Der Rathgeber bei mathematischen Beschäftigungen

Stöpel, August

Stendal, 1819

I. Statik oder Mechanik.

urn:nbn:de:hbz:466:1-63556

Dritte Abtheilung.

Angewandte Mathematik.

§. 596. Unter dem Namen der angewandten Mathematik begreift man eine Menge solcher Wissenschaften, bei denen die Lehrsätze der reinen Mathematik als Grundlage ihrer Theorie erscheinen. Die Gränzen der reinen und angewandten Mathematik sind nie scharf bestimmt; eigentlich gehört die practische Geometrie und Körpermessung mit zur angewandten; wir wollen darunter nur diejenigen Wissenschaften begreifen, die man gemeiniglich in der Naturlehre abhandelt, und bei denen hauptsächlich Rechnungen vorkommen. Es ist nicht wohl möglich, alle in der angewandten Mathematik vorkommende Formeln stets im Gedächtnisse zu behalten; darum sind die vornehmsten derselben, den Freunden mathematischer Beschäftigungen zum Nutzen, in der folgenden Abtheilung nach Kästner's, Euler's und Klügel's Anleitung gesammelt, und mit den nöthigen Erläuterungen und Beispielen begleitet. Die Lehrer und Schüler solcher Wissenschaften werden sie bei jedem Lehrbuche mit großem Vortheil, und jeder gebildete Mann mit Zeitersparniß benutzen können, zumal da die meisten Lehrbücher nur historisch die vorkommenden Formeln berühren, und über die Rechnungen hinwegeilen.

I. Die Statik oder Mechanik

§. 597. lehrt, wie das Gleichgewicht schwerer vester Körper zu erhalten sey. Man unterscheidet dabei fol-

folgende Kunstausdrücke: **Kraft** heißt, was eine Wirkung hervorbringt, oder verhindert. Der Kraft steht allemal die **Last** entgegen, beide sind daher **entgegengesetzte Kräfte**. Sind beide gleich groß, so erfolgt **Stillstand**, **Gleichgewicht**; dann nennt man sie auch **todte Kräfte**; sind sie ungleich, so bringt die stärkere eine Wirkung oder Bewegung hervor, und heißt **lebendig**.

Die **Schwere** ist das Streben aller Körper nach dem Mittelpunct der Erde. Die **Richtung der Schwere** ist daher senkrecht auf der **wahren Horizontallinie**, welche ein Kreis ist, und aus dem Mittelpunct der Erde gezogen, mit der Oberfläche derselben parallel läuft.

Die Statik zeigt, wie diese allgemeine Eigenschaft aller Körper zu benutzen sey, um Stillstand oder **Gleichgewicht**, und **Bewegung** hervorzubringen. Diejenige Kraft, mit welcher ein Körper auf seine Unterlage drückt, heißt sein **Gewicht**. Die Kräfte lassen sich durch Gewichte vorstellen.

Eine Hauptrolle spielt der **Hebel**, der in bürgerlichen Handthierungen unter vielerlei Gestalten erscheint. Man unterscheidet **einarmichte** und **doppelarmichte** Hebel, je nachdem der Ruhepunct, oder die Unterlage in B oder A Fig. 194. ist. Der mathematische Hebel ist eine gerade unbiegsame Linie BC, die keine Schwere hat. Wenn nun in Q und P an demselben Gewichte ziehen, so kann man über ihre Verschiedenheit und den veränderten Unterstützungspunct mancherlei Rechnungen anstellen, mit denen wir uns beschäftigen wollen.

§. 598. Wenn BC Fig. 194. ein mathematischer Hebel, in A der Unterstützungspunct, und $BA = AC$, und $Q = P$, so steht alles im Gleichgewicht, denn die Kräfte auf beiden Seiten heben einander auf, oder vernichten sich gegenseitig.

Wenn BA zu AC eben das Verhältniß hat, wie P zu Q; so steht der Hebel gleichfalls im Gleichgewicht. Denn die Gewichte verhalten sich zu einander, wie die umgekehrten Entfernungen vom Ruhepuncte A. Daher die

Formel: $Q : P = AC : AB$.

Die Summe der Gewichte verhält sich zur Länge des Hebels, wie eins der Gewichte zur entgegengesetzten Entfernung vom Ruhepuncte. D. h.

