Der Rathgeber bei mathematischen Beschäftigungen

Stöpel, August

Stendal, 1819

§. 597-608. der Hebel; Formeln für alle vorkommende Fälle bei Hebeln von der ersten, zweiten und dritten Art; beim Winkelhebel; mittlere Kraft.

urn:nbn:de:hbz:466:1-63556

Dritte Abtheilung.

Angewandte Mathematik.

§. 596. Unter dem Namen der angewandten Mathematik begreift man eine Menge solcher Wissenschaften, bei denen die Lehrsätze der reinen Mathematik als Grundlage ihrer Theorie erscheinen. Die Gränzen der reinen und angewandten Mathematik sind nie scharf bestimmt; eigentlich gehört die practische Geometrie und Körpermessung mit zur angewandten; wir wollen darunter nur diejenigen Wissenschaften begreifen, die man gemeiniglich in der Naturlehre abhandelt, und bei denen hauptsächlich Rechnungen vorkommen. Es ist nicht wohl möglich, alle in der angewandten Mathematik vorkommende Formeln stets im Gedächtnisse zu behalten; darum sind die vornehmsten derselben, den Freunden mathematischer Beschäftigungen zum Nutzen, in der folgenden Abtheilung nach Kästner's, Euler's und Klügel's Anleitung gesammelt, und mit den nöthigen Erläuterungen und Beispielen begleitet. Die Lehrer und Schüler solcher Wissenschaften werden sie bei jedem Lehrbuche mit großem Vortheil, und jeder gebildete Mann mit Zeitersparniß benutzen können, zumal da die meisten Lehrbücher nur historisch die vorkommenden Formeln berühren, und über die Rechnungen hinwegeilen.

I. Die Statik oder Mechanik

§. 597. lehrt, wie das Gleichgewicht schwerer vester Körper zu erhalten sey. Man unterscheidet dabei fol-

folgende Kunstausdrücke: Kraft heißt, was eine Wirkung hervorbringt, oder verhindert. Der Kraft steht allemal die Last entgegen, beide sind daher entgegengesetzte Kräfte. Sind beide gleich groß, so erfolgt Stillstand, Gleichgewicht; dann nennt man sie auch todte Kräfte; sind sie ungleich, so bringt die stärkere eine Wirkung oder Bewegung hervor, und heißt lebendig.

Die Schwere ist das Streben aller Körper nach dem Mittelpunct der Erde. Die Richtung der Schwere ist daher senkrecht auf der wahren Horizontallinie, welche ein Kreis ist, und aus dem Mittelpunct der Erde gezogen, mit der Oberfläche derselben parallel läuft.

Die Statik zeigt, wie diese allgemeine Eigenschaft aller Körper zu benutzen sey, um Stillstand oder Gleichgewicht, und Bewegung hervorzubringen. Diejenige Kraft, mit welcher ein Körper auf seine Unterlage drückt, heißt sein Gewicht. Die Kräfte lassen sich durch Gewichte vorstellen.

Eine Hauptrolle spielt der Hebel, der in bürgerlichen Handthierungen unter vielerlei Gestalten erscheint. Man unterscheidet einarmichte und doppelarmichte Hebel, je nachdem der Ruhepunct, oder die Unterlage in B oder A Fig. 194. ist. Der mathematische Hebel ist eine gerade unbiegsame Linie BC, die keine Schwere hat. Wenn nun in Q und P an demselben Gewichte ziehen, so kann man über ihre Verschiedenheit und den veränderten Unterstützungspunct mancherlei Rechnungen anstellen, mit denen wir uns beschäftigen wollen.

§. 598. Wenn BC Fig. 194. ein mathematischer Hebel, in A der Unterstützungspunct, und $BA = AC$, und $Q = P$, so steht alles im Gleichgewicht, denn die Kräfte auf beiden Seiten heben einander auf, oder vernichten sich gegenseitig.

