Der Rathgeber bei mathematischen Beschäftigungen

Stöpel, August

Stendal, 1819

§. 496. Flächen der krummlinichten Figuren.

Die Seite des Sechsecks $=$ D. 0,5 oder R,
des Siebenecks $=$ D. 0,4339,
des Achtecks $=$ D. 0,3827 oder $\sqrt{(2R^2 - 2R\sqrt{\tfrac{1}{2}R^2})}$,
des Neunecks $=$ D. 0,342,
des Zehnecks $=$ D. 0,309 oder $\sqrt{\tfrac{5}{4} \cdot R^2} - \tfrac{1}{2}R$,
des Eilfecks $=$ D. 0,2818,
des Zwölfecks $=$ D. 0,2588,
des Funfzehnecks $=$ D. 0,2079,
des Sechzehnecks $=$ D. 0,1994,
des Vierundzwanzigecks $=$ D. 0,1305.

Z. B. Man sucht die Seite eines Neunecks in einem Kreise, dessen Diameter $= 4$, so giebt die Tafel $4 \cdot 0{,}342 = 1{,}368$ als die Größe derselben an. — Die Seite eines Dreiecks in demselben Kreise $= 4 \cdot 0{,}866 = 3{,}464 = m$.

§. 496. Den Flächenraum eines Vierecks zu finden, in welchem nur 1 rechter Winkel ist, und dessen sämmliche Seiten bekannt sind. Fig. 164.

Aufl. Die Seiten heißen a, b, c, d; bei A ist der rechte Winkel; BD eine Diagonale $= f$.

Die $f = \sqrt{(d^2 + a^2)}$, nach dem pythagorischen Lehrsatz; die Fläche des $\triangle$ BAD $= \frac{ad}{2}$; und weil nun im $\triangle$ BCD alle Seiten bekannt sind, so ist der Inhalt nach §. 491. zu finden. Die Fläche vom ganzen Viereck ist also

$$= \frac{ad}{2} + \tfrac{1}{4}\sqrt{(b+c+f) \cdot (b+c-f) \cdot (b+f-c) \cdot (f+c-b)}.$$

§. 497. Die Fläche eines Kreises zu finden.

Aufl. Multiplicire den Halbmesser mit sich selbst und mit der Zahl 3,14159 (oder bei weniger Genauigkeit nur mit 3,14), welche wir stets, wenn vom Kreise die Rede ist, mit p benennen wollen. Im Formular ist $F = r^2 p$, wo $r =$ Radius ist,

oder $F = \frac{d^2 p}{4}$, wo $d =$ Diameter ist.

Es

Es sey der Durchmesser d eines Kreises $= 6$ Zoll, also der Radius $= 3$ Zoll $= r$; und $r^2 = 3^2$, folglich $r^2 . p = 9 . 3{,}14 \ldots = 28{,}26$ d. i. 28 □ Zoll 26 □ Linien. Nach dem 2ten Formular ist $\frac{d^2 p}{4}$ $= \frac{6^2 . 3{,}14 \ldots}{4} = \frac{36 . 3{,}14}{4} = 28{,}26$, wie vorher.

§. 498. Die Fläche eines Kreissectors zu finden.

Aufl. Ist die ganze Kreisfläche $= r^2 p$; so ist die Fläche eines Halbkreises $= \frac{r^2 p}{2}$; eines Quadranten $= \frac{r^2 p}{4}$; eines Sextanten $= \frac{r^2 p}{6}$; eines Octanten $= \frac{r^2 p}{8}$ u. s. w. Überhaupt aber ist der Bogen jedes Sectors als die Grundlinie eines Dreiecks, dessen Höhe der Halbmesser ist, anzusehen, wobei der Bogen $= b$, der gewöhnlich in Graden gegeben wird, in Theilen des Radius gesucht werden muß. Nun ist die ganze Kreislinie $= d . p$ (siehe §. 202.); also für n Grade

$360^\circ : d . p = n : b$, und der Bogen $b = \frac{d . p n.}{360}$

Multiplicirt man den Bogen mit $\frac{r}{2}$, so kommt $\frac{d . p . n . r}{2 . 360}$, und (weil $d = 2r$) $= \frac{r^2 . p . n}{360} =$ Fläche jedes Sectors von n Graden.

Z. B. Es sey der Radius $= 3 = AC$, Fig. 165.; und der Bogen $AB = n = 60^\circ$, so ist

Fläche des Sectors $BCA = \frac{3^2 . 314 . 60}{360} = 4{,}71$.