Formel: $Q + P : BC = Q : AC$. Also ist $AC = \frac{BC . Q}{Q + P}$
oder $P : BA$

und $AB = \frac{BC . P}{Q + P}$

woraus der Ruhepunct allezeit gefunden werden kann, wenn die Länge des Hebels und die Gewichte bekannt sind.

Z. B. Es sey BC ein 4 Fuß oder 48 Zoll langes Vorgehänge (Schere) an einem Wagen, vor den man 3 Pferde spannen will; man will den Punct A finden, um welchen das Vorgehänge beweglich wird.

Hier ist $Q = 2$ und $P = 1$, d. h. in Q sollen 2 Pferde, und in C soll 1 Pferd ziehen; man sucht AC.

Nach der Formel ist $AC = \frac{BC . Q}{Q + P} = \frac{48 . 2}{2 + 1} = \frac{96}{3}$ $= 32$ Zoll.

§. 599. Die Producte aus den Gewichten und den dazu gehörigen Theilen des Hebels müssen gleich seyn, wenn Gleichgewicht statt haben soll. Man nennt dies die Momente des Hebels.

Formeln: $Q . BA = P . AC$.

Also ist $Q = \frac{P . AC}{BA}$, und $P = \frac{Q . BA}{AC}$

$BA = \frac{P . AC}{Q}$, und $AC = \frac{Q . BA}{P}$.

Die Unterlage trägt $Q + P$.

§. 600. Hierbei wurde angenommen, daß die Schwere des Hebels selbst, im Vergleich mit den daran wirkenden Kräften, als unbedeutend erscheine. Wo das nicht der Fall seyn kann, so muß das eigene Gewicht der BC mit in Rechnung kommen.

Es sey A die Unterlage und in H der Schwerpunct (Fig. 195.), so ist das Moment des Hebels = dem Product

duct aus dem Gewicht des ganzen Hebels in den Abstand des Schwerpuncts von der Unterlage; welches Product zu dem Product derjenigen Seite, wo der Schwerpunct liegt, addirt werden muß.

Formel: $Q . BA = P . AC + G . AH$, wobei G = Gewicht des Hebels.

Jede dieser 6 Größen ist durch Rechnung zu finden.

Formeln:

$$Q = \frac{(P . AC) + (G . AH)}{BA};\ u.\ BA = \frac{(P . AC) + (G . AH)}{Q}$$

$$P = \frac{(Q . BA) - (G . AH)}{AC};\ u.\ AC = \frac{(Q . BA) - (G . AH)}{P}$$

$$G = \frac{(Q . BA) - ((P\ AC)}{AH};\ u.\ AH = \frac{(Q . BA) - (P . AC)}{G}.$$

Z. B. Es sey das Gewicht $P = 1\frac{1}{2}$ ℔; $AC = 8$ Zoll; das Gewicht des Hebels = 2 ℔; der Abstand $AH = 2$ Zoll; der Arm $BA = 4$ Zoll; man sucht das Gewicht Q, das den Hebel im Gleichgewicht erhalten soll. —

Nach der Formel ist $Q = \frac{1\frac{1}{2} . 8 + 2 . 2}{4} = \frac{12 + 4}{4} = \frac{16}{4}$ = 4 ℔.

§. 601. Es kann der Hebel QP um A Fig. 196. beweglich seyn, und in eine Lage z. B. ce gebracht werden, bei welcher Veränderung die Endpuncte des Hebels Bogen, wie Pc und Qe beschreiben, die sich wie die Abstände von A verhalten.

Formel: $Pc : Qe = AP : AQ$

$$\text{Also ist } Pc = \frac{Qe . AP}{AQ};\ AQ = \frac{Qe . AP}{Pc}$$

$$AP = \frac{Pc . AQ}{Qe};\ Qe = \frac{Pc . AQ}{AP}.$$

Der Körper Q ist durch die Veränderung der Lage um die senkrechte Höhe de gehoben worden.

Z. B. Die Last Q solle mittelst des Hebels PQ (dessen Länge 12 Fuß, dessen Unterlage 4 Fuß von P in A), um 3 Fuß gehoben worden, wie tief wird sich der Punct P senken müssen, d. h. wie groß ist bc?

