Der Rathgeber bei mathematischen Beschäftigungen

Stöpel, August

Stendal, 1819

§. 730-733. Berechnung der Töne, Tabelle für die gleichschwebende Temperatur; Anwendung auf die Guitarre.

sind gleich, wenn die Körper einerlei Richtung haben; der Unterschied jener Producte ist zu nehmen, wenn sie entgegengesetzte Richtung haben.

2. Die Summe der Producte aus den Massen in die Quadrate ihrer Geschwindigkeiten vor und nach dem Stoße sind gleich, die Körper mögen laufen, wie man will.

3. Die relative Geschwindigkeit vor und nach dem Stoße ist dieselbe, d. h. die Körper entfernen sich nach dem Stoße mit derselben Geschwindigkeit, mit der sie sich vorher näherten.

§. 729. Elastische Kugeln, die gegen eine veststehende Ebene geworfen werden, springen, gleich den Lichtstrahlen, unter gleichgroßen Winkeln zurück. Dies geschieht, wenn Ebene und Kugel, oder einer nur von beiden Körpern elastisch ist.

Die Gesetze vom Stoß elastischer Körper kommen beim Billard unaufhörlich in Anwendung.

Mathematische Berechnung der Töne.

§. 730. Theilt man eine Saite in zwei gleiche Theile, und läßt nur die eine Hälfte schwingen, so ist der Ton um 1 Octave höher, als der Ton der ganzen Saite; wird die Saite in 3 Theile getheilt, wovon nur 2 Theile tönen, so ist der Ton um eine Quinte höher, als der Ton der ganzen Saite. Die Töne einer vollen Octave haben daher zum Grundton ein Verhältniß, wie die Länge der schwingenden Saite zur Länge der Saite, welche den Grundton oder die 1 hören läßt. Grundton und Octave verhalten sich wie 2 : 1; oder die Octave ist $\frac{1}{2}$ Grundton; der Grundton verhält sich zur Quinte, wie 3 zu 2; oder die Quinte ist $\frac{2}{3}$. In der folgenden Tabelle ist das Verhältniß eines jeden Tones innerhalb einer Octave zum Grundton, den wir C nennen wollen, in einem Decimalbruch angegeben, wobei die Länge der Saite des Grundtons = 1 genommen ist.

Tabelle der Tonverhältnisse.

C : C Einklang = 1 : 1			. . . . .	1,0000
C : cis kleine Sekunde	25 :	24	. .	0,9600
C : des — —	16 :	15	. .	0,9375
C : d große Sekunde	9 :	8	. .	0,8889
C : dis übermäßige Sek.	75 :	64	. .	0,8533
C : es kleine Terz . .	6 :	5	. .	0,8333
C : e große Terz . .	5 .	4	. .	0,8000
C : eis übermäßige Terz	245 :	192	. .	0,7836
C : fes verminderte Quarte	32 :	25	. .	0,7812
C : f Quarte . . .	4 :	3	. .	0,7500
C : fis übermäßige Quarte	25 :	18	. .	0,7200
C : ges verminderte Quinte	36 :	25	. .	0,6944
C : g Quinte . . .	3 :	2	. .	0,6666
C : gis übermäßige Quinte	25 :	16	. .	0,6400
C : as kleine Sexte . .	8 :	5	. .	0,6250
C : a große Sexte . .	5 :	3	. .	0,6000
C : ais übermäßige Sexte	245 :	144	. .	0,5877
C : b kleine Septime	16 :	9	. .	0,5625
	(9 :	5)	. .	0,5555
C : h große Septime	15 :	8	. .	0,5333
C : ces verminderte Octave	48 :	28	. .	0,5208
C : c Octave . . .	2 :	1	. .	0,5000

§. 731. Es ist nicht möglich, die Töne in ihrer mathematischen Reinheit auszuüben, weil eine Fortschreitung in lauter reinen Verhältnissen zu weit vom Grundton abführen, und die Verbindung mit demselben endlich ganz aufheben würde. Überdies haben wir auf unsern Tasteninstrumenten für die freilich etwas verschiedenen Töne cis und des, dis und es, fis und ges u. s. w. nur eine Taste. Die dazu gehörige Saite muß nun so gestimmt werden, daß der Ton zwischen cis und des, fis und ges ꝛc. schwebt, um sowol als cis, als auch als des brauchbar zu seyn.

Diese nothwendige Unvollkommenheit hat die Folge, daß jedem Intervall etwas von seiner mathematischen Reinheit genommen wird. Man nennt dies Temperatur. Nur die Octaven bleiben vollkommen rein.

Von den in voriger Tabelle angeführten 21 Tönen bleiben also nur folgende 12 übrig:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
c	cis des	d	dis es	e	f	fis ges	g	gis as	a	ais b	h	c

§. 732. Die gleichschwebende Temperatur ist dasjenige Verhältniß aller Töne innerhalb einer Octave, nach welchem die nothwendige Unvollkommenheit unter alle 12 Töne gleichmäßig vertheilt, folglich einem jeden etwas von seiner mathematischen Reinheit genommen wird. Die Töne verhalten sich umgekehrt, wie die Längen gleich dicker und gleich stark gespannter Saiten, oder gerade, wie die Geschwindigkeiten der Schwingungen. Heißt nun der Grundton 1 und die Octave 2, so lassen sich zwischen beide noch 11 Zahlen einschalten, die eine geometrische Progression bilden. Die erste Zahl ist die 12te Wurzel aus 2; die zweite ist das Quadrat dieses ersten Gliedes, die dritte der Kubus u. s. w.; die 12te ist die 12te Potenz, oder die 2 selbst, die Oberoctave. S. Klügel's Encyclop.

