Der Rathgeber bei mathematischen Beschäftigungen

Stöpel, August

Stendal, 1819

VI. Ausmessung der Körper.

Wenn weder x noch y gegeben, so ist die Größe $\frac{3F}{4}$ in zwei beliebige Factoren, die x und y vorstellen, zu zerlegen.

Wenn das Verhältniß $x : y = m : n$ gegeben ist, so ist $x = \sqrt{\frac{3 . m . F}{4 n}}$; und $y = \sqrt{\frac{3 . n . F}{4 m}}$.

Der Parameter p, mit dem die Parabel gezeichnet werden kann $= \frac{y^2}{x}$.

VI. Ausmessung der Körper.

§. 545. Obgleich der regelmäßig gestalteten Körper nur wenige sind, so weiß sich der Geometer doch dadurch zu helfen, daß er die unregelmäßigen durch Ebenen in regelmäßige verwandelt, zerlegt und berechnet. Wie dies am besten geschehen könne, muß dem Scharfblick eines jeden überlassen bleiben, denn alle mögliche Fälle berühren zu wollen, ist bei der unendlichen Verschiedenheit der natürlichen und künstlichen Formen der Körper nicht thunlich. Wer die regelmäßig gestalteten Körper berechnen kann, wird beim Anblick eines Körpers bald einsehen, welche Theile desselben nach diesem oder jenem Formulare berechnet werden müssen.

Zur deutlichen Anschauung der geometrischen Körper gehört das Vorzeigen und Bilden derselben, wozu der Abschnitt I. §. 422. u. f. Anleitung gab.

§. 546. Der Raum, welchen ein Körper ausfüllt, heißt sein kubischer, oder körperlicher Inhalt, oft auch bloß Inhalt, welchen wir beständig mit J bezeichnen wollen. Er wird mit dem Würfel oder Kubus gemessen.

1 Kubikruthe = 1000 Kubikfuß; dieser = 1000 Kubikzoll; dieser = 1000 Kubiklinien, und diese = 1000 Kubikscrupel. Will man daher kleinere Theile, als z. B. Scrupel zu Linien ꝛc. machen, so schneidet man von der

Zahl derselben nur die 3 niedrigsten Stufen ab. So sind 1358906 Kubikscrupel = 1''358'''906'''' d. i. 1 Kubikzoll, 358 Kubiklinien, 906 Kubikscrupel; und bei zwölftheiligem Maaße muß eine solche Division durch die Zahl 1728 geschehen, denn 1 Kubikruthe ist dann = 1728 Kubikfuß, zu 1728 Kubikzoll, zu 1728 Kubiklinien etc.

§. 547. Bei Ausmessung der Gefäße bedient man sich im bürgerlichen Leben des zwölftheiligen Maaßstabes, und man thut wohl, wenn man die ganze Rechnung in Zollen und deren Decimaltheilen führt. Die durch die Rechnung erhaltenen Ganze sind alsdann Kubikzolle Duodecimalmaaß, und leicht in Scheffel, Metzen, Quart u. s. w. zu verwandeln, wenn man weiß, wie viel deren auf den Kubikinhalt dieser Gefäße gerechnet wird. In den Königl. Preuß. Ländern enthält 1 Scheffel 3072 Kubikzoll, eine Metze ($\frac{1}{16}$ Scheffel) 192 Kubikzoll oder 3 Quart, das Quart 64 Kubikzolle des zwölftheiligen Maaßes.

§. 548. **Den körperlichen Inhalt eines Würfels zu finden.**

Aufl. Miß eine Seitenlinie und multiplicire sie 2 mal mit sich selbst, oder erhebe sie in die dritte Potenz.

Formel. $J = l^3$, wobei J = Inhalt, und l = Seitenlinie.

Z. B. Es sey eine Seitenlinie = 3', so ist $J = 3 . 3 . 3 = 27$ Kubikfuß.

Die Oberfläche eines Würfels ist in 6 gleichen Quadraten enthalten.

Formel: $O = 6l^2$.

Wenn $l = 3'$, so ist $6l^2 = 6 . 3^2 = 6 . 9 = 54$ Quadratfuß = Oberfläche.

§. 549. **Den Inhalt eines Parallelepipedon zu finden.**

Aufl. Multiplicire Länge = l, Breite = b; und Höhe = h mit einander; oder auch die Grundfläche mit der Höhe.

Formel: $J = l . b . h$.

Die Oberfläche besteht nach Fig. 116. in 6 Parallelogrammen, wovon die beiden gegenüberstehenden einander gleich sind.

Formel. $O = 2 . l . b + 2 . l . h + 2 . b . h.$

Z. B. Es sey eine kupferne Pfanne 6 Fuß lang, 4 Fuß breit, 3 Fuß hoch, so ist ihr Inhalt $= 6 . 4 . 3 = 72$ Kubikfuß, oder $72 . 1728$ Kubikzoll $= 124416$ Kubikzoll; dividirt man diese Zahl durch 3072, so bekommt man $40\frac{1}{2}$ Scheffel; und dividirt man 124416 durch 64, so erhält man 1944 Quart, oder 19 Tonnen 44 Quart für den Inhalt.

§. 550. Den Inhalt eines prismatischen Körpers zu finden.

Formel. $J = g . h.$

Multiplicire seine Grundfläche mit der senkrechten Höhe, d. h. $g . h.$

(Im dreiseitigen Prisma ist die Grundfläche ein Dreieck, im Würfel und Parallelepipedum ein Viereck, in jedem Prisma, das mehr, als 4 Seiten hat, ein Vieleck. Gemeiniglich kann man nur die Seiten der Grundfläche messen, alsdann aber eine Zeichnung davon entwerfen, und den Flächenraum nach der in der Flächenmessung gegebenen Formel finden. Sind die Seitenlinien an der Grundfläche einander gleich, so ist die Rechnung bald gemacht; sind sie ungleich, so zerlege man die Grundfläche durch Diagonalen in Dreiecke.)