Hier steht statt Qe die de, statt Pc die bc; $Qe = 3$; $AP = 4$ und also $AQ = 8$ Fuß. Nach der ersten Formel ist

$$Pc = bc = \frac{Qe \cdot AP}{AQ} = \frac{3 \cdot 4}{8} = \frac{12}{8} = 1\tfrac{1}{2} \text{ Fuß.}$$

Bei den andern Formeln wird die Frage noch nicht gelöst: wo muß der Unterstützungspunct liegen, wenn man mit einem 12 Fuß langen Hebel die Last Q um 3 Fuß heben, und P nur um $1\frac{1}{2}$ Fuß senken will? —

Man nenne $AP = x$, so ist $QA = 12 - x$. Es verhält sich aber $bc : de = x : QP - x$, d. i.

$$\begin{aligned}
\tfrac{3}{2} : 3 &= x : 12 - x \\
3x &= \tfrac{3}{2} \cdot (12 - x) \\
6x &= 36 - 3x \\
9x &= 36 \\
x &= \tfrac{36}{9}, \text{ also } x = PA = 4 \text{ Fuß.}
\end{aligned}$$

Formel: $\frac{t \cdot l}{h + t} = x =$ dem Abstand der Unterlage von P, wobei $t = bc =$ Tiefe; $h = de =$ Höhe; $l = QP =$ Länge des Hebels.

§. 602. Es sey AB Fig. 197. ein Hebel der 2ten Art, wo der Unterstützungspunct in A, die Last P an c hängt, in B aber eine Kraft aufwärts, wie K zieht; so trägt K nur $\frac{1}{2} P$, wenn $Ac = cB$, denn die Unterlage A trägt die andere Hälfte. Je näher c an A rückt, je weniger trägt K, und je länger wird cB. Hier gilt $AB : P = AC : K$.

Formeln: $K = \frac{P \cdot AC}{AB}$; $P = \frac{AB \cdot K}{AC}$

$$Ac = \frac{AB \cdot K}{P}; \; AB = \frac{P \cdot Ac}{K}.$$

Die Last kann auf c liegen, oder daran hängen. Es stelle z. B. AB einen Schiebkarren vor, in A sey die Axe des Rades, und wenn $AB = 6$ Fuß, in einem Abstande

Ac

Ac = 2 Fuß eine Last von 240 ℔ ruht, wie viel trägt der Mensch in K davon?

Hier ist $P = 240$
$Ac = 2$
$AB = 6$

und nach der Formel $K = \frac{240 \cdot 2}{6} = \frac{480}{6} = 80$ ℔.

Die 2te Formel $P = \frac{AB \cdot K}{Ac}$ zeigt, wie schwer das Gewicht P seyn könne, wenn alle Umstände bleiben.

Die 3te Formel für Ac lehrt den Punct finden, wo, bei gleichen Umständen, die Last P liegen müsse; und die 4te Formel giebt die Länge des Hebels an, wenn die andern Umstände die nämlichen bleiben.

§. 603. Ein Hebel der 3ten Art ist AB Fig. 198, wo die Kraft in c wirkt, um die Last P aufwärts zu ziehen, oder zu halten. Hier muß K um so größer seyn, je näher c an A liegt. In B würde $K = P$ seyn; wenn $Ac = cB$, so so ist $K = 2P$.

Es verhält sich $Ac : AB = P : K$, daher die

Formeln:

$$Ac = \frac{AB \cdot P}{K}, \text{ oder } \frac{P \cdot cB}{K - P}, \quad K = \frac{AB \cdot P}{Ac} \text{ oder } \frac{P \cdot cB}{Ac} + P$$

$$AB = \frac{Ac \cdot K}{P}; \text{ und } P = \frac{Ac \cdot K}{AB},$$

wodurch jede der 4 Größen aus den übrigen zu finden ist.

§. 604. Es ziehen an dem einarmichten Hebel cb Fig. 199. die beiden Gewichte q und p niederwärts, in a ziehe eine andere Kraft den Hebel aufwärts nach ar. Soll nun Gleichgewicht statt finden, so muß $ca = \frac{cd \cdot q + cb \cdot p}{p + q}$.

