Der Rathgeber bei mathematischen Beschäftigungen

Stöpel, August

Stendal, 1819

§. 510-528. Aufgaben aus der analytischen Geometrie, die Dreiecke und Trapezien betreffend.

Man bemerkt leicht, daß die ersten Glieder in dieser Reihe allemal Halbkreise, die folgenden aber Halbringe sind; und daß die Werthe in der Progression 4, 8, 12, 16 ꝛc. beständig zunehmen, wornach für jeden vorkommenden Fall die Anwendung leicht zu machen ist.

Diese Schneckenlinie ist von der des Archimedes §. 382. verschieden.

§. 509. Die Fläche jeder Figur, sie mag von geraden oder krummen Linien begränzt seyn, zu finden.

Aufl. Zerlege durch Hülfslinien die Figur in bekannte geradlinichte oder krummlinichte Figuren, berechne jede einzeln, und addire dieselben.

Wenn die Krümmung sich auf keine der bekannten krummen Linien bringen lassen will, so zerlege man sie in sehr kleine Dreiecke und berechne sie. Denn alsdann kann der Theil, der in einen solchen Triangel fällt, ohne großen Irrthum für geradlinicht gelten. Dabei ist zu vergleichen, was über die krummen Linien höherer Ordnungen gesagt worden ist.

IV. Vermischte Aufgaben über Linien- und Flächenmessung.

§. 510. Über einer gegebenen Linie AB Fig. 171. ein rechtwinklichtes Dreieck zu zeichnen, in welchem der rechte Winkel der gegebenen Seite gegenüber steht, und dessen Fläche einem gegebenen Quadrat Q gleich ist.

Aufl. Aus der Mitte der AB beschreibe einen Halbkreis, so wird jeder Peripheriewinkel ACB die verlangte Eigenschaft haben. Allein der Punct C ist hier zu finden, durch welchen die Höhe des Dreiecks bestimmt wird. Nennt man die Seite des Quadrats a; $AB = b$; die Höhe des Dreiecks $= z$, so soll nach der Bedingung $\frac{bz}{2} = a^2$; also $bz = 2a^2$, und

$z = \frac{2a^2}{b} = AD$. Von AD ziehe eine Parallele mit AB, so wird der Durchschnitt mit dem Kreise den Punct C geben; und $CP = z =$ Höhe seyn. Den Abstand $AP = v$ findet man also:

Nach der Gleichung für den Kreis ist $AP : PC = PC : PB$, oder

$$v : z = z : b - v;\ z^2 = bv - v^2$$

$$v^2 - bv = -z^2$$

$$v^2 - bv + \frac{b^2}{4} = \frac{b^2}{4} - z^2$$ Siehe quadrat. Gleich. §. 147. u. f.)

$$\sqrt{\ }\ \ v - \frac{b}{2} = \sqrt{\left(\frac{b^2}{4} - z^2\right)}$$

$$AP = v = \frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b^2}{4} - z^2\right)}.$$

Um die Seite x zu finden: $v^2 + z^2 = x^2$, und $x = \sqrt{(v^2 + z^2)}$. Weil $y \cdot x = a^2$, so ist $y = \frac{a^2}{x}$.

Z. B. Es sey $a = 4$, $b = 10$; so ist $z = \frac{2 \cdot 4^2}{10} = \frac{32}{10} = 3{,}2$; $v = \frac{10}{2} - \sqrt{\left(\frac{10^2}{4} - 3{,}2^2\right)} = 5 - \sqrt{(25 - 10{,}24)} = 5 - \sqrt{(14{,}76)} = 5 - 3{,}84 = 1{,}16 = v$.

§. 511. Wenn in einem rechtwinklichten △ ABC Fig. 172. die eine Seite $AC = b$, und der Unterschied der beiden andern $= d$ bekannt ist, die Cathete $BC = x$ und die Hypotenuse zu finden.

Aufl. Mit BC beschreibe aus B den Bogen CD, so ist $BD = BC = x$, und $AB = x + d$.