Wenn BA zu AC eben das Verhältniß hat, wie P zu Q; so steht der Hebel gleichfalls im Gleichgewicht. Denn die Gewichte verhalten sich zu einander, wie die umgekehrten Entfernungen vom Ruhepuncte A. Daher die

For-

Formel: $Q : P = AC : AB$.

Die Summe der Gewichte verhält sich zur Länge des Hebels, wie eins der Gewichte zur entgegengesetzten Entfernung vom Ruhepuncte. D. h.

Formel: $Q+P : BC = Q : AC$. Also ist $AC = \frac{BC \cdot Q}{Q+P}$
oder $P : BA$

und $AB = \frac{BC \cdot P}{Q+P}$

woraus der Ruhepunct allezeit gefunden werden kann, wenn die Länge des Hebels und die Gewichte bekannt sind.

Z. B. Es sey BC ein 4 Fuß oder 48 Zoll langes Vorgehänge (Schere) an einem Wagen, vor den man 3 Pferde spannen will; man will den Punct A finden, um welchen das Vorgehänge beweglich wird.

Hier ist $Q = 2$ und $P = 1$, d. h. in Q sollen 2 Pferde, und in C soll 1 Pferd ziehen; man sucht AC.

Nach der Formel ist $AC = \frac{BC \cdot Q}{Q+P} = \frac{48 \cdot 2}{2+1} = \frac{96}{3}$
$= 32$ Zoll.

§. 599. Die Producte aus den Gewichten und den dazu gehörigen Theilen des Hebels müssen gleich seyn, wenn Gleichgewicht statt haben soll. Man nennt dies die **Momente des Hebels.**

Formeln: $Q \cdot BA = P \cdot AC$.

Also ist $Q = \frac{P \cdot AC}{BA}$, und $P = \frac{Q \cdot BA}{AC}$

$BA = \frac{P \cdot AC}{Q}$, und $AC = \frac{Q \cdot BA}{P}$.

Die Unterlage trägt $Q + P$.

§. 600. Hierbei wurde angenommen, daß die Schwere des Hebels selbst, im Vergleich mit den daran wirkenden Kräften, als unbedeutend erscheine. Wo das nicht der Fall seyn kann, so muß das eigene Gewicht der BC mit in Rechnung kommen.

Es sey A die Unterlage und in H der Schwerpunct (Fig. 195.), so ist das Moment des Hebels = dem Product

duct aus dem Gewicht des ganzen Hebels in den Abstand des Schwerpuncts von der Unterlage; welches Product zu dem Product derjenigen Seite, wo der Schwerpunct liegt, addirt werden muß.

Formel: $Q \cdot BA = P \cdot AC + G \cdot AH$, wobei G = Gewicht des Hebels.

Jede dieser 6 Größen ist durch Rechnung zu finden.

Formeln:

$$Q = \frac{(P \cdot AC) + (G \cdot AH)}{BA}; \text{ u. } BA = \frac{(P \cdot AC) + (G \cdot AH)}{Q}$$

$$P = \frac{(Q \cdot BA) - (G \cdot AH)}{AC}; \text{ u. } AC = \frac{(Q \cdot BA) - (G \cdot AH)}{P}$$

$$G = \frac{(Q \cdot BA) - ((P \cdot AC)}{AH}; \text{ u. } AH = \frac{(Q \cdot BA) - (P \cdot AC)}{G}.$$

Z. B. Es sey das Gewicht $P = 1\frac{1}{2}$ ℔; $AC = 8$ Zoll; das Gewicht des Hebels = 2 ℔; der Abstand $AH = 2$ Zoll; der Arm $BA = 4$ Zoll; man sucht das Gewicht Q, das den Hebel im Gleichgewicht erhalten soll. —

Nach der Formel ist $Q = \frac{1\frac{1}{2} \cdot 8 + 2 \cdot 2}{4} = \frac{12+4}{4} = \frac{16}{4}$ $= 4$ ℔.