Die Kraft r ist gleich der Summe der Momente der abwärts ziehenden Gewichte p und q, dividirt durch ihren Abstand von c; oder $r = \frac{cd \cdot q + cb \cdot p}{ca}$.

Wäre $ca = cb$, so müßte r das Gewicht p ganz, und dann noch den Theil von q tragen, der nach Verhältniß auf db fällt. Zöge r über c, so wäre $ca = o$, also der Bruch $\frac{cd \cdot q + cb \cdot p}{o}$ eine unendliche Größe, d. h. es ist unmöglich, den Hebel wagerecht zu erhalten.

$$\text{Formeln: } ca = \frac{cd \cdot q + cb \cdot p}{p + q};\ r = \frac{cd \cdot q + cb \cdot p}{ca}$$

$$cd = \frac{r \cdot ca - cb \cdot p}{q};\ q = \frac{r \cdot ca - cb \cdot p}{cd}$$

$$cb = \frac{r \cdot ca - cd \cdot q}{p};\ p = \frac{r \cdot ca - cd \cdot q}{cb}.$$

Der Punct a ist der gemeinschaftliche Schwerpunct von q und p.

§. 605. An einem solchen Hebel können mehr als zwei Kräfte nach einerlei Richtung ziehen, als p, q, r, s Fig. 200., dann findet man ihren gemeinsamen Schwerpunct durch die

$$\text{Formeln: } ac = \frac{ab \cdot p + ad \cdot q}{p + q};\text{u. } ae = \frac{ac(p+q) + af \cdot r}{p + q + r}$$

$$ag = \frac{ae \cdot (p + q + r) + ah \cdot s}{p + q + r + s}.$$

Man bemerke, daß bei der ersten Formel $p + q$ für eine in c, bei der zweiten $p + q + r$, und bei der dritten $p + q + r + s$ für eine Größe gelten.

§. 606. Der Winkelhebel ACB Fig. 201. ist um C beweglich. Die Kräfte P und Q wirken senkrecht auf die Hebelarme, und ihr Verhältniß ist $Q : P = CA : CB$, daher die

$$\text{Formeln: } Q = \frac{P \cdot CA}{CB};\ \text{und } P = \frac{Q \cdot CB}{CA},$$

$$CB = \frac{P \cdot CA}{Q};\ \text{und } AC = \frac{Q \cdot CB}{P}.$$

§. 607. Auf den Winkelhebel ACB Fig. 203. wirken die Kräfte P und Q unter schiefen Winkeln. Man verlangt ihr Verhältniß.

Die Kraft P wirkt auf den Arm CA nur so viel, als sie auf das Perpendikel CD; desgleichen wirkt Q auf CB nur so viel, als sie auf den Perpendikel CE wirken würde. Daher die

Formel: $P : Q = CE : CD$, übrigens wie §. 606.

Die Richtungen der Kräfte schneiden sich in M. Zieht man CT mit MQ, und CV mit MP parallel, so ist im Parallelogramm MVCT die Linie CM eine Diagonale und die mittlere Richtung und Größe der wirkenden Kräfte. Auch hier verhält sich

$$MT : MV = Q : P.$$

Durch Zeichnung und Rechnung läßt sich die mittlere Richtung und Größe CM finden, wenn die Kräfte P und Q, so wie ihre Richtung oder der Winkel TMV bekannt sind.

Z. B. Es sey $P = 9$ ℔, ihre Richtung TM; $Q = 11$ ℔ und ihre Richtung MV. $< TMV = 55°49'$. Man sucht die mittlere Kraft MC.

Aufl. An den Punct M setze die Schenkel des gegebenen Winkels, mache $MT = 9$; und $MV = 11$; $TC = MV$, und $VC = TM$, so ist die Diagonale MC im Parallelogramm MTCV die Größe der mittlern Kraft.

Durch Rechnung. Ist $< TMV = TCV$, so ist $< o = 180° - < TMV$; also im Dreieck MCV die Summe der Winkel r und n; beide Seiten MV und $VC = TM$, und $< o$ bekannt; daher CM nach Tafel XII. trigonometrisch zu finden.

Bei dem angenommenen Werthe ist $MT = 9$; $MV = 11$; $CV = 9$; $< o = 180° - 55°49' = 124°11'$.

