



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Der Rathgeber bei mathematischen Beschäftigungen

Stöpel, August

Stendal, 1819

IV. Vermischte Aufgaben über Linien= und Flächenmessung.

[urn:nbn:de:hbz:466:1-63556](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-63556)

Man bemerkt leicht, daß die ersten Glieder in dieser Reihe allemal Halbkreise, die folgenden aber Halbringe sind; und daß die Werthe in der Progression 4, 8, 12, 16 &c. beständig zunehmen, wornach für jeden vorkommenden Fall die Anwendung leicht zu machen ist.

Diese Schneckenlinie ist von der des Archimedes S. 382. verschieden.

S. 509. Die Fläche jeder Figur, sie mag von geraden oder krummen Linien begränzt seyn, zu finden.

Aufl. Zerlege durch Hilfslinien die Figur in bekannte geradlinichte oder krümmelinichte Figuren, berechne jede einzeln, und addire dieselben.

Wenn die Krümmung sich auf keine der bekannten krummen Linien bringen lassen will, so zerlege man sie in sehr kleine Dreiecke und berechne sie. Denn alsdann kann der Theil, der in einen solchen Triangel fällt, ohne großen Irrthum für geradlinicht gelten. Dabei ist zu vergleichen, was über die krummen Linien höherer Ordnungen gesagt worden ist.

IV. Vermischte Aufgaben über Linien und Flächenmessung.

S. 510. Über einer gegebenen Linie AB Fig. 171. ein rechtwinklichtes Dreieck zu zeichnen, in welchem der rechte Winkel der gegebenen Seite gegenüber steht, und dessen Fläche einem gegebenen Quadrat Q gleich ist.

Aufl. Aus der Mitte der AB beschreibe einen Halbkreis, so wird jeder Peripheriewinkel ACB die verlangte Eigenschaft haben. Allein der Punct C ist hier zu finden, durch welchen die Höhe des Dreiecks bestimmt wird. Nennt man die Seite des Quadrats a ; $AB = b$; die Höhe des Dreiecks $= z$, so soll nach der Bedingung $\frac{bz}{2} = a^2$; also $bz = 2a^2$, und

$z = \frac{2a^2}{b} = AD$. Von AD ziehe eine Parallele mit AB, so wird der Durchschnitt mit dem Kreise den Punct C geben; und $CP = z =$ Höhe seyn. Den Abstand $AP = v$ findet man also:

Nach der Gleichung für den Kreis ist $AP : PC = PC : PB$, oder

$$v : z = z : b - v; \quad z^2 = bv - v^2$$

$$\frac{v^2 - bv = -z^2}{b^2 - b^2} \quad \text{Siehe quas}$$

$$\sqrt{v - \frac{b}{2}} = \sqrt{\left(\frac{b^2}{4} - z^2\right)}$$

$$AP = v = \frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b^2}{4} - z^2\right)}$$

Um die Seite x zu finden: $v^2 + z^2 = x^2$, und $x = \sqrt{v^2 + z^2}$. Weil $y \cdot x = a^2$, so ist $y = \frac{a^2}{x}$.

z. B. Es sey $a = 4$, $b = 10$; so ist $z = \frac{2 \cdot 4^2}{10} = \frac{32}{10} = 3,2$; $v = \frac{10}{2} - \sqrt{\left(\frac{10^2}{4} - 3,2^2\right)} = 5 - \sqrt{(25 - 10,24)} = 5 - \sqrt{(14,76)} = 5 - 3,84 = 1,16 = v$.

§. 511. Wenn in einem rechtwinklichten $\triangle ABC$ Fig. 172. die eine Seite $AC = b$, und der Unterschied der beiden andern $= d$ bekannt ist, die Cathete $BC = x$ und die Hypotenuse zu finden.

Aufl. Mit BC beschreibe aus B den Bogen CD , so ist $BD = BC = x$, und $AB = x + d$.

