



Der Rathgeber bei mathematischen Beschäftigungen

Stöpel, August

Stendal, 1819

§. 583-594. Formeln für die Verwandlung eines Körpers in allerlei andere geometrische (Würfel zu verdoppeln); in Körper von gegebenem Verhältniß;

[urn:nbn:de:hbz:466:1-63556](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-63556)

$B = 80$ und h oder die Höhe $= 60$ Zoll.

$$b = 50 \quad \text{daher} \quad \frac{b + B}{2} = 65$$

3.) $\frac{130}{65}$ $\frac{3900 = G = d. \text{ Grundfläche}}{288 = l = \text{Länge}}$

$$\begin{array}{r} 31200 \\ 312 \\ 78 \\ \hline 1123200 \text{ Kubitzoll.} \end{array}$$

Dividirt man diese Zahl durch 3072, so kommen 365,6 Scheffel, oder 15 Wispel $5\frac{6}{10}$ Scheffel.

Formular. $\left(\frac{B+b}{2}\right) \cdot h \cdot l = \text{Inhalt eines Schiffzraums}$, wobei B und b Breiten, h senkrechte Höhe, und l Länge bedeutet.

VII. Verwandlung der Körper.

§. 583. Jeder Körper kann in andere geometrische Körper, die gleichviel Inhalt haben, mittelst der Rechnung verwandelt werden. Man beobachte auch hier, wie bei der Verwandlung der Flächen die allgemeine Regel:

Setze den Inhalt des gegebenen Körpers oder sein Formular auf die eine Seite, und das Formular desjenigen Körpers, in welchen er verwandelt werden soll, auf die andere Seite einer Gleichung; lege überall die bekannten Werthe unter, und sondere die unbekante Größe gehörig ab, so ergibt sich ihr Werth in lauter bekannten Größen.

Würfel und Kugeln sind durch eine Größe, die Seite und den Radius; aber Prisma, Cylinder, Kegels und Pyramyden durch zwei oder drei Größen zu bestimmen. Denn es kommt bei letzteren sowol auf ihre Grundflächen, als Höhen an, wobei wieder allerlei Umstände statt finden können, von denen wenigstens so viel bekannt oder gewählt werden muß, daß sich das Ubrige berechnen läßt.

Zu

Zu solchen Verwandlungen gehört eine genaue Bekanntschaft mit den Formeln für die Inhalte der Körper, Gewandtheit in der Auflösung der Gleichungen, und ein richtiger geometrischer Blick. Aber kein Zweig der Geometrie gewährt auch dem talentvollen Jüngling mehr Vergnügen, als gerade dieser.

Den Anfängern zum Nutzen wollen wir an einigen Beispielen die Verfahrensweise, und die vortheilhafte Anwendung der Logarithmen zeigen.

§. 584. Einen Körper, dessen Inhalt = J , zu verwandeln:

in einen Würfel.

Formel: $\sqrt[3]{J} = l$,

wobei l die Seitenlinie des Würfels, wodurch dieser Körper vollkommen bestimmt ist.

Z. B. Wenn 64 Kubitzoll in einen Würfel zu verwandeln sind, so ist $J = 64$, und $\sqrt[3]{64} = 4 =$ der Seite desselben.

§. 585. in eine Kugel.

Formel: $\sqrt[3]{\frac{6 \cdot J}{p}} = D$,

wobei $p = 3,141\dots$ und $D =$ Diameter.

Hier ist $J = \frac{D^3 \cdot p}{6}$, siehe S. 572.

$$\frac{6J}{p} = D^3 \cdot p$$

$$\frac{6J}{p} = D^3, \text{ also } \sqrt[3]{\frac{6J}{p}} = D,$$

Z. B. Es sollen 64 Kubitzoll in eine Kugel verwandelt werden. Der Kürze wegen rechnen wir mit Logarithmen.

$$\log. 6 = 0,7781513$$

$$\log. 64 = J = 1,8061800 \text{ addirt}$$

$$2,5843313$$

$$\log. 3,14\dots = 0,4971500 \text{ abgezogen}$$

$$\text{Daraus } \sqrt[3]{} \text{ gezogen; } 3:) \quad 2,0871813$$

$$\log. = 0,6957271 = 4,9628 = D.$$

und der gesuchte Diameter der Kugel ist $= 4'' 9''' 6''''$
u. s. w.

