Der Rathgeber bei mathematischen Beschäftigungen

Stöpel, August

Stendal, 1819

§. 609-613. das Räderwerk; Formeln für das Gleichgewicht und Verhältniß der Räder; die Umläufe; für den Flaschenzug.

$\log. 27^\circ 54' = 9{,}7238436$
$\log. 2 = 0{,}3010300$
$10{,}0248736$
$\log. 20 = 1{,}3010300$
$\log. \text{Tang. } x = 8{,}7238436 - 3^\circ 2'$
Hiezu addirt $27^\circ 54'$
giebt $< n = 30^\circ 56'$
der Unterschied giebt $< r = 24^\circ 52'$

$\text{Sin. } r : CV = \text{Sin. } o : MC$
$24^\circ 52' : 9 \quad 124^\circ 11$
$\log.\text{Sin.}124^\circ 11' = \log.\text{Sin } 55^\circ 49 = 9{,}9176336$
$\log. 9 = 0{,}9542425$
$10{,}8718761$
$\log. 24^\circ 52' \; 9{,}6237743$
$\log. MC = 1{,}2481018 = 17{,}705$
die Größe der mittlern Kraft $MC = 17\tfrac{7}{10}$ ℔.

Wenn an den 3 Kräften MV, VC und MC nur zwei, nebst dem Winkel bekannt sind, so läßt sich allezeit die dritte finden.

Formeln: $MV = \frac{MC \cdot \text{Sin. } n}{\text{Sin. } o}$; $VC = \frac{MC \cdot \text{Sin. } r}{\text{Sin. } o}$.

§. 608. Weil bei dem Maschinenwesen die Berechnung der Hebelwerkzeuge sehr wichtig ist, so hat man die gegebenen Formeln nicht nur, sondern auch folgende durch Erfahrung ausgemittelte Sätze zu behalten:

Der Mensch kann mit seinen beiden Händen eine mittlere Kraft von 102,14 ℔ drücken; $265\tfrac{1}{2}$ ℔ heben; 102 ℔ im Gehen ziehen. Ein Pferd zieht etwa 771 ℔.

§. 609. Vom Räderwerk.

Es sey CB Fig. 204. der Radius einer cylindrischen Welle; mit derselben sey ein Rad, dessen Halbmesser CA, so bevestigt, daß es mit der Welle umgedreht werden kann. Die Last Q bestrebt sich, B herabzuziehen; die Kraft P hält ihr an A das Gleichgewicht.

Kraft und Last wirken beim Rade und Cylinder allemal nach der Richtung der Tangente. Daher könnte auch Q in q, und P in p etwa durch ein aufgewickeltes Seil ge=

gehalten werden. Dieses Werkzeug kommt häufig, und unter vielerlei Gestalten vor, als Mühlenrad, Kreuzhaspel, Winde, Göpel ꝛc., wo dann statt des großen Rades nur Arme, wie CA, angebracht sind. Zur Erhaltung des Gleichgewichts:

Formel: P : Q = CB : CA, wie beim Hebel;

Kraft $P = \frac{Q \cdot CB}{CA}$; der Halbmesser $CA = \frac{Q \cdot CB}{P}$;

Last $Q = \frac{P \cdot CA}{CB}$; Halbmesser d. Welle $CB = \frac{P \cdot CA}{Q}$.

§. 610. Ein Rad, an welchem nach der Richtung der Halbmesser am äußern Umfange Zähne angebracht sind, die in ein anderes greifen und es mit bewegen, heißt Stirnrad; siehe ab Fig. 205. Sind die Zähne auf der Fläche des Rades senkrecht, wie bei cd, so heißt es ein Kronrad.

Das kleinere Rad, worin das größere mit seinem Kamme eingreift, heißt das Getriebe, Triebstock, Trilling.

Wenn mehrere Räder in einander greifen, so entsteht ein Räderwerk.