Es sey die Grundfläche ein gleichseitiges Siebeneck, eine Seite 8″, die Höhe 24″, so ist

$$g = \frac{8^2 . 7 . 2{,}0763^{*)}}{4} = 232{,}545 = \text{Grundfläche}$$

$$\text{mal } 24 = \text{Höhe}$$

körperlicher Inhalt $= 5581{,}094$ Kubikzoll.

Das Netz des Prisma Fig. 118. besteht in so viel Rechtecken, als es Seiten hat, und zwei gleichen Grundflächen.

For-

*) Die Zahl 2,0763 ist Tangente $\frac{1}{2}$ Polygonwinkel. S. §. 494.

Formel. $O = l . h . n + 2g.$

Im vorigen Beispiel ist $l = 8''$, $h = 24''$; $n = 7$ = Anzahl der Seiten; und $g = 232{,}545$ □ Zoll; also

Oberfläche $= 8 . 24 . 7 + 465{,}09 = 1809{,}09$ Quadratzoll.

§. 551. Den Inhalt eines Cylinders zu finden. Fig. 124.

Formel. $J = r^2 p . h$, oder auch $g . h$, denn $r^2 p = g$.

Multiplicire das Quadrat des Halbmessers r^2 mit der Zahl $p = 3{,}14 \ldots$ und mit der Höhe h.

Die krumme Oberfläche ist = dem Umfang mit der Höhe multiplicirt.

Formel. $O = D . p . h$; mit Boden und Decke $= D . p . h + 2r^2 p = (2r . h + 2r^2)\, p =$ Netz Fig. 125.

Z. B. Ein cylindrisches Gefäß habe 4 Zoll im Radius, 12 Zoll in der Höhe, so ist sein Inhalt $= 4^2 . 3{,}14 . 12 = 602{,}88$ oder 602 Kubikzoll, 880 Kubiklinien.

Das Netz $= (2 . 4 . 12 + 2 . 4^2) . 3{,}14 = 401{,}92$ oder 401 □ Zoll, 92 □ Linien.

§. 552. Den körperlichen Inhalt einer cylindrischen Röhre zu finden.

Formel. $J = (R^2 - r^2)\, p . h.$

Von dem Quadrat des Radius (R^2) der ganzen Röhre ziehe das Quadrat des Radius (r^2) der Höhlung ab, multiplicire den Rest mit $3{,}14 \ldots$ und mit der Höhe h.

§. 553. Den Inhalt einer prismatischen Röhre zu finden.

Formel. $J = (G - g) . h.$

Von der ganzen Grundfläche G ziehe die Grundfläche g der Höhlung ab, und multiplicire den Rest mit der Höhe h. Oder man berechne die Röhre als einen vollen Körper, und ziehe davon denjenigen ab, der darin stecken könnte, so giebt der Rest den körperlichen Inhalt oder die Masse der Röhre.

§. 554. Den Inhalt einer Piramyde zu finden.

Formel: $J = \frac{g \cdot h}{3}$.

Multiplicire die Grundfläche mit der senkrechten Höhe, und dividire dies Product durch 3.

Z. B. Es sey die Piramyde gleichseitig und sechseckig, jede Seite = 8 Fuß, ihre senkrechte Höhe = 50 Fuß, so ist nach §. 494. die Grundfläche $g = 166,27$ □ Fuß, und $\frac{g \cdot h}{3} = \frac{166,27 \cdot 50}{3}$ $= 2771,17$ d. i. 2771 Kubikfuß, 170 Kubikzoll.

Die Seitenflächen der Piramyde sind Dreiecke, deren Grundlinien die Seiten der Grundfläche, und deren Höhe die schiefe äußere Höhe ist. Fällt man aus dem Centrum der Grundfläche ein Perpendikel auf eine Seite, so giebt dies den Abstand = a der Grundlinie vom Centrum an, und

$$a = \frac{\frac{1}{2} l \cdot \text{Sin.}\, p}{\text{Sin.}\, c}, \text{ oder } \frac{\frac{1}{2} l \cdot \text{Cos.}\, c}{\text{Sin.}\, c},$$

wobei l = Seite,
p = halber Polygonwinkel,
c = halber Centriwinkel.

Nennt man die schiefe äußere Höhe = A, so ist $A = \sqrt{(a^2 + h^2)}$, wobei h die senkrechte Höhe bedeutet. Endlich giebt die Fläche eines Dreiecks an der Piramydenoberfläche die

Formel $F = \frac{A \cdot l}{2}$,

welche man mit der Anzahl der Seiten zu multipliciren hat.

Z. B. Es sey, wie oben $l = 8$, Seiten $= 6$, $p = 60°$, $c = 30°$, $\frac{1}{2} l = 4$, $h = 24$

so ist $\log. 4 = 0{,}6020600$
$\log. \mathrm{Sin}. 60° = 9{,}9375306$
$\overline{\quad 10{,}5395906}$
$\log. \mathrm{Sin}. 30° = 9{,}6989700$
$\overline{\log. a = 0{,}8406206}$ (.2
und $\log. a^2 = 1{,}6812412$ — 48.

Nun ist $a^2 = 48$
und $h^2 = 576$
und $\sqrt{624} = 24{,}98 = A$
$8 = l$
$\overline{199{,}84}$
2) $99{,}92$ = Fläche einer Seite.
$6 = n$
$\overline{599{,}52}$ = Fläche der 6 Seiten.
hiezu $166{,}27$ = Grundfläche,
$\overline{765{,}79}$ = Netz der Piramyde.