Q. E. D.

Nun ist nach dem pythagorischen Lehrsatz:

$$AC^2 + CB^2 = AB^2$$

$$\text{d. i.} = b^2 + x^2 = (x + d)^2$$

$$\frac{b^2 + x^2 = x^2 + 2dx + d^2}{b^2 = d^2 + 2dx}$$

$$\frac{b^2 - d^2 = 2dx}{b^2 - d^2 = 2dx}$$

$$\frac{b^2 - d^2}{2d} = x = BC$$

$$\text{und } d + \frac{b^2 - d^2}{2d} = \frac{d^2 + b^2}{2d} = AB.$$

$$\text{Es sey } b=9; d=4; \text{ so ist } \frac{9^2 - 4^2}{8} = 8,125 = x$$

$$+ 4 = d$$

$$12,125 = AB.$$

§. 512. Aus der Hypotenuse im $\triangle ABC$ Fig. 173. und dem Unterschiede der beiden Catheten $AC - BC = d$, die Seite $AC = x$ und $BC = y$ zu finden.

Aufl. Nenne die Hypotenuse $AB = c$, und mache $CD = CB$, so ist $d = x - y$. Nun ist $AB^2 = AC^2 + BC^2$, d. i. $c^2 = x^2 + y^2$, und $x^2 = c^2 - y^2$.
Aber $d = x - y$, also $x = d + y$

$$\text{und } x^2 = d^2 + 2dy + y^2$$

Diese beiden Werthe von x^2 gebeneine neue Gleichung:

$$c^2 - y^2 = d^2 + 2dy + y^2$$

$$\frac{c^2}{2} = d^2 + 2dy + 2y^2$$

$$\frac{c^2 - d^2}{2} = dy + y^2$$

$$\frac{c^2 - d^2}{2} + \frac{d^2}{4} = y^2 + dy + \frac{d^2}{4}$$

$$\sqrt{\frac{c^2}{2} - \frac{d^2}{2} + \frac{d^2}{4}} = \frac{c^2}{2} - \frac{d^2}{4} = y^2 + dy + \frac{d^2}{4}$$

$$\sqrt{\left(\frac{c^2}{2} - \frac{d^2}{4}\right) - \frac{d^2}{4}} - \frac{d}{2} = y = BC.$$

3. B. Es sey $c = 36$; $d = 10$, so ist EC
 $= \sqrt{\left(\frac{36^2}{2} - \frac{10^2}{4}\right) - \frac{10}{2}} = \sqrt{(648 - 25) - 5}$
 $= 25 - 5 = 20 = y$, und $AC = d + y = 30$.

§. 513. Aus der Hypotenuse $AB = d$
 Fig. 174., und der senkrechten $CD = p$, die
 auf der Hypotenuse abgeschnittenen Stücke
 x und y , so wie beide Catheten zu finden.

Aufl. Weil sich durch die 3 Punkte ACB ein Kreis
 ziehen läßt, worin $AB = d = \text{Diameter}$, so ist
 $DB = d - x$, und
 $x : p = p : y$ ob. $d - x$; und $p^2 = dx - x^2$

$$\frac{x^2 - dx = -p^2}{\frac{d^2}{4} - \frac{d^2}{4} = -p^2}$$

das Quadrat ergänzt $x^2 - dx + \frac{d^2}{4} = \frac{d^2}{4} - p^2$

$$\sqrt{\frac{d^2}{4} - p^2}$$

$$x - \frac{d}{2} = \sqrt{\left(\frac{d^2}{4} - p^2\right)}$$

$$AD = x = \frac{d}{2} + \sqrt{\left(\frac{d^2}{4} - p^2\right)}$$

Es sey $AB = d = 36$

$$CD = p = 16,8; \text{ so ist } \frac{36}{2} - \sqrt{\left(\frac{36^2}{4} - 16,8^2\right)}$$

$$= 18 - \sqrt{(324 - 282)} = 18 - \sqrt{42}$$

$$= 18 - 6,5 = 11,5 = x = AD$$

$$\text{und } 18 + 6,5 = 24,5 = y = DB.$$

Die Catheten ergeben sich leicht, denn die durch das
 Perpendikel entstandenen 3 Triangel sind einander
 ähnlich; und

$d : AC = AC : x$, folglich ist $AC = \sqrt{dx}$;
 und $d : CB = CB : y$, daher ist $CB = \sqrt{dy}$.

