

Schnittstellen in Mathematik-
Veranstaltungen zur professions-
orientierten Lehramtsausbildung
– Geometrie



**Von der Axiomatik bis zur Schnittstellenaufgabe:
Entwicklung und Erforschung eines ganzheitlichen
Lehrkonzepts für eine Veranstaltung *Geometrie für
Lehramtsstudierende***

DISSERTATION

zur Erlangung des akademischen Grades

DOKTOR DER NATURWISSENSCHAFTEN
(DR. RER. NAT.)

im Fach MATHEMATIKDIDAKTIK

eingereicht am Institut für Mathematik der Universität Paderborn

vorgelegt von
MAX HOFFMANN, M. ED.

betreut und begutachtet von
PROF. DR. ROLF BIEHLER
PROF. DR. JOACHIM HILGERT

extern begutachtet von
PROF. DR. LISA HEFENDEHL-HEBEKER

Tag der Disputation: 5. April 2022

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	iii
Danksagung	ix
Zusammenfassung	xi
Abstract	xiii
1 Einleitung	1
1.1 Motivation und Zielsetzung	1
1.2 Struktur der Arbeit	2
I Theoretische Hintergründe zum Projekt	5
2 Mathematik und Lehrerprofessionalität	7
2.1 Mathematikspezifische Facetten professioneller Handlungskompetenz	8
2.2 Mathematik in Schule und Hochschule	10
2.3 Fachmathematisches Wissen und Können als Grundlage für professionelles Lehrerhandeln	13
2.4 Mathematisches Fachwissen als Teil von Lehrerkompetenz	22
2.5 Synthese: Mathematiklehrkräfte als Mathematiker	26
3 Wider die zweite Diskontinuität	29
3.1 Die zweite Diskontinuität als Narrativ und aktuelles Problem der Lehramtsausbildung	29
3.2 Professionsorientierte Lerngelegenheiten in Fachveranstaltungen: Schnittstellenaufgaben und ähnliche Konzepte	33
3.3 Umgang mit der zweiten Diskontinuität in Mathematikveranstaltungen	34

3.4	Synthese: Fachveranstaltungen zur Überwindung der zweiten Diskontinuität	37
4	Geometrieunterricht und fachwissenschaftliche Bezüge	39
4.1	Inhalte und Ziele des aktuellen Geometrieunterrichts	39
4.2	Fachmathematische Hintergründe von Geometrieunterricht	42
5	Lernmethodischer Hintergrund: Portfolioarbeit	45
5.1	Zum Begriff <i>Portfolio</i>	45
5.2	Portfolioarbeit als Prozess	47
5.3	ePortfolios	48
5.4	ePortfolios speziell in universitären Mathematikveranstaltungen	49
II	Projektübersicht	51
6	Vorstellung des Projekts	53
6.1	Forschungsfragen	54
6.2	Einordnungen zur Art der Forschung	55
III	Konzeption der Veranstaltung <i>Geometrie für Lehramtsstudierende</i>	59
7	Inhaltliche Gestaltung der Veranstaltung <i>Geometrie für Lehramtsstudierende</i>	61
7.1	Einordnung des Projekts in den Lehrbetrieb der Universität Paderborn	61
7.2	Überblick über Veranstaltungsinhalte und Struktur	63
7.3	Anmerkungen zur Genese des Vorlesungskonzepts	68
8	Methodische Gestaltung der Veranstaltung <i>Geometrie für Lehramtsstudierende</i>	73
8.1	Schnittstellen - ePortfolio	73
8.2	Schnittstellenwochen	76
8.3	eTests zur analytischen Geometrie (<i>STACK</i>)	76
8.4	Einsatz eines Dynamischen Geometriesystems (<i>GeoGebra</i>)	80
8.5	Synthese: Umsetzung von Constructive Alignment	80
9	Fachlich-didaktische Analysen	81

9.1	Reelle Zahlen	82
9.2	Geraden	82
9.3	Abstände und Längen	92
9.4	Das Spiegelungsaxiom	96
9.5	Das Parallelenaxiom	98
9.6	Von der axiomatischen zur analytischen Geometrie	101
9.7	Kongruenz und Isometrie	107
9.8	Zur Behandlung nichteuklidischer ebener Geometrie	111
9.9	Synthese: Eignung des Axiomensystems der Saccheri-Ebene für die Gymnasiallehr- amtsausbildung	124
10	Untersuchungsergebnisse zur Gesamtveranstaltung	129
10.1	Einschätzungen der Studierenden zu den Entwurfsprinzipien und zur methodischen Gestaltung der Veranstaltung	129
10.2	Beliefs der Studierenden zur doppelten Diskontinuität	135
10.3	Zusammenfassung und Beurteilung der Ergebnisse	138
IV	Entwicklung und Beforschung von Schnittstellenlerngelegenheiten	141
11	Thematische Schwerpunkte der Schnittstellenaktivitäten	143
11.1	Kongruenz, Isometrie und Symmetrie als wesentliche Grundbegriffe der ebenen Geo- metrie	143
11.2	Alternative Inhaltsbereiche für Schnittstellenaktivitäten	144
12	Theoretische und methodische Grundlagen zur Entwicklung und Beforschung von Schnitt- stellenlerngelegenheiten	147
12.1	Entwicklungsforschung im Dortmunder Modell	147
12.2	Zyklische Entwicklung und Beforschung von Schnittstellenlerngelegenheiten im Rah- men von <i>SiMpLe-Geo</i>	148
12.3	Schwerpunktsetzungen für die Entwicklungsforschung im Rahmen dieser Arbeit . .	154
13	Schnittstelle Kongruenz	157
13.1	Spezifizierung und Strukturierung der Schnittstelle	157
13.2	Überblick über die Gestaltung der Schnittstellenwoche <i>Kongruenz</i>	190

13.3	Ausgewählte Ergebnisse der Begleitforschung zur Schnittstelle <i>Kongruenz</i>	198
13.4	Synthese und Redesign	228
14	Schnittstelle Symmetrie	231
14.1	Spezifizierung und Strukturierung der Schnittstelle	231
14.2	Überblick über die Gestaltung der Schnittstellenwoche <i>Symmetrie</i>	256
14.3	Ausgewählte Ergebnisse der Begleitforschung zur Schnittstelle <i>Symmetrie</i>	262
14.4	Synthese und Redesign	287
15	Zusammenfassung: Professionsorientierung durch Explizierung von Schnittstellen	291
15.1	Einordnung aus Perspektive des Entwicklungsforschungszyklus	291
15.2	Ausblick auf die Entwicklungsforschung zur Schnittstelle <i>Isometrie</i>	293
15.3	Schnittstellenaspekte als professionsorientierte Systematisierungen	293
V	Schluss	295
16	Zusammenfassung, Diskussion und Ausblick	297
16.1	Zusammenfassung der Arbeit unter Berücksichtigung der Forschungsfragen	297
16.2	Diskussion der Ergebnisse aus Perspektive der universitären Lehrpraxis	302
16.3	Diskussion der Ergebnisse aus Perspektive der Mathematikdidaktik	303
16.4	Perspektiven für Forschung und Entwicklung	305
	Literatur	307
	Allgemeiner Begriffsindex	319
	Mathematischer Index	320
	Abbildungsverzeichnis	321
	Tabellenverzeichnis	327
VI	Anhänge	331
A	Kurzskript: Axiomatische Geometrie auf Grundlage metrischer Räume	333

A.1	Kreise	333
A.2	Geraden	334
A.3	Isometrien	338
A.4	Saccheri-Ebenen	339
A.5	Orthogonalität und Eigenschaften der Spiegelung	342
A.6	Punktspiegelung und Mittelsenkrechte	347
A.7	Dreiecke und Kongruenz	352
A.8	Winkel	354
A.9	Weitere Hintergründe zur Saccheri-Ebenen	357
A.10	Parallelität in Saccheri-Ebenen	360
A.11	Das Parallelenaxiom	361
A.12	Entwicklung einer elementargeometrisch fundierten Vektorraumstruktur	362
A.13	Vektorraumgeraden in der euklidischen Ebene	368
A.14	Klassifikation euklidischer Ebenen	370
	Index des Kurzskripts	374
B	Überblick über Hilberts Axiomenensystem aus den „Grundlagen der Geometrie“	375
C	Ausgewählte Lehr-Lern-Materialien zur Veranstaltung	379
C.1	Präsenzaufgaben in den Schnittstellenwochen	379
C.2	Aktivitäten für das Schnittstellen-ePortfolio	386
C.3	Weitere Lehr-Lern-Materialien	401
D	Ausführliche Zitate aus den Schnittstellen-ePortfolios	405
D.1	ePortfolio-Zitate zur Analyse der Lernendenvoraussetzungen zum Kongruenzbegriff	405
E	Items zum Fragebogen zur doppelten Diskontinuität	407

Danksagung

Zunächst gilt mein Dank meinen beiden Betreuern Prof. Dr. Rolf Biehler und Prof. Dr. Joachim Hilgert für die Möglichkeit, dieses Promotionsprojekt zu realisieren, für die vielen intensiven und konstruktiven Diskussionen im Rahmen der Betreuung und für alles, was ich sonst in den letzten Jahren durch Euer Zutun lernen und erfahren konnte.

Frau Prof. Dr. Lisa Hefendehl-Hebeker danke ich für die Begutachtung dieser Arbeit und für den stets inspirierenden Austausch – egal ob digital oder persönlich.

Ohne ein entsprechendes Umfeld, wäre die Realisierung dieses konsequent an der Schnittstelle ausgerichtete Projekt nicht möglich gewesen. Bedanken möchte ich mich beim gesamten Institut für Mathematik für das freundschaftliche Umfeld, bei allen, deren Vertrauen ich es verdanke, dass ich mich gestalterisch in der Lehre einbringen konnte, und besonders bei den Arbeitsgruppen Biehler und Hilgert/Weich. Mein Dank gilt auch allen Studierenden, die sich wohlwollend auf das Projekt eingelassen haben. Speziell bedanken möchte ich mich bei

- ... Prof. Dr. Peter Bender, Henning Körner, Dr. Dieter Remus, Reinhard Schmidt und Prof. Dr. Tobias Weich für viele inspirierende Diskussionen zur Mathematik und ihrer Didaktik,
- ... meiner langjährigen Büropartnerin, Klemmbaustein- und StarWars-Gleichgesinnten sowie Weihnachtsschmuck-Enthusiastin, Dr. Julia Budde,
- ... Jan Schumacher für so vieles, nicht zuletzt für viele produktive Kaffeepausen,
- ... Lara Gildehaus, für jede Menge anregenden Austausch zu wirklich allem,
- ... Dr. Lea Budde für 10 erfolgreiche Jahre „Team Mathe/Informatik“,
- ... Dr. Anna-Katharina Roos, für eine anhaltende Freundschaft mit fachdidaktischen Anteilen seit meiner ersten Spring-School als „Masterand“ in Würzburg und
- ... meinen wundervollen Veranstaltungs-SHKs Anna Dellori, Sven Hüsing und Sarah Schlüter, die schon lange keine SHKs mehr sind.

Schließlich danke ich meinen Freunden und von ganzem Herzen meiner Frau Sarah und meiner Familie für so viel Unterstützung auf so vielen Ebenen!

Zum Abschluss möchte ich mich bei denjenigen bedanken, die mich auf den ersten Schritten in die Welt der Mathematik begleitet haben: Veronika Schiermeister, Ralf Leidag, Hermann-Josef Enderrichs, Uli Felker, Manni Feller und Klaus-Dieter Schmidt, meinen Mathelehrern und Vorbildern.