Kann man die schiefe Höhe A messen, so ist die Rechnung viel leichter und ganz ohne Logarithmen zu führen. Auch durch eine Zeichnung läßt sich A finden.

§. 555. **Den Inhalt einer abgekürzten Piramyde zu finden.**

Formel: $$\left(\frac{G + g + \sqrt{(G \cdot g)}}{3}\right) \cdot h = J.$$

Hiebei ist G = der Grundfläche; g = der entgegenstehenden Decke; h = senkrechten Höhe.

Z. B. Es sey $G = 16$; $g = 9$ □ Fuß; $h = 7$ Fuß; so ist

$$\frac{16 + 9 + \sqrt{(16 \cdot 9)} \cdot 7}{3} = \frac{25 + \sqrt{144}}{3} \cdot 7$$

$$= \frac{25 + 12}{3} \cdot 7 = \frac{37 \cdot 7}{3} = \frac{259}{3} = 86\tfrac{1}{3} \text{ Kubikfuß.}$$

Die Seitenflächen der abgekürzten Piramyde sind Trapezia, und der Abstand der beiden Parallelen ist

ist die schiefe Höhe $= A$, welche gemessen, oder aus dem Unterschied ($= d$) der beiden Abstände der Seitenlinien von der Axe, und der Höhe $= h$ durch
$A = \sqrt{(d^2 + h^2)}$ gefunden wird.

Wenn L und l Seiten an der Grund- und Durchschnittsfläche, und n die Anzahl derselben bedeuten, so giebt die Formel $\left(\frac{L + l}{2}\right) . A . n$ die Oberfläche der abgekürzten Piramyde; werden hiezu die beiden Grundflächen $G + g$ addirt, so ist die Summe $=$ dem Netz.

§. 556. Den Inhalt eines Tetraeders zu finden.

Formel: $\frac{G . h}{3} = J.$

Multiplicire die Grundfläche, welche ein gleichseitiges Dreieck ist, mit der senkrechten Höhe, und dividire das Product durch 3.

§. 557. Den Inhalt eines Octoeders zu finden.

Formel: $\frac{G . h 2}{3} = J.$

Multiplicire den Flächeninhalt des Quadrats Fig. 130. $= G$, als der gemeinschaftlichen Grundfläche beider Piramyden, woraus das Octoeder besteht, mit $\frac{1}{3}$ der Höhe einer Piramyde, und nimm das Product doppelt.

§. 558. Den Inhalt eines Dodecaeders zu finden.

Formel. $G . h . 2 = J.$

Suche den Quadratinhalt eines Fünfecks, als einer Grundfläche $= G$, und multiplicire denselben mit $\frac{1}{3}$ der Höhe des halben Körpers. Das Product ist der Inhalt einer der 12 Piramyden, woraus er besteht, welches das Formular $\frac{G . h . 12}{6} = G . h . 2$ giebt,

wo-

wobei h die Höhe des ganzen Dodecaeders anzeigt.

§. 559. Den Inhalt eines Icosaeders zu finden.

Formel: $\frac{G \cdot h\ 20}{6} = J.$

Multiplicire den Flächenraum einer Seite mit $\frac{1}{6}$ der Höhe des Körpers, und noch mit 20.

§. 560. Den Inhalt eines Kegels zu finden.

Formel: $\frac{r^2 \cdot p \cdot h}{3} = J$, oder $\frac{g \cdot h}{3}$, wobei

$p = 3{,}14 \ldots$, $r =$ Radius.

Multiplicire die Grundfläche mit der senkrechten Höhe, und dividire das Product durch 3.

Es sey der Radius eines Kegels = 4 Zoll, die Höhe = 24 Zoll, so ist $\frac{4^2 \cdot 3{,}14 \cdot 24}{3} = 401{,}94$ d. i. 401 Kubikzoll, 940 Kubiklinien.

Die krumme Oberfläche des Kegels bildet einen Sector Fig. 122, an welchem das Bogenstück = der Peripherie der Grundfläche, und die geraden Linien von ihr zur Spitze = Radien sind. Eine solche Linie ist die schiefe Höhe = A, die sich messen, oder berechnen läßt, denn $A = \sqrt{(r^2 + h^2)}$, und die krumme Oberfläche giebt daher die

Formel: $O = \frac{D \cdot p \cdot A}{2}$, oder $\frac{D \cdot p \cdot \sqrt{(r^2 + h^2)}}{2}$,

wobei D = Diameter der Grundfläche oder = $r p \cdot A$.

Es sey $r = 4$, $D = 8$, $h = 24$, so ist $O = 4 \cdot 3{,}14 \cdot \sqrt{(4^2 + 24^2)} = 12{,}56 \cdot 24{,}33 = 305{,}58$, d. i. 305 □ Zoll, 58 □ Linien.

§. 561. Den Inhalt eines abgekürzten Kegels zu finden.

Formel: $\frac{(R^2 + r^2 + r \cdot R) \cdot p \cdot h}{3} = J$,

wobei

wobei $R = $ Radius der Grundfläche, $r = $ Radius der Durchschnittsfläche ist.

Addire die Quadrate der Radien und ihr Product zusammen, multiplicire die Summe mit 3,14, und mit der senkrechten Höhe $= h$; dividire alles durch 3.

Z. B. Es sey $R = 12''$; $r = 5''$; $h = 16''$, so ist

$$\frac{(12^2 + 5^2 + 5 \cdot 12) \cdot 3{,}14 \cdot 16}{3} = \frac{(144 + 25 + 60) \cdot 50{,}24}{3}$$

$$\frac{229 \cdot 50{,}24}{3} = \frac{11504{,}96}{3} = 3834{,}98$$ Kubikzoll, oder 3 Kubikfuß, 834 Kubikzoll, 980 Kubiklinien.