Nun

Nun ist nach dem pythagorischen Lehrsatz:

$$AC^2 + CB^2 = AB^2$$

$$\text{d. i.} = b^2 + x^2 = (x+d)^2$$

$$b^2 + x^2 = x^2 + 2dx + d^2$$

$$b^2 = d^2 + 2dx$$

$$b^2 - d^2 = 2dx$$

$$\frac{b^2 - d^2}{2d} = x = BC$$

$$\text{und } d + \frac{b^2 - d^2}{2d} = \frac{d^2 + b^2}{2d} = AB.$$

Es sey $b = 9$; $d = 4$; so ist $\frac{9^2 - 4^2}{8} = 8{,}125 = x$

$$+4 \quad = d$$

$$12{,}125 = AB.$$

§. 512. Aus der Hypotenuse im $\triangle$ ABC Fig. 173. und dem Unterschiede der beiden Catheten $AC - BC = d$, die Seite $AC = x$ und $BC = y$ zu finden.

Aufl. Nenne die Hypotenuse $AB = c$, und mache $CD = CB$, so ist $d = x - y$. Nun ist $AB^2 = AC^2 + BC^2$, d. i. $c^2 = x^2 + y^2$, und $x^2 = c^2 - y^2$. Aber $d = x - y$, also $x = d + y$

$$\text{und } x^2 = d^2 + 2dy + y^2$$

diese beiden Werthe von x^2 geben eine neue Gleichung:

$$c^2 - y^2 = d^2 + 2dy + y^2$$

$$c^2 = d^2 + 2dy + 2y^2 \quad (:2$$

$$\frac{c^2 - d^2}{2} = dy + y^2$$

$$\frac{c^2 - d^2}{2} + \frac{d^2}{4} = y^2 + dy + \frac{d^2}{4}$$

$$\sqrt{\frac{c^2}{2} - \frac{d^2}{2} + \frac{d^2}{4}} = \frac{c^2}{2} - \frac{d^2}{4} = y^2 + dy + \frac{d^2}{4}$$

$$\sqrt{\left(\frac{c^2}{2} - \frac{d^2}{4}\right)} - \frac{d}{2} = y = BC.$$

Z. B. Es sey $c = 36$; $d = 10$, so ist BC
$$= \sqrt{\left(\frac{36^2}{2} - \frac{10^2}{4}\right)} - \frac{10}{2} = \sqrt{(648 - 25)} - 5$$
$$= 25 - 5 = 20 = y, \text{ und } AC = d + y = 30.$$

§. 513. Aus der Hypotenuse $AB = d$ Fig. 174., und der senkrechten $CD = p$, die auf der Hypotenuse abgeschnittenen Stücke x und y, so wie beide Catheten zu finden.

Aufl. Weil sich durch die 3 Puncte ACB ein Kreis ziehen läßt, worin $AB = d =$ Diameter, so ist $DB = d - x$, und

$$x : p = p : y \text{ od. } d - x \text{; und } p^2 = dx - x^2$$
$$x^2 - dx = -p^2$$
das Quadrat ergänzt $x^2 - dx + \frac{d^2}{4} = \frac{d^2}{4} - p^2$
$$\sqrt{} \quad x - \frac{d}{2} = \sqrt{\left(\frac{d^2}{4} - p^2\right)}$$
$$AD = x \quad = \frac{d}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{d^2}{4} - p^2\right)}.$$

Es sey $AB = d = 36$
$$CD = p = 16{,}8; \text{ so ist } \frac{36}{2} - \sqrt{\left(\frac{36^2}{4} - 16{,}8^2\right)}$$
$$= 18 - \sqrt{(324 - 282)} = 18 - \sqrt{42}$$
$$= 18 - 6{,}5 = 11{,}5 = x = AD$$
urd $18 + 6{,}5 = 24{,}5 = y = DB$.

Die Catheten ergeben sich leicht, denn die durch das Perpendikel entstandenen 3 Triangel sind einander ähnlich; und
$d : AC = AC : x$, folglich ist $AC = \sqrt{dx}$
und $d : CB = CB : y$, daher ist $CB = \sqrt{dy}$.

Man wird nach vorigen Werthen die $AC = 20{,}3$ und die $CB = 29{,}7$ finden.

§. 514. Wenn außer der Hypotenuse $AB = c$ Fig. 175. das Verhältniß der beiden Catheten $AC : CB = m : n$ gegeben ist, die beiden Catheten zu finden.

Aufl.

Aufl. Nenne die gesuchten Catheten x und y, und suche auch hier aus den Umständen 2 Gleichungen zu bekommen, woraus sich dann jede unbekannte Größe wird absondern lassen.