§. 499. Die Fläche eines Sehnenabschnitts AnBs zu finden. Fig. 165.

Aufl. Berechne den Flächeninhalt des Sectors AnBC, und ziehe davon den Inhalt des △ ABC ab, so bleibt der Inhalt vom Abschnitt AnBsA.

$\triangle$ ABC hat zur Grundlinie AC = r, und zur Höhe GB, welche gefunden wird durch

Sin. tot. : CB = Sin. x : GB,

d. i. Sin. tot. : r = Sin. n : GB, und GB $= \frac{r \cdot \text{Sin. } n}{\text{Sin. tot.}}$;

Fläche des $\triangle$ BCA $= \frac{r^2 \cdot \text{Sin. } n}{2 \cdot \text{Sin. tot.}}$

Fläche des Sehnenabschnitts AnBsA $= \frac{r^2 \cdot p \cdot n}{360} - \frac{r^2 \cdot \text{Sin. } n}{2 \text{ Sin. tot.}}$.

Z. B. Es sey, wie vorher, r = 3; n = 60°, so war $\frac{r^2 \cdot p \cdot n}{360} = 4{,}71$ nach §. 498.; und $\frac{r^2 \cdot \text{Sin. } n}{2 \text{ Sin. tot.}}$ $= \frac{3^2 \cdot \text{Sin. } 60°}{2 \text{ Sin. tot.}}$, und log. 3^2 = 0,9542425

Sin. 60° = 9,9375306

10,8917731

log. 2 = } 0,3010300

Sin. tot. = } 10

log. $\triangle$ ACB = 0,5907431

Fläche ACB = 3,8971.

Aber 4,71 = Fläche des Sectors

und 3,8971 = Fläche des $\triangle$ ACB

bleibt 0,8129 = Fläche des Sehnenabschnitts AnBsA.

§. 500. **Die Fläche eines Kreisabschnitts ABED Fig. 166. zu finden.**

Aufl. Ziehe die Radien CD, CE, und die Perpendikel DH und GC; alsdann besteht das Kreisstück ABED aus den beiden gleichen Sectoren ACD und BCE, und dem $\triangle$ DCE, dessen halbe Grundlinie DG = HC, und dessen Höhe CG ist.

Im rechtwinklichten $\triangle$ HCD, in welchem < n und Seite CD = r bekannt sind, findet man durch

Sin. tot. : r = Cos. n : HC oder DG

und Sin. tot. : r = Sin. n : DH oder CG.

Nun

Nun ist DG . CG = Fläche des △ DCE, d. h. $\frac{r^2 . \text{Sin. } n . \text{Cos. } n}{\text{Sin. tot. Sin. tot.}}$ und die Fläche eines Sectors

$$ACD = \frac{r^2 . p . n}{360}.$$

Aber 2 . ACD + △ DCE = ABED; in vorigen Zeichen ist

$$\text{Fläche ABED} = \frac{2r^2 . p . n}{360} + \frac{r^2 . \text{Sin. } n . \text{Cos. } n}{\text{Sin. tot. Sin. tot.}}$$

Z. B. Es sey $r = 96$; $n = 30°$; so ist Sector

$$ACD = \frac{96^2 . 3{,}14 . 30}{360} = 2412{,}7 \text{ Fläche.}$$

$$\text{Fläche des } \triangle \text{ DCE} = \frac{96^2 . \text{Sin. } 30° . \text{Cos. } 30°}{\text{Sin. tot. Sin. tot.}}.$$

$$\begin{array}{lll}
\text{log.} & 96^2 = & 3{,}9645424 \\
+ \text{Sin.} & 30° = & 9{,}6989700 \\
+ \text{Cos.} & 30° = & \underline{9{,}9375306} \\
 & & 23{,}6010430 \\
\text{Sin. tot.} & = 10 & \\
\text{Sin. tot.} & = 10 & \text{abgezogen} \\
 & & 3{,}6010430 = 3990{,}7 = \triangle \text{ DCE.}
\end{array}$$

Sector ACD = 2412,7
Sector BCE = 2412,7
Dreieck DCE = 3990,7

Fläche des Kreisstücks = 8816,1 □ Maaß.

Das Stück
AHD = Sector ACD − △ HCD.
und
ACGD = Sector ACD + △ CGD.

§. 501. Aus dem gegebenen Sehnenabschnitt FBEM Fig. 167. den Durchmesser AB eines zugehörigen Kreises zu finden.