Die krumme Oberfläche des abgekürzten Kegels giebt die

Formel $(R + r) \cdot p \cdot A$,

wobei die krumme Oberfläche $=$ Trapez, dessen Parallelen die beiden Bogen Rp und rp, und deren Abstand $A = $ der schiefen Höhe. Die schiefe Höhe A findet sich durch: $A = \sqrt{(d^2 + h^2)}$, wobei $d = R - r = $ dem Unterschied der beiden Halbmesser.

Es sey wie vorher $R = 12''$; $r = 5''$, $h = 16''$, so ist $R - r = d = 7$;
und $\sqrt{(d^2 + h^2)} = \sqrt{(7^2 + 16^2)} = 17{,}46 = A$;
folglich $(R + r) \cdot p \cdot A = (12 + 5) \cdot 3{,}14 \cdot 17{,}46$ $= 17 \cdot 3{,}14 \cdot 17{,}46 = 932{,}0148$, oder 9 □ Fuß, 32 □ Zoll, 1 □ Linie, 48 □ Scrupel $=$ der krummen Oberfläche des abgekürzten Kegels.

Rechnet man dazu die beiden Grundflächen $R^2 p$ und $r^2 p$, so erhält man die

Formel $\big((R + r) \cdot A + (R^2 + r^2)\big) \cdot p = $ dem Netz.

Die Höhe des ganzen Kegels findet man durch

$R - r : h = R : H$

$12 - 5 : 16 = 12 : 27{,}43$

und die Höhe des fehlenden Stückes $= h' = H - h$
$= 11{,}43 = 27{,}43 - 16.$

§. 562. Den Inhalt schiefer Körper zu finden.

Fälle aus ihrer höchsten Spitze ein Perpendikel auf ihre (nöthigenfalls verlängerte) Grundfläche, nimm dasselbe zur senkrechten Höhe = h an, und gebrauche übrigens die gegebenen Formeln.

Allein die Oberflächen schiefstehender Körper bedürfen weitläufigerer Rechnungen, die sich nach den Umständen allezeit verändern, und der Beurtheilungskraft eines jeden überlassen bleiben.

§. 563. Den Inhalt solcher Gefäße zu finden, die elliptische Grundflächen haben.

Formel: $\frac{A \cdot a \cdot p \cdot h}{4}$.

Multiplicire beide Durchmesser oder Axen A und a mit 3,14 ... und mit der Höhe h, und dividire dies Product durch 4.

Z. B. ein Bottich sey 8 Fuß lang, 6 Fuß breit, 3 Fuß hoch und elliptisch; wie viel Tonnen oder Quart enthält er?

Hier ist $8' = A = 96$ Zoll,
$6' = a = 72$ Zoll,
$3' = h = 36$ Zoll,

und $\frac{96 \cdot 72 \cdot 3{,}14 \cdot 36}{4} = \frac{781032{,}48}{4} = 195258{,}12$ Kubikzoll. Dividirt man diese Zahl mit 64, so erhält man $3050\frac{9}{10}$ Quart, oder 30 Tonnen $50\frac{9}{10}$ Quart.

Zusatz. Sind die elliptischen Flächen an einem Gefäße verschieden, z. B. wie an einer Badewanne, wo gemeiniglich die untere Fläche oder der Boden kleiner ist, als die obere offene Fläche, so dient folgende Formel

$$\frac{G + g + \sqrt{(G \cdot g)}}{3} \cdot h,$$

wobei G die größere, g die kleinere Grundfläche, h die senkrechte Höhe bedeutet.

§. 564.

§. 564. Den Inhalt eines Fasses zu finden.

Formel: $\frac{(R^2 + r^2) . p . h}{2} = z =$ mittlerm Cylinder.

Formel zur Verbesserung $= \frac{z . D - d}{3 D} = c =$ Correction und $z + c = J =$ Inhalt des Fasses.

Addire zum Quadrat des Bauchhalbmessers $= R^2$ das Quadrat des Bodenhalbmessers $= r^2$, multiplicire diese Summe mit 3,14... und mit der Länge $= h$, und dividire alles durch 2, so erhält man z oder den mittlern Cylinder.

Dieser mittlere Cylinder ist etwas zu klein, weil die Stäbe des Fasses Bogenstücke sind. Daher multiplicire man denselben mit dem Unterschied der beiden Diameter $D - d$ und dividire durch den dreyfachen Bauchdurchmesser, so erhält man c oder die Verbesserung.

Die Summe des mittleren Cylinders und der Correction, oder $z + c$, ist der Inhalt des Fasses.

Z. B. Ein Faß, Fig. 189., habe
im Bauche $ad = D = 20$ Zoll, so ist $R = 10$,
im Boden $cb = d = 16$ — — $r = 8$,
in der Länge $hk = h = 40$ — — $h = 40$,

so ist $z = \frac{(10^2 + 8^2) . 3,14 . 40}{2} = \frac{164 . 3,14 . 40}{2}$
$= 10299,2 =$ dem mittleren Cylinder.

Nun ist $D - d = 20 - 16 = 4$; und $3 D = 3 . 20 = 60$; folglich die Correction

$$c = \frac{10299,2 . 4}{60} = \frac{41196,8}{60} = 686,61;$$

dazu den mittlern Cylinder $= 10299,2$

Inhalt des Fasses $= 10985,81$ Kubikzoll.

Dividirt man diesen Inhalt durch 64, so erhält man $171\frac{65}{100}$ Quart, oder 1 Tonne $71\frac{3}{4}$ Quart.

