Der Rathgeber bei mathematischen Beschäftigungen

Stöpel, August

Stendal, 1819

VI. Grundsätze aus der Dynamik.

VI. Grundsätze aus der Dynamik.

§. 698. **Masse** $= M$ heißt die Menge des Materiellen in einem **Volumen**. Das Volumen $= V$ begreift Masse und Zwischenräume unter sich; die Masse aber nur die Materie. Also ist das Volumen stets größer, als die Masse. **Dicht** ist ein Körper, der wenig Zwischenräume hat.

Formeln: $\frac{M}{V} = D =$ Dichtigkeit.

$D \cdot V = M =$ Masse.

$\frac{M}{D} = V =$ Volumen.

Die Vergleichung mehrerer Körper in Beziehung auf Dichtigkeit, Masse und Volumen ist leicht, denn

$$D : d = \frac{M}{V} : \frac{m}{v},$$

wobei die d, m und v dieselben Eigenschaften an einem andern Körper bedeuten.

§. 699. Die **Lockerheit** (raritas) steht im geraden Verhältniß des Volumens und im umgekehrten der Masse.

Formeln: $\frac{V}{M} = R =$ Lockerheit; und zweier Körper

$R : r = \frac{V}{M} : \frac{v}{m}$, woraus jede Größe zu finden.

§. 700. **Bewegung der Körper.** Soll ein Körper von einem Orte nach einem andern gebracht werden, so wird dazu Zeit erfordert; denn er kann nicht an zwei Orten zugleich seyn. Aus der Vergleichung des Wegs und der darauf verwandten Zeit, entsteht der Begriff der **Geschwindigkeit**.

Formeln: $\frac{W}{Z} = G =$ Geschwindigkeit.

$Z . G = W =$ Wege.

$$\frac{W}{G} = Z = \text{Zeit; für mehrere Körper:}$$

$$G : g = \frac{W}{Z} : \frac{w}{z},$$ wobei g, w, z dieselben Eigenschaften an einem andern Körper bedeuten.

§. 701. Man kann einen mit gleichmäßiger Bewegung durchlaufenen Raum durch ein Parallelogramm, dessen Höhe die Zeit, und dessen Grundlinie die Geschwindigkeit bedeutet, ausdrücken, s. Fig. 251., wo Seite C die Geschwindigkeit und Seite T die Zeit ist. Folglich werden in gleichen Zeiten, gleich große Räume durchlaufen; und die Räume verhalten sich, wie die Producte aus der Geschwindigkeit und Zeit.

Ein mit gleichmäßig beschleunigter Bewegung durchlaufener Raum kann durch einen Triangel abc, oder cdb Fig. 251., dessen Höhe die Endgeschwindigkeit, dessen Grundlinie die Zeit ist, vorgestellt werden. Also die

Formel: $\frac{G \cdot Z}{2} = R = \text{Raum}; \quad \frac{2R}{G} = Z = \text{Zeit};$

$$\frac{2R}{Z} = G = \text{Geschwindigkeit.}$$

Bei der gleichmäßig abnehmenden Bewegung ist die anfängliche Geschwindigkeit = der Höhe des Dreiecks.

§. 702. Die Größe der Bewegung, Quantität der Bewegung heißt die Gewalt, die ein bewegter Körper ausübt. Sie ist das Product der Menge seiner Theile und seiner Geschwindigkeit.

Formel: $M \cdot G = Q = \text{Quantität der Bewegung.}$

$$\frac{Q}{M} = G = \text{Geschwindigkeit.}$$

$$\frac{Q}{G} = M = \text{Masse.}$$

Z. B. die Masse einer Kugel = 7, ihre Geschwindigkeit = 6, so ist die Größe ihrer Bewegung = 7 · 6 = 42.

Die

Die Größe der Bewegung **zweier Körper** ergiebt sich aus der Proportion:

$$Q : q = M . G ; mg.$$

Anmerk. Läßt man Kugeln von verschiedener Schwere aus verschiedenen Höhen auf weichen Thon fallen, so kann man die Größe der Bewegung an den Einsenkungen, der Theorie gemäß, bestätigt finden. Die Fallhöh = der Geschwindigkeit; die Schwere = der Masse; die Einsenkung = der Wirkung.

§. 703. **Vom Stoß der harten Körper.** Der Stoß kann **central**, wenn der Schwerpunct senkrecht, oder **excentrisch**, wenn er schief getroffen wird, seyn.

Trifft ein bewegter Körper A einen ruhenden B, so leidet A eben so viel an seiner Bewegung, als B bedarf, um die Bewegung von A zu erhalten. Die allgemeine oder gemeinschaftliche Geschwindigkeit nach dem Stoße findet man, wenn man die Größe der Bewegung addirt, und durch die Summe der Massen dividirt. Es sey Masse, Geschwindigkeit vor dem Stoße mit M und G; vom zweiten Körper die Masse mit m, die Geschwindigkeit mit g; und die gemeinschaftliche Geschwindigkeit nach dem Stoße mit x bezeichnet, so giebt das

Formular: $\frac{M.G + m.g}{M + m} = x$, die gemeinschaftliche Geschwindigkeit nach dem Stoße.

Beispiel 1. A habe Masse 2 | B habe Masse 2
Geschwindigk. 6 | Geschwindigk. 0, ruhe also; und g = 0, so giebt die Formel

$$\frac{2.6 + 2.0}{2 + 2} = \frac{12}{4} = 3$$ Geschwindigkeit nach dem Stoße.

Beispiel 2. Es sey, wie vorher; aber B habe die Geschwindigkeit 3, so giebt die Formel

$$\frac{2.6 + 2.3}{2+2} = \frac{12 + 6}{4} = \frac{18}{4} = 4\tfrac{1}{2}$$ Geschwindigkeit nach dem Stoße.