Man wird nach vorigen Werthen die $AC = 20,3$
 und die $CB = 29,7$ finden.

§. 514. Wenn außer der Hypotenuse AB
 $= c$ Fig. 175. das Verhältniß der beiden Cas
 theten $AC : CB = m : n$ gegeben ist, die beiden
 Catheten zu finden.

Aufl.

Aufl. Nenne die gesuchten Catheten x und y , und suche auch hier aus den Umständen 2 Gleichungen zu bekommen, woraus sich dann jede unbekante Größe wird absondern lassen.

Nach der Bedingung ist $x^2 = c^2 - y^2$, weil $\triangle ABC$ rechtwinklicht; und

$$x : y = m : n$$

$$xn = yn$$

die Gleichung in's Quadrat erhoben:

$$x^2 n^2 = y^2 m^2$$

$x^2 = \frac{y^2 m^2}{n^2}$; nun die Werthe für x^2 in die Gleichung gebracht.

$$c^2 - y^2 = \frac{y^2 m^2}{n^2}$$

$$c^2 n^2 - y^2 n^2 = y^2 m^2; c^2 n^2 = y^2 m^2 + y^2 n^2$$

$$c^2 n^2 = (m^2 + n^2) y^2$$

$$\frac{c^2 n^2}{m^2 + n^2} = y^2$$

$$\text{die Cathete } BC = \sqrt{\frac{c^2 n^2}{m^2 + n^2}} = y = \frac{cn}{\sqrt{m^2 + n^2}}$$

Sondert man aus den beiden Hauptgleichungen für y^2 die Werthe ab und setzt sie gleich, so findet sich

$$x = \frac{cm}{\sqrt{m^2 + n^2}} = AC.$$

Es sey $c = 36$; $m = 3$; $n = 2$; so ist

$$\frac{36 \cdot 2}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{72}{3,6} = 20 = BC$$

$$\text{und } \frac{36 \cdot 3}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{108}{3,6} = 30 = AC.$$

S. 515. Die Hypotenuse $AB = c$ Fig. 175.7 und die Summe der Catheten sind gegeben; man will die Catheten x und z selbst finden.

Aufl

Aufl. Im rechtwinklichten $\triangle ABC$ ist $c^2 = y^2 + z^2$;
also $c^2 - z^2 = y^2$.

und nach der Bedingung $x + z = a$ (Summe);

$$\text{also } a - z = x \\ \text{und } (a - z)^2 = x^2,$$

woraus die Gleichung entsteht:

$$c^2 - z^2 = a^2 - 2az + z^2$$

$$c^2 = a^2 - 2az + 2z^2$$

$$\frac{1}{2} c^2 = \frac{1}{2} a^2 - az + z^2 \quad (:2)$$

$$\frac{1}{4} a^2 \text{ addirt. } \frac{1}{2} c^2 - \frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{4} a^2 = z^2 - az + \frac{1}{4} a^2$$

$$\frac{1}{2} c^2 - \frac{1}{4} a^2 = z^2 - az + \frac{1}{4} a^2$$

$$\sqrt{\frac{1}{2} c^2 - \frac{1}{4} a^2} = z - \frac{1}{2} a$$

$$\frac{1}{2} a + \sqrt{\frac{1}{2} c^2 - \frac{1}{4} a^2} = z = BC \\ \text{und } \frac{1}{2} a + \sqrt{\frac{1}{2} c^2 - \frac{1}{4} a^2} = x = AC.$$

Nimmt man $a = 50$; $c = 36$, so erhält man $z = 20,2$, und $x = 29,8$.