§. 586. in ein Parallelepipedon.

$$\text{Formel: } J = l \cdot b \cdot h$$

$$\text{also } \frac{J}{l \cdot b} = h = \text{der Höhe,}$$

$$\text{und } \frac{J}{l \cdot h} = b = \text{der Breite,}$$

$$\text{und } \frac{J}{b \cdot h} = l = \text{der Länge.}$$

Wenn z. B. auch das Verhältniß der Länge und Breite $l : b = m : n$ gegeben ist, so sondere man eine der Größen l und b ab, und setze ihren Werth in die Gleichung $J = l \cdot b \cdot h$, so wird sich ergeben, daß nach der

$$\text{Formel: } \frac{nJ}{b^2 m} = h; \quad \sqrt{\frac{nJ}{mh}} = b; \quad \frac{mJ}{nl^2} = h;$$

$$\sqrt{\frac{mJ}{nh}} = l.$$

Es sey $J = 64$; $h = 4$; $b = 3$, man sucht die Länge l . Nach obiger Formel ist $l = \frac{J}{b \cdot h}$, d. i.

$$\frac{64}{3 \cdot 4} = \frac{64}{12} = 5,333 = l, \text{ und so würde jede andere}$$

Seite leicht gefunden seyn. Es sey aber $l : b$

$$= 16 : 9, \text{ so ist } m = 16; n = 9, \text{ und } \frac{nJ}{b^2 m} = h,$$

d. i.

$$\begin{aligned} \text{d. i. } \frac{9 \cdot 64}{9 \cdot 16} &= 4 = h; \text{ ferner } \sqrt{\frac{m \cdot J}{m \cdot h}} = b, = \sqrt{\frac{9 \cdot 64}{16 \cdot 4}} \\ &= 3 = b; \text{ so wie } \sqrt{\frac{m \cdot J}{n \cdot h}} = \sqrt{\frac{16 \cdot 64}{9 \cdot 4}} = \sqrt{\frac{256}{9}} \\ &= \sqrt{28,4444} = 5,333 = l. \end{aligned}$$

§. 587. in ein Prisma,

$$\begin{aligned} \text{Formel: } \frac{J}{g} &= h = \text{Höhe,} \\ \frac{J}{h} &= g = \text{Grundfläche.} \end{aligned}$$

Ist aber die Anzahl der Seiten des Prisma, mit welcher die Gestalt der Grundfläche gegeben, so muß der Werth von g in die verlangte Figur verwandelt werden, wozu in dem Abschnitt von der Verwandlung der Flächen Anleitung gegeben ist und Formeln vorkommen.

Z. B. Es sey der gegebene Inhalt = 64 Kubikfuß in ein dreiseitiges Prisma, dessen Höhe auf 8 Fuß bestimmt ist, zu verwandeln. Man sucht die Seite der Grundfläche, welche $\frac{64}{8} = 8 \square$ Fuß ist, und in ein gleichseitiges Dreieck nach §. 536. verwandelt werden muß.

$$\begin{aligned} \text{Die Seite } m &= \sqrt{\left(\frac{2 \cdot 8 \cdot 1,732}{3 \cdot 0,5}\right)} = \sqrt{18,475} \\ &= 4',298. \end{aligned}$$

§. 588. in einen Cylinder.

$$\text{Formel: } \frac{J}{r^2 p} = h = \text{Höhe,}$$

$$\text{und } \sqrt{\frac{J}{p \cdot h}} = r = \text{Radius der Grundfläche.}$$

Es soll z. B. ein Cylinder, der 1 Quart oder 64 Kubikzoll enthält, und 6 Zoll im Diameter hat, angefertigt werden, wie hoch muß er seyn?

Hier ist $J = 64$; $r = 3$; p , wie bekannt, = 3,14... also

also $\frac{J}{r^2 p} = \frac{64}{9,3,14} = 2,26$ Zoll, d. i. 2 Zoll, 2 Linien, 6. Scrupel $= h =$ der Höhe (wobei 1 Duodecimalzoll in 10 Linien, zu 10 Scrupel, gerechnet, welches bei allen solchen Aufgaben sehr bequem ist.)