Bei-

Beispiel 3. Wenn sich A und B gegen einander bewegen, so ist mg negativ, und die

Formel: $\frac{M.G - m.g}{M + m} = x.$

Es sey $\left.\begin{array}{ll} M = 2, & m = 3 \\ G = 6 & g = 2 \end{array}\right\}$ so ist $\frac{2.6 - 3.2}{2 + 3} = \frac{12 - 6}{5}$ $= \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$ gemeinschaftliche Geschwindigkeit nach dem Stoße.

§. 704. Wird ein Körper **von 2 Kräften unter schiefer Richtung** getrieben, so folgt er keiner, sondern geht nach der Richtung oder Diagonale des Parallelogramms, das sich aus beiden Kräften beschreiben läßt. Z. B. der Körper a Fig. 252. werde von der Kraft Q allein in 1'' durch den Raum ac; und von der Kraft q in gleicher Zeit durch ab getrieben, so geht er nach d in 1''.

Die Diagonale ad läßt sich durch Zeichnung und Rechnung finden (siehe Lehre vom Winkelhebel §. 606).

Wirken mehr, als zwei Kräfte auf den Körper a, so sucht man erst die Richtung der Diagonale, die er von 2 Kräften allein getrieben, durchlaufen wird; nimmt dann die Diagonale für eine, die 3te für die andere Kraft, woraus sich wieder ein Parallelogramm bilden läßt, u. s. f.

Je spitzer der < Qaq, desto länger; je stumpfer er aber ist, desto kürzer wird die Diagonale seyn. Sie ist allezeit geradlinig, wenn die Seitenkräfte gleichmäßig wirken.

§. 705. Die Bewegung eines Körpers fällt **krummlinicht** aus, wenn ihn eine stetig wirkende Kraft jeden Augenblick von seiner Bahn abzieht. Eine **krummlinichte Bewegung** ist demnach eine zusammengesetzte, und entsteht aus der mitgetheilten Stoßbewegung nach der Tangente, **Tangentialkraft**; und aus einer nach dem Mittelpunct ziehenden Kraft, **Centripetalkraft**. Beide Kräfte heißen **Centralkräfte**, wenn sie zugleich wirken.

§. 706.

§. 706. **Kreisförmig** wird die Bewegung, wenn das Quadrat der Tangentialkraft der Centripetalkraft gleich ist (den Durchmesser gleich 1 gesetzt).

Formel: $T^2 = C$ = Centripetalkraft; T = Tangentialkraft (denn $C : T = T : 1$).

Die Centripetalkraft steht daher im geraden Verhältniß des Quadrats der Geschwindigkeit G und im umgekehrten des Halbmessers R.

Formel: $\frac{G^2}{R} = C$.

Die **periodische Umlaufszeit** Z steht im Verhältnisse des Umfangs oder Halbmessers, dividirt durch die Geschwindigkeit G.

Formel: $\frac{R}{G} = Z$; $G = \frac{R}{Z}$.

Die Geschwindigkeit eines beweglichen durch Centralkräfte mit gleichförmiger Bewegung im Kreise herumgeführten Körpers ist gleich der Quadratwurzel aus der Centripetalkraft und dem Durchmesser des Kreises.

Formel: $\sqrt{C \,.\, D} = G$.

Vector oder **Radius vector** nennt man diejenige Linie, die vom Kraftpunkte bis zu dem durch Centralkräfte bewegten Körper gezogen wird. Die vom Vector beschriebenen Räume verhalten sich, wie die dazu gebrauchten Zeiten.

§. 707. Ist die Geschwindigkeit, die ein Körper zuletzt erlangen würde, wenn er nach dem Kraftpuncte in gerader Linie hinfiele, **größer**, als die aus der Fliehkraft (Tangentialkraft) entstehende Geschwindigkeit in jedem gegebenen Puncte, so **beschreibt der Körper eine Ellipse**. Ist diese letztere aus der Fliehkraft entspringende Geschwindigkeit größer, als jene, so ist die **Bahn eine Hyperbel**; sind beide gleich, so ist die **Bahn eine Parabel**. Im **Kreise** beträgt die Tangentialkraft so viel, als der Körper beim freien Falle durch den 4ten Theil des Diameters verlangen würde.

Formel: $T = \frac{D}{4}$, wobei T = Tangentialkraft; D = Diameter.

Beträgt die Tangentialkraft mehr als $\frac{D}{4}$, so bewegt sich der Körper in einer Parabel oder Hyperbel.

In der Ellipse ist die Flieh- oder Tangentialkraft im fernsten Abstande vom Kraftpuncte kleiner, als die Centripetalkraft, und daher die Bewegung überhaupt langsamer; im kleinsten Abstande aber größer, und daher die Bewegung schneller. Der Kraftpunct liegt in einem der beiden Brennpuncte. Der fernste Punct, wo die kleinste Geschwindigkeit ist, heißt die obere Abside; derjenige aber, wo die größte Geschwindigkeit statt findet, heißt die untere Abside.

§. 708. Die Gesetze der Centralbewegung sind im Sonnensystem in der vollkommensten Übereinstimmung.

Johann Kepler, geboren 1571, gest. 1630, entdeckte durch mühsames Forschen, daß die Bahnen aller Planeten um die Sonne Ellipsen sind, in deren einem, allen gemeinschaftlichen Brennpuncte die Sonne, als Kraftpunct, ruht.

In Fig. 253. sey S die Sonne; in E der andere Brennpunct. Der Planet bewegt sich von A durch LDPRM, ist in A am weitesten von der Sonne (im Aphelio oder in der obern Abside); in P aber in der Sonnennähe (im Perihelio oder in der untern Abside).

Je weiter der Planet von A nach D hinkommt, desto mehr wird er von der Sonne angezogen, desto schneller ist seine Bewegung; denn, von E aus betrachtet, durchläuft er in gleichen Zeiten gleich große Winkel, und daher wird der Bogen ML in derselben Zeit zurückgelegt, in welcher der Bogen DR, der doch viel größer ist, durchlaufen wird. $\angle LEM = \angle DER$, weil es Scheitelwinkel sind. Von P über R nach A hin nimmt seine Geschwindigkeit ab. In A ist die Bahn vollendet.

