Der Rathgeber bei mathematischen Beschäftigungen

Stöpel, August

Stendal, 1819

V. Verwandlung der Figuren.

urn:nbn:de:hbz:466:1-63556

Die x hat das -- Zeichen vor $\sqrt{}$, und gleiches Formular.

§. 528. Diese Beispiele mögen hinreichend seyn, zu zeigen, wie man bei ähnlichen Aufgaben zu verfahren habe. Es kommt hier, wie bei jeder algebraischen Aufgabe, hauptsächlich darauf an, daß man das Gegebene und Gesuchte gehörig unterscheide, aus den Umständen so viel Gleichungen herleite, als unbekannte Größen darin vorkommen, und einige Gewandheit in Auflösung der Gleichungen besitze. Wer sich aber in der Entwickelung solcher Aufgaben, in welchen die Algebra auf die Geometrie zweckmäßig angewandt ist, gefällt, dem ist zu empfehlen:

Thomas Bugge Anleitung zur mathematischen Geometrie, Trigonometrie und höheren Geometrie; übersetzt von Tobiesen. 436 Seiten, 4 Kupfertafeln. Preis 1 Rthlr. 16 Gr.

aus welchem trefflichen Werke die vorstehenden Aufgaben genommen sind.

Weil es im gemeinen Leben oft vorkommt, Flächen von bekannter Größe in andere geometrische Figuren zu verwandeln, so wollen wir darüber in dem folgenden Abschnitte noch die nothwendigsten Formeln mittheilen, mittelst deren jede dahin gehörige Aufgabe leicht zu lösen ist.

V. Verwandlung der Figuren.

§. 529. Unter Verwandlung einer Figur verstehen wir die Veränderung, die sich mit der Form oder Umfassung einer Fläche machen läßt, ohne ihren Quadratinhalt zu vermehren oder zu vermindern. Die zu verändernde Fläche ist allemal bekannt; und von derjenigen, in welche sie verwandelt werden soll, ist die eine Bedingung, oder eine Größe gegeben, und die andere durch Rechnung oder Zeichnung zu finden. Das Aufsuchen der unbekannten Größe durch Zeichnung ist oft sehr weitläufig und nicht einmal bei allen Figuren möglich; mittelst der Rechnung aber findet man sie nicht nur sehr bald, sondern

dern auch viel genauer. — Bei dieser Verwandlung beobachte man folgende Regel: Auf die eine Seite einer Gleichung schreibe man den gegebenen Flächeninhalt $= F$, oder die Größen, woraus er besteht; auf die andere Seite schreibe man die Formel für den Flächenraum derjenigen Figur, in welche die Verwandlung geschehen soll; lege dann den bekannten Größen ihre Werthe unter, und sondere die unbekannten gehörig ab. Z. B.

Ein Garten von 120 □ Ruthen, der sehr winklicht ist, und daher viel Umzäumung braucht, soll in ein Rechteck verwandelt werden, dessen eine Seite 10 Ruthen ist; so ist

Gegebener Inhalt = Formel für das Rechteck (s. §. 488.)

$$120 = l \cdot b$$

Man fragt, wie lang muß der Garten werden, wenn er 10 Ruthen breit ist? und sucht also l, oder die Länge.

Jetzt ist $120 = l \cdot 10$ und l abgesondert

$$\frac{120}{10} = 12 = l$$

d. h. der Garten muß bei einer Breite von 10 Ruthen 12 Ruthen lang werden.

Die folgenden Formulare sind auf diese Weise gefunden, und für diejenigen, die nicht selbst die Gleichung lösen können oder wollen, als eine Hülfstafel anzusehen.

§. 530. Den Flächenraum F zu verwandeln

in ein Quadrat. Formel $\sqrt{F} = a$.

Die Quadratwurzel aus dem gegebenen Flächenraum ist die Größe einer Seite des Quadrats.

§. 531. in ein Rechteck. Formel. $\frac{F}{a} = b$.