§. 565. **Die Länge und beide Durchmesser eines Fasses, das 1 Tonne oder 100 Quart hält, zu finden.**

Der Inhalt ist 100 . 64 = 6400 Kubikzoll. Nun sind zwar sehr vielerlei Gestalten der Fässer denkbar, wovon jedes den verlangten Inhalt hat; allein da im Preußischen von den Accisebedienten die sogenannten Kreuzvisirstäbe zur leichtern Ausmessung der Fässer vorschriftsmäßig gebraucht werden, und diese nur dann richtig angeben, wenn die Länge eines Fasses doppelt so viel beträgt, als der Durchmesser des mittlern Cylinders, so ist die Gestalt nicht mehr willkührlich.

Der Kreuzvisirstab ist in Fig. 189. die Linie ab; er wird durch das Spundloch a nach dem entgegengesetzten Ende des Bodendiameters gehalten, und der Inhalt des Fasses nach Quart auf demselben abgelesen. Die ab hat in allen ähnlich gebauten Fässern zur Länge und zu den beiden Diametern einerlei Verhältniß.

Wird die Correction mit berücksichtigt, so finde ich für die gebräuchlichsten Fässer folgende Abmessungen:

	im Bauche.	im Boden	in der Länge	Länge des Visirstabs
eine Tonne hat .	17,6 Zoll	14 Zoll	30,2 Zoll	21,85 Zoll
eine halbe Tonne	14	11,1	24	17,33
ein Eimer, 60 Quart	14,84	11,8	25,47	18,43
ein Anker, 30 Quart	11,78	9,37	20,22	14,63
ein halber Anker	9,35	7,44	16,045	11,61

Weil sich die Inhalte ähnlicher Körper zu einander verhalten, wie die Würfel der ähnlich liegenden Seiten, so findet man aus dem Verhältniß der Theile einer Tonne alle Abmessungen der Fässer von jedem Inhalt.

Z. B. die Länge und Durchmesser eines Fasses zu finden, das 1 Quart hält; schließt man:

$$100 : 1 = 17{,}6^3 : D^3; \text{ und } \sqrt[3]{\frac{17{,}6^3}{100}} = 3{,}79 = D,$$

$$100 : 1 = 14^3 : d^3; \text{ und } \sqrt[3]{\frac{14^3}{100}} = 3{,}016 = d,$$

$$100 : 1 = 30{,}2^3 : h^3; \text{ und } \sqrt[3]{\frac{30{,}2^3}{100}} = 6{,}506 = h.$$

§. 566. Die Länge des Kreuzvisirstabes ab Fig. 189. zu finden.

Formel: $\sqrt{((R + r)^2 + \frac{1}{4} h^2)} = ab$,

denn zieht man bn mit der Axe hm parallel, so ist $bn = \frac{1}{2} h$, $nm = hb = r$; $am = R$; also $an = R + r$; und

$$ab^2 = an^2 + bn^2 = (R + r)^2 + \frac{h^2}{4}.$$

Z. B. die Länge des Visirstabes ab in einem 1 Quart haltenden Fasse zu finden. Nach vorigem §. ist $D = 3{,}79$, also $R = 1{,}9$
$d = 3{,}016$, $r = 1{,}5$
$h = 6{,}5$ $R + r = 3{,}4$

und $3{,}4^2 + \frac{6{,}5^2}{4} = 11{,}56 + 10{,}5625 = 22{,}1225$, woraus die Wurzel $= 4{,}703 = ab =$ der Länge des Visirstabes.

§. 567. Einen Visirstab zu verfertigen.

Theile einen Raum von 4 Zoll 7 Linien (s. §. 566.), wie einen andern verjüngten Maaßstab in 1000 Theile; nimm einen etwa 4 Fuß langen, $\frac{1}{2}$ Zoll breiten und $\frac{1}{4}$ Zoll dicken Stab aus festem Holze, AB Fig. 190., und trage auf ihn von B an die Größe $Ba = 1000$ Theile nach dem gemachten (4 Zoll 7 Linien langen) verjüngten Maaßstabe, so ist Ba die Größe desjenigen Theils des Stabes, der in ein Faß, das nur 1 Quart hält, paßt, und die ab Fig. 189. vorstellt. Nun ziehe man aus den Zahlen 2, 3, 4, 5 u. s. w. die Kubikwurzel bis auf 3 Decimalstellen (in trigonometrischen Tafeln stehen sie mit 7 Decimalstelstellen), und trage die erhaltenen Werthe nach dem angefertigten Maaßstabe allezeit von B aus auf den Visirstab AB. Auf diese Weise erhält man die Puncte cde — fghb u. s. w., welche anzeigen, daß dasjenige Faß, in welches der Visirstab so weit hineingesteckt werden kann, bei c 2 Quart, bei d 3 Quart rc. enthalte. So findet man z. B.

für 2	Quart die	Bc	$= \sqrt[3]{2}$	$= 1260$
— 3	— —	Bd	$= \sqrt[3]{3}$	$= 1442$
— 4	— —	Be	$= \sqrt[3]{4}$	$= 1587$
— 32	— —	Bf	$= \sqrt[3]{32}$	$= 3175$
— 50	— —	Bg	$= \sqrt[3]{50}$	$= 3684$
— 64	— —	Bh	$= \sqrt[3]{64}$	$= 4000$
— 100	— —	Bb	$= \sqrt[3]{100}$	$= 4641$ u.s.w.

Man kann dies so weit fortsetzen, als es die Länge des Stabes AB erlaubt.