Nach der Bedingung ist $x^2 = c^2 - y^2$, weil $\triangle$ ABC rechtwinklicht; und

$$x : y = m : n$$

$$xn = yn$$

$$x^2n^2 = y^2m^2 \text{ die Gleichung in's Quadrat erhoben:}$$

$$x^2 = \frac{y^2m^2}{n^2}\text{; nun die Werthe für } x^2 \text{ in die Gleichung gebracht.}$$

$$c^2 - y^2 = \frac{y^2m^2}{n^2}$$

$$c^2n^2 - y^2n^2 = y^2m^2;\quad c^2n^2 = y^2m^2 + y^2n^2$$

$$c^2n^2 = (m^2+n^2)\,y^2$$

$$\frac{c^2n^2}{m^2+n^2} = y^2$$

die Cathete $BC = \sqrt{\frac{c^2n^2}{m^2+n^2}} = y = \frac{cn}{\sqrt{(m^2+n^2)}}$.

Sondert man aus den beiden Hauptgleichungen für y^2 die Werthe ab und setzt sie gleich, so findet sich

$$x = \frac{cm}{\sqrt{(m^2+n^2)}} = AC.$$

Es sey $c = 36$; $m = 3$; $n = 2$; so ist

$$\frac{36\,.\,2}{\sqrt{(3^2+2^2)}} = \frac{72}{3,6} = 20 = BC$$

und $\frac{36\,.\,3}{\sqrt{(3^2+2^2)}} = \frac{108}{3,6} = 30 = AC.$

§. 515. Die Hypotenuse AB = c Fig. 175.) und die Summe der Catheten sind gegeben; man will die Catheten x und z selbst finden.

Aufl. Im rechtwinklichten $\triangle ABC$ ist $c^2 = y^2 + z^2$;
also $c^2 - z^2 = x^2$.
und nach der Bedingung $x + z = a$ (Summe):
also $a - z = x$
und $(a - z)^2 = x^2$,

woraus die Gleichung entsteht:

$$c^2 - z^2 = a^2 - 2az + z^2$$

$$c^2 = a^2 - 2az + 2z^2 \quad (:2$$

$$\tfrac{1}{2} c^2 - \tfrac{1}{2} a^2 = z^2 - az$$

$\tfrac{1}{4}a^2$ addirt. $$\tfrac{1}{2} c^2 - \tfrac{1}{2} a^2 + \tfrac{1}{4} a^2 = z^2 - az + \tfrac{1}{4} a^2$$

$$\tfrac{1}{2} c^2 - \tfrac{1}{4} a^2 = z^2 - az + \tfrac{1}{4} a^2$$

$\surd$ $$\surd\left(\tfrac{1}{2} c^2 - \tfrac{1}{4} a^2\right) = z - \tfrac{1}{2} a$$

$$\tfrac{1}{2} a \mp \surd\left(\tfrac{1}{2} c^2 - \tfrac{1}{4} a^2\right) = z = BC$$

und $$\tfrac{1}{2} a \pm \surd\left(\tfrac{1}{2} c^2 - \tfrac{1}{4} a^2\right) = x = AC.$$

Nimmt man $a = 50$; $c = 36$, so erhält man $z = 20{,}2$, und $x = 29{,}8$.

§. 516. Aus dem gegebenen Flächeninhalt $= a$ eines rechtwinklichten Dreiecks Fig. 176, und der Summe seiner Seiten, oder dem Perimeter $= p$, seine Seiten zu finden.

Aufl. Inh. des Dreiecks $= 2a = xz$, und $4a = 2xz$
und weil das Dreieck rechtwinklicht, so ist $y^2 = x^2 + z^2$

beide Gleichungen addirt $4a + y^2 = x^2 + 2xz + z^2$

Nach der Aufgabe ist $x + y + z = p$

$$x + z = p - y$$

in's Quadrat erhoben $x^2 + 2xz + z^2 = p^2 - 2py + y^2$.