§. 589. in eine Piramide.

Formel: $\frac{3J}{h} = g =$ Grundfläche,

und $\frac{3J}{g} = h =$ Höhe.

Hier ist zu bestimmen, welche Gestalt die Grundfläche haben soll, um den Werth von g darin zu verwandeln.

Z. B. der Inhalt $J = 64$ Kubikfuß soll in eine sechsseitige Piramide, deren Höhe 16' seyn kann, verwandelt werden, wie groß wird eine Seite derselben seyn?

$$\frac{3J}{h} = \frac{3 \cdot 64}{16} = 12 \square \text{ Fuß} = g.$$

Diese 12 \square Fuß nach §. 536. in ein Sechseck verwandelt, giebt für die Seite $m = \sqrt{\left(\frac{2 \cdot 12 \cdot 1.}{6 \cdot 0,866}\right)}$

$$= \sqrt{\frac{4}{0,866}} = \sqrt{4,619} = 2',149 = \text{einer Seite}$$

§. 590. in einen Kegel.

Formel: $\frac{3J}{r^2 p} = h =$ Höhe.

und $\sqrt{\frac{3J}{p \cdot h}} = r =$ Radius der Grundfläche.

Hier ist die Grundfläche allemal ein Kreis und $= r^2 p$, also, wenn eine von den Größen r oder h bekannt ist, so ist die andere allzeit zu finden.

§. 591.

§. 591. in einen abgefürzten Regel.

$$\text{Formel: } \frac{3J}{(R^2 + r^2 + rR) \cdot p} = h = \text{Höhe,}$$

$$\text{und } \sqrt{\left(\frac{3J}{p \cdot h} - r^2 + \frac{r^2}{4}\right) - \frac{r}{2}} = R = \text{Radius}$$

der Grundfläche,

$$\text{und } \sqrt{\left(\frac{3J}{p \cdot h} - R^2 + \frac{R^2}{4}\right) - \frac{R}{2}} = r = \text{Radius}$$

der Durchschnittsfläche.

z. B. es sey $R = 2$; $r = 1$; $J = 64$, so ist $h = 8,734 \dots$ Höhe. Legt man diesen Werth für h in den andern Formeln unter, so erhält man R und r wieder.

§. 592. Einen Würfel zu verdoppeln oder n mal zu nehmen.

Unter dieser Aufgabe verstehen wir: die Seite eines Würfels zu finden, der doppelt, oder überhaupt n mal so viel Masse hat, als der gegebene.

$$\text{Formel: } \sqrt[3]{nJ} = l = \text{der Seite.}$$

z. B. es sey die Seite eines Würfels, der 3mal so groß, als der gegebene ist, welcher 64 Kubitzoll hat, zu finden. Hier ist $J = 64$; $n = 3$; und $\sqrt[3]{3 \cdot 64} = \sqrt[3]{192} = 5,769 =$ der Seite des 3mal größern Würfels.

Da n auch ein Bruch seyn kann, z. B. $\frac{1}{2}$, so kann man die Seite eines kleinern Würfels eben so leicht finden. $\sqrt[3]{\frac{1}{2} \cdot 64} = \sqrt[3]{32} = 3,1748 =$ der Seite eines halb so großen Würfels.

§. 593. Einen gegebenen Inhalt in einen Körper zu verwandeln, dessen Seiten ein gegebenes Verhältniß haben, z. B. in ein Parallelepipedon, dessen Seiten sich wie $\left. \begin{matrix} 3 : 4 : 5 \\ m : n : q \end{matrix} \right\}$ verhalten. Der gegebene Inhalt sey 480 Kubikfuß = J ; der, dessen Seiten m, n, q sind, = P , so findet man die Seiten des neuen Körpers durch folgende Proportionen:

P :

$$P:J = m^3 : x^3, \text{ und } x = \sqrt[3]{\frac{m^3 J}{P}} = \text{der Seite } x,$$

$$P:J = n^3 : y^3, \text{ und } y = \sqrt[3]{\frac{n^3 J}{P}} = \text{der Seite } y,$$

$$P:J = q^3 : z^3, \text{ und } z = \sqrt[3]{\frac{q^3 J}{P}} = \text{der Seite } z.$$