§. 709. **Die Quadrate der (siderischen) Umlaufszeiten zweier Planeten verhalten sich gegen einander, wie die Cubikzahlen ih-**

rer

rer mittlern Entfernungen von der Sonne, die in m und n am Ende der kleinen Axe statt finden.

Formel: $U^2 : u^2 = E^3 : e^3$ } wobei U und u
oder $U : u = \sqrt{E^3} : \sqrt{e^3}$ } Umlaufszeiten, und E und e mittlere Entfernungen sind.

Z. B. es sey die Umlaufszeit der Erde = 365 Tage 6 Stunden = 8766 Stunden; ihr Abstand von der Sonne = 1000;

Umlaufszeit der Venus = 224 Tage 17 Stunden = 5393 Stunden; man sucht ihren mittlern Abstand von der Sonne = e.

$8766^2 : 5393^2 = 1000^3 : e^3$
oder $7684,2756 : 2908,4449 = 1000000000 : e^3$

$$\frac{2908000000}{7684} = 378450809 = e^3$$

hieraus $\sqrt[3]{\ }$ gezogen, giebt 723,33 solcher Theile für den Abstand der Venus, deren der Abstand der Erde 1000 hat.

Dieses zweite wichtige Keplerische Gesetz erstreckt sich auch auf die Nebenplaneten, deren Kraftpunct aber nicht die Sonne, sondern ihr Planet ist.

§. 710. Die Zeiten, die ein Planet anwendet, einen Theil seiner Bahn zu durchlaufen, verhalten sich zu einander, wie die Sectoren, oder Räume der elliptischen Ebene zwischen den zurückgelegten Bogen und dem Brennpuncte, den die Sonne einnimmt. Die elliptischen Räume DSRP und LSMA sind also gleich, wenn die Bogen DR und ML in gleichen Zeiten zurückgelegt werden, siehe §. 708.

Auch dieses wichtige Gesetz, das in der Astronomie zur Bestimmung des Orts eines Planeten seine Anwendung findet, wurde von Kepler entdeckt.

Ge-

Gesetze der Schwere auf der Erdoberfläche.

§. 711. So wie die Sonne der allgemeine Kraftpunct in Hinsicht ihrer Planeten und Kometen ist, so ist es die Erde wieder für sich in Hinsicht des Mondes und alles dessen, was zur Erde gehört. Alles zeigt ein unerforschliches Bestreben, sich dem Mittelpunct der Erde zu nähern; oder der Mittelpunct der Erde zieht alles mit gleicher Liebe an. Wenn kein Hinderniß vorhanden, so fällt eine Feder eben so schnell zur Tiefe, als ein Stück Blei; jeder Körper fällt senkrecht auf die wahre Horizontallinie, und zwar nach folgendem Gesetz:

er fällt in der	1sten	Sek. 15	Fuß;	durchgefallene Räume	1
— — — —	2ten	— 45	—	—	— 3
— — — —	3ten	— 75	—	—	— 5
— — — —	4ten	— 105	—	—	— 7
					u. s. w.

Größe des Falls nach der 4ten Sekunde = 240 Fuß, oder durch 16 Räume.

Nach der 3ten Sekunde war der Körper durch 9 Räume; nach der 2ten durch 4 Räume, jeden zu 15 Fuß, gefallen: also sind die Quadrate der Zeitsekunden der Anzahl der Räume gleich, durch die der Körper gefallen ist. Folglich läßt sich für die Fallhöhe eine allgemeine Formel geben.

Formel: $15 \cdot z^2 = h$ = Höhe oder Tiefe, welche ein Körper gefallen ist;

$\sqrt{\frac{h}{15}} = z$ = Zeit, die ein Körper zum Fallen gebraucht, in Sekunden angegeben.

Z. B. wie tief fällt ein Körper, wenn ihn nichts hindert, in 10″? Hier ist $z = 10$, und $15 \cdot 10^2 = 1500$ Fuß = h = Tiefe.

Wie lange wird ein Körper durch einen Raum von 280 Fuß fallen? — Hier ist $\sqrt{\frac{280}{15}} = \sqrt{18{,}66\ldots}$ = 4,3 Sekunden.

Anmerk. Der Raum, den ein Körper in der ersten Sekunde durchfällt, ist unter dem Aequator, wegen der grö-

größern Dicke der Erde, oder größern Fliehkraft, etwas geringer, als bei uns. Denn er beträgt

unter dem Aequator 15 Fuß 0 Zoll 7 Linien Pariser Maaß,
unter dies. Polhöhe 15 — 1′ — 2‴ od. 15,6344 Fuß Preuß.
unter dem Pol . 15′ — 1″ — 8‴.

Man nennt diesen Raum die Fallkraft, oder Fallhöhe in der ersten Sekunde.

§. 712. Durch Rechnung kann die Größe der Fallhöhe in der ersten Sekunde für jeden Ort gefunden werden. Denn das Quadrat vom Durchmesser eines Kreises verhält sich zum Quadrat der Peripherie desselben, wie die halbe Länge eines Sekundenpendels, zu der Länge, durch die ein Körper in der 1sten Sekunde fällt, d. h. $100^2 : 314^2 = 220{,}28$ Linien : $15' \; 1'' \; 2'''$ Pariser Maaß.

Allgemeine Formel: $D^2 : P^2 = \frac{1}{2} L : F$,

wobei $D = 100$; $P = 314$; $L =$ der Pendellänge; $F =$ Fallkraft.

§. 713. Die Schwere nimmt mit dem Quadrat der zunehmenden Entfernung vom Mittelpunct der Erde ab.