Paderborn, im April 2022, *Max Hoffmann*

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit stelle ich ein Entwicklungsforschungsprojekt zur Konzeption und Durchführung einer Veranstaltung *Geometrie für Lehramtsstudierende* vor. Die Schwerpunkte des Projekts sind zum einen die inhaltliche Gestaltung der Veranstaltung und zum anderen die Umsetzung von Professionsorientierung.

In Bezug auf den inhaltlichen Aufbau stelle ich das Axiomensystem der *Saccheri-Ebene* vor. Dabei handelt es sich um eine Axiomatisierung der ebenen Geometrie, die auf metrischen Räumen aufbaut und neben dem Parallelenaxiom nur zwei weitere Axiome zur Beschreibung der euklidischen Ebene benötigt. Im Rahmen der Arbeit führe ich umfangreiche fachlich-didaktische Analysen durch um die besondere Eignung dieses Zugangs für den Einsatz in der Lehramtsausbildung zu begründen.

Die Frage nach der Umsetzung von Professionsorientierung in Fachveranstaltungen ist eng mit der Problematik der *zweiten Diskontinuität* verbunden. Ich diskutiere dieses Problem auf Grundlage der Synthese von theoretischen Hintergründen zur Bedeutung von mathematischem Wissen und Können für professionelle Handlungskompetenz von Mathematiklehrkräften. Darauf aufbauend entwickle ich theoriebasierte Entwurfsprinzipien für professionsorientierte Fachveranstaltungen, die ich dann bei der inhaltlichen und methodischen Konzeption der Veranstaltung *Geometrie für Lehramtsstudierende* umsetze. Zentrale Elemente der methodischen Gestaltung der Veranstaltung sind die sogenannten *Schnittstellenwochen* und das begleitende *Schnittstellen-ePortfolio*.

Für die Schnittstellenthemen *Kongruenz* und *Symmetrie* stelle ich detailliert die theoriegeleitete Entwicklung verschiedener professionsorientierter Lerngelegenheiten (Vorlesungskonzept, Aufgaben für Präsenzübungen, ePortfolio-Aktivitäten) dar. Dafür analysiere ich unter anderem die Bedeutung der Begriffe im Mathematikunterricht und ordne die Analyseergebnisse vor dem Hintergrund der zugrundeliegenden Mathematik ein. Diese theoriebasierten konzeptuellen Überlegungen werden durch qualitative Untersuchungen zu Lernvoraussetzungen der Studierenden bezogen auf *Kongruenz* und *Symmetrie* ergänzt und in Fragebogenstudien evaluiert.

Das zentrale Ergebnis der Arbeit ist ein theoretisch fundiertes und empirisch evaluiertes ganzheitliches Veranstaltungskonzept für eine professionsorientierte Geometrie-Veranstaltung für Lehramtsstudierende, dessen Konzeption auf andere Fachveranstaltungen übertragbar ist. Darüber hinaus ergeben sich im Rahmen der Entwicklungsforschung verschiedene neue Beiträge zur Geometriedidaktik in Schule- und Hochschule.

Abstract

In this thesis, I present a design research project on the development and implementation of a course *Geometry for Student Teachers*. The focus of the project is on the one hand the content design of the course and on the other hand the implementation of professional orientation.

Regarding the content design, I introduce the axiom system of the *Saccheri plane*. This is an axiomatization of plane geometry, which is based on metric spaces and needs only two axioms besides the parallel axiom to describe the Euclidean plane. In the context of the thesis I carry out extensive didactical analyses to justify the special suitability of this approach for the use in teacher training.

The question of how to implement professional orientation in subject matter courses is closely related to the problem of the *second discontinuity*. I discuss this problem based on the synthesis of theoretical backgrounds on the importance of mathematical knowledge and skills for professional competence of mathematics teachers. Based on this, I develop theory-based design principles for professionally oriented math courses, which I then implement in the content and methodological design of the course *Geometry for Student Teachers*. Central elements of the methodological design of the course are the so-called *interface weeks* and the accompanying *interface-eportfolio*.

For the interface topics *congruence* and *symmetry* I present in detail the theory-driven development of different profession-oriented learning opportunities (lecture concept, tasks for classroom exercises, ePortfolio activities). To do so, I analyze, among other things, the role of those to geometric concepts in school mathematics and interpret the results of the analysis using the underlying mathematics. These theory-based conceptual considerations are complemented by qualitative investigations of students' learning prerequisites related to *congruence* and *symmetry* and evaluated in questionnaire studies.

The central result of the thesis is a theoretically founded and empirically evaluated holistic course concept for a profession-oriented geometry course for student teachers, the conception of which is transferable to other subject events. In addition, various new contributions to the didactics of geometry in schools and universities result from the desing research.

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Motivation und Zielsetzung

Die ebene Elementargeometrie bietet – mehr als jeder andere Inhaltsbereich des Mathematikunterrichts – vielfältige Gelegenheiten dafür, wesentliche Charakteristika der Mathematik als wissenschaftliche Disziplin zu illustrieren. Damit es ihnen gelingen kann, den Lernenden auf diese Weise Lerngelegenheiten im Sinne der zweiten von Heinrich Winter (1995) formulierten Grunderfahrung¹ zu ermöglichen, ist es notwendig, dass die Lehrkräfte selbst, Elementargeometrie als Teil rigoroser wissenschaftlicher Mathematik verstehen. Dazu bedarf es wiederum der Möglichkeit sich im Rahmen des Lehramtsstudiums genau in dieser Weise mit Elementargeometrie zu beschäftigen.

Ich stelle in dieser Arbeit ein mathematikdidaktisches Entwicklungsforschungsprojekt vor, dessen Kern ein innovativer Zugang zur Elementargeometrie ist, bei dem der historisch ausgetretene axiomatische Weg zur euklidischen Geometrie auf neuen Pfaden begangen wird. Gegenstand der Entwicklung ist die von mir (aufbauend auf bestehenden Skripten) konzipierte Veranstaltung *Geometrie für Lehramtsstudierende*. Das dort verwendete Axiomensystem der *Saccheri-Ebene* beruht auf einer Arbeit von Iversen (1992) und startet den Aufbau der Geometrie bei *metrischen Räumen*. Bis auf das *Parallelenaxiom* bedarf es nur zweier weiterer Axiome, um die euklidische Ebene zu beschreiben, des *Inzidenzaxioms* und des *Spiegelungsaxioms*. Dieser Zugang setzt Konzepte aus den Grundvorlesungen, wie die reellen Zahlen oder Stetigkeit, voraus. Auf diese Weise kann die Behandlung der ebenen Geometrie synergetisch in die fachspezifischen Teile des Lehramtsstudiums eingebettet werden und stellt kein für sich stehendes Theoriegebäude dar. Darüber hinaus stellt sich der gewählte Zugang als besonders geeignet heraus, um die fachlichen Hintergründe der Schulgeometrie zu beschreiben. Entsprechende fachlich-didaktische Analysen bilden einen der zwei Schwerpunkte dieser Arbeit.

Der andere Schwerpunkt besteht darin, den Studierenden zu ermöglichen, aus der in der inhaltlichen Konzeption implizit angelegte Professionsorientierung einen realen Mehrwert für ihre Professionalisierung zu ziehen. Die fortwährende Diskussion zur *doppelten Diskontinuität* (F. Klein, 1908) zeigt, dass dies keine Selbstverständlichkeit ist. In dieser Arbeit wird am Beispiel der Veranstaltung *Geometrie für Lehramtsstudierende* ein prototypisches Konzept für Mathematikvorlesungen mit ex-

¹ „Der Mathematikunterricht sollte anstreben, die folgenden drei Grunderfahrungen, die vielfältig miteinander verknüpft sind, zu ermöglichen: [...] (2) mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfung, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen. [...]“ (Winter, 1995, S. 37)

plizitem Professionsbezug theoriebasiert entwickelt und empirisch beforcht. Zentrale methodische Innovationen sind ein semesterbegleitendes *Schnittstellen-ePortfolio* sowie das Ersetzen von zwei Veranstaltungswochen durch sogenannte *Schnittstellenwochen*.

Durch die Portfolioarbeit wird der fachinhaltliche Lernprozess der Studierenden durch professionsbezogene Aufgabenstellungen (*Schnittstellenaufgaben*) und Reflexionsanlässe ergänzt; in den Schnittstellenwochen werden exemplarisch Bezüge zwischen ausgewählten mathematischen Inhalten und der angestrebten Profession (Mathematik unterrichten) explizit thematisiert und in den Mittelpunkt von Vorlesung, Präsenzübung und Hausaufgaben gestellt.

Im Rahmen des Entwicklungsforschungsansatzes des Projektes werden begleitend verschiedene empirische Untersuchungen durchgeführt, um Einsichten in die Perspektive der Studierenden auf verschiedenen Ebenen zu gewinnen. Dabei soll insbesondere festgestellt werden, ob und inwieweit die Studierenden die konzipierte Veranstaltung tatsächlich als hilfreich für ihre eigene Professionalisierung wahrnehmen.

Insgesamt stelle ich in dieser Arbeit ein ganzheitliches, theoretisch fundiertes und empirisch untersuchtes Lehrkonzept für eine professionsorientierte Fachveranstaltung vor, bei dem Gesamtveranstaltung und spezielle professionsorientierte Lerngelegenheiten sowohl auf inhaltlicher als auch auf methodischer Ebene aufeinander abgestimmt sind.

1.2 Struktur der Arbeit

Der Hauptteil dieser Arbeit besteht aus vier Teilen. Teil I setzt sich aus vier Kapiteln zusammen, in denen jeweils relevante theoretische Hintergründe zum Projekt vorgestellt werden.

In Kapitel 2 (*Mathematik und Lehrerprofessionalität*) werde ich theoretische Perspektiven auf fachmathematisches Wissen und Können als Disposition für professionelles Handeln von Mathematiklehrkräften vorstellen und zueinander in Beziehung setzen. Dazu gehört neben einer theoretischen Verortung des Konzepts der *professionellen Handlungskompetenz* von Mathematiklehrkräften eine Zusammenstellung von Funktionen, die mathematische Kompetenzen für professionelles Lehrerhandeln haben. Darauf aufbauend verorte ich in Kapitel 3 (*Wider die zweite Diskontinuität*) das Problem der *zweiten Diskontinuität* zunächst theoretisch und diskutiere dann verschiedene Ansätze zur Überwindung. In diesem Rahmen unterscheide ich insbesondere die *subjektive* und die *objektive* Facette der zweiten Diskontinuität voneinander und entwickle theoriebasiert Entwurfsprinzipien für Veranstaltungen, die beiden Facetten entgegen wirken sollen. Diese Entwurfsprinzipien bilden eine wesentliche Grundlage für die Konzeption der Veranstaltung *Geometrie für Lehramtsstudierende*.

Die folgenden beiden Kapitel liefern spezielle theoretische Hintergründe zum einen zu Inhalten und Zielen des aktuellen Geometrieunterrichts (Kapitel 4) und zum anderen zur Methode der Portfolioarbeit (Kapitel 5).

Teil II besteht nur aus dem Kapitel 6 (*Vorstellung des Projekts*). Dort wird – aufbauend auf dem theoretischen Hintergrund – die spezifische Zielsetzung der Arbeit formuliert und durch Forschungsfragen konkretisiert.

Diese Forschungsfragen beantworte ich dann in den Teilen III und IV. Teil III (*Konzeption der Veranstaltung Geometrie für Lehramtsstudierende*) bezieht sich auf die Veranstaltung als Ganzes. Zunächst

stelle ich die inhaltliche (Kapitel 7) und methodische (Kapitel 8) Konzeption der Veranstaltung *Geometrie für Lehramtsstudierende* dar. In Kapitel 9 führe ich verschiedene fachlich-didaktische Analysen durch. Damit verfolge ich das Ziel, den gewählten axiomatischen Aufbau im Vergleich zu alternativen Zugängen auf die Eignung zur Umsetzung von Professionsorientierung zu untersuchen. Im letzten Kapitel dieses Teils der Arbeit stelle ich zwei empirische Studien zur Gesamtveranstaltung vor, die sich auf die Einschätzungen der Studierenden zur methodischen Gestaltung und zur Professionsorientierung beziehen (Kapitel 10).