Mittelst der Logarithmen finden wir die zwölfte Wurzel aus 2 dadurch, daß wir ihren Logarithmen durch 12 dividiren, und dazu die Zahl suchen.

log. 2 = 0,3010300
12 :) ―――――――
0,0250858, wozu 1,05946 gehört.

Die übrigen Zahlen findet man, wenn man den zwölften Theil des Logarithmen von 2 nach der Reihe mit 2, 3, 4 rc. multiplicirt, und die Zahlen dazu aufsucht, woraus folgende Tabelle für die gleichschwebende Temperatur entsteht.

	I.	II.	III
	Verhältnisse der Schwingungen,	der Saitenlängen.	Die ganze Saite = 2000, und die nicht schwingenden Theile gezählt.
c	1,00000 . .	1,00000 .	0
cis	1,05946 . .	0,94387 .	112,25
d	1,12246 . .	0,89090 .	218,20
dis	1,18921 . .	0,84090 .	318,21

I.

	I. Verhältniß der Schwingungen,	II. der Saitenlängen.	III. Die ganze Saite = 2000, und die nicht schwingenden Theile gezählt.
e	1,25992 . .	0,79370 .	412,60
f	1,33484 . .	0,74915 .	501,69
fis	1,41421 . .	0,70710 .	585,79
g	1,49831 . .	0,66742 .	665,16
gis	1,58740 . .	0,62996 .	740,08
a	1,68179 . .	0,59461 .	810,79
b	1,78180 . .	0,56123 .	877,54
h	1,88775 . .	0,52973 .	940,54
c	2,00000 . .	0,50000 .	1000,00

Das Verhältniß der Saitenlängen unter II. ergiebt sich, wenn man die unter I. gefundenen Zahlen halbirt, und umkehrt, d. h. h zu cis, b zu d macht u. s. w.

Die unter III. befindlichen Zahlen, welche die Länge des nicht schwingenden Theils einer Saite (die durch Stege verkürzt werden kann) angeben, findet man, wenn man die unter I. gegebenen Schwingungen von der Zahl 2000,00 abzieht und umkehrt. So giebt z. B. die Schwingung für h = 1887,75 von 2000,00 abgezogen, die Zahl 112,25 für cis in III.

Nach der letzten Berechnung unter III. werden die Monochorde abgetheilt.

§. 733. Eine vollkommen richtige gleichschwebende Temperatur auf dem Griffbrett einer Guitarre zu erhalten, verfahre man also:

Wenn das Instrument so weit fertig ist, daß Saiten darauf gezogen werden können, so beziehe man sie vorläufig mit Drathsaiten, und lasse sie einige Tage ruhig liegen, damit sich der Hals in die richtige Lage ziehe. Dann drücke man da die Saite mit einer Messerschneide nieder, wo sie die reine Octave angiebt. Weil Drathsaiten gleichförmiger, als Darmsaiten sind, so geben sie auch den Octavenpunct sicherer an. Dieser Punct wird nicht in der Mitte oder Hälfte der Saite liegen (weil dieselbe durch das Niederdrücken stärker angespännt wird), sondern näher an das Ende der Saite fallen, wohin die Stege oder Bunde kommen, je höher dieselbe über dem Griffbrette schwebt. Er falle, wohin er wolle, so theile man allezeit seinen Abstand vom Halse (vom sogenannten Sattel) in 1000 Theile, und nehme davon für

E = 0	für H = 665,16
F = 112,25	C = 740,08
Fis = 218,20	Cis = 818,79
G = 318,21	D = 877,54
Gis = 412,60	Dis = 940,54
A = 501,69	E = 1000
B = 585,79	

solcher Theile. Soll die Theilung noch in die zweite Octave gehen, so nehme man von jeder Zahl die Hälfte, z. B. für f $\frac{112,25}{2} = 56,12$ und trage sie jenseit des Octavpuncts auf das Griffbrett. Auf diese Weise sind die Puncte, durch welche die elfenbeinernen Stege gelegt werden müssen, vollkommen genau bestimmt.

Daß man diese ganze Theilung sehr zart auf ein sauberes Lineal tragen, und bei allen eben so gearbeiteten Guitarren, die gleiche Saitenlänge und Neigung des Halses haben, wieder gebrauchen kann, sieht man ohne Erinnern.

Wohl verdient die Abtheilung der Stege die größte Aufmerksamkeit der Verfertiger, indem sich jede Nachläßigkeit durch Mißtöne rächt, die um so übler wirken, je ungleichförmiger die Saiten sind. Die in der Musikalischen Zeitung mitgetheilte Verfahrungsweise von H. Scheibler, so wie die mehrerer Künstler, ist mathematisch unrichtig, und nur erträglich zu nennen.