Demnach beträgt diese Abnahme auf dem Chimborasso, welcher 3357 franz. Klafter über der Meeresfläche erhaben ist, nur $\frac{1}{500}$. Denn wenn der Erdhalbmesser $= 3273300$ Klafter; der Gipfel des Berges aber 3276657 Klaftern vom Mittelpunct der Erde absteht, so ist

$3273300 : 3276657 = 100000 : 100098$ (der Radius $= 100000$)

und $100098^2 : 100000^2 =$ (abgekürzt) $100196 : 10000$ oder $1 : 0{,}998 = 1000 : 998$. Aber diese Zahlen sind nur um $\frac{2}{1000}$ oder $\frac{1}{500}$ verschieden.

Im Mittelpunct der Erde wird die Schwere aufhören, also auf der Oberfläche am stärksten seyn.

§. 714. Besäße die Erde die anziehende Kraft nicht, so würde ein auf der Oberfläche in Wurfbewegung gebrachter Körper ewig in der erhaltenen Richtung fortfliegen. Da aber die Centripetalkraft oder Schwere beständig auf ihn wirkt, so wird seine Bewegung krummlinicht, parabolisch werden. Könnte man aber in einer geringen Entfernung von der Erdoberfläche einem Körper in horizontaler Richtung die Geschwindigkeit von 18800 Fuß in 1'' geben, so würde er nie wieder zur Erde kommen, sondern als Trabant um dieselbe laufen.

§. 715. Durch den Umschwung der Erde erhalten die Theile unter dem Äquator eine Fliehkraft, die $\frac{1}{289}$ der Centripetalkraft beträgt; also würde ein freifallender Körper daselbst, wenn die Erde ruhete, anstatt 15 Fuß 7 Linien = 2167 Linien in einer Sekunde zu fallen, etwas mehr, nämlich 2174,5 Linien franz. Maaß fallen.

Daß die Fliehkraft unter dem Äquator 289 mal geringer ist, als die Centripetalkraft, erfährt man aus dem Abstand und Umlauf des Mondes um die Erde. Z. B. Wenn sein Abstand = 60 Erdhalbmesser; sein Umlauf 656 Stunden; Erdhalbmesser = 1; ihre Umdrehungszeit = 24 Stunden, so giebt

$$\frac{60^3 \cdot 24^2}{1^3 \cdot 656^2} = 289.$$

§. 716. Die Kraft, welche ein Körper beim freien Falle durch die beschleunigte Bewegung erhält, findet man, wenn man das Quadrat der Zeit mit seiner Masse multiplicirt.

Formel: $Z^2 \cdot M = K =$ der erhaltenen Kraft.

Z. B. ein Körper von 4 ℔ übt, wenn er 3 Sekunden lang fällt, eine Kraft von $3 \cdot 3 \cdot 4 = 36$ ℔ aus.

Beim Steigen eines Körpers nimmt seine Geschwindigkeit und Kraft eben so ab, als sie beim Fallen zunimmt.

§. 717. Von der Wurfbewegung. Ein horizontal nach B Fig. 256. geworfener Körper A würde in gleichen Zeiten die Räume Aa, ab, bc, durchlaufen. Vermöge der anziehenden Kraft der Erde wird er aber jeden Augenblick nach M gezogen, und also während er Aa zurücklegt, um AC sinken; während Ab um AD sinken; während Ac aber um AE sinken. Seine Bewegung ist demnach aus 2 Kräften zusammengesetzt. Vermöge der Centripetalkraft sinkt er in der ersten Sekunde

um

um ap = AC; nach der zweiten um 4 solche Räume, um bq = AD; nach der dritten um 9 Räume, nämlich cr = AE; folglich verhalten sich die Abschnitte AC, AD, AE, wie die Quadrate der Zeiten Aa, Ab, Ac, oder Cp, Dq, Er, und der Körper beschreibt die krumme Linie Apqr, in welcher AM die Axe, AC, AD, AE Abscissen und Cp, Dq, Er Ordinaten sind. Aus dem Verhältniß der Ordinaten zu den Abscissen ergiebt sich, daß die krumme Linie eine Parabel ist. Nun ist, wenn Aa sehr klein genommen wird, die Ap die Diagonale im Rechteck AapC, wird also in derselben Zeit durchlaufen, als der Körper um AC frei fallen, oder um Aa horizontal sich fortbewegen würde; und da dies in jedem der Parallelogramme AbqD u. s. w. gilt, so muß der Körper in derselben Zeit den Bogen Ar zurücklegen, als er AE durchfallen, oder AC horizontal durchlaufen würde.

Wird der Körper mit der in r erhaltenen Geschwindigkeit aufwärts nach m geworfen, so nimmt er mit verzögerter Bewegung den Weg durch q, p nach A, dem Scheitel der Parabel, und geht nach S mit beschleunigter Bewegung wieder herunter in eben so viel Zeit, als er zum Steigen brauchte.

Diese Gesetze des freien Falles und der Wurfbewegung gelten nur im luftleeren Raume; denn der Widerstand der Luft, der nicht zu jeder Zeit gleich ist, macht hiebei beträchtliche Änderungen.

§. 718. Vom Pendel.

Eine Bleikugel an einem feinen seidenen Faden oder Haar, welches an einem Stift so bevestigt ist, daß die Kugel sich frei hin und her bewegen kann, kommt dem einfachen mathematischen Pendel sehr nahe. Dieses Pendel schwingt gleich schnell, es mag die Kugel größere oder kleine Bogen beschreiben, daher es zur genauen Abmessung kleiner Zeittheile dienen kann; nur die Reibung und der Widerstand der Luft sind Ursachen, daß es seine Bewegung nicht immer fortsetzt.

Hin- und Herschwung heißt ein ganzer Schwung. Der Punct, worin die ganze Schwere des Pendels vereinigt liegt, heißt der Schwingungspunct; der von ihm beschriebene Bogen Schwingungsbogen; der Ab-

Abstand des Schwingungspuncts vom Aufhängepunct — die Pendellänge.