Die Zahlen werden auf einen Visirstab neben den zarten Theilstrichen mit Formen hinein geschlagen, damit sie durch das Einsenken in die Flüssigkeiten sich nicht so leicht verwischen. Nach einem solchen mit Fleiß bereiteten Visirstabe können nun sehr leicht viele andere angefertigt werden. Allein sowol ihr Anfertigen, als ihr Gebrauch erfordert Vorsicht und Genauigkeit. Denn oft werden absichtlich oder unwissentlich die Fässer anders gebaut, um die Officianten zu hintergehen. Ist die Axe nähmlich größer, als der doppelte Durchmesser des mittlern Cylinders, so giebt der Visirstab den Inhalt zu groß an, und ist sie kleiner, welches gemeiniglich der Fall ist, so giebt er ihn zu gering an. Aus der Summe der beiden Durchmesser, und der Länge, welche beinahe einander gleich sind, kann man vorläufig sehen, ob dieser Visirstab bei einem Fasse anwendbar sey oder nicht. Wenn es aber auf Genauigkeit ankommt, so bleibt die Rechnung §. 564. immer das zuverlässigste Mittel, den Inhalt der Fässer zu bestimmen, und der Visirstab eine Nothkrücke für den Unkundigen, mit der er zwar fein bequem, aber eben nicht sehr anständig einhergeht. Für Böttiger ist er sehr nützlich,

um

um darnach Gefäße von verlangtem Inhalt anzufertigen.

§. 568. Den Durchmesser und die Höhe eines Scheffelgefäßes, das 3072 Kubikzoll enthält, zu bestimmen.

Nach höherer Verfügung soll ein rundes Scheffelgefäß 22 Zoll im Durchmesser haben; weil bei manchen Producten gehäuftes Maaß gegeben wird, und es dann nicht einerlei ist, welche Gestalt ein solches Gefäß habe.

$$\text{Die Höhe desselben} = \frac{3072}{121 \cdot 3{,}141\ldots} = 8{,}07116 \text{ Zoll}$$

d. h. 8 Zoll, 7 Scrupel. Dabei ist $121 = r^2$; $3{,}141\ldots = p$.

Ein Viert muß nach diesem Verhältnisse haben

$$\sqrt[3]{\frac{22^3}{4}} = 13'',859 \text{ im Durchmesser,}$$

$$\sqrt[3]{\frac{8{,}07116^3}{4}} = 5'',0844 \text{ in der Höhe.}$$

Eine Metze ($= \frac{1}{16}$ Scheffel) muß haben:

$$\sqrt[3]{\frac{22^3}{16}} = 8'',7307 \text{ im Durchmesser,}$$

$$\sqrt[3]{\frac{8{,}07116^3}{16}} = 3'',203 \text{ in der Höhe.}$$

Anmerk. (Bei diesen Angaben zeigt die Zahl vor dem Komma allemal Rheinl. oder Preußische Zolle zwölftheiliges Maaß, und die Ziffer hinter dem Komma Decimaltheile dieses Zolles an. Will man die Decimaltheile in Linien, 12 auf einen Zoll, haben, so multiplicire man sie mit 12 und dividire darauf mit 10. Allein man thut sehr wohl, wenn man den Duodecimalzoll nur in 10 Theile theilt, indem dies alle Rechnungen erleichtert, und niemals schaden kann. Wer mit Decimalbrüchen rechnen kann, wird die großen Vortheile kennen, die eine 10theilige Unterabtheilung überall gewährt.)

Zu Probemaaßen sind viereckige Gefäße am bequemsten, weil sie leichter und sicherer, als runde, anzufertigen sind. Man zerlege die Zahl 3072 in 3 beliebige Factoren, so hat man in ihnen die Länge, Breite und Höhe eines solchen Scheffels. Z. B.

Er kann 16 Zoll lang, 16 Zoll breit und 12 Zoll hoch;
oder 24 — — 16 — — — 8 — —
seyn u. s. w.

§. 569. Ein Gefäß, das 64 Kubikzoll oder 1 Preußisch Quart enthält, anzufertigen.

Zu einem Probemaaße wähle man einen Würfel, der 4 Zoll lang, eben so breit und hoch im Lichten ist. Sein Inhalt ist dann genau 64 Kubikzoll.

Die gewöhnliche Gestalt solcher Gefäße, die man Quart oder Maaß nennt, ist aber die eines abgekürzten Kegels, für den das Formular $\frac{(R^2 + r^2 + rR) \cdot p \cdot h}{3}$ gilt, wobei R und r Radien der Grundfläche und obern Öffnung, h aber senkrechte Höhe, und p die bekannte Zahl 3,14 ist.

Wenn von den Größen R, r und h zwei gegeben sind, so läßt sich die 3te durch Rechnung finden.

$$R = \sqrt{\left(\frac{3J}{p \cdot h} - r^2 + \frac{r^2}{4}\right)} - \tfrac{1}{2} r$$

$$r = \sqrt{\left(\frac{3J}{p \cdot h} - R^2 + \frac{R^2}{4}\right)} - \tfrac{1}{2} R$$

$$h = \frac{3J}{(R^2 + r^2 + rR) \cdot p},$$ wobei J = Inhalt ist.

Allein die Auflösung dieser Formeln ist nicht jedermanns Sache, und daher den handwerksmäßigen Verfertigern der Quartgefäße folgende Verfahrungsweise anzuempfehlen:

Man mache das Gefäß vorläufig nach Gutdünken, wiege es, fülle es mit Wasser, bis es zwei Pfund, 14 Loth, 1 Quentchen mehr wiegt, als es leer wog; darauf mache man an der

der Oberfläche des Wassers ein Zeichen in das Gefäß. Wird es nun mit einer flüssigen Masse bis zu diesem Zeichen angefüllt, so kann man überzeugt seyn, daß man ein richtiges Quart derselben habe. Zu den Vorsichtsmaßregeln gehört, daß das Wasser entweder reines Regenwasser oder destillirtes Wasser sey, und eine Wärme von 15 Grad Reaumür habe. Denn unter diesen Umständen wiegt ein Kubikfuß reines Waßer 66 ℔, und füllt 27 Quart an.