§. 516. Aus dem gegebenen Flächeninhalt S eines rechtwinklichten Dreiecks Fig. 176., und der Summe seiner Seiten, oder dem Perimeter $= p$, seine Seiten zu finden.

Aufl. Inh. des Dreiecks $= 2a = xz$, und $4a = 2xz$
und weil das Dreieck rechtwinklicht, so ist $y^2 = x^2 + z^2$

$$\text{beide Gleichungen addirt } 4a + y^2 = x^2 + 2xz + z^2$$

$$\text{Nach der Aufgabe ist } x + y + z = p$$

$$x + z = p - y$$

$$\text{In's Quadrat erhoben } x^2 + 2xz + z^2 = p^2 - 2py + y^2$$

Da in zwei Gleichungen zwei Seiten einander gleich sind, so müssen es die andern auch seyn; daher

$$4a + y^2 = p^2 - 2py + y^2$$

$$4a = p^2 - 2py$$

$$4a - p^2 = -2py$$

$$y 2p = p^2 - 4a$$

$$y = \frac{p^2 - 4a}{2p} = AC.$$

Um

Um die Catheten zu finden, nenne $p - y = m$, so ist

$$\begin{aligned} m &= x + z, \\ \frac{m}{z} &= \frac{x+z}{z} \quad \text{und die } x \cdot z = 2a, \text{ also } x = \frac{2a}{z} \\ m &= \frac{2a}{z} + z \\ \frac{mz}{z} &= \frac{2a + z^2}{z} \quad (\cdot z) \\ mz &= 2a + z^2 \\ -2a &= z^2 - mz \\ \frac{1}{4}m^2 - 2a &= z^2 - mz + \frac{1}{4}m^2 \\ \sqrt{\frac{1}{4}m^2 - 2a} &= z - \frac{1}{2}m \\ \frac{1}{2}m + \sqrt{\frac{1}{4}m^2 - 2a} &= z = BC, \text{ wenn das Minuszeichen,} \\ &\text{und } x = AB, \text{ wenn das Pluszeichen gilt.} \end{aligned}$$

z. B. Wenn die Fläche $a = 6$; die Summe aller Seiten $p = 12$; so findet man $y = 5$; also $p - y = m = 7$; $x = 4$; $z = 3$.

§. 517. In dem Catheten BA des rechtwinklichten Dreiecks CAB Fig. 177 soll der Punkt D gefunden werden, auf welchem die senkrechte DE die mittlere Proportionallinie zwischen den abgeschnittenen Stücken $BD = x$ und DA ist.

Gegeben sind beide Catheten $BA = a$ und $AC = b$.

Es soll sich verhalten $x : DE = DE : a - x$
also ist $DE^2 = ax - x^2$

Und in den ähnlichen Dreiecken gilt $x : DE = a : b$

$$\text{also } DE = \frac{bx}{a}$$

$$\text{und } DE^2 = \frac{b^2x^2}{a^2}$$

Diese beiden Werthe für DE^2 geben die Gleichung:

$$\begin{array}{r}
 ax - x^2 = \frac{b^2 x^2}{a^2} \\
 \hline
 a^3 x - a^2 x^2 = b^2 x^2 \\
 \hline
 a^3 - a^2 x = b^2 x \quad (\div x) \\
 \hline
 a^3 = b^2 x + a^2 x = (b^2 + a^2) x \\
 \hline
 \frac{a^3}{b^2 + a^2} = x = BD.
 \end{array}$$

§. 518. Der Flächeninhalt eines schiefwinklichten $\triangle ABC$ Fig. 178, die senkrechte Höhe $CD = h$, und das Stück $BD = d$ ist gegeben; man sucht die Seiten.

