Der Rathgeber bei mathematischen Beschäftigungen

Stöpel, August

Stendal, 1819

§. 698-710. Masse, Dichtigkeit, Bewegung, Stoß; krummlinichte Bewegung, Centralkräfte, Kepplers Gesetze [et]c.;

VI. Grundsätze aus der Dynamik.

§. 698. Masse = M heißt die Menge des Materiellen in einem Volumen. Das Volumen = V begreift Masse und Zwischenräume unter sich; die Masse aber nur die Materie. Also ist das Volumen stets größer, als die Masse. Dicht ist ein Körper, der wenig Zwischenräume hat.

Formeln: $\frac{M}{V} = D =$ Dichtigkeit.

$D \cdot V = M =$ Masse.

$\frac{M}{D} = V =$ Volumen.

Die Vergleichung mehrerer Körper in Beziehung auf Dichtigkeit, Masse und Volumen ist leicht, denn

$$D : d = \frac{M}{V} : \frac{m}{v},$$

wobei die d, m und v dieselben Eigenschaften an einem andern Körper bedeuten.

§. 699. Die Lockerheit (raritas) steht im geraden Verhältniß des Volumens und im umgekehrten der Masse.

Formeln: $\frac{V}{M} = R =$ Lockerheit; und zweier Körper

$R : r = \frac{V}{M} : \frac{v}{m}$, woraus jede Größe zu finden.

§. 700. Bewegung der Körper. Soll ein Körper von einem Orte nach einem andern gebracht werden, so wird dazu Zeit erfordert; denn er kann nicht an zwei Orten zugleich seyn. Aus der Vergleichung des Wegs und der darauf verwandten Zeit, entsteht der Begriff der Geschwindigkeit.

Formeln: $\frac{W}{Z} = G =$ Geschwindigkeit.

$Z . G = W =$ Wege.

W =

$\frac{W}{G} = Z =$ Zeit; für mehrere Körper:

$G : g = \frac{W}{Z} : \frac{w}{z}$, wobei g, w, z dieselben Eigenschaften an einem andern Körper bedeuten.

§. 701. Man kann einen mit gleichmäßiger Bewegung durchlaufenen Raum durch ein Parallelogramm, dessen Höhe die Zeit, und dessen Grundlinie die Geschwindigkeit bedeutet, ausdrücken, s. Fig. 251., wo Seite C die Geschwindigkeit und Seite T die Zeit ist. Folglich werden in gleichen Zeiten, gleich große Räume durchlaufen; und die Räume verhalten sich, wie die Producte aus der Geschwindigkeit und Zeit.

Ein mit gleichmäßig beschleunigter Bewegung durchlaufener Raum kann durch einen Triangel abc, oder cdb Fig. 251., dessen Höhe die Endgeschwindigkeit, dessen Grundlinie die Zeit ist, vorgestellt werden. Also die

Formel: $\frac{G \cdot Z}{2} = R =$ Raum; $\frac{2R}{G} = Z =$ Zeit;

$\frac{2R}{Z} = G =$ Geschwindigkeit.

Bei der gleichmäßig abnehmenden Bewegung ist die anfängliche Geschwindigkeit = der Höhe des Dreiecks.

§. 702. Die Größe der Bewegung, Quantität der Bewegung heißt die Gewalt, die ein bewegter Körper ausübt. Sie ist das Product der Menge seiner Theile und seiner Geschwindigkeit.

Formel: $M \cdot G = Q =$ Quantität der Bewegung.

$\frac{Q}{M} = G =$ Geschwindigkeit.

$\frac{Q}{G} = M =$ Masse.

Z. B. die Masse einer Kugel = 7, ihre Geschwindigkeit = 6, so ist die Größe ihrer Bewegung = 7 · 6 = 42.

Die

Die Größe der Bewegung zweier Körper ergiebt sich aus der Proportion:

$Q : q = M . G ; mg.$

Anmerk. Läßt man Kugeln von verschiedener Schwere aus verschiedenen Höhen auf weichen Thon fallen, so kann man die Größe der Bewegung an den Einsenkungen, der Theorie gemäß, bestätigt finden. Die Fallhöhe = der Geschwindigkeit; die Schwere = der Masse; die Einsenkung = der Wirkung.

§. 703. Vom Stoß der harten Körper. Der Stoß kann central, wenn der Schwerpunct senkrecht, oder excentrisch, wenn er schief getroffen wird, seyn.