Im gegenwärtigen Falle, wo $m = 3$, $n = 4$,
 $q = 5$, ist $P = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$,

$$\text{und } x = \sqrt[3]{\frac{3^3 \cdot 480}{60}} = \sqrt[3]{216} = 6 = x,$$

$$\text{und } \sqrt[3]{\frac{4^3 \cdot 480}{60}} = \sqrt[3]{512} = 8 = y,$$

$$\text{und } \sqrt[3]{\frac{5^3 \cdot 480}{60}} = \sqrt[3]{1000} = 10 = z.$$

Durch theilweise Ausziehung der $\sqrt[3]{}$ ergeben sich die

$$\text{Formeln: } m \cdot \sqrt[3]{\frac{J}{P}} = x; \quad n \cdot \sqrt[3]{\frac{J}{P}} = y;$$

$$q \cdot \sqrt[3]{\frac{J}{P}} = z.$$

§. 594. Ein elliptisches Gefäß, dessen große Axc = 4 Fuß 8 Zoll = 56 Zoll; kleine Axc = 3 Fuß 8 Zoll = 44"; Höhe = 2 Fuß 6 Zoll = 30", enthält 58045,68 Kubitzoll oder 907 Quart. Man soll ein kleineres, jenem ähnliches Gefäß, das nur 18 Quart enthält, anfertigen; wie groß muß jede seiner Axen und seine Höhe seyn?

Weil sich die Inhalte ähnlicher Körper zu einander verhalten, wie die Würfel der ähnlichen Seiten, so gilt die

$$\text{Formel: } 907 : 18 = 56^3 : A^3, \text{ und } A \\ = \sqrt[3]{\left(\frac{18 \cdot 56^3}{907}\right)} = \text{großen Axc,}$$

log.

$$\log. 18 = 1,2552727$$

$$\log. 56^3 = 5,2445640$$

$$\hline 6,4998367$$

$$\log. 907 = 2,9576073$$

$$\text{Daraus } \sqrt[3]{3:)} \quad \hline 3,5422294$$

$$\log. A = 1,1807431 = 15'',16 = \text{großen Axc}$$

$$\text{Ferner } 907 : 18 = 44^3 : a^3, \text{ und } a = \sqrt[3]{\left(\frac{18 \cdot 44^3}{907}\right)}$$

$$= 11'',91 = a = \text{der kleinen Axc,}$$

$$\text{und } 907 : 18 = 30^3 : h^3, \text{ also } h = \sqrt[3]{\left(\frac{18 \cdot 30^3}{907}\right)}$$

$$= 8'',12 = \text{Höhe.}$$

Dergleichen Aufgaben kommen häufig vor.

§. 595. Es ist ein abgekürzter Kegels adeb Fig. 192. gegeben; man wünscht die krumme Oberfläche oder den Mantel desselben zu zeichnen und aus Pappe zu formen.

Nennt $ag = R$; $dh = r$; $ad = a$; und $ac = A$, und schließt:

$$af : ad = ag : ac, \text{ weil die } \triangle adf \text{ und } acg \text{ ähnlich.}$$

$$= R - r : a = R : A, \text{ und } A = \frac{a \cdot R}{R - r}.$$

Die ac oder A ist der Radius desjenigen Kreises, woraus der Mantel ein Sector ist, in Fig 193 ist sie die NC . Der Bogen NK des auszuschneidenden Sectors wird dem Umfange der Grundfläche des Kegels gleich seyn, folglich $= Dp$, oder $2R \cdot p$.

Aus dem Radius A ergiebt sich die dazugehörige Peripherie $= 2A \cdot p$. Daher läßt sich der Bogen NK in Graden angeben. $2A \cdot p : 360^\circ = D \cdot p : NK$;

und $NK = \frac{D \cdot 360}{2A}$, wobei $D = \text{Diameter der Grundfläche des Kegels.}$

Den kleinen concentrischen Kreis, wovon LH Fig. 193 ein Bogenstück, ziehe man in einem Abstände $NL = a$, also mit einem Radius $= A - a$.

Mant