruthen gemacht werden.

Vielerlei Anwendung der Ellipse findet man in der Baukunst, bei Gefäßen, als Bottichen, Wannen, Becken rc.

§. 507. Die Fläche der Eierlinie Fig. 100. zu finden.

Aufl. Diese Fläche besteht

1. in dem Halbkreis adcb, dessen Fläche $= \frac{R^2 \cdot p}{2}$,
2. in dem Sector abg, dessen Radius ab $=$ D, dessen Fläche $= \frac{D^2 \cdot p}{4}$,
3. in dem Sector bah, der dem vorigen gleich ist,
4. in dem Quadranten gfh, dessen Radius fg $=$ r, dessen

dessen Fläche $\frac{r^2 p}{4}$; ($r = D - \sqrt{2R^2}$, weil bf Hypotenuse, und $cb = cf = R$).

Von der Summe dieser Flächen muß das $\triangle$ abf, dessen Fläche $= R^2$ abgezogen werden, weil sie zweimal mit gerechnet worden.

Wenn man diese verschiedenen Flächen zusammen setzt, und möglichst einfach ausdrückt, so erhält man folgendes

Formular $\frac{3R^2 \cdot p}{2} + \frac{r^2 \cdot p}{4} - R^2 =$ Fläche.

Z. B. Es sey $ab = 200 = D$; $R = cb = 100$; dann ist $r = 200 - \sqrt{2 \cdot 100^2} = 200 - \sqrt{20000}$ $= 200 - 141{,}42 = 58{,}58$.

und $\frac{3 \cdot 100^2 \cdot 3{,}14 \ldots}{2} + \frac{58{,}58^2 \cdot 3{,}14}{4} - 100^2 =$ Fläche $= 47100 + 2694 - 10000$; $= 49794 - 10000$ $= 39794$ Quadratmaaß.

§. 508. Den Flächenraum, den die Schneckenlinie §. 411. Fig. 101 einschließt, zu finden.

Aufl. Es sey $r = cd =$ Radius des kleinsten Halbkreises, so ist der Radius des untern Halbkreises tgh $= 2r$; des obern Halbkreises him $= 3r$; des untern mka $= 4r$; des obern alb $= 5r$. Aber vom Halbkreis mih muß def; von mka muß tgh; und von alb muß him abgezogen werden. Hiernach ist die Fläche des

$$1\text{sten Halbkr.} = \frac{r^2 p}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad = \frac{r^2 p}{2}$$

$$2\text{ten Halbkr.} = \frac{2^2 r^2 p}{2} \quad \ldots\ldots \quad = \frac{4r^2 p}{2}$$

$$1.\ \text{Halbrings} = \frac{3^2 r^2 p}{2} = \frac{9r^2 p}{2} - \frac{r^2 p}{2} \quad . = \frac{8r^2 p}{2}$$

$$2.\ \text{Halbrings} = \frac{4^2 r^2 p}{2} = \frac{16r^2 p}{2} - \frac{4r^2 p}{2} = \frac{12r^2 p}{2}$$

$$3.\ \text{Halbrings} = \frac{5^2 r^2 p}{2} = \frac{25r^2 p}{2} - \frac{9r^2 p}{2} = \frac{16r^2 p}{2}$$

$$\text{Summe} = \frac{41r^2 p}{2} = \text{Fläche.}$$