Der Rathgeber bei mathematischen Beschäftigungen

Stöpel, August

Stendal, 1819

VII. Verwandlung der Körper.

urn:nbn:de:hbz:466:1-63556

$B = 80$ und h oder die Höhe $= 60$ Zoll
$b = 50$ daher $\frac{b + B}{2} = 65$

$$\begin{array}{r} 130 \\ 2{:})\ \overline{65} \end{array}$$

$3900 = G =$ d. Grundfläche
multiplicirt mit $288 = l =$ Länge

$$\begin{array}{r} 31200 \\ 312 \\ 78 \\ \hline 1123200 \end{array}$$ Kubikzoll.

Dividirt man diese Zahl durch 3072, so kommen 365,6 Scheffel, oder 15 Wispel $5\frac{6}{10}$ Scheffel.

Formular. $\left(\frac{B+b}{2}\right) . h . l =$ Inhalt eines Schiffsraums, wobei B und b Breiten, h senkrechte Höhe, und l Länge bedeutet.

VII. Verwandlung der Körper.

§. 583. Jeder Körper kann in andere geometrische Körper, die gleichviel Inhalt haben, mittelst der Rechnung verwandelt werden. Man beobachte auch hier, wie bei der Verwandlung der Flächen die allgemeine Regel:

> Setze den Inhalt des gegebenen Körpers oder sein Formular auf die eine Seite, und das Formular desjenigen Körpers, in welchen er verwandelt werden soll, auf die andere Seite einer Gleichung; lege überall die bekannten Werthe unter, und sondere die unbekannte Größe gehörig ab, so ergiebt sich ihr Werth in lauter bekannten Größen.

Würfel und Kugeln sind durch eine Größe, die Seite und den Radius; aber Prisma, Cylinder, Kegel und Piramyden durch zwei oder drei Größen zu bestimmen. Denn es kommt bei letzteren sowol auf ihre Grundflächen, als Höhen an, wobei wieder allerlei Umstände statt finden können, von denen wenigstens so viel bekannt oder gewählt werden muß, daß sich das Übrige berechnen läßt.

Zu

Zu solchen Verwandlungen gehört eine genaue Bekanntschaft mit den Formeln für die Inhalte der Körper, Gewandtheit in der Auflösung der Gleichungen, und ein richtiger geometrischer Blick. Aber kein Zweig der Geometrie gewährt auch dem talentvollen Zögling mehr Vergnügen, als gerade dieser.

Den Anfängern zum Nutzen wollen wir an einigen Beispielen die Verfahrungsweise, und die vortheilhafte Anwendung der Logarihmen zeigen.

§. 584. Einen Körper, dessen Inhalt $= J$, zu verwandeln:

in einen Würfel.

Formel: $\sqrt[3]{J} = l$,

wobei l die Seitenlinie des Würfels, wodurch dieser Körper vollkommen bestimmt ist.

Z. B. Wenn 64 Kubikzoll in einen Würfel zu verwandeln sind, so ist $J = 64$, und $\sqrt[3]{64} = 4 =$ der Seite desselben.

§. 585. in eine Kugel.

Formel: $\sqrt[3]{\frac{6 \cdot J}{p}} = D$,

wobei $p = 3{,}141\ldots$ und $D =$ Diameter.

Hier ist $J = \frac{D^3 \cdot p}{6}$, siehe §. 572.

$$6J = D^3 \cdot p$$

$$\frac{6J}{p} = D^3, \text{ also } \sqrt[3]{\frac{6J}{p}} = D.$$

Z. B. Es sollen 64 Kubikzoll in eine Kugel verwandelt werden. Der Kürze wegen rechnen wir mit Logarithmen.

$$\log. 6 = 0{,}7781513$$
$$\log. 64 = J = 1{,}8061800 \text{ addirt}$$
$$2{,}5843313$$
$$\log. 3{,}14\ldots = 0{,}4971500 \text{ abgezogen}$$
daraus $\sqrt[3]{}$ gezogen; 3:) $2{,}0871813$
$$\log. = 0{,}6957271 = 4{,}9628 = D.$$

und der gesuchte Diameter der Kugel ist $= 4'' 9''' 6''''$ u. s. w.

§. 586. in ein Parallelepipedon.

Formel: $J = l . b . h$

also $\frac{J}{l . b} = h =$ der Höhe,

und $\frac{J}{l . h} = b =$ der Breite,

und $\frac{J}{b . h} = l =$ der Länge.