Man läßt das einfache Pendel im luftleeren Raume schwingen, damit es weniger Hinderniß finde.

§. 719. Bei einem zusammengesetzten Pendel vertritt die Stelle des Haars ein Stab. Ist dieser von gleicher Dichtigkeit und gleichem Gewicht, so ist sein Schwingungspunct $\frac{2}{3}$ seiner Länge, vom Aufhängepuncte an gerechnet.

Soll ein zusammengesetztes Pendel gewisse Schwingungen in einer gegebenen Zeit machen, so muß es so lange verkürzt und verlängert werden, bis es mit einem einfachen Pendel, welches das Verlangte leistet, gleichschwingt.

§. 720. Ein Pendel, dessen Schwingungen Sekunden lang dauern, heißt ein Sekundenpendel. Seine Länge ist nicht aller Orten gleich,

z. B. am Äquator $= 439$ franz. Linien
unter der Polhöhe von $45^\circ = 440{,}35$
am Pol selbst $= 441{,}59$,

weil die stärkere Dicke der Erde unter dem Äquator eine Verminderung der Schwere zur Folge hat, die das Pendel in der Schwingung erhält. In den bewohntesten Ländern ist der Unterschied der Pendellängen also kaum $\frac{1}{400}$.

§. 721. Formeln zur Berechnung der Pendellänge für jeden Ort.

$440{,}392 \pm 1{,}2494 \,.\, \text{Cosin.}^2\, P =$ Länge des Sekundenpendels nach La Place's Theorie. Und

$440{,}3505 \pm 1{,}2448 \,.\, \text{Cosin.}^2\, P =$ Länge des Sekundenpendels nach Steinhäuser's Berechnung. $P =$ Polhöhe.

Z. B. man sucht die Länge des Sekundenpendels unter der Polhöhe $52^\circ\, 30'$; so ist $\text{Cos. } 52^\circ\, 30' = 0{,}6087$; sein Quadrat $= 0{,}3705$.

$$\text{Also } 1{,}2448 \,.\, 0{,}3705 = 0{,}4611$$
$$+ 440{,}3505$$
$$= 440{,}8116$$

Linien, d. h. 36 Zoll 8,8 Par. Linien für die Länge des Sekundenpendels.

§. 722. Zwei gleichlange Pendel schwingen gleichgeschwind, wenngleich ihre Gewichte verschieden sind. Ungleiche Pendel schwingen verschieden, das kürzere geschwinder, denn die Dauer der Schwingung hängt von der Länge des Pendels ab.

Die Längen L und l zweier Pendel verhalten sich umgekehrt, wie die Quadrate der Anzahl Schwingungen, die sie in einer gegebenen Zeit machen.

Formeln: $L : l = t^2 : T^2$, wo t und T = den Schwingungen.

$$\frac{l\,.\,t^2}{T^2} = L = \text{der Länge des größern Pendels.}$$

$$\frac{L\,.\,T^2}{t^2} = l = \text{der Länge des kleinern Pendels.}$$

$$\sqrt{\frac{L\,.\,T^2}{l}} \text{ oder } T\sqrt{\frac{L}{l}} = t = \text{der Anzahl}$$

Schwingungen des kleinen Pendels.

$$\sqrt{\frac{l\,.\,t^2}{L}} \text{ oder } t\,.\sqrt{\frac{l}{L}} = T = \text{der Anzahl}$$

Schwingungen des größern Pendels.

Z. B. Es sey das größere Pendel 36 Zoll (= L) lang, und schlage in einer gegebenen Zeit 4 mal (= T); man wünscht die Länge eines andern Pendels (= l), das in derselben Zeit 8 Schwingungen macht, zu finden.

Die Formel für l giebt $\frac{36\,.\,4^2}{8^2} = \frac{36\,.\,16}{64} = \frac{36}{4} = 9$ Zoll.

§. 723. Bei einem einfachen Pendel liegt der Schwingungspunct um $\frac{2}{5}$ des Halbmessers der Kugel unterhalb des Mittelpuncts derselben, wenn die Kugel an ihrer Oberfläche aufgehängt ist. — Weil die Metallstangen durch die Wärme länger werden, so zieht man mit Recht Pendelstangen von lackirtem Kienenholz den metallnen vor.

Schlägt man einen Körper mit einer Stange so, daß er vom Schwingungspuncte derselben getroffen wird, so übt man auf ihn die größte Gewalt aus. Trifft ihn ein anderer Punct, so empfindet man eine unangenehme Prellung in der Hand.

§. 724. Vom Fall auf der schiefen Ebene.
Der Körper Q Fig. 254. kann auf der gegen den Horizont geneigten Ebene cb nicht ruhen, weil sein Schwerpunct nicht senkrecht unterstützt ist: er wird, wenn er sich selbst überlassen bleibt, nach b hin mit einer geringern Kraft und Schnelligkeit fallen, als wenn er senkrecht fiele. Die Kraft, welche ihn auf cb herabtreibt, heißt sein relatives Gewicht, und hängt von der Neigung der Ebene ab. Absolutes Gewicht ist dasjenige, womit er auf eine horizontale Unterlage drückt. S. §. 614.

§. 725. Die Bewegung auf der schiefen Ebene ist, wie beim freien Falle, eine gleichmäßig beschleunigte, und die zurückgelegten Räume verhalten sich auch, wie die Quadrate der verflossenen Zeitsekunden. Aber der Fall in der ersten Sekunde ist weit geringer, und wird gefunden, wenn man die Höhe $= h$ der schiefen Ebene mit 15 Fuß (der Fallkraft beim freien Falle) multiplicirt, und das Product durch die Länge dividirt.

Formel: $\frac{h \cdot 15}{l} = f =$ der Fallkraft in der 1sten Sek.