Da in zwei Gleichungen zwei Seiten einander gleich sind, so müssen es die andern auch seyn; daher

$$4a + y^2 = p^2 - 2py + y^2$$

$$4a = p^2 - 2py$$

$$4a - p^2 = - y2p$$

$$y2p = p^2 - 4a$$

$$y = \frac{p^2 - 4a}{2p} = AC.$$

Um

Um die Catheten zu finden, nehme $p - y = m$, so ist

$$m = x + z, \quad \text{und die } x \cdot z = 2a, \text{ also } x = \frac{2a}{z}$$

$$m = \frac{2a}{z} + z \quad (z$$

$$mz = 2a + z^2$$

$$-2a = z^2 - mz$$

$$\tfrac{1}{4}m^2 - 2a = z^2 - mz + \tfrac{1}{4}m^2$$

$$\surd \quad \sqrt{(\tfrac{1}{4}m^2 - 2a)} = z - \tfrac{1}{2}m$$

$$\tfrac{1}{2}m + \sqrt{(\tfrac{1}{4}m^2 - 2a)} = z = BC,$$ wenn das Minuszeichen;

und $= x = AB$, wenn das Pluszeichen gilt.

Z. B. Wenn die Fläche $a = 6$; die Summe aller Seiten $p = 12$; so findet man $y = 5$; also $p - y = m = 7$; $x = 4$; $z = 3$.

§. 517. In dem Catheten BA des rechtwinklichten Dreiecks CAB Fig. 177 soll der Punct D gefunden werden, auf welchem die senkrechte DE die mittlere Proportionallinie zwischen den abgeschnittenen Stücken $BD = x$ und DA ist.

Gegeben sind beide Catheten $BA = a$ und $AC = b$.

Es soll sich verhalten $x : DE = DE : a - x$

also ist $DE^2 = ax - x^2$

Und in den ähnlichen Dreiecken gilt $x : DE = a : b$

also $DE = \frac{bx}{a}$

und $DE^2 = \frac{b^2x^2}{a^2}$

Diese beiden Werthe für DE^2 geben die Gleichung:

$$ax - x^2 = \frac{b^2x^2}{a^2}$$

$$a^3x - a^2x^2 = b^2x^2$$

$$a^3 - a^2x = b^2x \quad (:x$$

$$a^3 = b^2x + a^2x = (b^2 + a^2)x$$

$$\frac{a^3}{b^2+a^2} = x = BD.$$

§. 518. Der Flächeninhalt eines schiefwinklichten △ ABC Fig. 178, die senkrechte Höhe CD = h, und das Stück BD = d ist gegeben; man sucht die Seiten.

Aufl. Weil die Auflösung nur leicht, so setzen wir nur die Resultate her. Der Flächeninhalt = a genommen.

$$BC = \sqrt{(d^2 + h^2)}$$

$$AB = \frac{2a}{h}; \text{ und } x = AB - d$$

$$AC = \sqrt{(x^2 + h^2)}.$$

§. 519. Aus zwei Seiten eines Dreiecks und dem eingeschlossenen Winkel den Flächenraum zu finden. Fig. 180.

Aufl. Gegeben ist AB = a; AC = b; < BAC = m.

$$\text{Sin. tot.} : a = \text{Sin. m} : BD; \text{ und } BD = \frac{a \,.\, \text{Sin. m}}{\text{Sin. tot.}}$$

$$\text{Der Flächenraum} = \frac{AC \,.\, BD}{2} \text{ oder } \frac{a \,.\, b \,.\, \text{Sin. m}}{2}.$$

Wenn nun in einem andern Dreiecke die nämlichen Stücke A, B, M heißen, so ist auch seine Fläche $= \frac{A \,.\, B \,.\, \text{Sin. M}}{2}$ und $\triangle : \triangle' = \frac{a \,.\, b \,.\, \text{Sin. m}}{2} : \frac{A \,.\, B \,.\, \text{Sin. M}}{2}$, und wenn m = M, so ist $\triangle : \triangle' = a \,.\, b : A \,.\, B$,

d. h.

d. h. die Inhalte zweier Dreiecke oder Parallelogramme, die einen gleichen Winkel haben, verhalten sich zu einander, wie die Producte aus den Seiten, die den gleichen Winkel einschließen.

§. 520. Das Dreieck ABC. Fig. 181 soll aus dem Puncte D durch die Linie DE so getheilt werden, daß sich das ganze Dreieck zum abgeschnittenen Theil, wie m : n verhalte.

Aufl. Da die △ ABC, und DBE einen gleichen Winkel B haben, so gilt nach vorigem §.

$$m : n = AB . BC : DB . BE$$
$$= a . d : d . x$$

$$\text{und } \frac{a . b . n}{d . m} = x = BE.$$

Wenn BE größer würde, als BC, so fiele DE auf AC.