§. 601. Es kann der Hebel QP um A Fig. 196. beweglich seyn, und in eine Lage z. B. ce gebracht werden, bei welcher Veränderung die Endpuncte des Hebels Bogen, wie Pc und Qe beschreiben, die sich wie die Abstände von A verhalten.

Formel: $Pc : Qe = AP : AQ$

$$\text{Also ist } Pc = \frac{Qe \cdot AP}{AQ}; \; AQ = \frac{Qe \cdot AP}{Pc}$$

$$AP = \frac{Pc \cdot AQ}{Qe}; \; Qe = \frac{Pc \cdot AQ}{AP}.$$

Der Körper Q ist durch die Veränderung der Lage um die senkrechte Höhe de gehoben worden.

Z. B. Die Last Q solle mittelst des Hebels PQ (dessen Länge 12 Fuß, dessen Unterlage 4 Fuß von P in A), um 3 Fuß gehoben worden, wie tief wird sich der Punct P senken müssen, d. h. wie groß ist bc?

 Hier

Hier steht statt Qe die de, statt Pc die bc; Qe $=3$; AP $=4$ und also AQ $=8$ Fuß. Nach der ersten Formel ist

$$Pc = bc = \frac{Qe \cdot AP}{AQ} = \frac{3 \cdot 4}{8} = \frac{12}{8} = 1\tfrac{1}{2} \text{ Fuß.}$$

Bei den andern Formeln wird die Frage noch nicht gelöst: wo muß der Unterstützungspunct liegen, wenn man mit einem 12 Fuß langen Hebel die Last Q um 3 Fuß heben, und P nur um $1\frac{1}{2}$ Fuß senken will? —

Man nenne AP $= x$, so ist QA $= 12 - x$. Es verhält sich aber bc : de $= x$: QP $- x$, d. i,

$$\begin{aligned} \tfrac{3}{2} : 3 &= x : 12 - x \\ 3x &= \tfrac{3}{2} \cdot (12 - x) \\ 6x &= 36 - 3x \\ 9x &= 36 \\ x &= \tfrac{36}{9}, \text{ also } x = PA = 4 \text{ Fuß.} \end{aligned}$$

Formel: $\frac{t \cdot l}{h + t} = x =$ dem Abstand der Unterlage von P, wobei $t =$ bc $=$ Tiefe; $h =$ de $=$ Höhe; $l =$ QP $=$ Länge des Hevels.

§. 602. Es sey AB Fig. 197. ein Hebel der 2ten Art, wo der Unterstützungspunct in A, die Last P an c hängt, in B aber eine Kraft aufwärts, wie K zieht; so trägt K nur $\frac{1}{2}$ P, wenn Ac $=$ cB, denn die Unterlage A trägt die andere Hälfte. Je näher c an A rückt, je weniger trägt K, und je länger wird cB. Hier gilt AB : P $=$ AC : K.

Formeln: $K = \frac{P \cdot AC}{AB}$; $P = \frac{AB \cdot K}{AC}$

$Ac = \frac{AB \cdot K}{P}$; $AB = \frac{P \cdot Ac}{K}$.

Die Last kann auf c liegen, oder daran hängen. Es stelle z. B. AB einen Schiebkarren vor, in A sey die Axe des Rades, und wenn AB $= 6$ Fuß, in einem Abstande

Ac

Ac = 2 Fuß eine Last von 240 ℔ ruht, wie viel trägt der Mensch in K davon?

Hier ist $P = 240$
$Ac = 2$
$AB = 6$

und nach der Formel $K = \frac{240 . 2}{6} = \frac{480}{6} = 80$ ℔.

Die 2te Formel $P = \frac{AB . K}{Ac}$ zeigt, wie schwer das Gewicht P seyn könne, wenn alle Umstände bleiben.

Die 3te Formel für Ac lehrt den Punct finden, wo, bei gleichen Umständen, die Last P liegen müsse; und die 4te Formel giebt die Länge des Hebels an, wenn die andern Umstände die nämlichen bleiben.