§. 570. Den Inhalt eines parabolischen Afterkegels Fig. 55., zu finden.

Formel: $\frac{R^2 . p . h}{2} = J.$

Mit dem Quadrat des Halbmessers (R^2) der Grundfläche multiplicire die Zahl 3,14... und die Höhe h; endlich dividire alles durch 2, weil dieser Körper die Hälfte eines Cylinders von gleicher Höhe und Grundfläche ist.

Z. B. Es sey $CD = R = 3'',5$; $DA = 7' = h$, so ist der Inhalt $= \frac{3,5^2 . 3,14 . 7}{2} = \frac{12,25 . 3,14 . 7}{2}$

$\frac{269,255}{2} = 134,6275$ Kubikzoll.

§. 571. Den Inhalt eines elliptischen Körpers (Ellipsoide) zu finden.

Formel: $\frac{A . a^2 . p}{6} = J.$

Multiplicire die große Axe mit dem Quadrat der kleinen, mit 3,14..., und dividire das Product durch 6.

Z. B. Es sey die große Axe der Erde, oder der Durchmesser am Äquator = 1720, und die kleine Axe oder der Abstand der Pole = 1710 Meilen, so ist ihr kubischer Inhalt

$\frac{1720 . 1710^2 . 3,141}{6} = 2632918122$ Kubik-Meilen.

Als Kugel berechnet, ist ihr Inhalt = 2662560000 Kubik-Meilen.

§. 572.

§. 572. Den Inhalt einer Kugel zu finden.

1. Formel: $\frac{D^3 . p}{6} = J.$

Multiplicire den kubirten Diameter mit 3,141..., und dividire das Product durch 6. Oder nach der

2. Formel: $\frac{D^3 . 157}{300} = J$, denn $300 : 157 = D^3 : J.$

3. Formel: $\frac{2R^2 . p . D}{3} = J$ (Siehe §. 236.)

Z. B. es sey der Diameter $D = 2$ Fuß, so ist ihr Inhalt $\frac{2^3 . 3,14}{6} = \frac{8 . 3,14}{6} = \frac{25,12}{6} = 4,186$ Kubikfuß.

§. 573. Aus dem gegebenen Inhalt einer Kugel ihren Diameter zu finden.

Formel: $\sqrt[3]{\left(\frac{6 . J}{p}\right)} = D.$

den 6fachen Inhalt dividire durch 3,141, und ziehe aus dem Quotienten die Kubikwurzel.

§. 574. Die Oberfläche einer Kugel zu finden.

Formel: $4R^2 . p$, oder $D^2 p =$ Oberfläche.

Z. B. Es sey der Diameter einer Kugel = 3 Zoll, so ist $D^2 . p = 3^2 . 3,14159... = 28,27431$ □ Zoll, = Oberfläche.

§. 575. Den Inhalt eines Kugelabschnitts AME Fig. 191. zu finden.

Formel: $(3.h.R - h^2) . \frac{p . h}{3} = J.$

wobei $CA = R =$ Radius, $AH = h$ die Höhe bedeutet.

Z. B. Es sey $R = 8''$; $h = 2''$, so ist der Abschnitt $AME = (3 . 2 . 8 - 2^2) . \frac{3,141 . 2}{3}$

$$= (48-4) \cdot \frac{6,282}{3} = 44 \cdot 2,094 = 92,136 \text{ Kubikzoll},$$

d. h. 92 Kubikzoll, 136 Kubiklinien.

Sollte das Kugelstück MBE berechnet werden, so ist HB = h, und die Rechnung, wie vorher.

§. 576. Die Oberfläche eines Kugelabschnitts AME Fig. 191. zu finden.

Formel. $AE^2 . p$, oder $(AH^2 + AH . HB) . p$ = Oberfläche AME.

Die Größe der Sehne findet man durch $AH : HE = HE : HB$, also ist $HE^2 = AH . HB$ und $AH^2 + HE^2 = AE^2$.

Für die Oberfläche des Kugelstücks MBE gilt die

Formel: $BE^2 . p = O$
und $BE^2 = BH^2 + BH . HA$.

Z. B. Es sey AH = 3; HB = 17, so ist $AE^2 = 60$ und die Fläche AME $= (3^2 + 3 . 17) . 3,141... = 188,5$ □ Maaß.

Nennt man den Durchmesser allgemein d, das Stück AH = x, so sind die Formeln

$$(AH^2 + AH . HB) . p$$
völlig gleich mit $\underline{(x^2 + x . (d-x) . p}$
$$\underline{= (x^2 + dx - x^2) . p}$$

also die Oberfläche AME $= dx . p = O$, welche Formel die bequemste ist.

§. 577. Den Inhalt eines Zonenstückes DOME Fig. 191. zu finden.

Formel. $$(3H . R - H^2) . \frac{p . H}{3} - (3 . h . R - h^2) . \frac{p . h}{3} = J.$$

Dabei ist H = AC; R = Radius; h = AH.

Man berechnet zuerst das Kugelstück AOD, und zieht davon das Stück AME ab.

Wenn OD der Äquator und in A der Pol, so ist das Formular einfacher, und $= \frac{D^3 p}{12} - (3h . R - h^2) . \frac{p . h}{3}$.