Aufl. Weil die Auflösung nur leicht, so setzen wir nur die Resultate her. Der Flächeninhalt = a genommen.

$$BC = \sqrt{(d^2 + h^2)}$$

$$AB = \frac{2a}{h}; \text{ und } x = AB - d$$

$$AC = \sqrt{(x^2 + h^2)}.$$

§. 519. Aus zwei Seiten eines Dreiecks und dem eingeschlossenen Winkel den Flächenraum zu finden. Fig. 180.

Aufl. Gegeben ist $AB = a$; $AC = b$; $\angle BAC = m$.

$$\text{Sin. tot. : } a = \text{Sin. } m : BD; \text{ und } BD = \frac{a \cdot \text{Sin. } m}{\text{Sin. tot.}}$$

$$\text{Der Flächenraum} = \frac{AC \cdot BD}{2} \text{ oder } \frac{a \cdot b \cdot \text{Sin. } m}{2}$$

Wenn nun in einem andern Dreiecke die nämlichen Stücke A, B, M heißen, so ist auch seine Fläche

$$= \frac{A \cdot B \cdot \text{Sin. } M}{2} \text{ und } \triangle : \triangle' = \frac{a \cdot b \cdot \text{Sin. } m}{2}$$

$$= \frac{A \cdot B \cdot \text{Sin. } M}{2}$$

und wenn $m = M$, so ist $\triangle : \triangle' = a \cdot b : A \cdot B$,

d. h.

b. h. die Inhalte zweier Dreiecke oder Parallelogramme, die einen gleichen Winkel haben, verhalten sich zu einander, wie die Producte aus den Seiten, die den gleichen Winkel einschließen.

§. 520. Das Dreieck ABC. Fig. 181 soll aus dem Punkte D durch die Linie DE so getheilt werden, daß sich das ganze Dreieck zum abgeschrittenen Theil, wie $m : n$ verhalte.

Aufl. Da die $\triangle ABC$, und $\triangle DBE$ einen gleichen Winkel B haben, so gilt nach vorigem §.

$$\begin{aligned} m : n &= AB \cdot BC : DB \cdot BE \\ &= a \cdot d : d \cdot x \end{aligned}$$

$$\text{und } \frac{a \cdot b \cdot n}{d \cdot m} = x = BE.$$

Wenn BE größer würde, als BC, so fiel DE auf AC.

3. B. nach DF. Dann nenne man $AF = z$; $AC = c$; $AB = a$; $DB = d$, und $z = AF = \frac{(m-n) \cdot a \cdot c}{m \cdot (a-d)}$.

§. 521. Das Dreieck ABC Fig. 182. nach einem gegebenen Verhältniß $m : n$ so zu theilen, daß die Theilungslinie de mit einer Seite parallel bleibt.

Aufl. Weil hier immer ähnliche \triangle bleiben, so kommt es nur darauf an, die B. l zu finden,

$$\begin{aligned} \triangle ABC : \triangle dBe &= AB^2 : Bd^2 \\ \text{d. i. } m : n &= AB^2 : Bd^2; \text{ und } Bd \\ &= \sqrt{\frac{n \cdot AB^2}{m}} = AB \cdot \sqrt{\frac{n}{m}}. \end{aligned}$$

Soll das Dreieck in mehrere Theile getheilt werden, so wird nur n sich ändern, und für jedes n ein anderer Abstand Bd gefunden.

3. B. Ein Ackerstück, welches die Form eines Dreiecks hat, solle durch Parallelen in 5 gleich große Theile

theile getheilt werden. Der Flächenraum betrage
120 Quadratruthen, folglich $\frac{1}{2} = 24 \square$ Ruthen;
die Seite AB = 12 Ruthen.