§. 603. Ein Hebel der 3ten Art ist AB Fig. 198, wo die Kraft in c wirkt, um die Last P aufwärts zu ziehen, oder zu halten. Hier muß K um so größer seyn, je näher c an A liegt. In B würde $K = P$ seyn; wenn $Ac = cB$, so ist $K = 2P$.

Es verhält sich $Ac : AB = P : K$, daher die

Formeln:

$Ac = \frac{AB . P}{K}$, oder $\frac{P . cB}{K - P}$, $K = \frac{AB . P}{Ac}$ oder $\frac{P . cB}{Ac} + P$

$AB = \frac{Ac . K}{P}$; und $P = \frac{Ac . K}{AB}$,

wodurch jede der 4 Größen aus den übrigen zu finden ist.

§. 604. Es ziehen an dem einarmichten Hebel cb Fig. 199. die beiden Gewichte q und p niederwärts, in a ziehe eine andere Kraft den Hebel aufwärts nach ar. Soll nun Gleichgewicht statt finden, so muß $ca = \frac{cd . q + cb . p}{p + q}$.

Die Kraft r ist gleich der Summe der Momente der abwärts ziehenden Gewichte p und q, dividirt durch ihren Abstand von c; oder $r = \frac{cd . q + cb . p}{ca}$.

Wäre $ca = cb$, so müßte r das Gewicht p ganz, und dann noch den Theil von q tragen, der nach Verhältniß auf db fällt. Zöge r über c, so wäre ca = 0, also der Bruch $\frac{cd\,.\,q + cb\,.\,p}{0}$ eine unendliche Größe, d.h. es ist unmöglich, den Hebel wagerecht zu erhalten.

Formeln: $$ca = \frac{cd\,.\,q + cb\,.\,p}{p+q};\quad r = \frac{cd\,.\,q + cb\,.\,p}{ca}$$

$$cd = \frac{r\,.\,ca - cb\,.\,p}{q};\quad q = \frac{r\,.\,ca - cb\,.\,p}{cd}$$

$$cb = \frac{r\,.\,ca - cd\,.\,q}{p};\quad p = \frac{r\,.\,ca - cd\,.\,q}{cb}.$$

Der Punct a ist der gemeinschaftliche Schwerpunct von q und p.

§. 605. An einem solchen Hebel können mehr als zwei Kräfte nach einerlei Richtung ziehen, als p, q, r, s Fig. 200., dann findet man ihren gemeinsamen Schwerpunct durch die

Formeln: $$ac = \frac{ab\,.\,p + ad\,.\,q}{p+q};\ \text{u.}\ ae = \frac{ac(p+q) + af\,.\,r}{p+q+r}$$

$$ag = \frac{ae\,.\,(p+q+r) + ah\,.\,s}{p+q+r+s}.$$

Man bemerke, daß bei der ersten Formel p + q für eine in c, bei der zweiten p + q + r, und bei der dritten p + q + r + s für eine Größe gelten.

§. 606. Der Winkelhebel ACB Fig. 201. ist um C beweglich. Die Kräfte P und Q wirken senkrecht auf die Hebelarme, und ihr Verhältniß ist Q : P = CA : CB, daher die

Formeln: $$Q = \frac{P\,.\,CA}{CB};\ \text{und}\ P = \frac{Q\,.\,CB}{CA},$$

$$CB = \frac{P\,.\,CA}{Q};\ \text{und}\ AC = \frac{Q\,.\,CB}{P}.$$

§. 607. Auf den Winkelhebel ACB Fig. 203. wirken die Kräfte P und Q unter schiefen Winkeln. Man verlangt ihr Verhältniß.

Die Kraft P wirkt auf den Arm CA nur so viel, als sie auf das Perpendikel CD; desgleichen wirkt Q auf CB nur so viel, als sie auf den Perpendikel CE wirken würde. Daher die

Formel: $P : Q = CE : CD$, übrigens wie §. 606.