Nun ist

$$MV + VC : MV - VC = \text{Tang.} \frac{r+n}{2} : \text{Tang. des Differenzw.}$$

$$\text{d. i. } 20 : 2 = \text{Tang. } 27°54' : \text{Tang. } x.$$

log.

$$\log. 27° 54' = 9{,}7238436$$
$$\log. 2 = 0{,}3010300$$
$$10{,}0248736$$
$$\log. 20 = 1{,}3010300$$
$$\log. \text{Tang}. x = 8{,}7238436 - 3° 2'$$
Hiezu addirt $27° 54'$

giebt $< n = 30° 56'$

der Unterschied giebt $< r = 24° 52'$

$$\text{Sin}. r : CV = \text{Sin}. o : MC$$
$$24° 52' : 9 \quad 124° 11$$
$$\log.\text{Sin}.124° 11' = \log.\text{Sin}. 55° 49 = 9{,}9176336$$
$$\log. 9 = 0{,}9542425$$
$$10{,}8718761$$
$$\log. 24° 52' \; 9{,}6237743$$
$$\log. MC = 1{,}2481018 = 17{,}705$$
die Größe der mittlern Kraft $MC = 17\tfrac{7}{10}$ ℔.

Wenn an den 3 Kräften MV, VC und MC nur zwei, nebst dem Winkel bekannt sind, so läßt sich allezeit die dritte finden.

Formeln: $MV = \frac{MC . \text{Sin}. n}{\text{Sin}. o}$; $VC = \frac{MC . \text{Sin}. r}{\text{Sin}. o}$.

§. 608. Weil bei dem Maschinenwesen die Berechnung der Hebelwerkzeuge sehr wichtig ist, so hat man die gegebenen Formeln nicht nur, sondern auch folgende durch Erfahrung ausgemittelte Sätze zu behalten:

Der Mensch kann mit seinen beiden Händen eine mittlere Kraft von 102,14 ℔ drücken; $265\frac{1}{2}$ ℔ heben; 102 ℔ im Gehen ziehen. Ein Pferd zieht etwa 771 ℔.

§. 609. Vom Räderwerk.

Es sey CB Fig. 204. der Radius einer cylindrischen Welle; mit derselben sey ein Rad, dessen Halbmesser CA, so bevestigt, daß es mit der Welle umgedreht werden kann. Die Last Q bestrebt sich, B herabzuziehen; die Kraft P hält ihr an A das Gleichgewicht.

Kraft und Last wirken beim Rade und Cylinder allemal nach der Richtung der Tangente. Daher könnte auch Q in q, und P in p etwa durch ein aufgewickeltes Seil ge=

gehalten werden. Dieses Werkzeug kommt häufig, und unter vielerlei Gestalten vor, als Mühlenrad, Kreuzhaspel, Winde, Göpel 2c., wo dann statt des großen Rades nur Arme, wie CA, angebracht sind. Zur Erhaltung des Gleichgewichts:

Formel: $P : Q = CB : CA$, wie beim Hebel;

Kraft $P = \frac{Q \cdot CB}{CA}$; der Halbmesser $CA = \frac{Q \cdot CB}{P}$;

Last $Q = \frac{P \cdot CA}{CB}$; Halbmesser d. Welle $CB = \frac{P \cdot CA}{Q}$.

§. 610. Ein Rad, an welchem nach der Richtung der Halbmesser am äußern Umfange Zähne angebracht sind, die in ein anderes greifen und es mit bewegen, heißt Stirnrad; siehe ab Fig. 205. Sind die Zähne auf der Fläche des Rades senkrecht, wie bei cd, so heißt es ein Kronrad.

Das kleinere Rad, worin das größere mit seinem Kamme eingreift, heißt das Getriebe, Triebstock, Trilling.

Wenn mehrere Räder in einander greifen, so entsteht ein Räderwerk.

§. 611. Am Rade Q Fig. 206 hängt um die Welle A eine Last P. Das Rad Q greift in das Getriebe B des Rades R, welches wieder in das Getriebe c des Rades S eingreift. Die Kraft F braucht nur sehr gering zu seyn, um der Last P das Gleichgewicht zu halten. Man erfährt die Größe der Kraft F dadurch,

daß man den Halbmesser der Welle, oder des Getriebes jedes Rades durch den Halbmesser jedes Rades dividirt, und was herauskommt, mit der Last multiplicirt.