Der Fokus von Teil IV (*Entwicklung und Beforschung von Schnittstellenlerngelegenheiten*) liegt auf der Entwicklungsforschung zu den Schnittstellen *Kongruenz* und *Symmetrie*. In Kapitel 11 begründe ich zunächst die Auswahl dieser Themen. Anschließend erläutere ich die spezifischen forschungsmethodischen Hintergründe für diesen Teil des Projekts (Kapitel 12).

Die Kapitel 13 und 14 sind parallel aufgebaut. In ihnen dokumentiere ich die einzelnen Schritte der Entwicklungsforschung zu den beiden Schnittstellen (*Kongruenz* und *Symmetrie*). Dazu stelle ich zunächst die jeweiligen mathematischen Hintergründe dar, und systematisiere diese in Form von sogenannten *Schnittstellenaspekten*. Es folgen umfangreiche fachlich-didaktische Analysen zur Rolle von *Kongruenz* und *Symmetrie* im Mathematikunterricht und die Vorstellung der entwickelten Lehr-Lernmaterialien. Die Analysen und konzeptuellen Überlegungen werden durch jeweils zwei empirische Studien ergänzt. Zunächst stelle ich für beide Schnittstellen eine Fragebogenstudie zur Evaluation der Lerngelegenheiten vor. Anschließend analysiere ich ePortfolio-Bearbeitungen der Studierenden mit dem Ziel, tiefere Einsichten in die Lernvoraussetzungen zu gewinnen. Zum Abschluss des Hauptteils der Arbeit (Kapitel 15) fasse ich den aktuellen Stand der Entwicklungsforschung zu den beiden Schnittstellen zusammen und erläutere die nächsten notwendigen Schritte.

Der Schluss der Arbeit (Teil V) beinhaltet neben den üblichen Indizes und Verzeichnissen das Kapitel 16, in dem ich die Arbeit zunächst unter Berücksichtigung der Forschungsfragen zusammenfasse und die Ergebnisse dann aus Perspektive der universitären Lehrpraxis und der Mathematikdidaktik diskutiere. Abschließend schlage ich mögliche Forschungs- und/oder Entwicklungsprojekte, vor, die an verschiedene Aspekte dieser Arbeit anknüpfen.

Teil I

Theoretische Hintergründe zum Projekt

Kapitel 2

Mathematik und Lehrerprofessionalität

Im Kern dieser Arbeit steht die Entwicklung einer professionsorientierten Fachveranstaltung *Geometrie für Lehramtsstudierende*. Hiefür bedarf es theoretischer Überlegungen zur Frage, was *Professionsorientierung* im Bezug auf mathematische Fachveranstaltungen bedeutet. In diesem Sinne möchte ich im Folgenden die Relevanz und Funktion universitärer Fachmathematik für die Professionalisierung von Lehramtsstudierenden aus theoretischer Perspektive untersuchen: In Abschnitt 2.1 gehe ich zunächst auf mathematikspezifische Facetten von professioneller Handlungskompetenz ein. Darauf folgt ein Vergleich des Mathematik-Treibens an Schule und Hochschule (Abschnitt 2.2). In Abschnitt 2.3 beschreibe ich, wie in der Literatur fachmathematisches Wissen und Können als wichtige Grundlage für professionelle Handlungskompetenz beschrieben wird. Anschließend folgt ein Überblick über theoretische Ansätze zur Einordnung mathematischen Fachwissens als Teil von Lehrerkompetenz (Abschnitt 2.4). Im letzten Abschnitt (Abschnitt 2.5) beziehe ich dann die vorgestellten Theoriebeiträge auf die universitäre fachspezifische Mathematik-lehramtsausbildung.

Die Ausführungen in den nächsten Abschnitten sind durchgehend mathematikspezifisch, bauen aber auf einem fachübergreifenden Konzept der *professionellen Handlungskompetenz* auf. Dieser Begriff präzisiert gewissermaßen die folgende zentrale Zielsetzung der Lehramtsausbildung (hier beispielhaft aus dem Lehrerausbildungsgesetz NRW) aus Perspektive der (empirischen) Bildungsforschung:

Ziel der Ausbildung ist die Befähigung, ein Lehramt an öffentlichen Schulen selbstständig auszuüben. [...]

NRW, 2020, §2 (1)

Eine relevante Ausdifferenzierung liefern Baumert und Kunter (2006, S. 481), indem sie verschiedene Dispositionen spezifizieren, deren Zusammenspiel die Grundlage *professioneller Handlungskompetenz* darstellt:

- spezifisches, erfahrungsgesättigtes, deklaratives und prozedurales Wissen [...];
- professionelle Werte, Überzeugungen, subjektive Theorien, normative Präferenzen und Ziele;

- motivationale Orientierungen sowie
- metakognitive Fähigkeiten und Fähigkeiten professioneller Selbstregulation.

Kompetenz wird in diesem Zugang über *Dispositionen* beschrieben. Diese Dispositionen werden auch von Blömeke, Gustafsson und Shavelson (2015, S.7) genutzt, aber in ihrer *Modellierung von Kompetenz als Kontinuum* in Beziehung zu beobachtbarem Verhalten gesetzt (Abbildung 2.1).

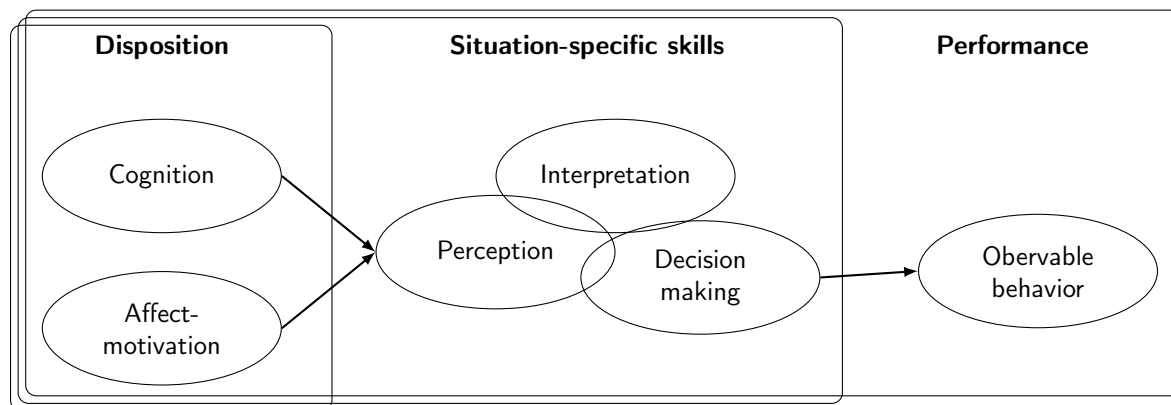


Abbildung 2.1: Kompetenz, als Kontinuum modelliert. (Abgezeichnet von Blömeke, Gustafsson und Shavelson (2015, S. 7, Figure 1))

Im Mittelpunkt des Modells steht eine spezifische professionelle Handlungssituation. Handlungskompetenz wird in dieser Situation als Kontinuum (im Gegensatz zu einer dichotomen Sichtweise, in der Kompetenz entweder über Dispositionen („trait approaches“) oder über beobachtbares Verhalten („behavioral approaches“) modelliert wird (Blömeke et al., 2015, S.7)), beschrieben. Dabei vermitteln situationsspezifische Fähigkeiten und Fertigkeiten (Wahrnehmen und Interpretieren der Situation sowie Entscheidungen treffen) zwischen kognitiven sowie affektiven und motivationalen Dispositionen und dem beobachtbaren Verhalten. Einen besonderen Fokus legt die Kontinuumsmodellierung auf die Prozesse, die Disposition und Verhalten miteinander verbinden. Im Kontext der Lehramtsausbildung und der doppelten Diskontinuität (Kapitel 3) erweist sich diese Fokussierung als sehr hilfreich, um zu untersuchen, warum sich vorhandene mathematische Dispositionen nicht immer in professionellem Lehrerhandeln widerspiegeln.

Ich nutze den Begriff *professionelle Handlungskompetenz* genau im Sinne dieser Modellierung des Kompetenzbegriffs und werde an verschiedenen Stellen explizit auf das Kontinuums-Modell zurückgreifen.

2.1 Mathematikspezifische Facetten professioneller Handlungskompetenz

In diesem Abschnitt möchte ich zunächst die grundsätzliche Relevanz fachmathematischer Dispositionen für professionelles Lehrerhandeln begründen. Dazu stelle ich zwei aufeinander aufbauende Beiträge von Ball und Bass (2002) und Prediger (2013) vor, in denen professionelle Handlungs-

anforderungen herausgearbeitet werden, für deren Bewältigung fachmathematische Dispositionen zwingend erforderlich sind.

Ball und Bass (2002, S. 11) betrachten Mathematikunterricht als substanzielle mathematische Arbeit, bei der ständiges mathematisches Problemlösen erforderlich ist. Um die zur Bewältigung notwendigen Anforderungen genauer identifizieren zu können, wurde eine umfangreiche empirische Job-Analyse bei Grundschullehrkräften durchgeführt (Ball & Bass, 2002, S. 5). Solche Feldstudien werden auch von Blömeke et al. (2015, S. 5) als essentiell für die professionspezifische Beschreibung professioneller Handlungskompetenz eingestuft. Ein wesentliches Ergebnis der Job-Analyse stellt eine Liste typischer mathematikhaltiger Handlungsanforderungen dar:

- design mathematically accurate explanations that are comprehensible and useful for students;
- use mathematically appropriate comprehensible definitions;
- represent ideas carefully, mapping between a physical or graphical model, the symbolic notation and the operation or process;
- interpret and make mathematical and pedagogical judgements about students' questions, solutions, problems, and insights (both predictable and unusual);
- be able to respond to students' mathematical questions and curiosities;
- make judgements about the mathematical quality of instructional materials and modify as necessary;
- be able to pose good mathematical questions and problems that are productive for students' learning;
- assess students' mathematics learning and take next steps.

(Ball & Bass, 2002, S. 11)

In einem Beitrag zur Stärkung der mathematischen Fundierung unterrichtlichen Handelns erweitert Prediger (2013) diese Liste in nachfolgender Weise und formuliert das Ziel „Handlungsanforderungen *explizit* zum Ausgangspunkt für mathematische Analysen und Reflexionen [im Lehramtsstudium] zu machen“ (S. 156).

- (1) Anforderungen an Schülerinnen und Schüler (aus Schulbüchern, Tafelbildern oder Tests) selbst bewältigen und auf verschiedenen Niveaus bearbeiten können;
- (2) Lernziele setzen und ausschärfen;
- (3) Zugänge (in Schulbüchern, Tafelbildern o. Ä.) analysieren und bewerten;
- (4) Aufgaben und Lernanlässe auswählen, verändern oder konstruieren;
- (5) Tests entwickeln und reskalieren;
- (6) geeignete Darstellungen und Exaktheitsstufen auswählen und nutzen sowie zwischen ihnen vermitteln;
- (7) Äußerungen von Lernenden analysieren, bewerten und darauf lernförderlich reagieren;
- (8) Fehler von Lernenden analysieren und darauf lernförderlich reagieren;
- (9) fachlich substantielle, produktive Diskussionen moderieren;
- (10) zwischen verschiedenen Sprachebenen (Alltagssprache, Fachsprache, Symbolsprache) flexibel hin- und herwechseln und vermitteln für Lernende;

(11) Lernstände, Lernprozesse und Lernerfolge erfassen.

