Der Rathgeber bei mathematischen Beschäftigungen

Stöpel, August

Stendal, 1819

§. 493-495. Formelntafeln für die Vielecke;

multiplicire Grundlinie und Perpendikel, oder Grundlinie und Höhe mit einander; endlich dividire das Product durch 2. Formel $F = \frac{g \cdot h}{2}$.

Es sey Fig. 8. die $ac = g = 12'$; die $bp = h = 6',2$, so ist die Fläche $= \frac{12 \cdot 6,2}{2} = \frac{74,4}{2} = 37,2$ □ Fuß.

Im rechtwinklichten Dreieck ist die eine Cathete die Grundlinie und die andere die Höhe.

Aufl. II. Wenn alle drei Seiten des Dreiecks bekannt sind, und a, b, c heißen, so giebt folgendes Formular den Flächenraum

$$F = \frac{\sqrt{(a+b+c).(a+c-b).(a+b-c).(b+c-a)}}{4}$$

Es sey Seite $a = 6$, so sind die 4 Factoren $6+5+4 = 15$
$b = 5$ $\quad 6+4-5 = 5$
$c = 4$ $\quad 6+5-4 = 7$
$5+4-6 = 3$

und $15 . 5 . 7 . 3 = 1575$; $\sqrt{1575} = 39,68$; und $\frac{39,68}{4} = 9,92$ □ Maaß.

Sind die Seiten groß, so verrichtet man die Multiplication und Ausziehung der Wurzel sehr bequem mit Logarithmen.

§. 492. Die Fläche jeder geradlinichten Figur zu finden.

Aufl. Zerlege die Figur durch Diagonalen in Dreiecke, berechne jedes besonders, und addire alle Dreiecke zusammen, so ist die Summe = dem Flächenraum.

§. 493. Den Flächenraum einer in einem Kreise beschriebenen gleichseitigen Figur zu finden.

Aufl. Im Kreise lassen sich gleichseitige Drei- Vier- Fünf- Sechs- und andere Vielecke zeichnen, deren Flächen dann vom Radius des Kreises, worin sie beschrieben sind, abhängen.

Es sey das Vieleck, welches es wolle, so läßt es sich durch Diagonalen in Dreiecke zerlegen, und berechnen. Allein durch algebraische und trigonometrische Kunstgriffe kann man aus einer Seite und der Anzahl derselben den Flächenraum viel genauer und ohne Zeichnung finden. Sucht man aus Fig. 188., worin DF eine Seite eines Vielecks $= m$, $GD = \frac{1}{2} m$; $< x = \frac{1}{2}$ Centriwinkel; $< y = \frac{1}{2}$ Polygonwinkel, Werthe für GD und CG, aus deren Multiplication der Flächenraum des $\triangle$ DCF hervorgeht, so findet man Sin. tot. : $\frac{1}{2} m =$ Tang. $< y$: CG; und

$$CG = \frac{\frac{1}{2} m \cdot \text{Tang.} < y}{\text{Sin. tot.}}$$, und multiplicirt man dies

mit $DG = \frac{1}{2} m$, so kommt $\frac{\frac{1}{4} m^2 \cdot \text{Tang.} < y}{\text{Sin. tot.}}$

$$= \frac{m^2 \cdot \text{Tang.} \frac{1}{2} \text{Polygonwinkel}}{4 \text{ Sin. tot.}}$$; und also ist Fläche

eines Vielecks von n Seiten $= \frac{m^2 . n . \text{Tang.} \frac{1}{2} p}{4 \text{ Sin. tot.}}$,

worin $m =$ einer Seite, $n =$ Anzahl der Seiten, und $p =$ Polygonwinkel. Den Polygonwinkel p findet man, indem man mit der Anzahl der Seiten in 360° dividirt, und den Quotienten von 180° abzieht. Also ist $p = 180° - \frac{360}{n}$.

Daraus entsteht folgende Tafel für die Flächen der Vielecke, deren Seiten bekannt sind.

Fläche des Dreiecks $= \frac{m^2 . 3 . \text{Tang. } 30°}{4 . \text{Sin. totus}}$,

des Vierecks $= \frac{m^2 . 4 . \text{Tang. } 45°}{4 . \text{Sin. tot.}} = m^2$,

denn Tang. 45° = Sin. tot.

des Fünfecks $= \frac{m^2 . 5 . \text{Tang. } 54°}{4 . \text{Sin. tot.}}$,

des Sechsecks $= \frac{m^2 . 6 . \text{Tang. } 60}{4 . \text{Sin. tot.}}$,

Fläche

Fläche des Siebenecks $= \frac{m^2 \cdot 7 \cdot \text{Tang. } 64^\circ 17'}{4 \cdot \text{Sin. tot.}}$,

des Achtecks $= \frac{m^2 \cdot 8 \cdot \text{Tang. } 67^\circ 30'}{4 \cdot \text{Sin. tot.}}$,

des Neunecks $= \frac{m^2 \cdot 9 \cdot \text{Tang. } 70^\circ}{4 \cdot \text{Sin. tot.}}$,

des Zehnecks $= \frac{m^2 \cdot 10 \cdot \text{Tang. } 72^\circ}{4 \cdot \text{Sin. tot.}}$ u. s. w.

Z. B. Es sey die Seite eines Fünfecks $= 4,312$ Fuß $= m$, so ist $n = 5$, und das Formular $= \frac{4,312^2 \cdot 5 \cdot \text{Tang. } 54^\circ}{4 \cdot \text{Sin. tot.}}$.

Nun ist log. Tang. $54^\circ = 10,1387390$
log. $5 = 0,6989700$
log. $4,312^2 = 1,2695184$
$12,1072274$
log. $4 = 0,6020600$
log. Sin. tot. $= 10$,
log. der Fläche $= 1,5051674 = 32$ □ Fuß.
(Der log. 4 Sin. tot. ist beständig $= 10,6020600$).