Wendet man nun das Formular $AB \cdot \sqrt{\frac{n}{m}}$ an,
so ist bei der ersten Parallele de die $n = 24$; m immer
= 120, also $12 \cdot \sqrt{\frac{24}{120}} = 12 \sqrt{\frac{1}{5}} = 12 \cdot \sqrt{\frac{1}{5}}$,

$$= \frac{12}{\sqrt{5}} = 5,36 = Bd,$$

$$\text{und } 12 \sqrt{\frac{48}{120}} = 7,6 \dots Bf, \text{ wobei } n = 48,$$

$$\text{und } 12 \sqrt{\frac{72}{120}} = 9,3 \dots Bh, \text{ wobei } n = 72,$$

$$\text{und } 12 \cdot \sqrt{\frac{96}{120}} = 10,7 \dots Bk, \text{ wobei } n = 96.$$

Oder durch die Proportionen:

$$5 : 1 = 12^2 (= 144) : Bd^2, \text{ und } Bd = \sqrt{\frac{144}{5}},$$

$$5 : 2 = 144 : Bf^2, \text{ und } Bf = \sqrt{\frac{2 \cdot 144}{5}},$$

$$\text{u. s. w.} \quad Bh = \sqrt{\frac{3 \cdot 144}{5}},$$

$$Bk = \sqrt{\frac{4 \cdot 144}{5}},$$

§. 522. Von einem Trapezium ABEF
Fig. 183. mit zwei parallelen Seiten ein
Stück FECD von gegebenem Inhalt = m
abzuschneiden.

Nenne AB = a; EF = b; DC = y; die senk-
rechte Höhe FG = h. Es kommt darauf an, die
FJ = x, oder den Punct J zu finden, durch welche
die Parallele gelegt werden muß. Daher ziehe man
nach FH parallel mit EB; und dann gilt in ähnli-
chen \triangle

E

AH

$$AH : DK = FH : FK, \text{ oder wie } EG : FJ$$

$$\text{d. i. } a - b : y - b = h : x.$$

$$\frac{(y - b) \cdot h}{a - b} = x.$$

Nun ist die Fläche DFEC bekanntlich $= \frac{b + y}{2} \cdot x = m$

$$\text{und } x = \frac{2m}{b + y}$$

Diese Werthe von x geben eine neue Gleichung, woraus $y = \sqrt{\left(\frac{2m(a - b)}{h} + b^2\right)}$; und $x = \frac{2m}{y + b}$ gefunden wird.

Es sey $h = 93$ } dann kommt für $y = DC = 117$
 $a = 162$ } und für $x = FJ = 37,87$
 $b = 86$ }
 $m = 3844$ }

§. 523. Vom Trapezium ABCD Fig. 184, worin 2 parallele Seiten, soll aus dem Punkte F durch die Linie TE ein Stück von gegebenem Inhalt $= n$ abgeschnitten (also der Punkt E oder die $BE = x$) gefunden werden.

Neune $AD = a$ } Inhalt des Trapeziums ABCD
 $BC = b$ } $= \frac{(a + b)}{2} \cdot H = m,$
 $AB = c$ }
 $CD = d$ } Inhalt des Trapeziums ABET
 $AT = f$ } $= \frac{f + x}{2} \cdot H,$
 $BE = x$ }
Höhe $= H$ } und nach der Bedingung ist

$$\frac{a + b}{2} \cdot H : \frac{f + x}{2} \cdot H = m : n$$

$$a + b : f + x = m : n$$

$$\frac{(a + b) \cdot n}{m} = f + x; \text{ und } \frac{(a + b) \cdot n}{m} - f = x,$$

Wenn

Wenn $x = a$ oder $= b$ wird, so fällt E in B oder in C; wird x negativ, oder größer als b gefunden, so fällt die Theilungslinie auf BA oder CD, und das abzuschneidende Stück ist ein Dreieck, entweder AFT, oder TDG; wobei AF oder DG zu suchen ist. Man wird für

$$AF = \frac{(a+b)nc}{fm}; \text{ und } DG = (m-n)$$

$$\frac{(a+b)d}{(a-f)m} \text{ finden.}$$

z. B. Wenn $a = 162$
 $b = 86$
 $c = 98$
 $f = 29$
 $h = 93$
 $m = 3$
 $n = 1$ } so ist $x = \frac{(162+86) \cdot 1}{3}$
 $= 29 = 53,6 = BE.$
 Nimmt man $m = 20$, und
 $n = 1$, so findet man die
 $AF = 41,9.$
 Wenn $n = 15$ genommen
 wird, und $m = 20$ bleibt,
 so ist $DG = 45,7.$

§. 524. Jedes Trapezium (Fig. 185.) durch eine gerade Linie aus einem gegebenen Punkte auf einer seiner Seiten nach einem gegebenen Verhältnisse $m:n$ zu theilen.