Mit der gegebenen oder gewählten Seite a des Rechtecks dividire den gegebenen Flächenraum, so ist der Quotient die andere gesuchte Seite b.

§. 532.

§. 532. in einen Rhombus oder Rhomboides. Formel $\frac{F}{g} = h$; $\frac{F}{h} = g$.

Mit der gegebenen Seite g dividire in den Flächenraum, so erhält man die senkrechte Höhe h; dividirt man mit der Höhe, so kommt die Grundlinie g.

§. 533. in ein rechtwinklichtes Dreieck. Formel: $\frac{2F}{g} = h$; und $\frac{2F}{h} = g$.

Dividire die doppelt genommene Fläche mit der Grundlinie g, so giebt der Quotient die Höhe h, oder die andere Cathete; dividirt man aber mit der Höhe, so ist der Quotient $= g =$ der Grundlinie.

§. 534. in ein schiefwinklichtes Dreieck. Form: $\frac{2F}{g} = h$; und $\frac{2F}{h} = g$.

Verfahre, wie vorher §. 533., und bemerke, daß h immer die Größe des aus der gegenüberstehenden Winkelspitze auf die Grundlinie gefällten Perpendikels bedeutet.

§. 535. in ein Trapez, mit 2 Parallelen G und g. Form: $G + g = \frac{2F}{h}$ und $h = \frac{2F}{G+g}$; ferner $G = \frac{2F}{h} - g$; und $g = \frac{2F}{h} - G$.

Dividire die doppelte Fläche durch die Höhe, so ist der Quotient = der Summe der beiden Grundlinien; dividirt man mit dieser Summe $G + g$ die doppelte Fläche, so erscheint die Höhe h.

Wenn eine der Grundlinien unbekannt ist, so wird sie gefunden, indem man die doppelte Fläche durch die Höhe dividirt, und vom Quotienten die gegebene Grundlinie abzieht.

§. 336. in ein jedes Vieleck von n Seiten.

Formeln. Die Seite $m = \sqrt{\left(\frac{2F \cdot 2 \cdot \text{Sin.} \frac{1}{2} c}{n \cdot \text{Cos.} \frac{1}{2} c}\right)}$,

das Perpendikel $p = \sqrt{\left(\frac{2F \cdot \text{Cos.} \frac{1}{2} c}{n \cdot 2 \cdot \text{Sin.} \frac{1}{2} c}\right)}$,

der Halbmesser $r = \sqrt{(\frac{1}{4} m^2 + p^2)}$.

Multiplicire den doppelten Flächenraum mit dem doppelten Sinus des halben Centriwinkels c; dividire dies Product durch die Anzahl der Seiten, die mit dem Cosinus des halben Centriwinkels multiplicirt sind; ziehe nun aus dem Quotienten die Quadratwurzel, so erhält man die Seite m des Vielecks.

Der Centriwinkel wird gefunden, wenn man mit der Anzahl der Seiten in 360° dividirt; oder $c = \frac{360}{n}$.

Die Seite eines Vielecks = dem doppelten Sin. des halben Centriwinkels; der Cosinus desselben Winkels = dem Perpendikel p. Und die Fläche eines Vielecks $= \frac{m \cdot p \cdot n}{2} = F$; also ist $\frac{2F}{n} = mp$; und $\frac{2F}{m.n} = p$. Ferner $p : \frac{1}{2} m = \text{Cos.} \frac{1}{2} c : \text{Sin.} \frac{1}{2} c$; d. i. $p : m = \text{Cos.} \frac{1}{2} c : 2 \text{ Sin.} \frac{1}{2} c$, folglich ist $p = \frac{m \cdot \text{Cos.} \frac{1}{2} c}{2 \cdot \text{Sin.} \frac{1}{2} c}$. Setzt man diese Werthe von p in eine Gleichung, so hat man

$$\frac{2F}{m \cdot n} = \frac{m \cdot \text{Cos.} \frac{1}{2} c}{2 \cdot \text{Sin.} \frac{1}{2} c},$$

$$2F \cdot 2 \cdot \text{Sin.} \tfrac{1}{2} c = m^2 \cdot n \cdot \text{Cos.} \tfrac{1}{2} c$$

$$\sqrt{\left(\frac{2F \cdot 2 \cdot \text{Sin.} \frac{1}{2} c}{n \cdot \text{Cos.} \frac{1}{2} c}\right)} = m.$$