Aufl. Ziehe die Linien FB und BE nach der Mitte des gegebenen Bogens FE, so geht die gerade Linie BMA durch das Centrum und die Mitte der Sehne FE. Ziehe in Gedanken die EA; dann sind die Dreiecke

Dreiecke MBE und BEA einander ähnlich. Daher gilt

$$MB : ME = ME : MA, \text{ und } MA = \frac{ME^2}{MB}$$

und der Diameter $BA = \frac{ME^2}{MB} + MB$.

Z. B. Es sey $MB = 10$; $ME = 50$, so ist $MA = \frac{50^2}{10} = \frac{2500}{10} = 250$, und $BA = 250 + 10 = 260$.

Der Bogen BE kann auch in Graden gefunden werden; denn er ist $= 2 < n$, weil n ein Peripheriewinkel, dessen Maaß bekanntlich der halbe Bogen BE ist.

$$MA : \text{Sin. tot.} = ME : \text{Tang. } n; \text{ und } 2n = BE \text{ in Graden.}$$

§. 502. Die Fläche eines Ringes gggg Fig. 168 zwischen zwei concentrischen Kreisen zu finden.

Aufl. Ziehe die Fläche des kleinern Kreises, dessen Radius CD, von der Fläche des größern, dessen Radius CA ist, ab. Der Rest ist die Fläche des Ringes.

Wenn R und r die Halbmesser, $p = 3{,}14\ldots$, bedeutet, so ist das allgemeine Formular für jede Ringfläche

$$F = (R^2 - r^2) . p.$$

Z. B. Es sey $CD = r = 30$; $CA = R = 40$, so ist $(40^2 - 30^2) . 3{,}14 = (1600 - 900) . 3{,}14 = 700 . 3{,}14 = 2198$ □ Maaß Fläche.

§. 503. Die Fläche zu berechnen, welche von den gothischen Bogen AC und BC und deren Radius AB eingeschlossen wird. Fig. 169.

Aufl. In der gothischen Bauart findet man diesen Bogen recht häufig zu Fenster= Thür= und andern Gewölbebogen angewendet. Mit dem Radius AB wird aus A und B der Bogen BC und AC beschrieben; folglich ist $\triangle$ ACB gleichseitig, und $< n = < m = 60°$, der Anzahl Grade des Bogens.

Die Fläche, welche die beiden Bogen und der Radius AB einschließen, besteht aus dem Sector BAGCHB, und dem Sehnenabschnitt AJCGA; oder auch aus zwei gleichen Sectoren, weniger dem $\triangle$ ACB. Daher paßt das allgemeine Formular $\frac{2 \cdot r^2 \cdot n \cdot p}{360} - \frac{r^2 \cdot 3 \cdot 0{,}5773}{4} = F$, wobei $r = AB$; $n = 60°$; $p = 3{,}14$ ist, und weil n beständig $= 60°$, so erhält man das Formular etwas abgekürzter

$$F = \frac{2 \cdot r^2 \cdot p}{6} - \frac{r^2 \cdot 3 \cdot 0{,}5773}{4} = r^2 \cdot 0{,}61422.$$

Z. B. Wenn $AB = 5$ Fuß $= r$, so ist

$$\frac{2 \cdot 5^2 \cdot 3{,}14\ldots}{6} = 26{,}1797$$

und $$\frac{5^2 \cdot 3 \cdot 0{,}5773\ldots}{4} = -\ 10{,}8243$$

Fläche des Bogens 15,3556,

d. h. 15 □ Fuß, 35 □ Zoll, 56 □ Linien.

(Vergl. §. 494. und §. 498.).

§. 504. Die Fläche CABD Fig. 170, die von 2 krummen und 2 geraden Linien eingeschlossen ist, zu berechnen.

Aufl. In kurzen Entfernungen miß die Stücke cb, bf, fh, so wie ba, fd, hg ꝛc., wodurch die Trapezia cbaD, bfda, fhgd u. s. w. entstehen, worin die krummen Seiten für gerade gelten können, und zerlege sie durch Diagonalen ca, bd, fg in Dreiecke, so läßt sich jedes leicht berechnen, und ihre Summe finden, welche = der sich schlängelnden Fläche ist.

Von dieser Beschaffenheit sind viele Ackerstücke auf einer Feldmark, das Bette eines Stroms u. dgl.

§. 505. Die Fläche, welche ein parabolischer Bogen CGAHB Fig. 55. einschließt, zu finden.