Wenn z. B. auch das Verhältniß der Länge und Breite $l : b = m : n$ gegeben ist, so sondere man eine der Größen l und b ab, und setze ihren Werth in die Gleichung $J = l . b . h$, so wird sich ergeben, daß nach der

Formel: $\frac{nJ}{b^2 m} = h$; $\sqrt{\frac{nJ}{mh}} = b$; $\frac{mJ}{nl^2} = h$;

$\sqrt{\frac{mJ}{nh}} = l.$

Es sey $J = 64$; $h = 4$; $b = 3$, man sucht die Länge l. Nach obiger Formel ist $l = \frac{J}{b . h}$, d. i.

$\frac{64}{3 . 4} = \frac{64}{12} = 5{,}333 = l$, und so würde jede andere Seite leicht gefunden seyn. Es sey aber $l : b = 16 : 9$, so ist $m = 16$; $n = 9$, und $\frac{nJ}{b^2 m} = h$,

d. i.

d. i. $\frac{9.64}{9.16} = 4 = h$; ferner $\sqrt{\frac{n.J}{mh}} = b, = \sqrt{\frac{9.64}{16.4}}$ $= 3 = b$; so wie $\sqrt{\frac{mJ}{nh}} = \sqrt{\frac{16.64}{9,4}} = \sqrt{\frac{256}{9}}$ $= \sqrt{28,4444} = 5,333 = l.$

§. 587. in ein Prisma.

Formel: $\frac{J}{g} = h =$ Höhe,

$\frac{J}{h} = g =$ Grundfläche.

Ist aber die Anzahl der Seiten des Prisma, mithin die Gestalt der Grundfläche gegeben, so muß der Werth von g in die verlangte Figur verwandelt werden, wozu in dem Abschnitt von der Verwandlung der Flächen Anleitung gegeben ist und Formeln vorkommen.

Z. B. Es sey der gegebene Inhalt = 64 Kubikfuß in ein dreiseitiges Prisma, dessen Höhe auf 8 Fuß bestimmt ist, zu verwandeln. Man sucht die Seite der Grundfläche, welche $\frac{64}{8} = 8$ □ Fuß ist, und in ein gleichseitiges Dreieck nach §. 536. verwandelt werden muß.

Die Seite $m = \sqrt{\left(\frac{2.8.1,732}{3.0,5}\right)} = \sqrt{18,475}$ $= 4',298.$

§. 588. in einen Cylinder.

Formel: $\frac{J}{r^2 p} = h =$ Höhe,

und $\sqrt{\frac{J}{p.h}} = r =$ Radius der Grundfläche.

Es soll z. B. ein Cylinder, der 1 Quart oder 64 Kubikzoll enthält, und 6 Zoll im Diameter hat, angefertigt werden, wie hoch muß er seyn?

Hier ist $J = 64$; $r = 3$; p, wie bekannt, $= 3,14\ldots$ also

also $\frac{J}{r^2 p} = \frac{64}{9 . 3,14} = 2,26$ Zoll, d. i. 2 Zoll, 2 Linien, 6 Scrupel = h = der Höhe (wobei 1 Duodecimalzoll in 10 Linien, zu 10 Scrupel, gerechnet, welches bei allen solchen Aufgaben sehr bequem ist.)

§. 589. in eine Piramyde.

Formel: $\frac{3J}{h} = g =$ Grundfläche,

und $\frac{3J}{g} = h =$ Höhe.

Hier ist zu bestimmen, welche Gestalt die Grundfläche haben soll, um den Werth von g darin zu verwandeln.

Z. B. der Inhalt J = 64 Kubikfuß soll in eine sechsseitige Piramyde, deren Höhe 16′ seyn kann, verwandelt werden, wie groß wird eine Seite derselben seyn?

$$\frac{3J}{h} = \frac{3 . 64}{16} = 12 \,\square\, \text{Fuß} = g.$$

Diese 12 □ Fuß nach §. 536. in ein Sechseck verwandelt, giebt für die Seite $m = \sqrt{\left(\frac{2 . 12 . 1 .}{6 . 0,866}\right)}$

$= \sqrt{\frac{4}{0,866}} = \sqrt{4,619} = 2',149 =$ einer Seite.

§. 590. in einen Kegel.

Formel: $\frac{3J}{r^2 . p} = h =$ Höhe.

und $\sqrt{\frac{3J}{p . h}} = r =$ Radius der Grundfläche.