Die Richtungen der Kräfte schneiden sich in M. Zieht man CT mit MQ, und CV mit MP parallel, so ist im Parallelogramm MVCT die Linie CM eine Diagonale und die mittlere Richtung und Größe der wirkenden Kräfte. Auch hier verhält sich

$$MT : MV = Q : P.$$

Durch Zeichnung und Rechnung läßt sich die mittlere Richtung und Größe CM finden, wenn die Kräfte P und Q, so wie ihre Richtung oder der Winkel TMV bekannt sind.

Z. B. Es sey $P = 9$ ℔, ihre Richtung TM; $Q = 11$ ℔ und ihre Richtung MV. $< TMV = 55°49'$. Man sucht die mittlere Kraft MC.

Aufl. An den Punct M setze die Schenkel des gegebenen Winkels, mache $MT = 9$; und $MV = 11$; $TC = MV$, und $VC = TM$, so ist die Diagonale MC im Parallelogramm MTCV die Größe der mittlern Kraft.

Durch Rechnung. Ist $< TMV = TCV$, so ist $< o = 180° - < TMV$; also im Dreieck MCV die Summe der Winkel r und n; beide Seiten MV und $VC = TM$, und $< o$ bekannt; daher CM nach Tafel XII. trigonometrisch zu finden.

Bei dem angenommenen Werthe ist $MT = 9$; $MV = 11$; $CV = 9$; $< o = 180° - 55°49' = 124°11'$.

Nun ist

$$MV + VC : MV - VC = \text{Tang.} \frac{r+n}{2} : \text{Tang. des Differenzw.}$$

$$\text{d. i. } 20 \quad : \quad 2 \quad = \text{Tang. } 27°54' : \text{Tang. } x.$$

log.

$$\log. 27^\circ 54' = 9,7238436$$
$$\log. 2 = 0,3010300$$
$$10.0248736$$
$$\log. 20 = 1,3010300$$
$$\log. \text{Tang. } x = 8,7238436 - 3^\circ 2'$$

Hiezu addirt $27^\circ 54'$

giebt $< n = 30^\circ 56'$

der Unterschied giebt $< r = 24^\circ 52'$

$$\text{Sin. } r : CV = \text{Sin. } o : MC$$
$$24^\circ 52' : 9 \quad 124^\circ 11$$
$$\log.\text{Sin.} 124^\circ 11' = \log.\text{Sin } 55^\circ 49 = 9,9176336$$
$$\log. 9 = 0,9542425$$
$$10,8718761$$
$$\log. 24^\circ 52' \; 9,6237743$$
$$\log. MC = 1,2481018 = 17,705$$

die Größe der mittlern Kraft $MC = 17\frac{7}{10}$ ℔.

Wenn an den 3 Kräften MV, VC und MC nur zwei, nebst dem Winkel bekannt sind, so läßt sich allezeit die dritte finden.

Formeln: $MV = \frac{MC . \text{Sin. } n}{\text{Sin. } o}$; $VC = \frac{MC . \text{Sin. } r}{\text{Sin. } o}$.

§. 608. Weil bei dem Maschinenwesen die Berechnung der Hebelwerkzeuge sehr wichtig ist, so hat man die gegebenen Formeln nicht nur, sondern auch folgende durch Erfahrung ausgemittelte Sätze zu behalten:

Der Mensch kann mit seinen beiden Händen eine mittlere Kraft von 102,14 ℔ drücken; $265\frac{1}{2}$ ℔ heben; 102 ℔ im Gehen ziehen. Ein Pferd zieht etwa 771 ℔.

§. 609. Vom Räderwerk.

Es sey CB Fig. 204. der Radius einer cylindrischen Welle; mit derselben sey ein Rad, dessen Halbmesser CA, so bevestigt, daß es mit der Welle umgedreht werden kann. Die Last Q bestrebt sich, B herabzuziehen; die Kraft P hält ihr an A das Gleichgewicht.

Kraft und Last wirken beim Rade und Cylinder allemal nach der Richtung der Tangente. Daher könnte auch Q in q, und P in p etwa durch ein aufgewickeltes Seil ge-