Auf gleiche Weise sind die andern beiden Formulare für p und r gefunden.

In einem bestimmten Vielecke sind Sin. $\frac{1}{2}$ c und Cos. $\frac{1}{2}$ c beständige Größen. Z. B. in allen Zwölf-

ecken

ecken ist der doppelte Sin. $\frac{1}{2}$ c = 0,5176; und Cos. $\frac{1}{2}$ c = 0,9659. Daher läßt sich eine Tafel geben, in welcher man diese Größen findet, und die bei solchen Verwandlungen besonders bequem ist, wenn man keine logarithmische Tafeln hat.

Im Dreieck ist	n = 3;	2. Sin. $\frac{1}{2}$ c =	1,732;	Cos. $\frac{1}{2}$ c = 0,5
Viereck	— 4;	— —	1,4142	— — 0,7071
Fünfeck	— 5;	— —	1,1755	— — 0,809
Sechseck	— 6;	— —	1,	— — 0,866
Siebeneck	— 7;	— —	0,8678	— — 0,901
Achteck	— 8;	— —	0,7653	— — 0,9239
Neuneck	— 9;	— —	0,684	— — 0,9397
Zehneck	— 10;	— —	0,618	— — 0,951
Eilfeck	— 11;	— —	0,5635	— — 0,9595
Zwölfeck	— 12;	— —	0,5176	— — 0,9659
Sechzehneck	— 16;	— —	0,3901	— — 0,9808
Zwanzigeck	— 20;	— —	0,3128	— — 0,9876
24eck	— 24;	— —	0,261	— — 0,9914

(Das Drei- und Viereck sind deshalb hier mit aufgenommen worden, weil sie wie Vielecke im Kreise beschrieben werden können.)

Der Gebrauch dieser Tafel ist leicht zu fassen. In das allgemeine Formular trägt man die in der Tafel befindlichen Werthe, und rechnet damit, wie es die Vorschrift fordert. Z. B. Es sey der Flächenraum 32 □ Fuß in ein regulares Fünfeck zu verwandeln; man fragt: wie groß ist eine Seite, das Perpendikel aus dem Centro auf die Seite, und der Radius des Kreises, worin es beschrieben werden kann?

Allgemeines Formular.

$$m = \sqrt{\left(\frac{2F \,.\, 2 \,.\, \text{Sin.} \frac{1}{2} c}{n \,.\, \text{Cos.} \frac{1}{2} c}\right)},$$

Besonderes Formular.

mit besondern Werthen $= m = \sqrt{\left(\frac{2 \,.\, 32 \,.\, 1{,}1755}{5 \,.\, 0{,}809}\right)}$

$$= \sqrt{\frac{75{,}232}{4{,}045}} = 4{,}3128 = \text{einer Seite des}$$

Fünfecks.

p =

$p = \sqrt{\left(\frac{2 \cdot F \text{ Cos. } \frac{1}{2} c}{n \cdot 2 \text{ Sin. } \frac{1}{2} c}\right)}$, d. i., nachdem die besond. Werthe untergelegt, $= \sqrt{\left(\frac{2 \cdot 32 \cdot 0{,}809}{5 \cdot 1{,}1756}\right)}$

$$= \sqrt{\left(\frac{51{,}776}{5{,}878}\right)} = 2{,}9682 = p.$$

$r = \sqrt{(\frac{1}{4} m^2 + p^2)}$, oder durch die Proportion Cos. $\frac{1}{2} c : 1 = p : r = 0{,}809 : = 2{,}9682 : r$;

$$= \frac{2{,}9682}{0{,}809} = 3{,}6687.$$

Der Radius, worin das Fünfeck gezeichnet werden muß, ist also = 3 Fuß, 6 Zoll, 6 Linien, $8\frac{7}{10}$ Scrupel.