(Prediger, 2013, S. 156)

Diese Auflistung umfasst mathematikhaltige Situationen, in denen Lehrkräfte professionell handeln müssen. Die Zielvorstellung ist, dass die im Studium erworbenen fachmathematischen und fachdidaktischen Kompetenzen als Dispositionen funktional für die Bewältigung dieser Handlungsanforderungen sind.

2.2 Mathematik in Schule und Hochschule

Der im vorigen Abschnitt dargestellte Zusammenhang – Mathematik Unterrichten geht mit mathematikhaltigen Handlungsanforderungen einher, für deren Bewältigung es mathematische Kompetenzen braucht – ist nicht überraschend. Komplex wird die Thematik allerdings (neben anderen Aspekten) dadurch, dass sich Mathematik-Treiben in der Schule (also dort, wo professionell gehandelt werden soll) von Mathematik-Treiben an der Hochschule (also dort, wo die Dispositionen für professionelles Handeln erworben werden sollen) unterscheidet.² Da es in dieser Arbeit um die Ausbildung von Gymnasiallehrkräften geht, bezieht sich „Hochschule“ hier speziell auf die Fachausbildung im gymnasialen Lehramtsstudium. Natürlich unterscheidet sich das Mathematik-Treiben dort wiederum deutlich von beispielsweise dem Mathematik-Treiben in den Ingenieur-Studiengängen.

Dreher, Lindmeier, Heinze und Niemand (2018) charakterisieren das Mathematik-Treiben im Schulfach wie folgt:

[M]athematics as a school subject usually places its main focus on applying mathematics as a tool for describing as well as understanding reality, and for facilitating everyday life [...]. Consequently mathematical objects are often introduced in an empirical manner and bound to a certain context. Concept formation in mathematics classrooms at school is, accordingly, often done in an inductive way by means of prototypes [...]. Mostly, intuitive and context-related reasoning is more in the focus than rigorous proofs.

(Dreher et al., 2018, S. 323 f.)

Diese in der Unterrichtspraxis feststellbaren Charakteristika können als Resultat einer curricularen Gestaltung von Mathematikunterricht gesehen werden. Die zugrundeliegenden Designprinzipien wurden zwischen den beteiligten Akteuren (wie Politik und Fachverbände) ausgehandelt. Wesentlich sind hier sowohl entwicklungspsychologische Notwendigkeiten als auch konsentiertere normative Bildungsziele. Darunter fällt unter anderem eine primär allgemeinbildende und nur nachrangig wissenschaftspropädeutische Ausrichtung von Mathematikunterricht entlang der drei von Winter (1995, S. 37) formulierten Grunderfahrungen (z. B. KMK (2012, S. 11) oder MSW NRW (2007, S. 11)):

²Ich nutze hier bewusst den Begriff des „Mathematik-Treibens“ und spreche nicht von Schulmathematik im Vergleich zu Hochschulmathematik. Letztere Begriffswahl – auch wenn sie oft verwandt wird – suggeriert eine nicht gegebene Gleichwertigkeit. Während (Hochschul)Mathematik eine Wissenschaft mit eigenen Arbeitsmethoden zum Erkenntnisgewinn und festen Evidenzkriterien ist, ist Schulmathematik ein Unterrichtsfach. In diesem werden in allgemeinbildender und ggf. wissenschaftspropädeutischer Absicht, ausgewählte Inhalte und Arbeitsweisen der Mathematik in den Horizont der Schülerinnen und Schüler getragen. Das Unterrichtsfach steht dabei in einem legitimierenden Abhängigkeitsverhältnis zur Wissenschaft. Die „Treiben“-Formulierung betont diesen anderen handelnden Umgang mit Mathematik. Meiner Erfahrung nach stößt man gerade bei Mathematikerinnen und Mathematikern, die mit dem Lingo der Diskussion um die doppelte Diskontinuität nicht vertraut sind, auf einen nachvollziehbaren Widerstand, wenn man von zwei Mathematiken spricht. Die hier gewählte, vorsichtige Formulierung versucht Missverständnisse zu verhindern, ohne an dieser Stelle die komplexe Diskussion über hochschulmathematische und schulmathematische Praktiken des Mathematik-Treibens (z. B. im Sinne der anthropologischen Theorie der Didaktik (Bosch & Gascón, 2014) oder wie im aktuellen Projekt von T. Bauer, Müller-Hill und Weber (2021)) zu vertiefen.

Der Mathematikunterricht sollte anstreben, die folgenden drei Grunderfahrungen, die vielfältig miteinander verknüpft sind, zu ermöglichen:

- (1) Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen,
- (2) mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfung, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen,
- (3) in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinaus gehen, (heuristische Fähigkeiten) zu erwerben.

(Winter, 1995, S. 37)

Es fällt auf, dass sich die zweite Grunderfahrung von Winter (1995) als normative Zielsetzung und die oben zitierte Charakterisierung von Dreher et al. (2018) als empiriebasierte Beschreibung in einem gewissen Spannungsverhältnis befinden.

Dem gegenüber spiegelt sich in der nachfolgenden Charakterisierung von Mathematik an der Hochschule deutlich das wissenschaftliche Selbstverständnis forschender und lehrender Mathematikerinnen und Mathematiker wieder:

Mathematics as the scientific discipline taught at university has an axiomatic-deductive structure and focuses on the rigorous establishment of theory in terms of definitions, theorems, and proofs. It usually deals with objects that are not bound to reality and it is often characterized by a high level of abstraction and a symbolic mathematical language [...].

(Dreher et al., 2018, S. 323)

Auch diese Charakterisierung muss *cum grano salis* betrachtet werden, da sie vielleicht auf die Struktur fertiger mathematischer Texte, aber dadurch nicht auch automatisch auf das universitäre Lehren von Mathematik (gerade in den aktuell immer weiter verbreiteten Fachvorlesungen speziell für Lehramtsstudierende) in Reinform zutrifft.

Mit diesen grundsätzlichen Charakterisierungen verbunden, ist ein unterschiedlicher Gültigkeitsanspruch (Lambert, 2020, S. 6). Im Gegensatz zum objektiven Gültigkeitsanspruch der wissenschaftlichen Mathematik geht mit der zumeist demonstrativen und lokalen Begründungskultur des schulischen Mathematik-Treibens ein vorwiegend (inter-)subjektiver Gültigkeitsanspruch (bezogen auf die Lerngruppe) einher³.

Weitere (und offensichtliche) Unterschiede gibt es auf der fachinhaltlichen Ebene. Eine stets virulente Diskussion behandelt die Frage danach, inwieweit im Mathematikunterricht hinreichende inhaltliche Voraussetzungen für die universitäre Behandlung von Mathematik geschaffen werden. Diese Frage wird insbesondere dadurch komplex, dass die im vorigen Satz erwähnte „universitäre Behandlung“ auf ein breites Spektrum verschiedener Studiengänge bezieht, zu den neben Fachmathematik und Lehramt insbesondere ein weites Feld von Fachrichtungen mit „Service-Mathematik“-Veranstaltungen unterschiedlicher Schwerpunktsetzungen gehört. Für die Professionalisierung von Mathematiklehrkräften interessanter ist der Blick auf mathematische Inhalte des Schulunterrichts

³An dieser Stelle kann ich verdeutlichen, was ich in Fußnote 2 mit dem legitimierenden Abhängigkeitsverhältnis des Unterrichtsfachs zur Wissenschaft meine: Folgt man einem intersubjektiven Gültigkeitsanspruch, so würde es zu keinen Problemen oder erkennbaren Widersprüchen beim Treiben von Mathematik in der Schule führen, wenn man die Kreiszahl π als endlichen Dezimalbruch mit zehn Nachkommastellen definieren würde.

und deren Behandlung im Hochschulstudium. Diese Behandlung findet entsprechend dem oben beschriebenen Vergleich des Mathematik-Treibens in den beiden Kontexten, in unterschiedlicher Weise statt. Außerdem gibt es auch Inhalte der Schulmathematik, die im Lehramtsstudium meist gar nicht behandelt werden. T. Bauer, Gromes und Partheil (2016) beschreiben dieses Phänomen am Beispiel des Krümmungsbegriffs.⁴

Neben den genannten Unterschieden gibt es aber auch die oben bereits erwähnte legitimierende Abhängigkeit, in der das Mathematik-Treiben an der Schule vom Mathematik-Treiben an der Hochschulmathematik steht: Ein wichtiges Designprinzip bei der Konzeption von Schulcurricula stellt das Spiralprinzip dar (z. B. KMK, 2004, S. 9). Dahinter verbirgt sich das regelmäßige Wiederaufgreifen mathematischer Inhalte und Leitideen in unterschiedlichen Jahrgangsstufen, das den jeweiligen Entwicklungsstufen der Lernenden Rechnung trägt (Bruner, 1970, S. 61). Dabei stellen die auf der gedachten Spirale tieferliegenden Behandlungen eines Inhalts didaktische Reduktionen bzw. Elementarisierungen der höherliegenden Begegnungen mit diesem Inhalt dar. Dies ist unabhängig davon, ob der entsprechende mathematische Inhalt im Unterricht aus innermathematischer Perspektive oder eingebettet in einen Kontext auftaucht. Die Hochschulmathematik kennzeichnet gewissermaßen fachliche Fernpunkte von Spiralcurricula schulmathematischer Inhalte. Diese Fernpunkte – also die rigorose und vollständige Klärung eines mathematischen Gegenstandes auf fachwissenschaftlicher Ebene – werden zwar im Mathematikunterricht nicht erreicht, dienen aber als Referenzpunkte für die Beurteilung der *intellektuellen Ehrlichkeit*⁵ didaktisch reduzierter Betrachtungen. In diesem Sinne hat die Hochschulmathematik eine legitimierende Funktion für Mathematikunterricht, zumindest, wenn man bedingungslose intellektuelle Ehrlichkeit als notwendiges Charakteristikum von Mathematikunterricht akzeptiert.

Ein mathematikdidaktischer Ansatz, fachmathematische Inhalte und Theoriestücke in ihrer Funktion als Hintergrund schulmathematischer Lehr- und Lernaktivitäten zu beschreiben, ist das Konzept der (mathematischen) *Hintergrundtheorien*. Vollrath (1979) definiert dieses folgendermaßen:

Im Folgenden soll also unter der mathematischen Hintergrundtheorie einer Unterrichtssequenz oder eines Lehrganges der dieser Unterrichtssequenz oder diesem Lehrgang zugrundeliegende mathematische Gegenstandsbereich mit seinen Begriffen, Aussagen, inneren Zusammenhängen, Methoden und Darstellungsmöglichkeiten verstanden werden.

(Vollrath, 1979, S. 82)

Diese Definition ist allgemeiner als die Nutzung des Begriffs beispielsweise im Lehrbuch von Holland (1974, S. 7) oder bei Becker (1980, S. 19). In beiden Büchern bezeichnet der Begriff einen speziellen (axiomatischen) Aufbau des fachmathematischen Hintergrunds einer Unterrichtssequenz oder eines Lehrgangs. Vollrath (1979, 79 ff.) argumentiert, dass diese Sichtweise, nach der einer Unterrichtssequenz *eine* Hintergrundtheorie zugrunde liegt, die Gefahr birgt, dass didaktische Entscheidungen zu sehr auf Basis der Fachsystematik dieser Hintergrundtheorie und zu Lasten anderer pädagogischer Überlegungen getroffen werden.

⁴Ohne Literaturbeleg würde ich aus meiner Erfahrung heraus auch noch andere Bereiche, wie *deskriptive Statistik*, *Platonische Körper* oder eben die für diese Arbeit relevante *axiomatische Geometrie* zu den schulmathematischen Themen zählen, die im Lehramtsstudium oft nicht behandelt werden.