Im Trapezium ABCD sey E der Theilungspunct, durch den die Linie EF so gelegt werden soll, daß

$$ABCD : CDEF = m : n.$$

Man bestimme auf irgend eine Weise die $AG = a$, $BG = b$, $DG = c$, $CG = d$, und nenne $EG = f$; der Punct F wird gesucht, oder sein Abstand $GF = x$.

Nach §. 519. gilt:

$$\triangle ABG : \triangle CDG = AG \cdot BG : DG \cdot CG$$

$$= a \cdot b : c \cdot d$$

daher $\triangle ABG - \triangle CDG : \triangle CDG = a \cdot b - c \cdot d : c \cdot d$
 d. i. $ABCD : \triangle CDG = a \cdot b - c \cdot d : c \cdot d$

$$\begin{aligned} \text{Und } \triangle EFG : \triangle CDG &= f, x : c, d \\ \triangle EFG - \triangle CDG : \triangle CDG &= fx - cd : cd \\ = CDEF : \triangle CDG &= fx - cd : cd \\ \text{Also } ABCD : CDEF &= ab - cd : fx - cd \\ &= m : n \end{aligned}$$

folglich $ab - cd : fx - cd = m : n$, woraus x zu finden.

$$(ab - cd) n = (fx - cd) m$$

$$\frac{(ab - cd) n}{m} + cd = fx$$

$$\frac{(ab - cd) n}{fm} + \frac{cd}{f} = x = GF.$$

§. 525. Eine gerade Linie $AB = a$, in G so zu theilen, daß das Rechteck aus den Stücken AG und GB einem gegebenen Quadrat gleich sey. Fig. 186.

$$AB = a$$

$$AG = x$$

$$BG = a - x$$

$$\text{Seite des Quadrats} = b.$$

Nach der Bedingung soll $(a - x) \cdot x = b^2$

$$x^2 - ax = b^2$$

$$a^2 - ax + \frac{a^2}{4} = b^2 + \frac{a^2}{4}$$

$$\sqrt{x - \frac{1}{2}a = \sqrt{(b^2 + \frac{1}{4}a^2)}}$$

$$x = \frac{1}{2}a + \sqrt{(b^2 + \frac{1}{4}a^2)}.$$

§. 526. Der Inhalt eines gleichseitigen Dreiecks ist gegeben $= a$; man sucht eine Seite $= x$, das Perpendikel $= p$. Fig. 187.

Aufl. Im gleichseitigen Dreieck (nach §. 495.) verhält sich eine Seite zum Perpendikel, wie

$$1 : 0,866 = x : p$$

$$\text{Also ist } x = \frac{p}{0,866}$$

$$\text{und } p = x \cdot 0,866.$$

Der Inhalt des Dreiecks $= \frac{x \cdot p}{2} = a$; und $x = \frac{2a}{p}$
 und $p = \frac{2a}{x}$.

Nimmt man nun die Werthe für $x = \frac{p}{0,866} = \frac{2a}{p}$
 so findet man das Perpend. $= p$. $\left\{ \begin{array}{l} p^2 = 2 \cdot a \cdot 0,866 \\ p = \sqrt{(2a \cdot 0,866)}. \end{array} \right.$

Auf gleiche Weise ergibt sich x , wenn man die Werthe für p in eine Gleichung setzt. Nämlich:

$$x \cdot 0,866 = \frac{2a}{x}$$

$$x^2 = \frac{2a}{0,866}$$

z. B. Es sey der Inhalt $a = 32$ □ Fuß gegeben, so muß jede Seite

$$x = \sqrt{\frac{2 \cdot 32}{0,866}} = \sqrt{73,9} = 8,6$$

$$p = \sqrt{(2 \cdot 32 \cdot 0,866)} = \sqrt{55,424} = 7,447$$

= dem Perpendikel.

