Der Rathgeber bei mathematischen Beschäftigungen

Stöpel, August

Stendal, 1819

§. 727-729. Stoß elastischer Körper;

In der Figur 255. stellt die krumme Linie AMC einen Bogen von der Cycloide oder Radlinie (und zwar die Hälfte derselben) vor, welche krumme Linie die merkwürdige Eigenschaft hat, daß ein Körper, der in ihr herabgleitet, in derselben Zeit in c anlangt, er mag vom obersten Punct A, oder von irgend einem andern M auf derselben herabfallen. Auch erhält der Körper, der auf AMC herabrollt, in C dieselbe Geschwindigkeit, die er durch den senkrechten Fall nach AB bekommen würde. Jedoch sind nach der Figur des Weges die Zeiten verschieden. Der Körper gelangt nämlich nicht auf dem kürzesten Wege AnC am schnellsten nach C, sondern er wird am geschwindesten in C ankommen, wenn sein Weg den Bogen der Radlinie AMC beschreibt, in welcher AB der Durchmesser des Rades, und BC dem halben Umfange desselben gleich ist.

§. 727. **Vom Stoße elastischer Körper.** Elastische Körper erhalten durch den Stoß anfangs denselben Zuwachs an Bewegung, wie die unelastischen, allein durch ihre elastische Kraft wird die zusammengedrückte Masse alsobald den vorigen Raum wieder erfüllen, also eigentlich doppelt stoßen und gestoßen werden.

Es sey der eine elastische Körper A, seine Masse = M; Geschwindigkeit = C; der andere Körper = B; seine Masse = m; Geschwindigkeit = c; so ist in der allgemeinen

Formel: $\frac{MC + mc}{M + m} = G =$ gemeinschaftliche Geschwindigkeit durch die einfache Mittheilung.

A verliert nun $2\,(MC - GM)$ durch den doppelten Stoß, daher seine Geschwindigkeit nach dem Stoße $= \frac{(MC - GM)}{M}$.

B gewinnt $2\,(Gm - mc)$; daher seine Geschwindigkeit nach dem Stoße $= \frac{2\,(Gm - mc)}{m}$.

Z. B. Die elastische Kugel A habe Masse = 8 ℔; Geschwindigkeit = 6; die Kugel B habe Masse = 4; Ge-

Geschwindigkeit $= 0$, ruhe also; so ist $\frac{8.6+4.0}{8+4} = \frac{48}{12}$ $= 4 = G.$

A verliert nun $2.(8.6-4.8) = 2.(48-32) = 2.16 = 32$ durch den doppelten Stoß, daher ihre Geschwindigkeit nach dem Stoße $\frac{8.6-4.8}{8} = 6-4 = 2.$

B gewinnt $2.(4.4-4.0) = 2.16 = 32$; ihre Geschwindigkeit ist daher $\frac{2.(4.4-4.0)}{4}$ $= \frac{32}{4} = 8.$

2tes Beispiel.

A hat Masse $= 8$, Geschwind. $= 6$; B hat Masse $= 4$, Geschw. $= 3$; und $\frac{8.6+4.3}{8+4}$ $= \frac{48+12}{12} = 5 = G.$

Nun verliert A $2(8.6-5.8) = 8.2 = 16$, behält also noch $8.6-16$, oder überhaupt 32 Grade der Bewegung, und eine Geschwindigkeit $= \frac{32}{8} = 4.$

Aber B gewinnt $2.(5.4.-4.3) = 2.(20-12) = 2.8 = 16$; hat also überhaupt $4.3+16 = 28$ Grade der Bewegung, und eine Geschwindigkeit $= \frac{28}{4} = 7.$

3tes Beispiel.

Wenn A Masse $= 2$, Geschwindigk. $= 16$ ($\overline{32}$) und B Masse $= 3$, Geschwindigk. $= 1$ ($\overline{3}$) hat, so ist $\frac{2.16+3.1}{2+3} = \frac{35}{5} = 7 = G.$

A verliert nun $2(2.16-7.2) = 2.18 = 36$ Grade. Sie hatte aber nur 32, folglich geht sie mit 4 Grad der Bewegung und $\frac{4}{2} = 2$ Geschwindigkeit zurück.

B

B gewinnt $2 \cdot (7 \cdot 3 - 3 \cdot 1) = 2 \cdot 18 = 36$ Grad, und da sie schon 3 Grad hatte, so hat sie nun 39, und eine Geschwindigkeit $= \frac{39}{3} = 13$.