Trifft ein bewegter Körper A einen ruhenden B, so leidet A eben so viel an seiner Bewegung, als B bedarf, um die Bewegung von A zu erhalten. Die allgemeine oder gemeinschaftliche Geschwindigkeit nach dem Stoße findet man, wenn man die Größe der Bewegung addirt, und durch die Summe der Massen dividirt. Es sey Masse, Geschwindigkeit vor dem Stoße mit M und G; vom zweiten Körper die Masse mit m, die Geschwindigkeit mit g; und die gemeinschaftliche Geschwindigkeit nach dem Stoße mit x bezeichnet, so giebt das

Formular: $\frac{M.G + m.g}{M + m} = x$, die gemeinschaftliche Geschwindigkeit nach dem Stoße.

Beispiel 1. A habe Masse 2 | B habe Masse 2
Geschwindigk. 6 | Geschwindigk. 0, ruhe also; und $g = 0$, so giebt die Formel $\frac{2.6 + 2.0}{2 + 2} = \frac{12}{4} = 3$ Geschwindigkeit nach dem Stoße.

Beispiel 2. Es sey, wie vorher; aber B habe die Geschwindigkeit 3, so giebt die Formel $\frac{2.6 + 2.3}{2 + 2} = \frac{12 + 6}{4} = \frac{18}{4} = 4\frac{1}{2}$ Geschwindigkeit nach dem Stoße.

Bei-

Beispiel 3. Wenn sich A und B gegen einander bewegen, so ist mg negativ, und die

Formel: $\frac{M.G - m.g}{M + m} = x.$

Es sey $\left.\begin{matrix} M = 2, & m = 3 \\ G = 6 & g = 2 \end{matrix}\right\}$ so ist $\frac{2.6 - 3.2}{2 + 3} = \frac{12 - 6}{5}$ $= \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$ gemeinschaftliche Geschwindigkeit nach dem Stoße.

§. 704. Wird ein Körper von 2 Kräften unter schiefer Richtung getrieben, so folgt er keiner, sondern geht nach der Richtung oder Diagonale des Parallelogramms, das sich aus beiden Kräften beschreiben läßt. Z. B. der Körper a Fig. 252. werde von der Kraft Q allein in 1″ durch den Raum ac; und von der Kraft q in gleicher Zeit durch ab getrieben, so geht er nach d in 1″.

Die Diagonale ad läßt sich durch Zeichnung und Rechnung finden (siehe Lehre vom Winkelhebel §. 606).

Wirken mehr, als zwei Kräfte auf den Körper a, so sucht man erst die Richtung der Diagonale, die er von 2 Kräften allein getrieben, durchlaufen wird; nimmt dann die Diagonale für eine, die 3te für die andere Kraft, woraus sich wieder ein Parallelogramm bilden läßt, u. s. f.

Je spitzer der $<$ Qaq, desto länger; je stumpfer er aber ist, desto kürzer wird die Diagonale seyn. Sie ist allezeit geradlinig, wenn die Seitenkräfte gleichmäßig wirken.

§. 705. Die Bewegung eines Körpers fällt krummlinicht aus, wenn ihn eine stetig wirkende Kraft jeden Augenblick von seiner Bahn abzieht. Eine krummlinichte Bewegung ist demnach eine zusammengesetzte, und entsteht aus der mitgetheilten Stoßbewegung nach der Tangente, Tangentialkraft; und aus einer nach dem Mittelpunct ziehenden Kraft, Centripetalkraft. Beide Kräfte heißen Centralkräfte, wenn sie zugleich wirken.

§. 706. Kreisförmig wird die Bewegung, wenn das Quadrat der Tangentialkraft der Centripetalkraft gleich ist (den Durchmesser gleich 1 gesetzt).

Formel: $T^2 = C$ = Centripetalkraft; T = Tangentialkraft (denn $C : T = T : 1$).

Die Centripetalkraft steht daher im geraden Verhältniß des Quadrats der Geschwindigkeit G und im umgekehrten des Halbmessers R.

Formel: $\frac{G^2}{R} = C$.

Die periodische Umlaufszeit Z steht im Verhältnisse des Umfangs oder Halbmessers, dividirt durch die Geschwindigkeit G.

Formel: $\frac{R}{G} = Z$; $G = \frac{R}{Z}$.

Die Geschwindigkeit eines beweglichen durch Centralkräfte mit gleichförmiger Bewegung im Kreise herumgeführten Körpers ist gleich der Quadratwurzel aus der Centripetalkraft und dem Durchmesser des Kreises.

Formel: $\sqrt{C \cdot D} = G$.

Vector oder Radius vector nennt man diejenige Linie, die vom Kraftpunkte bis zu dem durch Centralkräfte bewegten Körper gezogen wird. Die vom Vector beschriebenen Räume verhalten sich, wie die dazu gebrauchten Zeiten.

