# Der Rathgeber bei mathematischen Beschäftigungen

**Stöpel, August**

**Stendal, 1819**

Tafel XIII. Auflösung der sphärischen Dreiecke.

**Tafel XIII.**

# Auflösung aller Kugeldreiecke ABC.

## 1) der rechtwinklichten, wo bei A der rechte Winkel, und r = Sin. tot.

| Fall. | gegeben. | Gesucht. | Proportionen. | Das Gefundene ist kleiner als 90°, wenn |
|---|---|---|---|---|
| 1 | AB, AC | BC | r : Cos. AB = Cos. AC : Cos. BC | AB und AC gleichartig. |
| 2 | | B | r : Sin. AB = Cot. AC : Cot. B | AC kleiner, als 90°. |
| 3 | | C | r : Cot. AB = Sin. AC : Cot. C | AB kleiner, als 90°. |
| 4 | AB, BC | AC | Cos. AB : r = Cos. BC : Cos. AC | BC und AB gleichartig. |
| 5 | | B | r : Tang. AB = Cot. BC : Cos. B | BC und AB gleichartig. |
| 6 | | C | Sin. BC : Sin. AB = r : Sin. C | AB kleiner, als 90°. |
| 7 | AB, B | AC | r : Sin. AB = Tang. B : Tang. AC | B kleiner, als 90°. |
| 8 | | BC | r : Cot. AB = Cos. B : Cot. BC | AB und B gleichartig. |
| 9 | | C | r : Cos. AB = Sin. B : Cos. C. | AB kleiner, als 90°. |
| 10 | AB, C | AC | r : Tang. AB = Cot. C : Sin. AC | zweideutig. |
| 11 | | BC | Sin. C : Sin. AB = r : Sin. BC | |
| 12 | | B | Cos. AB : Cos. C = r : Sin. B | |
| 13 | AC, BC | AB | Cos. AC : Cos. BC = r : Cos. AB | BC und AC gleichartig. |
| 14 | | B | Sin. BC : Sin. AC = r : Sin. B | AC kleiner, als 90°. |
| 15 | | C | r : Tang. AC = Cot. BC : Cos. C | AC und AB gleichartig. |
| 16 | AC, B | AB | r : Tang. AC = Cot. B : Sin. AB | zweideutig. |
| 17 | | BC | Sin. B : Sin. AC = r : Sin. BC | |
| 18 | | C | Cos. AC : Cos. B = r : Sin. C | |
| 19 | AC, C | AB | r : Sin. AC = Tang. C : Tang. AB | C kleiner, als 90°. |
| 20 | | BC | r : Cot. AC = Cos. C : Cot. BC | AC und C gleichartig. |
| 21 | | B | r : Cos. AC = Sin. C : Cos. B | AC kleiner, als 90°. |
| 22 | BC, B | AB | r : Tang. BC = Cos. B : Tang. AB | BC und B gleichartig. |
| 23 | | AC | r : Sin. BC = Sin. B : Sin. AC | B kleiner, als 90°. |
| 24 | | C | r : Cos. BC = Tang. B : Cot. C | BC und B gleichartig. |
| 25 | BC, C | AB | r : Sin. BC = Sin. C : Sin. AB | C kleiner, als 90°. |
| 26 | | AC | r : Tang. BC = Cos. C : Tang. AC | BC und C gleichartig. |
| 27 | | B | r : Cos. BC = Tang. C : Cot. B | BC und C gleichartig. |
| 28 | B, C | AB | Sin. B : Cos. C = r : Cos. AB | C kleiner, als 90°. |
| 29 | | AC | Sin. C : Cos. B = r : Cos. AC | B kleiner, als 90°. |
| 30 | | BC | r : Cot. B = Cos C : Cos. BC | B und C gleichartig. |