Aufl. Multiplicire die Höhe DA mit der halben Breite DB, und nimm das Product $\frac{4}{3}$ mal. Im allge-

allgemeinen Formular $= \frac{b \cdot h \cdot 2}{3}$, worin b $=$ Breite CB; und h $=$ DA $=$ Höhe.

Z. B. Es sey b $= 134$; h $= 150$; dann ist $\frac{134 \cdot 150 \cdot 2}{3} = 13400$ Quadratmaaß.

Zu Gewölbebogen, auf denen große Lasten ruhen, ist der parabolische Bogen sehr zu empfehlen.

§. 506. Eine elliptische Fläche zu berechnen.

Aufl. Multiplicire die große Axe $=$ A mit der kleinen Axe $=$ a, und mit p $= 3,1415....$; dividire das Product durch 4.

Formular. $F = \frac{A \cdot a \cdot p}{4}$.

Z. B. Es sey die große Axe A $= 145$; die kleine a $= 105$ Zoll, so ist $\frac{145 \cdot 105 \cdot 3,1415....}{4}$ $= 11955,431$ □ Zoll, d. h. 1 □ Ruthe, 19 □ Fuß, 55 □ Zoll, 43 □ Linien, 1 □ Scrupel Decimalmaaß; nach zwölftheiligem Maaße müßte 11955 □ Zoll durch 144 zu □ Fußen, diese wieder durch 144 zu □ Ruthen gemacht werden.

Vielerlei Anwendung der Ellipse findet man in der Baukunst, bei Gefäßen, als Bottichen, Wannen, Becken ꝛc.

§. 507. Die Fläche der Eierlinie Fig. 100. zu finden.

Aufl. Diese Fläche besteht

1. in dem Halbkreis adcb, dessen Fläche $= \frac{R^2 \cdot p}{2}$,
2. in dem Sector abg, dessen Radius ab $=$ D, dessen Fläche $= \frac{D^2 \cdot p}{4}$,
3. in dem Sector bah, der dem vorigen gleich ist,
4. in dem Quadranten gfh, dessen Radius fg $=$ r, dessen

dessen Fläche $\frac{r^2 p}{4}$; ($r = D - \sqrt{2R^2}$, weil bf Hypotenuse, und $cb = cf = R$).

Von der Summe dieser Flächen muß das $\triangle$ abf, dessen Fläche $= R^2$ abgezogen werden, weil sie zweimal mit gerechnet worden.

Wenn man diese verschiedenen Flächen zusammen setzt, und möglichst einfach ausdrückt, so erhält man folgendes

Formular $\frac{3R^2 . p}{2} + \frac{r^2 . p}{4} - R^2 =$ Fläche.

Z. B. Es sey $ab = 200 = D$; $R = cb = 100$; dann ist $r = 200 - \sqrt{2 . 100^2} = 200 - \sqrt{20000}$ $= 200 - 141{,}42 = 58{,}58$.

und $\frac{3 . 100^2 . 3{,}14 \ldots}{2} + \frac{58{,}58^2 . 3{,}14}{4} - 100^2 =$ Fläche $= 47100 + 2694 - 10000; = 49794 - 10000$ $= 39794$ Quadratmaaß.

§. 508. Den Flächenraum, den die Schneckenlinie §. 411. Fig. 101 einschließt, zu finden.

Aufl. Es sey $r = cd =$ Radius des kleinsten Halbkreises, so ist der Radius des untern Halbkreises tgh $= 2r$; des obern Halbkreises him $= 3r$; des untern mka $= 4r$; des obern alb $= 5r$. Aber vom Halbkreis mih muß def; von mka muß tgh; und von alb muß him abgezogen werden. Hiernach ist die Fläche des

$$\text{1sten Halbkr.} = \frac{r^2 p}{2} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad = \frac{r^2 p}{2}$$

$$\text{2ten Halbkr.} = \frac{2^2 r^2 p}{2} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad = \frac{4r^2 p}{2}$$

$$\text{1. Halbrings} = \frac{3^2 r^2 p}{2} = \frac{9r^2 p}{2} - \frac{r^2 p}{2} \quad . \quad = \frac{8r^2 p}{2}$$

$$\text{2. Halbrings} = \frac{4^2 r^2 p}{2} = \frac{16r^2 p}{2} - \frac{4r^2 p}{2} = \frac{12r^2 p}{2}$$

$$\text{3. Halbrings} = \frac{5^2 r^2 p}{2} = \frac{25r^2 p}{2} - \frac{9r^2 p}{2} = \frac{16r^2 p}{2}$$

$$\text{Summe} = \frac{41r^2 p}{2} = \text{Fläche.}$$