§. 611. Am Rade Q Fig. 206 hängt um die Welle A eine Last P. Das Rad Q greift in das Getriebe B des Rades R, welches wieder in das Getriebe c des Rades S eingreift. Die Kraft F braucht nur sehr gering zu seyn, um der Last P das Gleichgewicht zu halten. Man erfährt die Größe der Kraft F dadurch,

> daß man den Halbmesser der Welle, oder des Getriebes jedes Rades durch den Halbmesser jedes Rades dividirt, und was herauskommt, mit der Last multiplicirt.

Wenn a, b, c Halbmesser der Wellen, und q, r, s Halbmesser der Räder bedeuten, so erhält das Rad Q an seinem Umfange die Last P mit einer Kraft $= \frac{a}{q} \cdot P$.

das Rad R erhält sie durch $\frac{a}{q} \cdot \frac{b}{r} \cdot P$.

das Rad S erhält sie durch $\frac{a}{q} \cdot \frac{b}{r} \cdot \frac{c}{s} \cdot P$.

For=

Formel: $F = \frac{a}{q} . \frac{b}{r} . \frac{c}{s} . P.$

Es sey $a = 3$; $b = 2$; $c = 1$
$q = 12$; $r = 10$; $s = 8$
die Last $P = 10$ ℔,

so ist $F = \frac{3}{12} . \frac{2}{10} . \frac{1}{8} . 10 = \frac{6}{960} . 10 = \frac{60}{960} = \frac{1}{16}$ ℔.

In der Formel sind 5 Größen: drei Räder, die Last P, und die Kraft F, welche ihr das Gleichgewicht halten soll. Jede dieser Größen läßt sich durch Rechnung finden:

Formel:

für das Rad Q, $\frac{a}{q} = \frac{F}{\frac{b}{r} . \frac{c}{s} . P}$, und $P = \frac{F}{\frac{a}{q} . \frac{b}{r} . \frac{c}{s}}$

für das Rad R, $\frac{b}{r} = \frac{F}{\frac{a}{q} . \frac{c}{s} . P}$

für das Rad S, $\frac{c}{s} = \frac{F}{\frac{a}{q} . \frac{b}{r} . P}$.

Man sieht leicht ein, daß F allemal ein gewisser Theil von P, folglich kleiner als P, oder ein Bruch davon seyn muß. Ist nun P und F, d. h. Last und Kraft, also $\frac{F}{P}$ gegeben, so läßt sich das Verhältniß der Räder zu ihren Wellengetrieben durch Zerlegung des Bruchs in andere Brüche finden.

Z. B. Man wollte mit 6 ℔ vermittelst dreier Räder eine Last von 100 ℔ im Gleichgewicht erhalten, wie kann das Verhältniß der Halbmesser der Räder und Getriebe seyn?

Hier ist $\frac{F}{P} = \frac{6}{100}$. Man zerlege Zähler und Nenner in 3 Factoren, als die 6 in $3 . 2 . 1$; und die 100 in $5 . 5 . 4$, so ist das Verhältniß der Räder $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{4}$, d. h. des ersten Rades Halbmesser ist 5, seines Getriebes 3, des 2ten Rades Halbmesser $= 5$, seines Getriebes $= 2$, des 3ten Rades Halbmesser $= 4$, seines Getriebes $= 1$,

und

und $\frac{6}{100} = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4}$. Dies Verhältniß kann unendlich mannichfach seyn, je nachdem man den Bruch $\frac{6}{100}$ zerlegt.

§. 612. Aus der gegebenen Anzahl der Zähne $= z$ im Rade, und der Anzahl der Triebstöcke $= S$ im Getriebe des 2ten Rades ergiebt sich, wie oft das Getriebe umläuft, ehe das Rad einmal herumkommt.

Formel: $\frac{Z}{S} = U =$ der Anzahl der Umläufe.