# Auflösung aller Kugeldreiecke.

## 2) der schiefwinklichten.

| | |
|---|---|
| 1) Zwei Winkel und eine dem einen Winkel gegenüberliegende Seite sind gegeben: man sucht die dem andern gegenüberliegende Seite. | Setzet A zu dem Winkel, dessen gegenüberliegende Seite gegeben ist, B zum andern, C zum dritten Winkel. Dann gilt<br>$\text{Sin. } A : \text{Sin. } BC = \text{Sin. } B : \text{Sin. } AC.$<br>AC kann größer und kleiner, als 90° seyn. |
| 2) Zwei Winkel und eine dem einen Winkel gegenüber liegende Seite sind gegeben: man sucht den 3ten Winkel. | Setzet A zu dem Winkel, dessen gegenüberliegende Seite gegeben ist, B zum andern bekannten Winkel, C zum gesuchten. Fället von C das Perpendikel CD auf AB (oder deren Verlängerung) und schließet:<br>$r : \text{Cos. } BC = \text{Tang. } B : \text{Cot. } BCD$<br>$\text{Cos. } B : \text{Cos. } BAC = \text{Sin. } BCD : \text{Sin. } ACD.$<br>Nachdem nun die Winkel A, B gleichartig oder ungleichartig sind, so ist auch im ersten Fall $BCD + ACD = C$; im andern ist C die Differenz. |
| 3) Zwei Winkel und eine gegenüberliegende Seite sind gegeben; man sucht die zwischen beiden Winkeln liegende Seite. | Setzet A zu dem Winkel, dessen gegenüberliegende Seite gegeben ist, B zum andern bekannten Winkel, C zum dritten. Fället von C das Perpendikel CD auf AB (oder deren Verlängerung).<br>$r : \text{Cos. } B = \text{Tang. } BC : \text{Tang. } BD$<br>$\text{Tang. } A : \text{Tang. } B = \text{Sin. } BD : \text{Sin. } AD.$<br>Wenn A und B gleichartig, so ist $BD + DA = AB$; wenn sie ungleichartig, die Differenz. |
| 4) Zwei Winkel und die dazwischen liegende Seite sind gegeben; man sucht eine von den beiden übrigen Seiten. | Setzet B zu dem Winkel, welcher der gesuchten Seite gegenübr liegt, C zum andern gegebenen Winkel, A zum 3ten Winkel. Fället aus C das Perpendikel CD auf AB oder deren Verlängerung; und schließet:<br>$r : \text{Cos. } BC = \text{Tang. } B : \text{Cot. } BCD.$<br>BCD ist entweder die Summe oder Differenz des Winkels BCD und BCA, woraus sich ACD ergiebt. Ferner<br>$\text{Cos. } BCD : \text{Cos. } ACD = \text{Cot. } BC : \text{Cot. } AC$<br>und AC ist kleiner, als 90°, wenn Winkel ACD und B gleichartig. |
| 5) Zwei Winkel und die zwischenliegende Seite sind gegeben; man sucht den dritten Winkel. | Setzet B und C zu den gegebenen Winkeln, A zum gesuchten. Fället das Perpendikel CD auf AB oder deren Verlängerung, und schließet:<br>$r : \text{Cos. } BC = \text{Tang. } B : \text{Cot. } BCD.$<br>Der Winkel ACD ist die Summe oder Differenz der Winkel BCD und BCA, je nachdem das Perpendikel fällt.<br>$\text{Sin. } BCD : \text{Sin. } ACD = \text{Cos. } B : \text{Cos. } A.$<br>Ist also $< BCD$ kleiner, als der gegebene BCA, so ist der gesuchte $< A$ mit dem gegebenen gleichartig; ist aber BCD größer, als BCA, so sind A und B ungleichartig. |
| 6) Zwei Seiten und ein gegenüberliegender Winkel sind gegeben; man sucht den der andern Seite gegenüberliegenden Winkel. | Setzet A zum gegebenen Winkel, B zu dem von den gegebenen Seiten eingeschlossenen Winkel, und C zum gesuchten.<br>$\text{Sin. } BC : \text{Sin. } AB = \text{Sin. } A : \text{Sin. } C.$<br>Der Winkel C kann spitzig oder stumpf seyn, und ist durch die gegebenen Seiten allein nicht bestimmt. |