Z. B. nach DF. Dann nenne man $AF = z$; $AC = c$; $AB = a$; $DB = d$, und $z = AE$
$$= \frac{(m - n) . a . c}{m . (a - d)}.$$

§. 521. Das Dreieck ABC Fig. 182. nach einem gegebenen Verhältniß m:n so zu theilen, daß die Theilungslinie de mit einer Seite parallel bleibt.

Aufl. Weil hier immer ähnliche △ bleiben, so kommt es nur darauf an, die Bd zu finden,

$$\triangle ABC : \triangle dBe = AB^2 : Bd^2$$
d. i. $m : n = AB^2 : Bd^2$; und Bd
$$= \sqrt{\frac{n . AB^2}{m}} = AB . \sqrt{\frac{n}{m}}.$$

Soll das Dreieck in mehrere Theile getheilt werden, so wird nur n sich ändern, und für jedes n ein anderer Abstand Bd gefunden.

Z. B. Ein Ackerstück, welches die Form eines Dreiecks hat, solle durch Parallelen in 5 gleich große Theile

Theile getheilt werden. Der Flächenraum betrage 120 Quadratruthen, folglich $\frac{1}{5} = 24$ □ Ruthen; die Seite $AB = 12$ Ruthen.

Wendet man nun das Formular $AB \cdot \sqrt{\frac{n}{m}}$ an, so ist bei der ersten Parallele de die $n = 24$; m immer $= 120$, also $12 \cdot \sqrt{\frac{24}{120}} = 12\sqrt{\frac{1}{5}} = 12 \cdot \sqrt{\frac{1}{5}}$,

$= \frac{12}{\sqrt{5}} = 5,36 = Bd$,

und $12\sqrt{\frac{48}{120}} = 7,6..\ Bf$, wobei $n = 48$,

und $12\sqrt{\frac{72}{120}} = 9,3..\ Bh$, wobei $n = 72$,

und $12 \cdot \sqrt{\frac{96}{120}} = 10.7..\ Bk$, wobei $n = 96$.

Oder durch die Proportionen:

$5 : 1 = 12^2\ (= 144) : Bd^2$, und $Bd = \sqrt{\frac{144}{5}}$,

$5 : 2 = 144 : Bf^2$, und $Bf = \sqrt{\frac{2 \cdot 144}{5}}$,

u. s. w. $Bh = \sqrt{\frac{3 \cdot 144}{5}}$,

$Bk = \sqrt{\frac{4 \cdot 144}{5}}$.

§. 522. Von einem Trapezium ABEF Fig. 183. mit zwei parallelen Seiten ein Stück FECD von gegebenem Inhalt $= m$ abzuschneiden.

Nenne $AB = a$; $EF = b$; $DC = y$; die senkrechte Höhe $FG = h$. Es kommt darauf an, die $FJ = x$, oder den Punct J zu finden, durch welche die Parallele gelegt werden muß. Daher ziehe man nach FH parallel mit EB; und dann gilt in ähnlichen △

AH : DK = FH : FK, oder wie FG : FJ

d. i. $a - b : y - b = h : x$.

$$\frac{(y-b) \cdot h}{a-b} = x.$$

Nun ist die Fläche DFEC bekanntlich $= \frac{b+y}{2} \cdot x = m$

und $x = \frac{2m}{b+y}$.

Diese Werthe von x geben eine neue Gleichung, woraus $y = \sqrt{\left(\frac{2m\,(a-b)}{h} + b^2\right)}$; und $x = \frac{2m}{y+b}$ gefunden wird.

Es sey $\left.\begin{array}{l} h = 93 \\ a = 162 \\ b = 86 \\ m = 3844 \end{array}\right\}$ dann kommt für $y = DC = 117$ und für $x = FJ = 37{,}87$.

§. 523. Vom Trapezium ABCD Fig. 184., worin 2 parallele Seiten, soll aus dem Puncte T durch die Linie TE ein Stück von gegebenem Inhalt = n abgeschnitten (also der Punct E oder die BE = x) gefunden werden.