Wollte man nun den Flächenraum 32 □ Fuß in ein gleichseitiges Dreieck verwandeln, so wäre das Formular für die Seite $m = \sqrt{\left(\frac{2 \cdot 32 \cdot 1{,}732}{3 \cdot 0{,}5}\right)}$

$$= \sqrt{\frac{4}{3} \cdot 32 \cdot 1{,}732} \text{ u. s. w.}$$

Anmerk. Im gleichseitigen Dreieck fällt das Perpendikel p auf die Mitte von m, folglich ist

erstlich $\frac{p \; m}{2} = F$, und $p = \frac{2F}{m}$,

zweitens $p^2 = m^2 - \frac{m^2}{4}$ nach dem pythag. Lehrsatz

$$= p^2 = \frac{3m^2}{4} = \frac{m^2}{4} \cdot 3$$

$$p = \frac{m}{2} \cdot \sqrt{3}$$

Nun war p auch gleich $\frac{2F}{m} = \frac{m}{2} \cdot \sqrt{3}$

$$2F = \frac{m^2}{2} \sqrt{3} \quad (\cdot m$$

$$4F = m^2 \cdot \sqrt{3} \quad (\cdot 2$$

$$\frac{4F}{\sqrt{3}} = m^2$$

$\sqrt{\left(\frac{4F}{\sqrt{3}}\right)} = m =$ der Seite des gleichseitigen Dreiecks

§. 537. in ein Rechteck, in welchem sich die Grundlinie zur Höhe verhält, wie m : n z. B. wie 5 : 3. Formulare: $g = \sqrt{\frac{mF}{n}}$; $h = \sqrt{\frac{nF}{m}}$.

Nach der Bedingung $\frac{g : h = m : n}{g = \frac{hm}{n}}$; und $h = \frac{gn}{m}$

Fläche $= \frac{g \cdot h = F}{g = \frac{F}{h}}$ und $h = \frac{F}{g}$. Setzt man nun die gleichen Werthe für g oder h in eine Gleichung, so bekommt man die gegebenen Formeln. Z. B. für $h = \frac{gn}{m} = \frac{F}{g}$, $g^2 n = mF$, $g^2 = \frac{mF}{n}$, $g = \sqrt{\frac{mF}{n}}$. Wenn $F = 60$ □ Fuß; $m = 5$; $n = 3$, so findet man für g den Werth $= \sqrt{\frac{5 \cdot 60}{3}} = \sqrt{100} = 10$ Fuß $=$ Grundlinie; und für $h = \sqrt{\frac{3 \cdot 60}{5}} = \sqrt{36}$ $= 6$ Fuß Höhe.

§. 538. in ein Dreieck, dessen Grundlinie sich zur Höhe verhält, wie m : n.

Formulare: $g = \sqrt{\left(\frac{m \cdot 2F}{n}\right)}$; in Zahlen, wie vorher,

$\sqrt{\left(\frac{5 \cdot 2 \cdot 60}{3}\right)} = \sqrt{200} = 14{,}142$,

und $h = \sqrt{\left(\frac{n \cdot 2F}{m}\right)}$ in Zahl. $= \sqrt{\left(\frac{3 \cdot 2 \cdot 60}{5}\right)}$ $= \sqrt{72} = 8{,}485$.

§. 539. in ein Dreieck, dessen 3 Seiten sich wie m : n : p verhalten.

Man berechne den Inhalt des Dreiecks, dessen Seiten m, n, p sind, und nenne ihn $= f$.