⁵Der Begriff der *intellektuellen Ehrlichkeit* wurde von Bruner (1970, S. 44) geprägt. Er gibt keine genaue Definition an, aber seine weiteren Ausführungen stützen folgende Interpretation: Er beschreibt damit eine „wahrheitsgemäß[e]“ und entwicklungsangemessene Darstellung einer Idee, die sich „später umso leichter verstärken und präzisieren [lässt]“ (ebd.). Ich verstehe genau in diesem Sinne unter intellektueller Ehrlichkeit, dass Ideen/Begriffe/Inhalte vereinfacht, aber nicht verfälscht und mit dem Potenzial zur späteren Präzisierung behandelt werden. In dieser Weise wird „intellektuelle Ehrlichkeit“ auch von unter anderem Kirsch (1976), Biehler und Kempen (2016) und Weigand (2013) verwendet.

Die oben zitierte Begriffsdefinition betont statt einer (für eine Unterrichtssequenz besonders geeigneten) Axiomatisierung durch die explizite Nennung der „Darstellungsmöglichkeiten“ gerade die Vielfältigkeit der möglichen fachsystematischen Behandlungen eines Gegenstandsbereiches. Insbesondere kann diese Vielfalt selbst wiederum Anlass und Gegenstand didaktischer Überlegungen sein (Vollrath, 1979, S. 82)⁶.

Vollrath (1979, S. 82) beschreibt die Hintergrundtheorie als einem Lehrgang und einer Unterrichtssequenz „zugrundeliegend“. Eine Hintergrundtheorie ist in dieser Sichtweise etwas, das eine Lerngelegenheit *hat* und deren Konzeption und Bewertung dient.

Mit dem Ende (und Scheitern) der *neuen Mathematik* verschwindet auch der Begriff der mathematischen Hintergrundtheorie aus den mathematikdidaktischen Publikationen. Als Leitlinien für die Konzeption und Durchführung von Mathematikunterricht löste die Idee des Mathematikunterrichts als Beitrag zur Allgemeinbildung die Vorstellung einer didaktisch reduzierten Fachsystematik ab. Statt didaktisch reduzierte fachmathematische Hintergrundtheorien zu vermitteln, soll der Mathematikunterricht dazu führen, dass die SuS ein angemessenes *Bild von Mathematik* aufbauen, dessen Dimensionen Winter (1995) in den bereits erwähnten Grunderfahrungen (S. 11) beschreibt (vgl. dazu auch Girnat (2017, S. 144 f.) und Biehler (2019, S. 150 ff.)). Dieser Prozess führte dann mittelfristig zu den aktuellen kompetenzorientiert formulierten Bildungsstandards (KMK, 2004, 2012).⁷ Die drei Grunderfahrungen sind auch heute noch (in leicht veränderter Form) fester Bestandteil der Präambeln mathematischer Schulcurricula.

Diese Umorientierung von Mathematikunterricht und Mathematikdidaktik schmälert allerdings in keiner Weise das oben beschriebene Legitimationsverhältnis von Mathematikunterricht und Hochschulmathematik. Ganz im Gegenteil macht die oben beschriebene Loslösung von einem rein fachsystematisch aufgebauten Mathematikunterricht ein stetes Hinterfragen der intellektuellen Ehrlichkeit eher relevanter. Darum ist die Idee mathematischer Hintergrundtheorien im Sinne von Vollrath weiterhin aktuell. Allerdings spielt die professionell handelnde Lehrperson in dieser Sichtweise selbst keine primäre Rolle und es wurde noch nicht geklärt, ob und wie die Hintergrundtheorie der Lehrperson als aktives Wissen zur Verfügung stehen muss. Genau auf diese Fragen werde ich im nächsten Abschnitt eingehen, und herausarbeiten, inwiefern fachmathematisches Wissen und Können (im Sinne des Mathematik-Treibens an der Hochschule) nicht nur Legitimation von Mathematikunterricht sondern auch Ressource für professionelles Lehrerhandeln ist.

2.3 Fachmathematisches Wissen und Können als Grundlage für professionelles Lehrerhandeln

In diesem Abschnitt möchte ich die in Abschnitt 2.1 grundsätzlich beschriebene Relevanz fachwissenschaftlichen Wissens und Könnens als notwendige Disposition professionellen Lehrerhandelns beschreiben. Dazu werde ich verschiedene Funktionen dieser Disposition aus Literatur und Unterrichtspraxis unter drei Oberkategorien zusammenfassen: Mathematisches Wissen und Können als

⁶Mit dieser Sichtweise löst sich Vollrath von den Idealvorstellungen der neuen Mathematik und der damit verbundenen Suche nach den optimalen Axiomensystemen für schulmathematische Belange, deren Aufbau und Struktur das normative Leitbild für einzelne Themenbereiche des Mathematikunterrichts seien sollen.

⁷Ich gehe an dieser Stelle nicht weiter auf die Details der Diskussionen über Zielsetzungen (und Umfang) des Mathematikunterrichts in den letzten Jahrzehnten ein, empfehle aber zur weiteren Vertiefung die instruktive Übersicht von Biehler (2019). Speziell bezogen auf die Entwicklung von Geometriecurricula im Wandel der Zeit im Allgemeinen und den Einflüssen der neuen Mathematik im Speziellen verweise ich auf die umfassenden und lesenswerten Ausführungen von Girnat (2017, 231 ff.).

Ressource und legitimierender Hintergrund (Abschnitt 2.3.1), als *epistemologischer Kompass* (Abschnitt 2.3.2) und als *fachliches Panorama* (Abschnitt 2.3.3). Die Verortung fachwissenschaftlichen Wissens und Könnens in etablierten Topologien professionellen Wissens erfolgt anschließend in Abschnitt 2.4. Durch die Darstellung der Relevanz fachwissenschaftlichen Wissens und Könnens soll selbstverständlich nicht behauptet werden, dass dies die einzige relevante Disposition ist; es ist aber die im Hinblick auf die Konzeption von Fachvorlesungen (und damit auch auf das Thema dieser Arbeit) relevante Disposition.

2.3.1 Mathematisches Wissen und Können als Ressource und legitimierender Hintergrund für professionelles Lehrerhandeln

In Abschnitt 2.2 habe ich beschrieben, wie sich das Mathematik-Treiben im Mathematikunterricht vom Mathematik-Treiben im Hochschulstudium und in der wissenschaftlichen Mathematik unterscheidet. Dabei wurde insbesondere das legitimierende Abhängigkeitsverhältnis des Mathematikunterrichts von der Hochschulmathematik herausgearbeitet. Die beschriebene Verschiebung weg von didaktisch reduzierter Fachsystematik hin zu allgemeinbildendem Mathematikunterricht führt automatisch dazu, dass Lehrkräfte selbst mehr Verantwortung für die intellektuelle Ehrlichkeit sowohl der gestalteten Lernprozesse als auch der Bewältigung der in Abschnitt 2.1 geschilderten Handlungsanforderungen tragen. Um dieser Verantwortung gerecht zu werden, bedarf es fachmathematischen Wissens und Könnens. Dieses nimmt dann die Rolle eines *legitimierenden Hintergrundes* für das eigene professionelle Lehrerhandeln ein.

Die in Abschnitt 2.1 auf Seite 9 beschriebenen Handlungsanforderungen zeigen allerdings, dass es falsch wäre, die Rolle des fachmathematischen Wissens und Könnens auf diese legitimierende Funktion zu beschränken. Vielmehr unterstützt ein fundierter mathematischer Hintergrund Lehrkräfte bei der Bewältigung professioneller Anforderungen und dient damit als wichtige *Ressource*. Ich möchte dies exemplarisch an zwei Fallbeispielen verdeutlichen.

Das erste Beispiel stammt von Prediger (2013, S. 152) und handelt von einer Unterrichtssequenz zur Gleichheit von $0,\bar{9}$ und 1 :

Beispiel. (Quelle: Prediger (2013, S. 152)) Laura, eine junge Gymnasiallehrerin, lässt in ihrer Klasse 9 diskutieren, ob $0,\bar{9}$ wirklich gleich 1 ist. In der Vorbereitung hatte sie geplant, die Diskussion nicht durch vorschnellen Übergang zu Brüchen zu trivialisieren, sondern durch eine Diskussion um unendlich kleine Teilchen erste Erfahrungen zur Konvergenz (im Sinne der Non-Standard-Analysis) zu ermöglichen. Theo argumentiert jedoch unerwartet: „Wenn ich mir die Zahlen angucke: $0,9$, dann $0,99$, dann $0,999$, dann kommt ja immer wieder was dazu. Dann muss es ja sogar irgendwann mehr als 1 werden!“ In der weiteren Diskussion wischen die Klassenkameraden Theos interessantes Argument als abwegig vom Tisch. Laura holt es zurück ins Gespräch, indem sie einen Exkurs zum analogen Paradoxon von Achilles und der Schildkröte einschiebt. Nun entsteht eine spannende Diskussion, an deren Ende die Jugendlichen viele Bilder an die Tafel gezeichnet und zwei unterschiedliche Formen von Unendlich erfasst haben: „Unendlich oft kommt was dazu, aber eben nicht unendlich viel, sondern immer weniger“. Laura erkennt in dieser Unterscheidung die Erklärung für die Möglichkeit, dass unendliche Reihen wie die von Achilles und von $0,\bar{9}$ konvergieren können. Glücklich über die substantielle und intensive Beschäftigung mit Mathematik sagt Laura: „Seht ihr, und die Mathematiker haben lange gebraucht, bis sie sogenannte Reihen erfunden haben, um die Unterscheidung genauer zu beschreiben und zu Lösungen zu kommen. Darüber reden wir nächstes Jahr nochmal.“ Zurück zum Problem der $0,\bar{9}$, liefert Ben nun das für die Klasse entscheidende Argument zur Begründung der Konvergenz [...]: „Welche Zahl sollte da noch zwischen passen? Der Abstand wird ja immer kleiner.“

Unterrichtliches Handeln zum Thema $0, \bar{9} = 1$ ist ein Standard-Beispiel der Analysis-Didaktik (z. B. Danckwerts und Vogel, 2006, S. 27, Greefrath, Oldenburg, Siller, Ulm und Weigand, 2016, S. 108). Jedoch gibt es kein auswendig-lernbares Patentrezept zur Erklärung und zum Umgang mit Fehlvorstellungen. Unterschiedliche Lernendenäußerungen zu diesem Thema bedürfen passgenauer Analysen und Reaktionen. Laura nutzt im obigen Beispiel ihr fundiertes Wissen über Folgen, Reihen und deren Grenzwerte um „das mathematische Potenzial einer [...] Schüleräußerung zu identifizieren und zu substantiellen mathematischen Erfahrungen weiter zu entwickeln“ (Prediger, 2013, S. 152). Die Situation liefert ein Beispiel, bei dem fachmathematisches Wissen und Können als *Ressource* für die produktive Bewältigung der professionellen Handlungsanforderung *Äußerungen von Lernenden analysieren, bewerten und darauf lernförderlich reagieren* (Seite 9, (7)) genutzt wird.

Das zweite Beispiel stammt aus meiner eigenen Unterrichtsplanungspraxis:

Beispiel. Im Leistungskurs Mathematik soll der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung behandelt werden. Das für den Kurs eingeführte Schulbuch stellt ein Argument für nichtnegative stetige Funktionen bereit. In einer Fußnote wird darüber hinaus erwähnt, dass das Argument nur für $h > 0$ (Dabei ist h die Indexvariable der Grenzwertbildung.) erfolgt, aber für $h < 0$ völlig analog verlaufe (Bigalke & Köhler, 2015, S. 117). Dem gegenüber stand ein Alternativvorschlag für ein noch weiter elementarisierteres Argument aus einem anderem Schulbuch, dass nur für monotone stetige Funktionen funktioniert (Schmidt, Lergenmüller & Körner, 2015, S. 146). Es muss entschieden werden, welchen Beweis sich die Lernenden im Unterricht anhand eines Beweispuzzles selbst erarbeiten sollen.