Nenne $\left.\begin{array}{l} AD = a \\ BC = b \\ AB = c \\ CD = d \\ AT = f \\ BE = x \\ \text{Höhe} = H \end{array}\right\}$ Inhalt des Trapeziums ABCD $= \frac{(a+b)}{2} \cdot H = m$. Inhalt des Trapeziums ABET $= \frac{f+x}{2} \cdot H$, und nach der Bedingung ist

$$\frac{a+b}{2} \cdot H : \frac{f+x}{2} \cdot H = m : n$$

$$a + b : f + x = m : n$$

$$\frac{(a+b) \cdot n}{m} = f + x; \text{ und } \frac{(a+b) \cdot n}{m} - f = x,$$

Wenn

Wenn $x = 0$ oder $= b$ wird, so fällt E in B oder in C; wird x negativ, oder größer als b gefunden, so fällt die Theilungslinie auf BA oder CD, und das abzuschneidende Stück ist ein Dreieck, entweder AFT, oder TDG; wobei AF oder DG zu suchen ist. Man wird für

$$AF = \frac{(a+b)\,nc}{fm}; \text{ und } DG = (m-n)\,\frac{(a+b)\,d}{(a-f)\,m}$$

finden.

Z. B. Wenn
$$\left.\begin{array}{l} a = 162 \\ b = 86 \\ c = 98 \\ f = 29 \\ h = 93 \\ m = 3 \\ n = 1 \end{array}\right\}$$
so ist $x = \frac{(162+86)\,.\,1}{3} - 29 = 53{,}6 = BE$.
Nimmt man $m = 20$, und $n = 1$, so findet man die $AF = 41{,}9$.
Wenn $n = 15$ genommen wird, und $m = 20$ bleibt, so ist $DG = 45{,}7$.

§. 524. Jedes Trapezium (Fig. 185.) durch eine gerade Linie aus einem gegebenen Puncte auf einer seiner Seiten nach einem gegebenen Verhältnisse $m : n$ zu theilen.

Im Trapezium ABCD sey E der Theilungspunct, durch den die Linie EF so gelegt werden soll, daß

$$ABCD : CDEF = m : n.$$

Man bestimme auf irgend eine Weise die $AG = a$, $BG = b$, $DG = c$, $CG = d$, und nenne $EG = f$; der Punct F wird gesucht, oder sein Abstand $GF = x$.

Nach §. 519. gilt:

$$\triangle ABG : \triangle CDG = AG\,.\,BG : DG\,.\,CG$$
$$= a\,.\,b : c\,.\,d$$

daher $\triangle ABG - \triangle CDG : \triangle CDG = a.b - c.d : c.d$

d. i. $ABCD : \triangle CDG = a.b - c.d : c.d$

Und $\triangle EFG : \triangle CDG = f.x : c.d$

$\triangle EFG - \triangle CDG : \triangle CDG = fx - cd : cd$

$= CDEF : \triangle CDG = fx - cd : cd$

Also $ABCD : CDEF = ab - cd : fx - cd$

$= \quad m \quad : \quad n$

folglich $ab - cd : fx - cd = m : n$, woraus x zu finden.

$(ab - cd)\, n = (fx - cd)\, m$

$$\frac{(ab - cd)\, n}{m} + cd = fx$$

$$\frac{(ab - cd)\, n}{fm} + \frac{cd}{f} = x = GF.$$

§. 525. Eine gerade Linie $AB = a$, in G so zu theilen, daß das Rechteck aus den Stücken AG und GB einem gegebenen Quadrat gleich sey. Fig. 186.

$AB = a$
$AG = x$
$BG = a - x$
Seite des Quadrats $= b$.

Nach der Bedingung soll $(a - x) \cdot x = b^2$

$$x^2 - ax = b^2$$

$$a^2 - ax + \frac{a^2}{4} = b^2 + \frac{a^2}{4}$$

$$\sqrt{\quad} \qquad x - \tfrac{1}{2} a = \sqrt{(b^2 + \tfrac{1}{4} a^2)}$$

$$x = \tfrac{1}{2} a + \sqrt{(b^2 + \tfrac{1}{4} a^2)}.$$

§. 526. Der Inhalt eines gleichseitigen Dreiecks ist gegeben $= a$; man sucht eine Seite $= x$, das Perpendikel $= p$. Fig. 187.

Aufl. Im gleichseitigen Dreieck (nach §. 495.) verhält sich eine Seite zum Perpendikel, wie

$1 : 0{,}866 = x : p$

Also ist $x = \frac{p}{0{,}866}$

und $p = x \cdot 0{,}866.$

Der Inhalt des Dreiecks $= \frac{x \,.\, p}{2} = a$; und $x = \frac{2a}{p}$

und $p = \frac{2a}{x}$.