Hier ist die Grundfläche allemal ein Kreis und $= r^2 p$, also, wenn eine von den Größen r oder h bekannt ist, so ist die andere allzeit zu finden.

§. 591. in einen abgekürzten Kegel.

Formel: $\frac{3J}{(R^2 + r^2 + rR) \cdot p} = h =$ Höhe,

und $\sqrt{\left(\frac{3J}{p \cdot h} - r^2 + \frac{r^2}{4}\right)} - \frac{r}{2} = R =$ Radius der Grundfläche,

und $\sqrt{\left(\frac{3J}{p \cdot h} - R^2 + \frac{R^2}{4}\right)} - \frac{R}{2} = r =$ Radius der Durchschnittsfläche.

Z. B. es sey $R = 2$; $r = 1$; $J = 64$, so ist $h = 8{,}734 \ldots$ Höhe. Legt man diesen Werth für h in den andern Formeln unter, so erhält man R und r wieder.

§. 592. Einen Würfel zu verdoppeln oder n mal zu nehmen.

Unter dieser Aufgabe verstehen wir: die Seite eines Würfels zu finden, der doppelt, oder überhaupt n mal so viel Masse hat, als der gegebene.

Formel: $\sqrt[3]{nJ} = l =$ der Seite.

Z. B. es sey die Seite eines Würfels, der 3mal so groß, als der gegebene ist, welcher 64 Kubikzoll hat, zu finden. Hier ist $J = 64$; $n = 3$; und $\sqrt[3]{3 \cdot 64} = \sqrt[3]{192} = 5'',769 =$ der Seite des 3mal größern Würfels.

Da n auch ein Bruch seyn kann, z. B. $\frac{1}{2}$, so kann man die Seite eines kleinern Würfels eben so leicht finden. $\sqrt[3]{\frac{1}{2} \cdot 64} = \sqrt[3]{32} = 3'',1748 =$ der Seite eines halb so großen Würfels.

§. 593. Einen gegebenen Inhalt in einen Körper zu verwandeln, dessen Seiten ein gegebenes Verhältniß haben, z. B. in ein Parallelepipedon, dessen Seiten sich wie $\left\{\begin{matrix} 3 : 4 : 5 \\ m : n : q \end{matrix}\right\}$ verhalten. Der gegebene Inhalt sey 480 Kubikfuß $= J$; der, dessen Seiten m, n, q sind, $= P$, so findet man die Seiten des neuen Körpers durch folgende Proportionen:

$P : J = m^3 : x^3$, und $x = \sqrt[3]{\frac{m^3 J}{P}}$ = der Seite x,

$P : J = n^3 : y^3$, und $y = \sqrt[3]{\frac{n^3 J}{P}}$ = der Seite y,

$P : J = q^3 : z^3$, und $z = \sqrt[3]{\frac{q^3 J}{P}}$ = der Seite z.

Im gegenwärtigen Falle, wo $m = 3$, $n = 4$, $q = 5$, ist $P = 3 . 4 . 5 = 60$,

$$\text{und } x = \sqrt[3]{\frac{3^3 . 480}{60}} = \sqrt[3]{216} = 6 = x,$$

$$\text{und } \sqrt[3]{\frac{4^3 . 480}{60}} = \sqrt[3]{512} = 8 = y,$$

$$\text{und } \sqrt[3]{\frac{5^3 . 480}{60}} = \sqrt[3]{1000} = 10 = z.$$

Durch theilweise Auszziehung der $\sqrt[3]{}$ ergeben sich die

Formeln: $m . \sqrt[3]{\frac{J}{P}} = x$; $n . \sqrt[3]{\frac{J}{P}} = y$;

$$q . \sqrt[3]{\frac{J}{P}} = z.$$

§. 594. Ein elliptisches Gefäß, dessen große Axe = 4 Fuß 8 Zoll = 56 Zoll; kleine Axe = 3 Fuß 8 Zoll = 44″; Höhe = 2 Fuß 6 Zoll = 30″, enthält 58045,68 Kubikzoll oder 907 Quart. Man soll ein kleineres, jenem ähnliches Gefäß, das nur 18 Quart enthält, anfertigen; wie groß muß jede seiner Axen und seine Höhe seyn?