§. 707. Ist die Geschwindigkeit, die ein Körper zuletzt erlangen würde, wenn er nach dem Kraftpuncte in gerader Linie hinfiele, größer, als die aus der Fliehkraft (Tangentialkraft) entstehende Geschwindigkeit in jedem gegebenen Puncte, so beschreibt der Körper eine Ellipse. Ist diese letztere aus der Fliehkraft entspringende Geschwindigkeit größer, als jene, so ist die Bahn eine Hyperbel; sind beide gleich, so ist die Bahn eine Parabel. Im Kreise beträgt die Tangentialkraft so viel, als der Körper beim freien Falle durch den 4ten Theil des Diameters verlangen würde.

Formel: $T = \frac{D}{4}$, wobei T = Tangentialkraft; D = Diameter.

Beträgt die Tangentialkraft mehr als $\frac{D}{4}$, so bewegt sich der Körper in einer Parabel oder Hyperbel.

In der Ellipse ist die Flieh- oder Tangentialkraft im fernsten Abstande vom Kraftpuncte kleiner, als die Centripetalkraft, und daher die Bewegung überhaupt langsamer; im kleinsten Abstande aber größer, und daher die Bewegung schneller. Der Kraftpunct liegt in einem der beiden Brennpuncte. Der fernste Punct, wo die kleinste Geschwindigkeit ist, heißt die obere Abside; derjenige aber, wo die größte Geschwindigkeit statt findet, heißt die untere Abside.

§. 708. Die Gesetze der Centralbewegung sind im Sonnensystem in der vollkommensten Übereinstimmung.

Johann Kepler, geboren 1571, gest. 1630, entdeckte durch mühsames Forschen, daß die Bahnen aller Planeten um die Sonne Ellipsen sind, in deren einem, allen gemeinschaftlichen Brennpuncte die Sonne, als Kraftpunct, ruht.

In Fig. 253. sey S die Sonne; in E der andere Brennpunct. Der Planet bewegt sich von A durch LDPRM, ist in A am weitesten von der Sonne (im Aphelio oder in der obern Abside); in P aber in der Sonnennähe (im Perihelio oder in der untern Abside).

Je weiter der Planet von A nach D hinkommt, desto mehr wird er von der Sonne angezogen, desto schneller ist seine Bewegung; denn, von E aus betrachtet, durchläuft er in gleichen Zeiten gleich große Winkel, und daher wird der Bogen ML in derselben Zeit zurückgelegt, in welcher der Bogen DR, der doch viel größer ist, durchlaufen wird. $\angle LEM = \angle DER$, weil es Scheitelwinkel sind. Von P über R nach A hin nimmt seine Geschwindigkeit ab. In A ist die Bahn vollendet.

§. 709. **Die Quadrate der (siderischen) Umlaufszeiten zweier Planeten verhalten sich gegen einander, wie die Cubikzahlen ihrer**

rer mittlern Entfernungen von der Sonne, die in m und n am Ende der kleinen Axe statt finden.

Formel: $U^2 : u^2 = E^3 : e^3$ oder $U : u = \sqrt{E^3} : \sqrt{e^3}$ } wobei U und u Umlaufszeiten, und E und e mittlere Entfernungen sind.

Z. B. es sey die Umlaufszeit der Erde = 365 Tage 6 Stunden = 8766 Stunden; ihr Abstand von der Sonne = 1000;

Umlaufszeit der Venus = 224 Tage 17 Stunden = 5393 Stunden; man sucht ihren mittlern Abstand von der Sonne = e.

$$8766^2 : 5393^2 = 1000^3 : e^3$$

$$\text{oder } 7684{,}2756 : 2908{,}4449 = 1000000000 : e^3$$

$$\frac{2908000000}{7684} = 378450809 = e^3$$

hieraus $\sqrt[3]{\;}$ gezogen, giebt 723,33 solcher Theile für den Abstand der Venus, deren der Abstand der Erde 1000 hat.

Dieses zweite wichtige Keplerische Gesetz erstreckt sich auch auf die Nebenplaneten, deren Kraftpunct aber nicht die Sonne, sondern ihr Planet ist.

§. 710. Die Zeiten, die ein Planet anwendet, einen Theil seiner Bahn zu durchlaufen, verhalten sich zu einander, wie die Sectoren, oder Räume der elliptischen Ebene zwischen den zurückgelegten Bogen und dem Brennpuncte, den die Sonne einnimmt. Die elliptischen Räume DSRP und LSMA sind also gleich, wenn die Bogen DR und ML in gleichen Zeiten zurückgelegt werden, siehe §. 708.

Auch dieses wichtige Gesetz, das in der Astronomie zur Bestimmung des Orts eines Planeten seine Anwendung findet, wurde von Kepler entdeckt.