Weil sich nun die Flächen ähnlicher Figuren zu einander verhalten, wie die Quadrate der ähnlichen Sei-

Seiten, so findet man die Seiten x, y, z des gesuchten Dreiecks durch die Proportionen

$f : F = m^2 : x^2$, und $x = \sqrt{\frac{m^2 . F}{f}}$, wobei $F =$ der gegebenen Fläche

$f : F = n^2 \; y^2$, und $y = \sqrt{\frac{n^2 . F}{f}}$

$f : F = p^2 : z^2$, und $z = \sqrt{\frac{p^2 . F}{f}}$.

Z. B. Es sey der Flächenraum $50 = F$ in ein Dreieck zu verwandeln, dessen Seiten sich wie 6, 7 und 10 verhalten. Der Inhalt des $\triangle = f$ ist

$$\frac{\sqrt{(6+7+10).(6+10-7).(6+7-10).(7+10-6)}}{4}$$

$$\begin{array}{cccc} 6 & 6 & 6 & 7 \\ 7 & 10 & 7 & 10 \\ 10 & -7 & -10 & -6 \\ \hline 23 & 9 & 3 & 11 \end{array}$$ und $23 . 9 . 3 . 11 = 6831$, und

$$\frac{\sqrt{6831}}{4} = \frac{82,649}{4} = 20,662 = \text{Fläche} = f.$$

Nun ist $x = \sqrt{\frac{F . 6^2}{f}} = \frac{50 . 36}{20,662} = \sqrt{87,164}$ $= 9,333$ ersten Seite; die zweite Seite y findet man entweder nach dem Formular $y = \sqrt{\frac{n^2 . F}{f}}$ oder auch durch $m : n = x : y$, $y = \frac{nx}{m}$ d. i. $\frac{7 . 9,333}{6}$ $= \frac{65,331}{6} = 10,888 = y =$ der zweiten Seite; die dritte Seite $z = \sqrt{\frac{p^2 . F}{f}}$, oder $m : p = x : z$, und $z = \frac{p . x}{m}$ d. i. $= \frac{10 . 9,333}{6} = \frac{93,33}{6} = 15,555$ $= z =$ der dritten Seite.

Die

Die gefundenen Seiten $x = 9,333$ } haben das gefun-
$y = 10,888$ } dene Verhältniß
$z = 15,555$ } 6, 7, 10.

§. 540. Ein Quadrat zu verdoppeln. Formel $\sqrt{2F} = a$.

Aus dem doppelten Flächenraum ziehe die Quadratwurzel, welche die Seite des doppelt so großen Quadrats ist.

Die Seite eines dreifachen $= \sqrt{3F} = a$

Die Seite eines halb so großen $= \sqrt{\frac{F}{2}} = a$

eines nfachen $= \sqrt{nF} = a$.

§. 541. Ein Rechteck zu verdoppeln, oder nmal zu vermehren, so daß sich die Seiten beider Rechtecke proportional bleiben.

Inhalt $=$ F des gegebenen Rechtecks; g und h seine Seiten.

und nF des gesuchten Rechtecks Inhalts; x und y seine Seiten.

Dann gilt $F : nF = g^2 : x^2$, und $x = \sqrt{\frac{nFg^2}{F}} = \sqrt{ng^2}$

und $F : nF = h^2 : y^2$, und $y = \sqrt{nh^2}$.

In Zahlen. Wenn $g = 8$ und $h = 4$, also $F = 32$, und $n = 3$, so ist $x = \sqrt{3 . 8^2} = \sqrt{192} = 13,8564$
$y = \sqrt{3 . 4^2} = \sqrt{48} = 6,9282$.

Soll die Figur vermindert oder kleiner, als die gegebene, werden, so ist n ein ein Bruch. Wenn z. B. die Figur 3 mal kleiner seyn sollte, so wäre $n = \frac{1}{3}$, und $x = \sqrt{(\frac{1}{3} g^2)}$

Diese Formeln gelten bei jeder Vergrößerung oder Verkleinerung der Parallelogramme oder Triangel, die proportionale Seiten behalten sollen.