§. 527. Zwei Linien (x und y) zu finden, deren Quadrate zusammen genommen einem gegebenen Quadrate $= a^2$, und deren Rechteck einem gegebenen Rechteck $= b \cdot c$ gleich sind.

Aufl. $y^2 + x^2 = a^2$ und $x \cdot y = bc$
 $x^2 = a^2 - y^2$; und $\frac{bc}{x} = y$ u. $x^2 = \frac{b^2 c^2}{y^2}$

$$a^2 - y^2 = \frac{b^2 c^2}{y^2}$$

$$a^2 y^2 - y^4 = b^2 c^2 = y^4 - a^2 y^2 = -b^2 c^2$$

$$\frac{y^4 - a^2 y^2 + \frac{1}{4} a^4 - \frac{1}{4} a^4 - b^2 c^2}{y^4 - a^2 y^2 + \frac{1}{4} a^4} = \frac{-b^2 c^2}{y^4 - a^2 y^2 + \frac{1}{4} a^4}$$

$$\sqrt{y^2 - \frac{1}{2} a^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{4} a^4 - b^2 c^2\right)}$$

$$y^2 = \frac{1}{2} a^2 + \sqrt{\left(\frac{1}{4} a^4 - b^2 c^2\right)}$$

$$y = \sqrt{\left(\frac{1}{2} a^2 + \sqrt{\left(\frac{1}{4} a^4 - b^2 c^2\right)}\right)}$$

Die x hat das -- Zeichen vor $\sqrt{\quad}$, und gleiches Formular.

§. 528. Diese Beispiele mögen hinreichend seyn, zu zeigen, wie man bei ähnlichen Aufgaben zu verfahren habe. Es kommt hier, wie bei jeder algebraischen Aufgabe, hauptsächlich darauf an, daß man das Gegebene und Gesuchte gehörig unterscheidet, aus den Umständen so viel Gleichungen herleite, als unbekante Größen darin vorkommen, und einige Gewandtheit in Auflösung der Gleichungen besitze. Wer sich aber in der Entwicklung solcher Aufgaben, in welchen die Algebra auf die Geometrie zweckmäßig angewandt ist, gefällt, dem ist zu empfehlen:

Thomas Bugge Anleitung zur mathematischen Geometrie, Trigonometrie und höheren Geometrie; übersetzt von Tobiesen. 436 Seiten, 4 Kupfertafeln. Preis 1 Rthlr. 16 Gr.

aus welchem trefflichen Werke die vorstehenden Aufgaben genommen sind.

Weil es im gemeinen Leben oft vorkommt, Flächen von bekannter Größe in andere geometrische Figuren zu verwandeln, so wollen wir darüber in dem folgenden Abschnitte noch die nothwendigsten Formeln mittheilen, mittelst deren jede dahin gehörige Aufgabe leicht zu lösen ist.

V. Verwandlung der Figuren.

§. 529. Unter Verwandlung einer Figur verstehen wir die Veränderung, die sich mit der Form oder Umfassung einer Fläche machen läßt, ohne ihren Quadrathalt zu vermehren oder zu vermindern. Die zu verändernde Fläche ist allemal bekannt; und von derjenigen, in welche sie verwandelt werden soll, ist die eine Bedingung, oder eine Größe gegeben, und die andere durch Rechnung oder Zeichnung zu finden. Das Auffuchen der unbekanten Größe durch Zeichnung ist oft sehr weitläufig und nicht einmal bei allen Figuren möglich; mittelst der Rechnung aber findet man sie nicht nur sehr bald, sondern