Wenn a, b, c Halbmesser der Wellen, und q, r, s Halbmesser der Räder bedeuten, so erhält das Rad Q an seinem Umfange die Last P mit einer Kraft $= \frac{a}{q} \cdot P$.

das Rad R erhält sie durch $\frac{a}{q} \cdot \frac{b}{r} \cdot P$.

das Rad S erhält sie durch $\frac{a}{q} \cdot \frac{b}{r} \cdot \frac{c}{s} \cdot P$.

For=

Formel: $F = \frac{a}{q} \cdot \frac{b}{r} \cdot \frac{c}{s} \cdot P.$

Es sey $a = 3$; $b = 2$; $c = 1$
$q = 12$; $r = 10$; $s = 8$
die Last $P = 10$ ℔,
so ist $F = \frac{3}{12} \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{8} \cdot 10 = \frac{6}{960} \cdot 10 = \frac{60}{960} = \frac{1}{16}$ ℔.

In der Formel sind 5 Größen: drei Räder, die Last P, und die Kraft F, welche ihr das Gleichgewicht halten soll. Jede dieser Größen läßt sich durch Rechnung finden:

Formel:

für das Rad Q, $\frac{a}{q} = \frac{F}{\frac{b}{r} \cdot \frac{c}{s} \cdot P}$, und $P = \frac{F}{\frac{a}{q} \cdot \frac{b}{r} \cdot \frac{c}{s}}$

für das Rad R, $\frac{b}{r} = \frac{F}{\frac{a}{q} \cdot \frac{c}{s} \cdot P}$

für das Rad S, $\frac{c}{s} = \frac{F}{\frac{a}{q} \cdot \frac{b}{r} \cdot P}$.

Man sieht leicht ein, daß F allemal ein gewisser Theil von P, folglich kleiner als P, oder ein Bruch davon seyn muß. Ist nun P und F, d. h. Last und Kraft, also $\frac{F}{P}$ gegeben, so läßt sich das Verhältniß der Räder zu ihren Wellengetrieben durch Zerlegung des Bruchs in andere Brüche finden.

Z. B. Man wollte mit 6 ℔ vermittelst dreier Räder eine Last von 100 ℔ im Gleichgewicht erhalten, wie kann das Verhältniß der Halbmesser der Räder und Getriebe seyn?

Hier ist $\frac{F}{P} = \frac{6}{100}$. Man zerlege Zähler und Nenner in 3 Factoren, als die 6 in $3 \cdot 2 \cdot 1$; und die 100 in $5 \cdot 5 \cdot 4$, so ist das Verhältniß der Räder $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{4}$, d. h. des ersten Rades Halbmesser ist 5, seines Getriebes 3, des 2ten Rades Halbmesser $= 5$, seines Getriebes $= 2$, des 3ten Rades Halbmesser $= 4$, seines Getriebes $= 1$, und $\frac{6}{100} = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4}$. Dies Verhältniß kann unendlich mannichfach seyn, je nachdem man den Bruch $\frac{6}{100}$ zerlegt.

§. 612. Aus der gegebenen Anzahl der Zähne = z im Rade, und der Anzahl der Triebstöcke = S im Getriebe des 2ten Rades ergiebt sich, wie oft das Getriebe umläuft, ehe das Rad einmal herumkommt.

Formel: $\frac{Z}{S} = U =$ der Anzahl der Umläufe.

Z. B. ein Rad habe 360 Zähne; das eingreifende Getriebe 8 Triebstöcke, so giebt $\frac{360}{8} = 45$ Umläufe des Getriebes. Auch kann man die Umdrehung des letzten Getriebes, die einer Umdrehung des ersten Rades gehören, leicht finden.

Formel: $U \cdot u$, oder $\frac{Z}{S} \cdot \frac{z}{s}$,

d. h. dividire jedes Rades Zähne durch die Anzahl der eingreifenden Triebstöcke, und multiplicire die Quotienten mit einander.

Z. B. Das Rad Q mit 360 Zähnen treibt durch einmaligen Umlauf das Rad R 45 mal = U um; das Rad R mit 100 Zähnen treibt durch einmalige Umdrehung das Getriebe c mit 5 Triebstöcken $\frac{100}{5} = 20$ mal = u um; dann läuft das Rad S unter diesen Umständen $45 \cdot 20 = 900$ mal um, wenn Q einmal herum kommt.