§. 494. Will oder kann man nicht mit Logarithmen rechnen, so dient folgende bequeme Tafel, in welcher die Zahl mit dem Decimalbruch nichts anders ist, als die Tangente des halben Polygonwinkels, und m die gegebene Seite.

Fläche des Dreiecks $= \frac{m^2 \cdot 3 \cdot 0,5773}{4}$,

des Vierecks $= m^2$,

des Fünfecks $= \frac{m^2 \cdot 5 \cdot 1,376}{4}$,

des Sechsecks $= \frac{m^2 \cdot 6 \cdot 1,732}{4}$,

des Siebenecks $= \frac{m^2 \cdot 7 \cdot 2,0763}{4}$,

des Achtecks $= \frac{m^2 \cdot 8 \cdot 2,4142}{4}$,

Fläche

Fläche des Neunecks $= \frac{m^2 \cdot 9 \cdot 2,7475}{4}$,

des Zehnecks $= \frac{m^2 \cdot 10 \cdot 3,0777}{4}$,

des Zwölfecks $= \frac{m^2 \cdot 12 \cdot 3,732}{4}$,

des Funfzehnecks $= \frac{m^2 \cdot 15 \cdot 4,7046}{4}$,

des Sechzehnecks $= \frac{m^2 \cdot 16 \cdot 5,0273}{4}$.

Z. B. Es sey die Seite m eines Achtecks $= 2$ Fuß, so ist seine Fläche $= \frac{2^2 \cdot 8 \cdot 2,4142}{4} = \frac{4 \cdot 8 \cdot 2,4142}{4}$ $= 8 \cdot 2,4142 = 19,3136$ d. i. 19 □ Fuß, 31 □ Zoll, 36 □ Linien.

§. 495. Es ist ein Kreis gegeben, man sucht die Seite eines in demselben beschriebenen Vielecks. Fig. 188.

Aufl. Wenn DF die Seite m des Vielecks, so ist $CD = CF = R$; $< x = \frac{1}{2}$ Centriwinkel $= \frac{1}{2}c$; und

Sin. tot. : CD = Sin. x : DG
= Sin. tot. : R = Sin. $\frac{1}{2}$ c : $\frac{1}{2}$ m; also $\frac{1}{2}$ m
$= \frac{R \cdot \text{Sin.} \frac{1}{2} C}{\text{Sin. tot.}}$.

Weil nun der Sin. tot. $= 1$, so ist die allgemeine Formel $= m = 2\ R \cdot \text{Sin.} \frac{1}{2} C$; und $C = \frac{360^\circ}{n}$, wenn n = Anzahl der Seiten.

Daraus entsteht folgende kleine Tafel, welche angiebt, wie groß die Seite eines Vielecks, wenn der Halbmesser = R gegeben ist. Die Zahl $2R = D$ = Diameter, und Sin. $\frac{1}{2}$ c = dem Decimalbruch.

Die Seite des Dreiecks = D. 0,866, oder $\sqrt{3R^2}$,
des Vierecks = D. 0,7071 oder $\sqrt{2R^2}$,
des Fünfecks = D. 0,5878 oder
$\sqrt{(R^2 + \frac{6}{4}R^2 - R\sqrt{\frac{5}{4}R^2})}$

Die

Die Seite des Sechsecks $=$ D. 0,5 oder R,
des Siebenecks $=$ D. 0,4339,
des Achtecks $=$ D. 0,3827 oder $\sqrt{(2R^2 - 2R\sqrt{\tfrac{1}{2}R^2})}$,
des Neunecks $=$ D. 0,342,
des Zehnecks $=$ D. 0,309 oder $\sqrt{\tfrac{5}{4} . R^2} - \tfrac{1}{2}R$,
des Eilfecks $=$ D. 0,2818,
des Zwölfecks $=$ D. 0,2588,
des Funfzehnecks $=$ D. 0,2079,
des Sechzehnecks $=$ D. 0,1994,
des Vierundzwanzigecks $=$ D. 0,1305.

Z. B. Man sucht die Seite eines Neunecks in einem Kreise, dessen Diameter $= 4$, so giebt die Tafel $4 . 0{,}342 = 1{,}368$ als die Größe derselben an. — Die Seite eines Dreiecks in demselben Kreise $= 4 . 0{,}866 = 3{,}464 = m$.

§. 496. **Den Flächenraum eines Vierecks zu finden, in welchem nur 1 rechter Winkel ist, und dessen sämmliche Seiten bekannt sind.** Fig. 164.

Aufl. Die Seiten heißen a, b, c, d; bei A ist der rechte Winkel; BD eine Diagonale $= f$.

Die $f = \sqrt{(d^2 + a^2)}$, nach dem pythagorischen Lehrsatz; die Fläche des $\triangle$ BAD $= \frac{ad}{2}$; und weil nun im $\triangle$ BCD alle Seiten bekannt sind, so ist der Inhalt nach §. 491. zu finden. Die Fläche vom ganzen Viereck ist also

$$= \frac{ad}{2} + \tfrac{1}{4}\sqrt{(b+c+f).(b+c-f).(b+f-c).(f+c-b)}.$$

§. 497. **Die Fläche eines Kreises zu finden.**

Aufl. Multiplicire den Halbmesser mit sich selbst und mit der Zahl 3,14159 (oder bei weniger Genauigkeit nur mit 3,14), welche wir stets, wenn vom Kreise die Rede ist, mit p benennen wollen. Im Formular ist $F = r^2 p$, wo $r =$ Radius ist, oder $F = \frac{d^2 p}{4}$, wo $d =$ Diameter ist.

Es