4tes Beispiel. Wenn die Bewegungen entgegengesetzt sind.

$$\left.\begin{array}{l} \text{A habe Masse} = 3 \\ \text{Geschwindigk.} = 8 \\ \hline \quad 24 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} \text{B Masse} = 2 \\ \text{Geschw.} = 7 \\ \hline \quad 14 \end{array}\right\} \text{ so ist } \frac{24 - 14}{3 + 2}$$

$$= \frac{10}{5} = 2 = G.$$

A verliert $2 \cdot (3 \cdot 8 - 2 \cdot 3) = 2 \cdot 18 = 36$ Grade. Da sie nur 24 Grad hatte, so geht sie mit 12 Grad, und einer Geschwindigkeit von $\frac{12}{3} = 4$ zurück.

B gewinnt $2 \cdot (2 \cdot 2 + 2 \cdot 7) = 2 \cdot 18 = 36$ Grade; aber da sie 14 Grade entgegensetzt, so bleiben ihr nur 22 Grad und eine Geschwindigkeit $= 11$, rückwärts.

Gleiche elastische Kugeln, die einander begegnen, gehen mit verwechselten Geschwindigkeiten zurück.

Die verschiedenen Fälle, welche beim Stoß elastischer Kugeln vorkommen, sind wohl zu unterscheiden.

§. 728. Schief ist der Stoß, wenn das Centrum eines Körpers nicht senkrecht getroffen wird.

Z. B. es berühre die elastische Kugel B Fig. 257. auf ihrem Wege CB die ruhende A, so wird A nach der Richtung BD, welche durch die beiden Mittelpuncte geht, sich hinbewegen; B aber nicht nach H kommen, sondern nach BG abspringen, wenn sie mit A von gleicher Masse ist. Die Linie GB ist parallel FE, die senkrecht auf BD durch die Berührungspuncte geht.

Ist nun BH = der Geschwindigkeit der Kugel B, so ist das Parallogramm FHDE leicht zu zeichnen.

Anmerk. Klügel in seiner Encyclopädie S. 196. giebt folgende Regeln:

1. Die Summe der Producte aus den Massen in die Geschwindigkeiten vor und nach dem Stoße

sind

sind gleich, wenn die Körper einerlei Richtung haben; der Unterschied jener Producte ist zu nehmen, wenn sie entgegengesetzte Richtung haben.

2. Die Summe der Producte aus den Massen in die Quadrate ihrer Geschwindigkeiten vor und nach dem Stoße sind gleich, die Körper mögen laufen, wie man will.

3. Die relative Geschwindigkeit vor und nach dem Stoße ist dieselbe, d. h. die Körper entfernen sich nach dem Stoße mit derselben Geschwindigkeit, mit der sie sich vorher näherten.

§. 729. Elastische Kugeln, die gegen eine veststehende Ebene geworfen werden, springen, gleich den Lichtstrahlen, unter gleichgroßen Winkeln zurück. Dies geschieht, wenn Ebene und Kugel, oder einer nur von beiden Körpern elastisch ist.

Die Gesetze vom Stoß elastischer Körper kommen beim Billard unaufhörlich in Anwendung.

Mathematische Berechnung der Töne.

§. 730. Theilt man eine Saite in zwei gleiche Theile, und läßt nur die eine Hälfte schwingen, so ist der Ton um 1 Octave höher, als der Ton der ganzen Saite; wird die Saite in 3 Theile getheilt, wovon nur 2 Theile tönen, so ist der Ton um eine Quinte höher, als der Ton der ganzen Saite. Die Töne einer vollen Octave haben daher zum Grundton ein Verhältniß, wie die Länge der schwingenden Saite zur Länge der Saite, welche den Grundton oder die 1 hören läßt. Grundton und Octave verhalten sich wie 2 : 1; oder die Octave ist $\frac{1}{2}$ Grundton; der Grundton verhält sich zur Quinte, wie 3 zu 2; oder die Quinte ist $\frac{2}{3}$. In der folgenden Tabelle ist das Verhältniß eines jeden Tones innerhalb einer Octave zum Grundton, den wir C nennen wollen, in einem Decimalbruch angegeben, wobei die Länge der Saite des Grundtons = 1 genommen ist.

Tabelle