Ich habe mich in der Situation dazu entschieden, das weniger allgemeingültige Argument für monoton steigende Funktionen zu nutzen. Dadurch spart man die Nutzung des Satzes vom Minimum und Maximum und erhält ein schlankeres Argument zur Abschätzung der Flächenstücke der Breite h . Dadurch soll stärker auf das „Hineinsehen“ des Differenzenquotienten in die Flächeninhaltsabschätzung fokussiert werden.

Die geschilderte Situation ist ein prototypisches Beispiel für die professionelle Handlungsanforderung *Zugänge [...] analysieren und bewerten* (Seite 9, (3)). Eine Entscheidung - sowohl für die eine als auch für die andere Variante - basierend rein auf dem Merkmal der Allgemeingültigkeit, wird der Komplexität der professionellen Handlungssituation nicht gerecht. Um die beiden Argumentationen zu beurteilen, bedarf es zunächst einer kritischen Prüfung der in beiden Varianten gemachten Einschränkungen (Nichtnegativität, $h > 0$, Äquidistanz der Zerlegung). Anschließend kann die Rolle der Monotonieforderung bewertet werden. Die fachmathematische Reichhaltigkeit der hier notwendigen Überlegungen werden in Biehler und Hoffmann (im Druck) im Detail dargestellt.

Wie im Beispiel beschrieben, habe ich mich in der Realsituation für den weniger allgemeingültigen Zugang entschieden. Hätte man den Stetigkeitsbegriff weiter ausschärfen und dessen Bedeutung betonen wollen, so wäre ein Behandlung des Satzes vom Minimum und Maximum und damit der anderen Variante eine ebenso nachvollziehbare Entscheidung gewesen. Die präzise fachliche Analyse gibt außerdem Aufschluss über die Denkschritte, die die Lernenden zu vollziehen haben, und welches Vorwissen jeweils notwendig ist. Darauf aufbauend können weitere mathematikdidaktische oder allgemein-pädagogische Argumente einbezogen werden. Auch in dieser Situation stellt das mathematische Fachwissen eine zentrale *Ressource* zur Bewältigung mathematikhaltiger professioneller Handlungsanforderungen dar.

Die Vielfalt der für die beiden vorgestellten Beispiele relevanten mathematischen Gegenstände unterstreicht darüber hinaus die Bedeutung einer fundierten und zusammenhängenden Analysis-Ausbildung (Folgen, Grenzwerte, Konvergenz, Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Riemann-Integrierbarkeit,

Kompaktheit) und einer darauf aufbauenden und darauf abgestimmten fachdidaktischen Vertiefung.⁸

Die beiden vorgestellten Beispiele haben ganz spezifische Einzelsituationen beschrieben. Fundiertes mathematisches Fachwissen ist ebenfalls bezogen auf die Gestaltung von und das professionelle Handeln in spiralförmigen Lernprozessen eine wesentliche Ressource. Darüber hinaus zeigt sich im folgenden Beispiel die Notwendigkeit von vernetztem Wissen im Gegensatz zu singulären „höheren Standpunkten“ zu einzelnen schulmathematischen Inhalten.

Beispiel. Je nachdem, in welchem Teilgebiet des Mathematikunterrichts man unterwegs ist, ist der Begriff *Gerade* unterschiedlich belegt: Es können damit zum Beispiel ein Funktionsgraph, ein eindimensionaler (affiner) Untervektorraum oder eine Punktmenge, auf der kürzeste Wege verlaufen, gemeint sein. Die Mengenlehre als Grundkonzept zeitgemäßer Mathematik ermöglicht es, die Objekte aus den unterschiedlichen mathematischen Teilgebieten miteinander zu vergleichen, und umgekehrt, eine Punktmenge mit unterschiedlichen Strukturen zu versehen und so aus verschiedenen fachlichen Perspektiven zu betrachten.

Nur fundiertes mathematisches Wissen und Können erlauben es einer Lehrkraft, die unterschiedlichen Wortbedeutungen des Begriffs „Gerade“ in Elementargeometrie, Funktionenlehre und linearer Algebra zueinander in Beziehung zu setzen und auf Fragen und Probleme von Lernenden mit dieser Mehrfachbelegung des Begriffs lernförderlich zu reagieren.

Ich möchte diesen Punkt an folgender professionellen Handlungssituation verdeutlichen: Bei der Einführung der Parameterdarstellung $g : \vec{x} = t\vec{v} + \vec{a}$, $t \in \mathbb{R}$ von Geraden im \mathbb{R}^2 in der Sekundarstufe II erinnert sich Lukas an Geraden im Kontext linearer Funktionen und fragt: „Was davon ist denn jetzt die Steigung und was der y-Achsenabschnitt?“. Eine lernförderliche Reaktion, die an Lukas' Vorwissen zu linearen Funktionen anknüpft und mit dem aktuellen Lerngegenstand verknüpft bedarf zunächst einer vorbereitenden lehrerseitigen fachlichen Klärung. Diese ist im vorliegenden Beispiel sehr gehaltvoll, wie ich im Folgenden skizziere:

Im Kontext linearer Funktionen (aus fachmathematischer Sicht eigentlich affin-lineare Funktionen) bezeichnet der Begriff *Gerade* Funktionsgraphen von Funktionen der Bauart $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = mx + n$ mit $m, n \in \mathbb{D}$. Die Gerade (Funktionsgraph von f) ist dann durch folgende Punktmenge in Abhängigkeit von $m, n \in \mathbb{D}$ gegeben:

$$G_1(m, n) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = mx + n\}.$$

In der vektoriellen Darstellung $g : \vec{x} = t\vec{v} + \vec{a}$, $t \in \mathbb{R}$ ist die komplette Gerade durch folgende Punktmenge in Abhängigkeit von $\vec{v}, \vec{a} \in \mathbb{R}^2$, $\vec{v} \neq \mathbf{0}$ gegeben:

$$G_2(\vec{v}, \vec{a}) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \cdot \vec{v} + \vec{a}, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Die Zusammenhänge zwischen diesen beiden Geraden-Begriffen sind nicht trivial: Zum einen gibt es nicht zu jeder vektoriellen Geraden $G_2(\vec{v}, \vec{a})$ Zahlen $m, n \in \mathbb{R}$ mit $G_2(\vec{v}, \vec{a}) = G_1(m, n)$. Falls solche Zahlen existieren, sind sie eindeutig durch \vec{v} und \vec{a} bestimmt (*). Umgekehrt lassen sich andererseits zu allen $m, n \in \mathbb{R}$ jeweils sogar unendlich viele $\vec{v}, \vec{a} \in \mathbb{R}^2$ mit $G_1(m, n) = G_2(\vec{v}, \vec{a})$ finden, die aber alle dieselbe vektorielle Gerade beschreiben (**).

Für die erste Aussage (*) überlegt man sich zuerst, dass man die Steigung m aus den Koordinaten des Richtigungsvektors $\vec{v} = (v_1, v_2)^T$ über $m = \frac{v_2}{v_1}$ erhält, allerdings nur, falls $v_1 \neq 0$ ist. Ein einfaches Gleichungssystem liefert dann $n = -a_1 \cdot m + a_2$, wobei $\vec{a} = (a_1, a_2)^T$ ist.

Für die zweite Aussage (**) überlegt man sich zunächst, dass durch

$$(\vec{v}, \vec{a}) \cong (\vec{w}, \vec{b}) \quad :\Leftrightarrow \quad G_2(\vec{v}, \vec{a}) = G_2(\vec{w}, \vec{b})$$

eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^2$ definiert ist. Die Äquivalenzklassen beschreiben alle Kombinationen aus Stütz- und Richtungsvektoren, die zur selben Gerade gehören. Sind nun $m, n \in \mathbb{R}$, findet

⁸Schon die bloße Tatsache, dass detaillierte Beispiele, wie das von Prediger (2013), als Lerngegenstand in der universitären Lehramtsausbildung genutzt werden, kann als Indiz dafür genommen werden, dass eine so gearbete professionsorientierte Nutzung der Inhalte aus den fachmathematischen Grundvorlesungen bei den meisten Lehramtsstudierenden kein Automatismus ist. Ich werde in Kapitel 3 im Kontext der *doppelten Diskontinuität* näher darauf eingehen.

man mit $\vec{v} = (1, m)^T$ und $(0, n)^T$ immer einen Repräsentanten der Äquivalenzklasse aller vektoriellen Darstellungen der Gerade $G_1(m, n)$.

Wie exakt auf die Frage von Lukas reagiert werden soll (dies beinhaltet unter anderem Aspekte wie Lehrererklärung vs. SuS-Arbeitsauftrag und den angestrebten Grad der Allgemeinheit) hängt von situationsspezifischen Details ab, die aus didaktischer und pädagogischer Perspektive analysiert werden müssen. Mögliche fachliche Schwerpunkte – die sich aus der obigen fachlichen Analyse ergeben – für lernförderliche Reaktionen auf Lukas' Frage sind:

- Es handelt sich um grundsätzlich verschiedene Kontexte, in denen es um dasselbe geometrische Objekt geht. Ein einfaches Ablesen von Steigung und y-Achsenabschnitt ist in der vektoriellen Darstellung nicht möglich.
- Wie können, falls möglich, Steigung und y-Achsenabschnitt aus der vektoriellen Darstellung bestimmt werden?
- Wie können die vektoriellen Geraden charakterisiert werden, die nicht als Funktionsgraph beschrieben werden können?
- Problemumkehr: Welche vektoriellen Darstellungen gehören zu dem Funktionsgraphen einer gegebenen linearen Funktion? Sind diese Darstellungen eindeutig?
- Verallgemeinerung: Gibt es für Geraden im \mathbb{R}^3 ähnliche Konzepte für Achsenabschnitte und/oder Steigungen?

Zu den fachwissenschaftlichen Dispositionen, die als Ressource zur Ausarbeitung dieser Punkte dienen, gehören neben Wissen über (affin-)lineare Funktionen und Geraden in der analytischen Geometrie auch generelle Kompetenzen im Umgang mit Mengen (insb. Mengengleichheit) und zur Idee von Äquivalenzrelationen.

Die Nutzung der Mengentheorie um mathematische Objekte aus unterschiedlichen Teilbereichen zu vergleichen, ermöglicht es Lehrkräften, eine ganzheitliche Perspektive auf Schulmathematik einzunehmen und so zu identifizieren, wie sich eine Leitidee quer durch das Curriculum zieht. Gleiches gilt für das nächste Beispiel.

Beispiel. Die Bezüge zwischen den schulischen Behandlungen von Flächeninhalten und Volumina, von Wahrscheinlichkeiten und von Integralen liefert die Maßtheorie und fundiert die diesen Themenbereichen gemeinsame Leitidee *Messen*.

So ist zum Beispiel die Scherungsinvarianz von Flächeninhalten zweidimensionaler Figuren eine Anwendung des Cavalieri-Prinzips (vgl. Hoffmann (2018, S. 61 ff., insb. S. 66 (Schnittstellenaufgabe 12))).

In diesem Abschnitt habe ich anhand von ausgewählten Beispielen aufgezeigt, wie mathematisches Wissen und Können als *Ressource* und *legitimierender Hintergrund* (insb. zur Sicherstellung intellektueller Aufrichtigkeit) eine wichtige Disposition für die Bewältigung professioneller Handlungssituationen darstellen. Weitere Beispiele findet man unter anderem bei Prediger (2013) und bei Eberl, Krauss, Mossburger, Rauch und Weber (2021).