Nimmt man nun die Werthe für $x = \frac{p}{0{,}866} = \frac{2a}{p}$

so findet man das Perpend. $= p.$ $\left\{ \begin{array}{l} p^2 = 2 \,.\, a \,.\, 0{,}866 \\ p = \sqrt{(2a \,.\, 0{,}866)}. \end{array} \right.$

Auf gleiche Weise ergiebt sich x, wenn man die Werthe für p in eine Gleichung setzt. Nämlich:

$$x \,.\, 0{,}866 = \frac{2a}{x}$$

$$x^2 = \frac{2a}{0{,}866}.$$

Z. B. Es sey der Inhalt a = 32 □ Fuß gegeben, so muß jede Seite

$$x = \sqrt{\frac{2 \,.\, 32}{0{,}866}} = \sqrt{73{,}9} = 8{,}6$$

$$p = \sqrt{(2 \,.\, 32 \,.\, 0{,}866)} = \sqrt{55{,}424} = 7{,}447$$

= dem Perpendikel.

§. 527. Zwei Linien (x und y) zu finden, deren Quadrate zusammen genommen einem gegebenen Quadrate $= a^2$, und deren Rechteck einem gegebenen Rechteck $= b \,.\, c$ gleich sind.

Aufl. $\frac{y^2 + x^2 = a^2}{x^2 = a^2 - y^2}$; und $\frac{x \,.\, y = bc}{x = \frac{bc}{y}}$, u. $x^2 = \frac{b^2c^2}{y^2}$

$$a^2 - y^2 = \frac{b^2c^2}{y^2}$$

$$a^2y^2 - y^4 = b^2c^2 = y^4 - a^2y^2 = -b^2c^2$$

$$y^4 - a^2y^2 + \tfrac{1}{4}a^4 = \tfrac{1}{4}a^4 - b^2c^2$$

$$\sqrt{\quad} \; y^2 - \tfrac{1}{2}a^2 = \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^4 - b^2c^2)}$$

$$y^2 = \tfrac{1}{2}a^2 + \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^4 - b^2c^2)}$$

$$y = \sqrt{(\tfrac{1}{2}a^2 \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^4 - b^2c^2)})}$$

Die x hat das -- Zeichen vor $\sqrt{\ }$, und gleiches Formular.

§. 528. Diese Beispiele mögen hinreichend seyn, zu zeigen, wie man bei ähnlichen Aufgaben zu verfahren habe. Es kommt hier, wie bei jeder algebraischen Aufgabe, hauptsächlich darauf an, daß man das Gegebene und Gesuchte gehörig unterscheide, aus den Umständen so viel Gleichungen herleite, als unbekannte Größen darin vorkommen, und einige Gewandheit in Auflösung der Gleichungen besitze. Wer sich aber in der Entwickelung solcher Aufgaben, in welchen die Algebra auf die Geometrie zweckmäßig angewandt ist, gefällt, dem ist zu empfehlen:

> Thomas Bugge Anleitung zur mathematischen Geometrie, Trigonometrie und höheren Geometrie; übersetzt von Tobiesen. 436 Seiten, 4 Kupfertafeln. Preis 1 Rthlr. 16 Gr.

aus welchem trefflichen Werke die vorstehenden Aufgaben genommen sind.

Weil es im gemeinen Leben oft vorkommt, Flächen von bekannter Größe in andere geometrische Figuren zu verwandeln, so wollen wir darüber in dem folgenden Abschnitte noch die nothwendigsten Formeln mittheilen, mittelst deren jede dahin gehörige Aufgabe leicht zu lösen ist.

V. Verwandlung der Figuren.

§. 529. Unter **Verwandlung einer Figur** verstehen wir die Veränderung, die sich mit der Form oder Umfassung einer Fläche machen läßt, ohne ihren Quadratinhalt zu vermehren oder zu vermindern. Die zu verändernde Fläche ist allemal bekannt; und von derjenigen, in welche sie verwandelt werden soll, ist die eine Bedingung, oder eine Größe gegeben, und die andere durch Rechnung oder Zeichnung zu finden. Das Aufsuchen der unbekannten Größe durch Zeichnung ist oft sehr weitläufig und nicht einmal bei allen Figuren möglich; mittelst der Rechnung aber findet man sie nicht nur sehr bald, sondern