Z. B. Es sey die Ebene 20 Fuß lang $(= l)$ und 8 hoch $(= h)$, wie weit fällt ein Körper auf derselben in der ersten Sekunde?

$$\frac{8 \cdot 15}{20} = 6 \text{ Fuß in der ersten Sekunde.}$$

Wie weit wird er nach 3 Sekunden gefallen seyn? Nach §. 711. wird er $15 \cdot 3^2$ (da hier anstatt 15 die 6 gilt), aber nur $3^2 \cdot 6 = 9 \cdot 6 = 54$ Fuß durchlaufen.

Die Kraft, welche ein Körper durch den Fall auf der schiefen Ebene am Ende ausübt, wird gefunden, wenn man das Quadrat der Zeitsekunden mit dem relativen Gewicht multiplicirt.

Formel; $z^2 \cdot g = k =$ der ausgeübten Gewalt.

§. 726. Die Geschwindigkeit des Körpers Q Fig. 254, der von c an nach b auf der schiefen Ebene fällt, ist in b eben so groß, als sie seyn würde, wenn er frei von c nach a fiele.

In

In der Figur 255. stellt die krumme Linie AMC einen Bogen von der Cycloide oder Radlinie (und zwar die Hälfte derselben) vor, welche krumme Linie die merkwürdige Eigenschaft hat, daß ein Körper, der in ihr herabgleitet, in derselben Zeit in c anlangt, er mag vom obersten Punct A, oder von irgend einem andern M auf derselben herabfallen. Auch erhält der Körper, der auf AMC herabrollt, in C dieselbe Geschwindigkeit, die er durch den senkrechten Fall nach AB bekommen würde. Jedoch sind nach der Figur des Weges die Zeiten verschieden. Der Körper gelangt nämlich nicht auf dem kürzesten Wege AnC am schnellsten nach C, sondern er wird am geschwindesten in C ankommen, wenn sein Weg den Bogen der Radlinie AMC beschreibt, in welcher AB der Durchmesser des Rades, und BC dem halben Umfange desselben gleich ist.

§. 727. Vom Stoße elastischer Körper. Elastische Körper erhalten durch den Stoß anfangs denselben Zuwachs an Bewegung, wie die unelastischen, allein durch ihre elastische Kraft wird die zusammengedrückte Masse alsobald den vorigen Raum wieder erfüllen, also eigentlich doppelt stoßen und gestoßen werden.

Es sey der eine elastische Körper A, seine Masse $= M$; Geschwindigkeit $= C$; der andere Körper $= B$; seine Masse $= m$; Geschwindigkeit $= c$; so ist in der allgemeinen

Formel: $\frac{MC + mc}{M + m} = G =$ gemeinschaftliche Geschwindigkeit durch die einfache Mittheilung.

A verliert nun $2\,(MC - GM)$ durch den doppelten Stoß, daher seine Geschwindigkeit nach dem Stoße $= \frac{(MC - GM)}{M}$.

B gewinnt $2\,(Gm - mc)$; daher seine Geschwindigkeit nach dem Stoße $= \frac{2\,(Gm - mc)}{m}$.

Z. B. Die elastische Kugel A habe Masse $= 8$ ℔; Geschwindigkeit $= 6$; die Kugel B habe Masse $= 4$; Ge-

Geschwindigkeit $= 0$, ruhe also; so ist $\frac{8.6 + 4.0}{8 + 4} = \frac{48}{12}$ $= 4 = G.$

A verliert nun $2.(8.6 - 4.8) = 2.(48 - 32) = 2.16 = 32$ durch den doppelten Stoß, daher ihre Geschwindigkeit nach dem Stoße $\frac{8.6 - 4.8}{8} = 6 - 4 = 2.$

B gewinnt $2.(4.4 - 4.0) = 2.16 = 32$; ihre Geschwindigkeit ist daher $\frac{2.(4.4 - 4.0)}{4}$ $= \frac{32}{4} = 8.$

2tes Beispiel.

A hat Masse $= 8$, Geschwind. $= 6$ } B hat Masse $= 4$, Geschw. $= 3$ } und $\frac{8.6 + 4.3}{8 + 4}$ $= \frac{48 + 12}{12} = 5 = G.$

Nun verliert A $2(8.6 - 5.8) = 8.2 = 16$, behält also noch $8.6 - 16$, oder überhaupt 32 Grade der Bewegung, und eine Geschwindigkeit $= \frac{32}{8} = 4.$

Aber B gewinnt $2.(5.4. - 4.3) = 2.(20 - 12) = 2.8 = 16$; hat also überhaupt $4.3 + 16 = 28$ Grade der Bewegung, und eine Geschwindigkeit $= \frac{28}{4} = 7.$

3tes Beispiel.

Wenn A Masse $= 2$, Geschwindigk. $= 16$ } $\overline{32}$ und B Masse $= 3$, Geschwindigk. $= 1$ } $\overline{3}$ hat, so ist

$\frac{2.16 + 3.1}{2 + 3} = \frac{35}{5} = 7 = G.$

A verliert nun $2(2.16 - 7.2) = 2.18 = 36$ Grade. Sie hatte aber nur 32, folglich geht sie mit 4 Grad der Bewegung und $\frac{4}{2} = 2$ Geschwindigkeit zurück.

B

B gewinnt $2.(7.3 - 3.1) = 2.18 = 36$ Grad, und da sie schon 3 Grad hatte, so hat sie nun 39, und eine Geschwindigkeit $= \frac{39}{3} = 13$.

4tes Beispiel. Wenn die Bewegungen entgegengesetzt sind.

$$\begin{array}{ll} \text{A habe Masse} = 3 \\ \text{Geschwindigk.} = 8 \\ \hline \quad 24 \end{array} \Big\} \quad \begin{array}{ll} \text{B Masse} = 2 \\ \text{Geschw.} = 7 \\ \hline \quad 14 \end{array} \Big\} \text{ so ist } \frac{24 - 14}{3 + 2}$$

$$= \frac{10}{5} = 2 = G.$$

A verliert $2.(3.8 - 2.3) = 2.18 = 36$ Grade. Da sie nur 24 Grad hatte, so geht sie mit 12 Grad, und einer Geschwindigkeit von $\frac{12}{3} = 4$ zurück.