§. 542. Eine gegebene Fläche F in einen Kreis zu verwandeln.

Der Kreis ist bestimmt, wenn sein Radius $= r$ bekannt

kannt ist. Formel: $\sqrt{\frac{F}{p}} = r$, wobei $p = 3,1415\ldots$ bedeutet.

Z. B. eine Fläche von 28,2735 □ Zoll in einen Kreis zu bringen, wird $\sqrt{\frac{28,2735}{3,1415}} = \sqrt{9} = 3$ Zoll = Radius.

§. 543. **Eine gegebene Fläche F in eine Ellipse zu verwandeln.**

1. Wenn eine von beiden Axen gegeben ist.

Die große Axe $A = \frac{4F}{a \cdot p}$, wobei p die Zahl 3,14... bedeutet.

Die kleine Axe $a = \frac{4F}{A \cdot p}$.

2. Wenn keine von beiden Axen gegeben ist,

$$A \cdot a = \frac{4F}{p}.$$

Zerlegt man die Zahl, die $\frac{4F}{p}$ giebt, in zwei Factoren, so erhält man in denselben die beiden Axen.

3. Wenn das Verhältniß der Axen m : n gegeben ist;

die große Axe $A = \sqrt{\left(\frac{4mF}{n \cdot p}\right)}$,

die kleine Axe $a = \sqrt{\left(\frac{4 \cdot n \cdot F}{m \cdot p}\right)}$.

§. 544. **Eine gegebene Fläche in einen parabolischen Abschnitt zu verwandeln.**

Fläche der Parabel $= \frac{4x \cdot y}{3}$, wobei x = Abscisse, y = Ordinate.

Formeln: $x = \frac{3F}{4y}$; und $y = \frac{3F}{4x}$.

Wenn

Wenn weder x noch y gegeben, so ist die Größe $\frac{3F}{4}$ in zwei beliebige Factoren, die x und y vorstellen, zu zerlegen.

Wenn das Verhältniß $x : y = m : n$ gegeben ist, so ist $x = \sqrt{\frac{3.m.F}{4n}}$; und $y = \sqrt{\frac{3.n.F}{4m}}$.

Der Parameter p, mit dem die Parabel gezeichnet werden kann $= \frac{y^2}{x}$.

VI. Ausmessung der Körper.

§. 545. Obgleich der regelmäßig gestalteten Körper nur wenige sind, so weiß sich der Geometer doch dadurch zu helfen, daß er die unregelmäßigen durch Ebenen in regelmäßige verwandelt, zerlegt und berechnet. Wie dies am besten geschehen könne, muß dem Scharfblick eines jeden überlassen bleiben, denn alle mögliche Fälle berühren zu wollen, ist bei der unendlichen Verschiedenheit der natürlichen und künstlichen Formen der Körper nicht thunlich. Wer die regelmäßig gestalteten Körper berechnen kann, wird beim Anblick eines Körpers bald einsehen, welche Theile desselben nach diesem oder jenem Formulare berechnet werden müssen.

Zur deutlichen Anschauung der geometrischen Körper gehört das Vorzeigen und Bilden derselben, wozu der Abschnitt I. §. 422. u. f. Anleitung gab.

§. 546. Der Raum, welchen ein Körper ausfüllt, heißt sein kubischer, oder körperlicher Inhalt, oft auch bloß Inhalt, welchen wir beständig mit J bezeichnen wollen. Er wird mit dem Würfel oder Kubus gemessen.

1 Kubikruthe = 1000 Kubikfuß; dieser = 1000 Kubikzoll; dieser = 1000 Kubiklinien, und diese = 1000 Kubikscrupel. Will man daher kleinere Theile, als z. B. Scrupel zu Linien ꝛc. machen, so schneidet man von der