| | |
|---|---|
| 7) Zwei Seiten und ein gegenüberliegender Winkel sind gegeben; man sucht die dritte Seite. | Setzet B zum gegebenen Winkel, C zu dem, welcher der gesuchten Seite gegenüber liegt, A zum dritten Winkel, fället von C das Perpendikel CD, und schließet: <br> $r : \text{Tang. } BC = \text{Cos. } B : \text{Tang. } BD$ <br> $\text{Cos. } BC : \text{Cos. } AC = \text{Cos. } BD : \text{Cos. } AD.$ <br> Wenn BC und AC gleichartig, so ist $BD + AD = AB$; wo nicht, so ist AB die Differenz zwischen BD und AD. |
| 8) Zwei Seiten und ein gegenüberliegender Winkel sind gegeben; man sucht den von den bekannten Seiten eingeschlossenen Winkel. | Setzet B zum gegebenen, C zum gesuchten, A zum dritten Winkel. Fället von C das Perpendikel CD auf AB oder deren Verlängerung. <br> $r : \text{Cos. } BC = \text{Tang. } B : \text{Cot. } BCD$ <br> $\text{Tang. } AC : \text{Tang. } BC = \text{Cos. } BCD : \text{Cos. } ACD.$ <br> Sind nun AC und B gleichartig, so ist $BCD + ACD = C$; wo nicht, so ist C die Differenz zwischen BCD und ACD. |
| 9) Zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel sind gegeben; man sucht einen von den übrigen Winkeln. | Setzet B zum gegebenen, A zum gesuchten, C zum dritten Winkel. Fället von C das Perpendikel CD auf AB, und schließt: <br> $r : \text{Tang. } BC = \text{Cos } B : \text{Tang. } BD.$ <br> Nehmet die Summe oder Differenz von BD und AB, je nachdem das Perpendikel auf AB trifft, so ergiebt sich AD. Darauf: <br> $\text{Sin. } AD : \text{Sin. } BD = \text{Tang. } B : \text{Tang. } A.$ <br> Je nachdem AB größer, oder kleiner ist, als BD, so ist $< A$ mit $< B$ gleich- oder ungleichartig. |
| 10) Zwei Seiten nebst dem eingeschlossenen Winkel sind gegeben; man sucht die dritte Seite. | Setzet B zum gegebenen Winkel, BC sey die gegebene kleinere, und BA die größere Seite. Fället das Perpendikel CD, welches fast immer innerhalb des △ treffen wird. <br> $r : \text{Tang. } BC = \text{Cos. } B : \text{Tang. } BD.$ <br> Ziehet BD von AB ab (oder wenn das Perpendikel außerhalb trifft, addiret BD und AB), so kommt AD. <br> $\text{Cos. } BD : \text{Cos. } AD = \text{Cos. } BC : \text{Cos. } AC.$ <br> Je nachdem nun AD mit CD oder dem $< A$ gleichartig oder ungleichartig ist, ist auch AC größer oder kleiner, als 90°. |
| 11) Alle drei Seiten sind gegeben; man sucht einen Winkel. | Setzet A zum gesuchten Winkel, B und C zu den übrigen. Addiret alle drei Seiten, halbiret die Summe, und nennet das Kommende P, oder $\frac{AB + AC + BC}{2} = P$; dann ist <br> $\text{Sin. } \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{r^2 . \text{Sin. }(P - AB) . \text{Sin. }(P - AC)}{\text{Sin. } AB . \text{Sin. } AC}}.$ |
| 12) Alle drei Winkel sind gegeben; man sucht eine Seite. | Es sey BC die gesuchte Seite, A der ihr gegenüberliegende Winkel. Addiret die drei Winkel, halbiret die Summe, und nennet das Kommende P, oder $\frac{A + B + C}{2} = P.$ Dann ist <br> 1) $\text{Cos. } \tfrac{1}{2} BC = \sqrt{\frac{r^2 . \text{Cos. }(P - C) . \text{Cos. }(P - B)}{\text{Sin. } C . \text{Sin } B}}$; oder <br> 2) $\text{Sin. } \tfrac{1}{2} BC = \frac{\sqrt{r^2 . \text{Cos. } P . \text{Cos. }(P - A)}}{\text{Sin. } C . \text{Sin. } B}.$ |