Z. B.

Z. B. Es sey $AH = h = 3$
$AC = R = 10$
$BA = D = 20$

so ist $\frac{20^3 p}{12} = \frac{25120}{12} = 2093,33$

und $(3.3.10 - 3^2).\frac{3,14.3}{3} = 81.3,14 = 254,46$

Inhalt des Zonenstücks 1838,87

§. 578. Die Oberfläche einer Zone DOME zu finden. Fig. 191.

Formel. $D . h . p =$ Oberfläche.

Multiplicire die Peripherie eines größten Kreises $D . p$ mit der Höhe der Zone $HC = h$.

Z. B. Es sey $\left.\begin{array}{l} D = 20 \\ HC = h = 7 \end{array}\right\}$; so ist $20 . 7 . 3,14 \ldots = 439,8$ □ Maaß.

§. 579. Den Inhalt eines keilförmigen Ausschnitts zu finden.

Formel: $\frac{D^3.p.n}{6.360} = J.$

Solche Ausschnitte verhalten sich zur ganzen Kugel, wie die ihnen zukommenden Bogen von n Graden, zum Umkreise der Kugel. Daher $360° : n° = \frac{D^3 p}{6} : \frac{D^3.p.n}{6.360}$.

§. 580. Die Oberfläche eines keilförmigen Ausschnittes zu finden.

Formel: $\frac{D^2.p.n}{360} = O.$

Wie 360° zur Oberfläche der Kugel ($D^2 p$), so die dem Ausschnitt zukommenden Grade (n), zur Oberfläche desselben.

§. 581. Den körperlichen Inhalt ganz unregelmäßiger Körper zu finden.

Wenn sie sich auf keine Weise in bekannte geometrische Körper zerlegen lassen, so wiege man sie, und auch einen Kubikzoll oder Fuß ihrer Masse, und suche aus dem bekannten Gewicht der Massen die Massen selbst. Z. B. eine steinerne Bildsäule wog 300 ℔; ein Kubikzoll der Steinmasse wog $\frac{1}{4}$ ℔, wie groß ist der kubische Inhalt der Bildsäule?

$\frac{1}{4}$ ℔ : 1 Kubikzoll = 300 ℔?

(4

Sie enthielt 1200 Kubikzoll.

Läßt sich kein kleinerer Theil der Masse wiegen, so stecke man den unregelmäßigen Körper in ein Gefäß von bekanntem Inhalt, und fülle dasselbe vollends mit Wasser oder Sand an; nehme den Körper wieder heraus, und berechne den leer gewordenen Raum des Gefäßes, welcher dem Inhalt des Körpers gleich seyn muß.

§. 582. Sehr oft lassen sich unregelmäßige Körper, z. B. Kornhaufen, Erdhaufen u. dgl. mit leichter Mühe in regelmäßige verwandeln und berechnen. Gemeiniglich bilden solche Haufen Piramyden oder abgekürzte Piramyden, bei denen es hauptsächlich darauf ankommt, die Grundflächen und Länge auszumitteln. Oft läßt sich eine solche Masse als Prisma berechnen, wie z. B. der Inhalt eines mit Getreide beladenen Kahns; denn die Getreidemasse bildet ein niedergelegtes Prisma, dessen Grundflächen senkrecht stehen, und leicht zu berechnen sind. Multiplicirt man eine solche Fläche mit der Länge, so erhält man den Inhalt. Die Grund- oder Durchschnittsfläche kann man in ein Trapez verwandeln, wenn man die Oberfläche des Getreides ebenen läßt; denn alsdann ist die obere Breite der untern parallel. Weil diese Aufgabe häufig vorkommt, so wollen wir sie an einem Beispiel lösen.

Es sey die untere Breite eines Schiffsraums = 4 Fuß, 2 Zoll = 50 Zoll; die obere Breite = 6 Fuß 8 Zoll = 80 Zoll; die Höhe = 5 Fuß = 60 Zoll; die Länge = 24 Fuß = 288 Zoll. Wie viel Scheffel enthält er?

$B = 80$ und h oder die Höhe $= 60$ Zoll

$b = 50$ daher $\frac{b+B}{2} = 65$

$\overline{130}$

$2:)\ \overline{65}$

$3900 = G =$ d. Grundfläche

multiplicirt mit $288 = l =$ Länge

31200
312
78

1123200 Kubikzoll.

Dividirt man diese Zahl durch 3072, so kommen 365,6 Scheffel, oder 15 Wispel $5\frac{6}{10}$ Scheffel.

Formular. $\left(\frac{B+b}{2}\right) . h . l =$ Inhalt eines Schiffsraums, wobei B und b Breiten, h senkrechte Höhe, und l Länge bedeutet.

VII. Verwandlung der Körper.

§. 583. Jeder Körper kann in andere geometrische Körper, die gleichviel Inhalt haben, mittelst der Rechnung verwandelt werden. Man beobachte auch hier, wie bei der Verwandlung der Flächen die allgemeine Regel:

> Setze den Inhalt des gegebenen Körpers oder sein Formular auf die eine Seite, und das Formular desjenigen Körpers, in welchen er verwandelt werden soll, auf die andere Seite einer Gleichung; lege überall die bekannten Werthe unter, und sondere die unbekannte Größe gehörig ab, so ergiebt sich ihr Werth in lauter bekannten Größen.

Würfel und Kugeln sind durch eine Größe, die Seite und den Radius; aber Prisma, Cylinder, Kegel und Piramyden durch zwei oder drei Größen zu bestimmen. Denn es kommt bei letzteren sowol auf ihre Grundflächen, als Höhen an, wobei wieder allerlei Umstände statt finden können, von denen wenigstens so viel bekannt oder gewählt werden muß, daß sich das Übrige berechnen läßt.