Z. B. ein Rad habe 360 Zähne; das eingreifende Getriebe 8 Triebstöcke, so giebt $\frac{360}{8} = 45$ Umläufe des Getriebes. Auch kann man die Umdrehung des letzten Getriebes, die einer Umdrehung des ersten Rades gehören, leicht finden.

Formel: $U \cdot u$, oder $\frac{Z}{S} \cdot \frac{z}{s}$,

d. h. dividire jedes Rades Zähne durch die Anzahl der eingreifenden Triebstöcke, und multiplicire die Quotienten mit einander.

Z. B. Das Rad Q mit 360 Zähnen treibt durch einmaligen Umlauf das Rad R 45 mal $= U$ um; das Rad R mit 100 Zähnen treibt durch einmalige Umdrehung das Getriebe c mit 5 Triebstöcken $\frac{100}{5} = 20$ mal $= u$ um; dann läuft das Rad S unter diesen Umständen $45 \cdot 20 = 900$ mal um, wenn Q einmal herum kommt.

§. 613. Der Flaschenzug Fig. 207. besteht aus einer Anzahl Rollen A, B, C, a, b, c, die sämmtlich um ihren Mittelpunct beweglich sind. Vom Haken F geht ein Seil um Aa Bb Cc nach R und S, woran Kräfte ziehen. Die Last hängt unten in E.

Man gebraucht dies Werkzeug, um große Lasten in die Höhe zu ziehen, und spart dadurch viel an Kräften.

Formel: Die Kraft S : Last E $= 1 : 2n$, wo n die Anzahl Rollen, hier $= 3$ bedeutet; denn die obern 3 Rollen a, b, c dienen nur dazu, die Seile zu ordnen.

Also

$$\text{Also ist } S = \frac{E}{2n} = \text{der ziehenden Kraft;}$$

$$\text{und } E = S \,.\, 2n = \text{der zu hebenden Last;}$$

$$\text{und } n = \frac{E}{2n} = \text{der Anzahl der Rollen.}$$

Mittelst dieser Formeln sind die 3 Fragen zu lösen:

1) Wie viel Kraft gehört dazu, um durch den Flaschenzug eine gegebene Last E, z. B. 612 ℔ im Gleichgewicht zu halten? — Die erste Formel giebt $\frac{612}{2.3} = \frac{612}{6}$ $= 102$ ℔.

2) Wie viel kann man mit einer gewissen Kraft S (hier $= 102$ ℔) im Gleichgewicht halten? Die Formel für E giebt $102 \,.\, 2 \,.\, 3 = 102 \,.\, 6 = 612$ ℔.

3) Wie viel Rollen sind nöthig, wenn die Last E mit der Kraft S im Gleichgewicht erhalten werden soll? — Die Formel für n giebt $\frac{612}{102.2} = \frac{612}{204} = 3$.

Da sich jedes Seil um eben so viel verkürzen muß, als die Last E gehoben wird, so beträgt die Länge, die sich von R nach S abwickelt, $2nr$; wobei r die Höhe, um welche E gehoben wird, bedeutet.

Von der schrägen Ebene.

§. 614. Eine Fläche kann zur Erhebung oder Senkung einer Last gebraucht werden, wenn sie so gestellt wird, daß sie mit dem Horizonte einen schiefen Winkel macht. Z. B. AB Fig. 208. macht mit der horizontalen CB einen spitzen Winkel n. Auf AB befinde sich eine Last Q, die auf Qp senkrecht ruhen würde, wenn ihr Schwerpunct unterstützt wäre. Indessen drückt sie allerdings auf die Fläche AB nach der Richtung Qp, nur nicht so sehr, als wenn sie horizontal läge; sie wird daher auf AB herabgleiten oder rollen, mit einer Kraft, die man ihr relatives Gewicht nennt. Das relative Gewicht $= r$ verhält sich zum ganzen Gewicht $= g$, wie die Höhe $AC = h$ zur Länge $AB = l$.