B gewinnt $2.(2.2 + 2.7) = 2.18 = 36$ Grade; aber da sie 14 Grade entgegensetzt, so bleiben ihr nur 22 Grad und eine Geschwindigkeit $= 11$, rückwärts.

Gleiche elastische Kugeln, die einander begegnen, gehen mit verwechselten Geschwindigkeiten zurück.

Die verschiedenen Fälle, welche beim Stoß elastischer Kugeln vorkommen, sind wohl zu unterscheiden.

§. 728. Schief ist der Stoß, wenn das Centrum eines Körpers nicht senkrecht getroffen wird.

Z. B. es berühre die elastische Kugel B Fig. 257. auf ihrem Wege CB die ruhende A, so wird A nach der Richtung BD, welche durch die beiden Mittelpuncte geht, sich hinbewegen; B aber nicht nach H kommen, sondern nach BG abspringen, wenn sie mit A von gleicher Masse ist. Die Linie GB ist parallel FE, die senkrecht auf BD durch die Berührungspuncte geht.

Ist nun BH = der Geschwindigkeit der Kugel B, so ist das Parallogramm FHDE leicht zu zeichnen.

Anmerk. Klügel in seiner Encyclopädie S. 196. giebt folgende Regeln:

1. Die Summe der Producte aus den Massen in die Geschwindigkeiten vor und nach dem Stoße

sind

sind gleich, wenn die Körper einerlei Richtung haben; der Unterschied jener Producte ist zu nehmen, wenn sie entgegengesetzte Richtung haben.

2. Die Summe der Producte aus den Massen in die Quadrate ihrer Geschwindigkeiten vor und nach dem Stoße sind gleich, die Körper mögen laufen, wie man will.

3. Die relative Geschwindigkeit vor und nach dem Stoße ist dieselbe, d. h. die Körper entfernen sich nach dem Stoße mit derselben Geschwindigkeit, mit der sie sich vorher näherten.

§. 729. Elastische Kugeln, die gegen eine veststehende Ebene geworfen werden, springen, gleich den Lichtstrahlen, unter gleichgroßen Winkeln zurück. Dies geschieht, wenn Ebene und Kugel, oder einer nur von beiden Körpern elastisch ist.

Die Gesetze vom Stoß elastischer Körper kommen beim Billard unaufhörlich in Anwendung.

Mathematische Berechnung der Töne.

§. 730. Theilt man eine Saite in zwei gleiche Theile, und läßt nur die eine Hälfte schwingen, so ist der Ton um 1 Octave höher, als der Ton der ganzen Saite; wird die Saite in 3 Theile getheilt, wovon nur 2 Theile tönen, so ist der Ton um eine Quinte höher, als der Ton der ganzen Saite. Die Töne einer vollen Octave haben daher zum Grundton ein Verhältniß, wie die Länge der schwingenden Saite zur Länge der Saite, welche den Grundton oder die 1 hören läßt. Grundton und Octave verhalten sich wie 2 : 1; oder die Octave ist $\frac{1}{2}$ Grundton; der Grundton verhält sich zur Quinte, wie 3 zu 2; oder die Quinte ist $\frac{2}{3}$. In der folgenden Tabelle ist das Verhältniß eines jeden Tones innerhalb einer Octave zum Grundton, den wir C nennen wollen, in einem Decimalbruch angegeben, wobei die Länge der Saite des Grundtons = 1 genommen ist.

Tabelle

Tabelle der Tonverhältnisse.

C : C Einklang = 1 : 1			1,0000
C : cis kleine Sekunde	25 :	24	0,9600
C : des — —	16 :	15	0,9375
C : d große Sekunde	9 :	8	0,8889
C : dis übermäßige Sek.	75 :	64	0,8533
C : es kleine Terz . .	6 :	5	0,8333
C : e große Terz . .	5 .	4	0,8000
C : eis übermäßige Terz	245 :	192	0,7836
C : fes verminderte Quarte	32 :	25	0,7812
C : f Quarte . . .	4 :	3	0,7500
C : fis übermäßige Quarte	25 :	18	0,7200
C : ges verminderte Quinte	36 :	25	0,6944
C : g Quinte . . .	3 :	2	0,6666
C : gis übermäßige Quinte	25 :	16	0,6400
C : as kleine Sexte . .	8 :	5	0,6250
C : a große Sexte . .	5 :	3	0,6000
C : ais übermäßige Sexte	245 :	144	0,5877
C : b kleine Septime	16 :	9	0,5625
	(9 :	5)	0,5555
C : h große Septime	15 :	8	0,5333
C : ces verminderte Octave	48 :	28	0,5208
C : c Octave . . .	2 :	1	0,5000

§. 731. Es ist nicht möglich, die Töne in ihrer mathematischen Reinheit auszuüben, weil eine Fortschreitung in lauter reinen Verhältnissen zu weit vom Grundton abführen, und die Verbindung mit demselben endlich ganz aufheben würde. Überdies haben wir auf unsern Tasteninstrumenten für die freilich etwas verschiedenen Töne **cis** und des, dis und es, fis und ges u. s. w. nur eine Taste. Die dazu gehörige Saite muß nun so gestimmt werden, daß der Ton zwischen cis und des, fis und ges ꝛc. schwebt, um sowol als cis, als auch als des brauchbar zu seyn.

Diese nothwendige Unvollkommenheit hat die Folge, daß jedem Intervall etwas von seiner mathematischen Reinheit genommen wird. Man nennt dies T e m p e r a t u r. Nur die Octaven bleiben vollkommen rein.