Weil sich die Inhalte ähnlicher Körper zu einander verhalten, wie die Würfel der ähnlichen Seiten, so gilt die

Formel: $907 : 18 = 56^3 : A^3$, und A

$$= \sqrt[3]{\left(\frac{18.56^3}{907}\right)} = \text{großen Axe.}$$

log.

$$\begin{array}{rl} \log.\ 18 = & 1,2552727 \\ \log.\ 56^3 = & 5,2445640 \\ \hline & 6,4998367 \\ \log.\ 907 = & 2,9576073 \\ \hline \end{array}$$

Daraus $^3\sqrt{\ }$ 3:) $3,5422294$

$\log.\ A = 1,1807431 = 15'',16 =$ großen Axe.

Ferner $907 : 18 = 44^3 : a^3$, und $a = \sqrt[3]{\left(\frac{18 . 44^3}{907}\right)}$

$= 11'',91 = a =$ der kleinen Axe,

und $907 : 18 = 30^3 : h^3$, also $h = \sqrt[3]{\left(\frac{18 . 30^3}{907}\right)}$

$= 8'',12 =$ Höhe.

Dergleichen Aufgaben kommen häufig vor.

§. 595. Es ist ein abgekürzter Kegel adeb Fig. 192. gegeben; man wünscht die krumme Oberfläche oder den Mantel desselben zu zeichnen und aus Pappe zu formen.

Nennt $ag = R$; $dh = r$; $ad = a$; und $ac = A$, und schließt:

$af : ad = ag : ac$, weil die $\triangle$ adf und acg ähnlich.

$= R - r : a = R : A$, und $A = \frac{a . R}{R - r}$.

Die ac oder A ist der Radius desjenigen Kreises, woraus der Mantel ein Sector ist, in Fig 193 ist sie die NC. Der Bogen NK des auszuschneidenden Sectors wird dem Umfange der Grundfläche des Kegels gleich seyn, folglich $= Dp$, oder $2 R\ p$.

Aus dem Radius A ergiebt sich die dazugehörige Peripherie $= 2 A . p$. Daher läßt sich der Bogen NK in Graden angeben. $2 A . p : 360° = D . p : NK$; und $NK = \frac{D . 360}{2 A}$, wobei $D =$ Diameter der Grundfläche des Kegels.

Den kleinen concentrischen Kreis, wovon LH Fig. 193 ein Bogenstück, ziehe man in einem Abstande $NL = a$, also mit einem Radius $= A - a$.

Man

Man schneide nun das Sectorstück NKHLN aus, rolle es zusammen, daß NL an KH streift, so hat man den Mantel des abgekürzten Kegels.

Das ganze Geschäft besteht demnach in Folgendem:

1. Ziehe einen Kreis mit dem Radius $A = \frac{R \cdot a}{R - r}$;
2. Von diesem Kreise nimm einen Bogen von $\frac{D \cdot 360}{2A}$ Graden.
3. Ziehe einen zweiten concentrischen Kreis mit dem Radius $A - a$.
4. Ziehe gerade Linien von jedem Endpuncte des Bogens nach dem Mittelpunct, und schneide das zwischen den Kreisen und den geraden Linien liegende Stück aus.

Z. B. Man will den Fuß einer Orgelpfeife, welcher ein abgekürzter Kegel ist, aus einer Zinnplatte schneiden. Der große Durchmesser $= D$ soll 6 Zoll, also $R = 3$ Zoll; der kleine Durchmesser dc Fig. 192., soll 1 Zoll, also $r = 0{,}5$ oder $\frac{1}{2}$ Zoll; die schiefe Höhe $= a$ (in der Figur ad) soll 9 Zoll betragen. Wie sind die Kreise zu ziehen?

1. Der Radius $CN = A = \frac{R \cdot a}{R - r} = \frac{3 \cdot 9}{3 - 0{,}5} = \frac{27}{2{,}5}$ $= 10{,}8$ Zoll $= A$.
2. Der davon zu nehmende Bogen $= \frac{D \cdot 360}{2A} = \frac{6 \cdot 360}{2 \cdot 10{,}8}$ $= \frac{2160}{21{,}6} = 100$ Grade.
3. Der Radius des kleinen Kreises, $CL = A - a$ $= 10{,}8 - 9 = 1{,}8$ Zoll.
4. Das ausgeschnittene Stück NKHLN gehörig zusammen gerollt, giebt, wenn die breite Öffnung oben hingestellt wird, den Fuß der Orgelpfeife.

Dritte