§. 613. Der Flaschenzug Fig. 207. besteht aus einer Anzahl Rollen A, B, C, a, b, c, die sämmtlich um ihren Mittelpunct beweglich sind. Vom Haken F geht ein Seil um Aa Bb Cc nach R und S, woran Kräfte ziehen. Die Last hängt unten in E.

Man gebraucht dies Werkzeug, um große Lasten in die Höhe zu ziehen, und spart dadurch viel an Kräften.

Formel: Die Kraft S : Last E = 1 : 2n, wo n die Anzahl Rollen, hier = 3 bedeutet; denn die obern 3 Rollen a, b, c dienen nur dazu, die Seile zu ordnen.

Also

Also ist $S = \frac{E}{2n}$ = der ziehenden Kraft;

und $E = S \cdot 2n$ = der zu hebenden Last;

und $n = \frac{E}{2n}$ = der Anzahl der Rollen.

Mittelst dieser Formeln sind die 3 Fragen zu lösen:

1) Wie viel Kraft gehört dazu, um durch den Flaschenzug eine gegebene Last E, z. B. 612 ℔ im Gleichgewicht zu halten? — Die erste Formel giebt $\frac{612}{2.3} = \frac{612}{6}$ = 102 ℔.

2) Wie viel kann man mit einer gewissen Kraft S (hier = 102 ℔) im Gleichgewicht halten? Die Formel für E giebt $102 \cdot 2 \cdot 3 = 102 \cdot 6 = 612$ ℔.

3) Wie viel Rollen sind nöthig, wenn die Last E mit der Kraft S im Gleichgewicht erhalten werden soll? — Die Formel für n giebt $\frac{612}{102.2} = \frac{612}{204} = 3$.

Da sich jedes Seil um eben so viel verkürzen muß, als die Last E gehoben wird, so beträgt die Länge, die sich von R nach S abwickelt, $2nr$; wobei r die Höhe, um welche E gehoben wird, bedeutet.

Von der schrägen Ebene.

§. 614. Eine Fläche kann zur Erhebung oder Senkung einer Last gebraucht werden, wenn sie so gestellt wird, daß sie mit dem Horizonte einen schiefen Winkel macht. Z. B. AB Fig. 208. macht mit der horizontalen CB einen spitzen Winkel n. Auf AB befinde sich eine Last Q, die auf Qp senkrecht ruhen würde, wenn ihr Schwerpunct unterstützt wäre. Indessen drückt sie allerdings auf die Fläche AB nach der Richtung Qp, nur nicht so sehr, als wenn sie horizontal läge; sie wird daher auf AB herabgleiten oder rollen, mit einer Kraft, die man ihr relatives Gewicht nennt. Das relative Gewicht = r verhält sich zum ganzen Gewicht = g, wie die Höhe AC = h zur Länge AB = l.

Formel: $r : g = h : l$

$$\text{Also } r = \frac{g \,.\, h}{l} = \text{dem relativen Gewicht;}$$

$$g = \frac{r \,.\, l}{h} = \text{dem ganzen Gewicht;}$$

$$\left.\begin{array}{l} h = \frac{r \,.\, l}{g} = \text{der Höhe} \\ l = \frac{g \,.\, h}{r} = \text{der Länge} \end{array}\right\} \text{der schiefen Ebene.}$$

Wenn also über die Rolle R eine Kraft F auf Q wirkt, die dem relativen Gewicht von Q gleich ist, so kann Q nicht sinken. Wenn CA = AB, so fallen beide Linien in eine zusammen, und das relative Gewicht ist dem absoluten gleich.

Z. B. wenn $AC = h = 4$ Fuß; $AB = l = 7$ Fuß; $Q = 6$ ℔, so ist sein relatives Gewicht $= \frac{6 \,.\, 4}{7} = \frac{24}{7} = 3\frac{3}{7}$ ℔.

§. 615. Vom Keile.

Ein harter Körper, der eine breite Grundfläche und schiefe Seitenebenen hat, heißt ein Keil. Er kann einfach, wie CDB Fig. 209., wo er bei D rechtwinklicht; oder doppelt, CAB Fig. 210., seyn.