Von

Von den in voriger Tabelle angeführten 21 Tönen bleiben also nur folgende 12 übrig:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
c	cis des	d	dis es	e	f	fis ges	g	gis as	a	ais b	h	c

§. 732. Die gleichschwebende Temperatur ist dasjenige Verhältniß aller Töne innerhalb einer Octave, nach welchem die nothwendige Unvollkommenheit unter alle 12 Töne gleichmäßig vertheilt, folglich einem jeden etwas von seiner mathematischen Reinheit genommen wird. Die Töne verhalten sich umgekehrt, wie die Längen gleich dicker und gleich stark gespannter Saiten, oder gerade, wie die Geschwindigkeiten der Schwingungen. Heißt nun der Grundton 1 und die Octave 2, so lassen sich zwischen beide noch 11 Zahlen einschalten, die eine geometrische Progression bilden. Die erste Zahl ist die 12te Wurzel aus 2; die zweite ist das Quadrat dieses ersten Gliedes, die dritte der Kubus u. s. w.; die 12te ist die 12te Potenz, oder die 2 selbst, die Oberoctave. S. Klügel's Encyclop.

Mittelst der Logarithmen finden wir die zwölfte Wurzel aus 2 dadurch, daß wir ihren Logarithmen durch 12 dividiren, und dazu die Zahl suchen.

log. 2 = 0,3010300
12 :) ———————
0,0250858, wozu 1,05946 gehört.

Die übrigen Zahlen findet man, wenn man den zwölften Theil des Logarithmen von 2 nach der Reihe mit 2, 3, 4 rc. multiplicirt, und die Zahlen dazu aufsucht, woraus folgende Tabelle für die gleichschwebende Temperatur entsteht.

	I.	II.	III
	Verhältnisse der Schwingungen,	der Saitenlängen.	Die ganze Saite = 2000, und die nicht schwingenden Theile gezählt.
c	1,00000 . .	1,00000 .	0
cis	1,05946 . .	0,94387 .	112,25
d	1,12246 . .	0,89090 .	218,20
dis	1,18921 . .	0,84090 .	318,21

I.		II.	III.
Verhältniß der Schwingungen,		der Saitenlängen.	Die ganze Saite = 2000, und die nicht schwingenden Theile gezählt.
e	1,25992 . .	0,79370 .	412,60
f	1,33484 . .	0,74915 .	501,69
fis	1,41421 . .	0,70710 .	585,79
g	1,49831 . .	0,66742 .	665,16
gis	1,58740 . .	0,62996 .	740,08
a	1,68179 . .	0,59461 .	810,79
b	1,78180 . .	0,56123 .	877,54
h	1,88775 . .	0,52973 .	940,54
c	2,00000 . .	0,50000 .	1000,00

Das Verhältniß der Saitenlängen unter II. ergiebt sich, wenn man die unter I. gefundenen Zahlen halbirt, und umkehrt, d. h. h zu cis, b zu d macht u. s. w.

Die unter III. befindlichen Zahlen, welche die Länge des nicht schwingenden Theils einer Saite (die durch Stege verkürzt werden kann) angeben, findet man, wenn man die unter I. gegebenen Schwingungen von der Zahl 2000,00 abzieht und umkehrt. So giebt z. B. die Schwingung für h = 1887,75 von 2000,00 abgezogen, die Zahl 112,25 für cis in III.

Nach der letzten Berechnung unter III. werden die Monochorde abgetheilt.

§. 733. Eine vollkommen richtige gleichschwebende Temperatur auf dem Griffbrett einer Guitarre zu erhalten, verfahre man also:

Wenn das Instrument so weit fertig ist, daß Saiten darauf gezogen werden können, so beziehe man sie vorläufig mit Drathsaiten, und lasse sie einige Tage ruhig liegen, damit sich der Hals in die richtige Lage ziehe. Dann drücke man da die Saite mit einer Messerschneide nieder, wo sie die reine Octave angiebt. Weil Drathsaiten gleichförmiger, als Darmsaiten sind, so geben sie auch den Octavenpunct sicherer an. Dieser Punct wird nicht in der Mitte oder Hälfte der Saite liegen (weil dieselbe durch das Niederdrücken stärker angespannt spännt wird), sondern näher an das Ende der Saite fallen, wohin die Stege oder Bunde kommen, je höher dieselbe über dem Griffbrette schwebt. Er falle, wohin er wolle, so theile man allezeit seinen Abstand vom Halse (vom sogenannten Sattel) in 1000 Theile, und nehme davon für

E = 0	für H = 665,16
F = 112,25	C = 740,08
Fis = 218,20	Cis = 818,79
G = 318,21	D = 877,54
Gis = 412,60	Dis = 940,54
A = 501,69	E = 1000
B = 585,79	

solcher Theile. Soll die Theilung noch in die zweite Octave gehen, so nehme man von jeder Zahl die Hälfte, z. B. für f $\frac{112,25}{2} = 56,12$ und trage sie jenseit des Octavpuncts auf das Griffbrett. Auf diese Weise sind die Puncte, durch welche die elfenbeinernen Stege gelegt werden müssen, vollkommen genau bestimmt.

Daß man diese ganze Theilung sehr zart auf ein sauberes Lineal tragen, und bei allen eben so gearbeiteten Guitarren, die gleiche Saitenlänge und Neigung des Halses haben, wieder gebrauchen kann, sieht man ohne Erinnern.

Wohl verdient die Abtheilung der Stege die größte Aufmerksamkeit der Verfertiger, indem sich jede Nachlässigkeit durch Mißtöne rächt, die um so übler wirken, je ungleichförmiger die Saiten sind. Die in der Musikalischen Zeitung mitgetheilte Verfahrungsweise von H. Scheibler, so wie die mehrerer Künstler, ist mathematisch unrichtig, und nur erträglich zu nennen.

Vier-