2.3.2 Mathematisches Wissen und Können als epistemologischer Kompass für professionelles Lehrerhandeln

In den Literaturbeiträgen zur Bedeutung der fachwissenschaftlichen Ausbildung angehender Mathematiklehrkräfte findet man professionalisierungsrelevante Funktionen des mathematischen Wissens und Könnens, die deutlich über die Legitimations- und Ressourcen-Funktion aus Abschnitt 2.3.1 hinausgehen. In diesem Abschnitt stelle ich drei unterschiedliche Perspektiven dazu vor: *epistemologische Bewusstheit* von Prediger und Hefendehl-Hebeker (2016), *mathematical sophistication* nach Seaman und Szydlik (2007) und T. Bauer (2017) und die *fundamental principles of mathematics* von Wu

(2011). Auch wenn die vorgestellten Beispiele verschiedene Schwerpunktsetzungen haben, kann als gemeinsames Leitmotiv das Ziel identifiziert werden, Lehrkräfte dazu zu befähigen, professionelle Handlungssituationen aus der Werthaltung eines Mitgliedes der mathematischen Gemeinschaft heraus zu interpretieren, zu beurteilen und zu bewältigen. Ich möchte diese Funktion mathematischen Wissens und Könnens für professionelles Lehrerhandeln zusammenfassend als *epistemologischer Kompass* bezeichnen.

Der Begriff der *epistemologischen Bewusstheit* von Prediger und Hefendehl-Hebeker (2016) konzeptualisiert eine Möglichkeit, mathematische Dispositionen im Sinne der Funktion des epistemologischen Kompasses zu nutzen. Zur Definition wird zuerst der Begriff *epistemologische Aspekte* eingeführt. Damit sind nach Prediger und Hefendehl-Hebeker (2016, S. 259) „Fragestellungen und Wissens Elemente [gemeint], die bezogen sind auf die Natur mathematischen Wissens und Spezifika mathematischer Praktiken oder auf Prozesse der Wissensbildung“. *Epistemologischen Bewusstheit* wird von den Autorinnen darauf aufbauend definiert,

[...] als die Disposition, epistemologische Aspekte eines Themas zu *kennen* und *reflektieren* zu können, ihr Auftauchen in bestimmten didaktischen Situationen *wahrnehmen* und dazu geeignetes Hintergrundwissen zum Fach und seinen epistemologischen Aspekten *aktivieren* zu können.

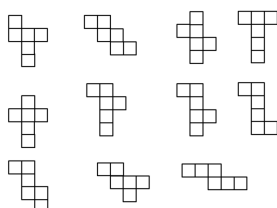
(Prediger & Hefendehl-Hebeker, 2016, S. 242)

Die folgenden zwei Handlungssituationen aus dem entsprechenden Artikel verdeutlichen die Definition.

Beispiel. (Quelle: Prediger und Hefendehl-Hebeker (2016, S. 248)) In einer Aufgabe gibt es eine gegebene Menge an Münzen mit gleichen und unterschiedlichen Werten. Es werden zwei Münzen gezogen und die Lernenden sollen die Frage beantworten, wie viel Geld man dann haben kann. Die Lernenden geben alle möglichen Kombinationen und deren Wert an und die Lehrerin möchte eine Begründung dafür haben, dass es nicht noch mehr Kombinationen gibt.

Mit der Forderung einer Begründung der Vollständigkeit der gefundenen Lösung zielt die Lehrerin implizit auf eine „fachspezifische Praktik der Vergewisserung“ ab, die nicht im Horizont der Lernenden liegt. Das Wissen über adäquate und inadäquate Vergewisserungspraktiken ist zur lernförderlichen Bewältigung dieser Situation erforderlich und ergänzt die notwendigen fachinhaltlichen Ressourcen (Kombinatorik und passende Darstellungen). Prediger und Hefendehl-Hebeker (2016, S. 248) werten es als fehlende epistemologische Bewusstheit, dass die Lehrerin die Vergewisserungspraxis nicht expliziert und so „in den gedanklichen Horizont der Kinder [rückt]“.

Beispiel. (Quelle: Prediger und Hefendehl-Hebeker (2016, S. 249)) Eine Praktikantin (Lara) stellt in der fünften Klasse eine Aufgabe zu Würfelnetzen.

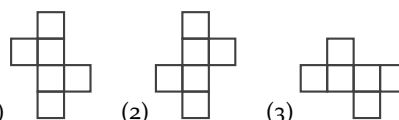


Die Klasse hat den selbstdifferenzierenden Arbeitsauftrag, alle Würfelnetze zu finden. Nachdem in der abschließenden Sammelphase 11 Würfelnetze als Pappmodelle auf dem Overheadprojektor liegen (siehe linke Abbildung), kommt Mia nach vorne und beginnt eine Diskussion, welche Netze untereinander als gleich zählen:

Mia: Das sind aber noch nicht alle, was ist mit dem hier? Und dem? [nimmt das Würfelnetz (1) und klappt und dreht es, so dass (2) und (3) entstehen]

Merve: Der [zeigt auf (2)] ist doch gleich dem [zeigt auf (1)].

Ozan: Das erste [zeigt auf (2)] ist anders [als (1)], das zweite (1) [zeigt auf (3)] ist quasi gleich.



Lara antwortet: Toll, dass ihr nochmal nach weiteren Netzen sucht. Aber die, die nur gedreht und gespiegelt sind, darf man nicht mitzählen.

Relevant im Sinne epistemologischer Bewusstheit ist an diesem Beispiel Laras „darf man nicht“ und der logische Status dieses Verbots. Das Mitzählen gedrehter und gespiegelter Netze würde aus logischer Sicht nicht zu Widersprüchen führen. Damit sind die Vorschläge von Mia und Merve keineswegs falsch, sondern entsprechen lediglich nicht der Konvention des auf dem Kongruenzbegriff beruhenden Gleichheitsverständnis, dass Lara hier implizit zugrunde legt. Die Konvention ist aber offenbar mit der Klasse nicht abgesprochen und wäre, wenn man z. B. die Netze auf einer Seite einfärben würde, auch nicht zwingend sinnvoll. Laras Mangel an epistemologischer Bewusstheit zeigt sich in der ungenutzten Chance, in altersangemessener Weise auf den Status und die Funktion von Definitionen (hier davon, was als gleich bezeichnet werden soll) in mathematischen Theorien und die Abhängigkeit der Gültigkeit mathematischer Aussagen von Definitionen einzugehen (Prediger & Hefendehl-Hebeker, 2016, S. 250).

Unter Verwendung der Methode der Anforderungsanalyse in didaktischen Handlungssituationen (Prediger & Hefendehl-Hebeker, 2016, S 247 ff.) konnten die Autorinnen durch beispielhafte Analysen von Situationen, wie in den obigen beiden Beispielen, eine erste (potenziell unvollständige) Auswahl epistemologischer Aspekte herausarbeiten (Prediger & Hefendehl-Hebeker, 2016, S 258 f.). Leitend war dabei die folgende (ebenfalls potenziell unvollständige) Auflistung epistemologischer Anforderungen in den wichtigen professionellen Handlungssituationen (siehe Seite 9) *Analysieren und Auswerten von Lernendenäußerungen* und *Moderieren produktiver Diskussionen*.

Bezogen auf die Natur mathematischen Wissens und Spezifika mathematischer Praktiken:

- mathematisches Potential in Äußerungen der Lernenden identifizieren,
- Spezifika mathematischer Praktiken vermitteln,
- logischen Status mathematischer Wissens Elemente klären,
- Wissens Elemente zueinander in Beziehung setzen (lokal ordnen, Phänomene/Zusammenhänge in anderen Kontexten wieder entdecken),
- verschiedene Niveaus des mathematischen Diskurses adressieren.

Bezogen auf Prozesse der Wissensbildung:

- Zugänge eröffnen,
- Perspektiven der Lernenden in Richtung der mathematischen Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren weiterentwickeln,
- langfristige Lernprozesse im Blick behalten, dabei Stufen der Wissensbildung identifizieren, arrangieren und die nächste Stufe forcieren.

(Prediger & Hefendehl-Hebeker, 2016, S 250 f.)

Ein zur epistemologischen Bewusstheit ähnliches Konzept findet sich auch in der englischsprachigen Literatur. Seaman und Szydlik (2007, S. 177) machen *mathematical sophistication* als wichtige

Eigenschaft von Lehrerprofessionalität aus. T. Bauer (2017) beschreibt das Erreichen von *mathematical sophistication* als Ergebnis erfolgreicher Enkulturation von Lehramtsstudierenden in die mathematische Fachgemeinschaft. Er fasst die Auflistung von Seaman und Szydlik (2007, S. 170) zu folgenden Kernpunkten zusammen:

- *Was Mathematiker zu erreichen suchen:* Sie versuchen, Regelmäßigkeiten und Beziehungen zwischen mathematischen Objekten zu verstehen und Analogien zwischen Sätzen, Beweisen, Theorien zu finden.
- *Wie sie mit mathematischen Objekten umgehen:* Sie schaffen mentale Modelle, symbolische Darstellungen, sowie Beispiele und Gegenbeispiele für sie. Sie stellen Vermutungen über sie auf und testen diese.
- *Wie sie sich Gewissheit verschaffen:* Sie schätzen präzise Sprache und die feinen Unterscheidungen, die sie ermöglicht. Sie nutzen präzise Definitionen, um Bedeutung zu schaffen, und verwenden logische Argumente und Gegenbeispiele, um zu überzeugen.

Auch Wu (2011) stellt fest, dass sich erfolgreiche Mathematik Lehrkräfte epistemologischer Grundlagen der Wissenschaft *Mathematik* bewusst sein müssen. In diesem Kontext formuliert er fünf fundamentaler Prinzipien der Mathematik (original: fundamental principles of mathematics):

- (1) Every concept is precisely defined, and definitions furnish the basis for logical deductions.
- (2) Mathematical statements are precise. At any moment, it is clear what is known and what is not known.
- (3) Every assertion can be backed by logical reasoning.
- (4) Mathematics is coherent; it is a tapestry in which all the concepts and skills are logically interwoven to form a single piece.
- (5) Mathematics is goal-oriented, and every concept or skill in the standard curriculum is there for a purpose.

Wu (2011, S 379 f.)

Ich habe oben (S. 18) die Funktion mathematischen Wissens und Könnens als epistemologischer Kompass dadurch beschrieben, dass Lehrkräfte professionelle Handlungssituationen aus dem Selbstverständnis und der Werthaltung eines Mitglieds der mathematischen Gemeinschaft heraus interpretieren, beurteilen und bewältigen können. Die drei vorgestellten Theoriebeiträge (Prediger & Hefendehl-Hebeker, 2016; T. Bauer, 2017; Wu, 2011) liefern sich ergänzende Ausschärfungen dieser Funktion und haben unterschiedliche Schwerpunkte: Wu (2011) fokussiert mit seinen *fundamental principles of mathematics* die Mathematik aus einer produktorientierten Perspektive. Die Zusammenfassung des Konzepts der *mathematical sophistication* (Seaman & Szydlik, 2007) von T. Bauer (2017) stellt den Mathematiker als Mathematik-treibende Person und damit eine prozessorientierte Sichtweise auf Mathematik in den Vordergrund. Prediger und Hefendehl-Hebeker (2016) bauen ihren Ansatz professionsspezifischer auf und machen das *epistemologisch bewusste* Agieren in professionellen Handlungssituationen zum Ausgangspunkt ihrer Überlegungen.