Bei Fig. 209. heißt CD die Höhe = h und CB die Länge = l; die Kraft F wirkt senkrecht auf DB in beiden Arten, und verhält sich zur Last Q, wie die Höhe zur Länge.

Formel: $F : Q = h : l$; also ist $F = \frac{Q \,.\, h}{l}$;

$$Q = \frac{F \,.\, l}{h};\ h = \frac{F \,.\, l}{Q};\ l = \frac{Q \,.\, h}{F}.$$

Beim doppelten Keil gelten dieselben Gesetze und Formeln, nur ist statt CD die CA zu setzen.

Je größer die Länge CB, und je kleiner die Höhe CD, desto mehr kann man mit dem Keil bei gleicher Kraftanstrengung ausrichten.

Durch

Durch die gegebenen Formeln werden 4 Fragen gelöst.

1) Die Last Q soll mit einem Keile, dessen Höhe und Länge bekannt sind, überwunden werden, wie groß muß die Kraft F seyn?

Wenn Q = 200 ℔; der Keil 3 Zoll hoch und 12 Zoll lang, so giebt die Formel für $F = \frac{200 . 3}{12}$ $= \frac{600}{12} = 50$ ℔.

2) Wie viel läßt sich mit diesem Keil und einer Kraft von 50 ℔ wirken? — Die Formel für Q giebt $\frac{50 . 12}{3} = \frac{600}{3} = 200$ ℔.

3) Wie hoch muß ein 12 Zoll langer Keil seyn, wenn eine Kraft von 50 ℔ die Last von 200 ℔ überwältigen soll? — Die Formel für h giebt $\frac{50 . 12}{200} = \frac{600}{200}$ = 3 Zoll.

4) Wie lang muß der 3 Zoll hohe Keil seyn, wenn er dasselbe wirken soll? — Die Formel für $l = \frac{200 . 3}{50}$ $= \frac{600}{50} = 12$ Zoll.

§. 616. Von der Schraube.

Ein vester Cylinder, um den ein fortlaufender Keil spiralförmig gelegt ist, heißt eine Schraube. Das Gewinde wird durch den Schraubengang getrennt. Gewinde und Schraubengang werden in eine cylindrische Höhle eingelassen, welche die Schraubenmutter heißt.

Die Kraft, welche die Schraube umzudrehen strebt, verhält sich zum Widerstande, oder zur Last, wie die Entfernung E zweier Gewinde zur Peripherie P des Cylinders.

Formel: $F : Q = E : P$

Also ist $F = \frac{Q \cdot E}{P}$ = der anzuwendenden Kraft,

$Q = \frac{F \cdot P}{E}$ = der zu bezwingenden Last,

$E = \frac{F \cdot P}{Q}$ = der Entfernung der Gewinde,

$P = \frac{Q \cdot E}{F}$ = dem Umfange der Schraube,

wodurch ebenfalls 4 Fragen, die Schraube betreffend, gelöst werden.

Es sey $Q = 375$ ℔; die Entfernung der Gewinde $E = 1$ Zoll; der Umfang $P = 10$ Zoll, wie viel Kraftaufwand ist erforderlich?

Die Formel für $F = \frac{375 \cdot 1}{10} = 37\frac{1}{2}$ ℔ = dem Kraftaufwand.

§. 617. Die Schraube ohne Ende besteht in einer Schraube, welche in ein Stirnrad greift, und es um seine Axe bewegt.

Die Kraft, welche angewendet wird, die Schraube zu drehen, verhält sich zur Last oder Wirkung, wie 1 zur Anzahl der Zähne.

Formel: $F : Q = 1 : z$

Also $F = \frac{Q}{z}$; $Q = F \cdot z$; und $z = \frac{Q}{F}$.

Z. B. Es sey die Anzahl der Zähne $= z = 200$; die Kraft $F = 8$ ℔, wie viel läßt sich damit überwinden, d. h. wie groß ist Q?

Die Formel für Q giebt $8 \cdot 200 = 1600$ ℔.

Die Formel für z giebt an, wie viel Zähne das Rad haben müsse, wenn mit 8 ℔ eine Last von 1600 ℔ im Gleichgewicht erhalten werden soll.