2.3.3 Mathematisches Wissen und Können als fachliches Panorama

Eine dritte Funktion, die fachmathematisches Wissen und Können haben kann, betrifft professionelle Handlungsanforderungen, in denen der epistemologische Kompass (Abschnitt 2.3.2) zwar eine

Richtung weist, dort aber mathematische Anforderungen auftauchen, für deren vollständige Bewältigungen die verfügbaren mathematischen Ressourcen (Abschnitt 2.3.1) einer Lehrperson nicht ausreichend sind. Im Angesicht einer begrenzten Studiendauer ist das nicht vermeidbar.

Beispiel. An der Universität Paderborn gibt es keine verpflichtende Algebra-Vorlesung im Lehramtsstudium. In professionellen Handlungssituationen zur Konstruierbarkeit mit Zirkel und Lineal (z. B. bezogen auf die Nichtkonstruierbarkeit der Winkeldrittung) fehlen Lehrkräften dann vermutlich die fachlichen Ressourcen zur vollständigen fachlichen Klärung. Ziel ist es aber, dass Lehrkräften zumindest klar ist, auf welche Art von Mathematik typische Fragen in diesem Themenbereich führen.

Beispiel. Angeregt durch ein Youtube-Video, spricht ein SuS im Unterricht die *Millennium-Probleme* an. Auch wenn bei vielen der Probleme schon eine präzise mathematische Einordnung der Problemformulierung über die erwartbaren fachinhaltlichen Kompetenzen von Mathematiklehrkräften hinaus geht, kann auch fachliches Überblickswissen hier lernförderliche Reaktionen ermöglichen: Wurde beispielsweise der Satz von Pythagoras bereits im Unterricht behandelt, kann über das – auch für SuS fassbare – Problem der pythagoräischen Tripel ein Zugang zum *Satz von Fermat* ermöglicht werden. Gerade bei SuS der Oberstufe wäre ggf. auch eine inhaltlich anschauliche Vorstellung der *Poincaré-Vermutung* nicht überfordernd. Beides, und analog auch ein Exkurs zu einem der anderen Probleme, erfordert aber ein breites mathematisches Überblickswissen der Lehrkraft.

In beiden Beispielen wird herausgearbeitet, dass auch mathematisches Überblickswissen funktional in professionellen Handlungssituationen sein kann. Ich bezeichne diese Funktion des fachlichen Hintergrundes als *fachliches Panorama*. Bei der Bezeichnung orientiere ich mich an dem Titel von Loos, Sinn und Ziegler (2022), *Panorama der Mathematik*. Das Buch entstand ausweislich des Klappentextes⁹ einer Vorlesung für Lehramtsstudierende, die sich mit der Frage „Was ist Mathematik“ beschäftigt und dabei ein „buntes und vielfältiges Panorama aufzeichnet“. Zu diesem Panorama gehören (wieder zusammengefasst aus dem Klappentext) neben Präkonzepten zu komplexen mathematischen Begriffen und Theorien unter anderem auch mathematikgeschichtliche Hintergründe, philosophische Bezüge, Wissen über relevante wissenschaftliche Teilgebiete und deren Zusammenhänge und Kenntnisse über die Nutzung von Mathematik in verschiedenen Anwendungsgebieten. Genau in diesem Sinne möchte ich auch die in diesem Abschnitt geschilderte Funktion mathematischen Wissens und Könnens verstehen.

Auch wenn die oben genannten Beispiele eine Idee davon geben, wie ein *fachliches Panorama* funktional für die Bewältigung mathematikhaltiger professioneller Handlungsanforderungen sein kann, ist diese Funktion des mathematischen Wissens und Könnens aus theoretischer Perspektive am schwersten zu präzisieren. Dies liegt neben der inhaltlichen Breite und Nicht-Abgeschlossenheit vor allem auch an der quasi nicht existenten Lage fachdidaktischer Beiträge, die auf die Rolle eines solchen Überblickswissens für professionelles Lehrerhandeln eingehen. Dennoch zeigt die Existenz entsprechender Vorlesungen und Buchpublikationen eine von den an der Lehramtsausbildung beteiligten Akteuren, zumindest eine subjektiv wahrgenommene Relevanz.

Ein theoretisch ausgearbeitetes Konzept, das dem fachlichen Panorama zugeordnet werden kann, ist das mathematische Horizontwissen (*horizon content knowledge*) von Ball und Bass (2009):

⁹Online verfügbar unter <https://www.springer.com/de/book/9783662548721>. Aufgerufen am 9. August 2021, 10:00.

We define horizon content knowledge as an awareness – more as an experienced and appreciative tourist than as a tour guide – of the large mathematical landscape in which the present experience and instruction is situated.

(Ball & Bass, 2009)

Ball und Bass (2009) nennen verschiedene professionelle Verantwortlichkeiten, die durch ein ausgebildetes horizon content knowledge bedient werden können:

- Urteile über mathematische Relevanz und Wichtigkeit fällen
- mathematisch Bedeutsames in Äußerungen von Lernenden identifizieren
- Hervorheben und Unterstreichen (mathematischer) Kernpunkte
- Antizipieren und Zusammenhänge herstellen
- Erkennen und Bewerten von mathematischem Potenzial
- Erkennen von mathematischen Fehlvorstellungen und nicht anschlussfähigen Vorstellungen

In der Auflistung gibt es deutliche Parallelen zu den anderen beiden Funktionen von mathematischem Wissen und Können (Abschnitt 2.3.1 und Abschnitt 2.3.2). Hier liegt der Fokus aber darauf, dass Lehrkräfte auch in Bereichen, in denen sie nicht über ein rigoroses mathematisches Fundament verfügen, diesen Verantwortlichkeiten gerecht werden sollen. Das *fachliche Panorama* schließt die von mir aus der Literatur herausgearbeiteten Liste von Rollen, die fachmathematische Dispositionen zur Unterstützung von professionellem Handeln einnehmen können.

2.4 Mathematisches Fachwissen als Teil von Lehrerkompetenz

Im vorangegangenen Abschnitt habe ich drei Funktionen fachmathematischen Wissens und Könnens für professionelles Lehrerhandeln herausgearbeitet. Eine stetige Diskussion in Fachdidaktik und Bildungsforschung behandelt die Frage, wie fachbezogenes professionelles Wissen von Lehrkräften (insbesondere von Mathematiklehrkräften) strukturiert und beschrieben werden kann. In diesem Abschnitt stelle ich wichtige theoretische Beiträge zu diesem Thema vor.¹⁰

In der Mathematikdidaktik kommt der Konzeptualisierung des Professionswissens von Mathematiklehrkräften eine besondere Bedeutung zu. Das ist vielleicht dadurch zu erklären, dass direkte Verknüpfungen zu den universitären Lehrveranstaltungen im Lehramtsstudium (Fach, Fachdidaktik, Bildungswissenschaften) möglich sind. Im Sinne der professionellen Handlungskompetenz in der Kontinuums-Modellierung (S. 8) gehört das Professionswissen zu den kognitiven Dispositionen.

Eine sehr instruktive Übersicht über wichtige Projekte, die das Professionswissen von Mathematiklehrkräften konzeptualisieren, gibt Neubrand (2018). Er teilt fachspezifische Konzeptualisierung in solche auf, die auf der grundsätzlichen Unterscheidung von *content knowledge* (CK), *pedagogical content knowledge* (PCK) und *generic pedagogical knowledge* (PK) beruhen (z. B. Ball und Bass, 2002; Dreher

¹⁰Teile der in diesem Abschnitt dargestellten Zusammenstellung der Literatur zum professionellen Wissen von Mathematiklehrkräften habe ich bereits in Hoffmann (2018, S. 13 ff.) und Hoffmann (2021, S. 183 ff.) in gleicher oder ähnlicher Weise aufgeschrieben. Ich verzichte zu Gunsten der Lesbarkeit darauf, diese wörtlichen und sinngemäßen Zitate im Einzelnen zu kennzeichnen.

et al., 2018; Tatto et al., 2012; Kunter und Baumert, 2011) und solche, mit alternativen Zugängen zur Konzeptualisierung (wie Lindmeier, 2011; Rowland, 2020; Davis und Simmt, 2006).

CK, PCK und PK sind wichtige Teile eines Minimalkonzepts einer Wissensbasis (*knowledge base*) für Lehrkräfte. Diese Unterteilung geht auf Lee Shulman (1986, S.9 f.) zurück, der diese Wissensbasis als Grundlage für *pedagogical reasoning* (Shulman, 1987, S. 15) beschreibt. Er bezeichnet damit ein Modell zur Planung, Durchführung und Reflexion von Unterricht. Bemerkenswert ist, dass Shulmans Ansatz nicht aus einem rein wissenschaftlichen Anspruch erwachsen ist, sondern eng verknüpft mit einer bildungspolitischen Debatte zur Professionalisierung der Lehrerausbildung in den USA ist:

The claim that teaching deserves professional status, however, is based on a more fundamental premise: that the standards by which the education and performance of teachers must be judged can be raised and more clearly articulated. The advocates of professional reform base their arguments on the belief that there exists a “knowledge base for teaching” [...] The rhetoric regarding the knowledge has, however, rarely specifies the character of such knowledge. It does not say what teachers should know, do, understand, or profess that will render teaching more than a form of individual labor, let alone be considered among the learned professions.

In this paper, I present an argument regarding the content, character, and sources for a knowledge base of teaching that suggests an answer to the question of the intellectual, practical, and normative basis for the professionalization of teaching. [...]

(Shulman, 1987, S. 3 f.)

Die Unterteilung in CK, PCK und PK ist aus hochschuldidaktischer Perspektive besonders nützlich, da diese Dreiteilung der üblichen Einteilung des deutschen Lehramtsstudiums in Fachveranstaltungen, Fachdidaktikveranstaltungen und allgemein bildungswissenschaftlichen Veranstaltungen entspricht. Ich gehe im Folgenden auf vier breit rezipierte, charakteristische und einflussreiche Projekte (Neubrand, 2018, S. 4) ein, die Shulmans Einteilung aufgreifen und erweitern.

Das *Michigan Project* (z. B. Ball und Bass, 2002) hatte zum Ziel, eine „practise based theory of content knowledge“ für Grundschullehrkräfte zu entwickeln. Aufbauend auf den bereits am Anfang von Abschnitt 2.1 vorgestellten, empirisch gewonnenen mathematikhaltigen professionellen Handlungsanforderungen, wird ein Modell zur Beschreibung von mathematischem Unterrichtswissen *Mathematical Knowledge for Teaching* vorgeschlagen. Dieses ist explizit als Verfeinerung zu Shulmans Ansatz gedacht (Suzuka et al., 2009, S. 22).

Die Autoren unterteilen das *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT) in sechs Unterkategorien, die sich den beiden Wissensfacetten CK und PCK von Shulman zuordnen lassen (Abbildung 2.2).

Der aus Sicht der fachinhaltlichen Ausbildung von Mathematiklehrkräften wesentliche Punkt des Modells ist die Unterteilung von CK in *common content knowledge* (CCK) und *specialized content knowledge* (SCK). Unter CCK fällt mathematisches Fachwissen, dass im Gegensatz zum SCK nicht spezifisch für den Lehramtsberuf ist. Allerdings können Speer, King und Howell (2015) zeigen, dass diese Unterscheidung nicht einfach vom Grundschul- in den Gymnasialkontext übertragen werden kann. Dreher et al. (2018) greifen dieses Problem auf und schlagen das Konzept des *school-related content knowledge* (SRCK) vor. Dieses besteht aus folgenden drei Bereichen:

1. Wissen über die Struktur des Curriculums und der Schulmathematik sowie deren mathematische Begründung (insb. auch über zentrale Ideen und deren Auftauchen im Sinne eines Spiralcurriculums)

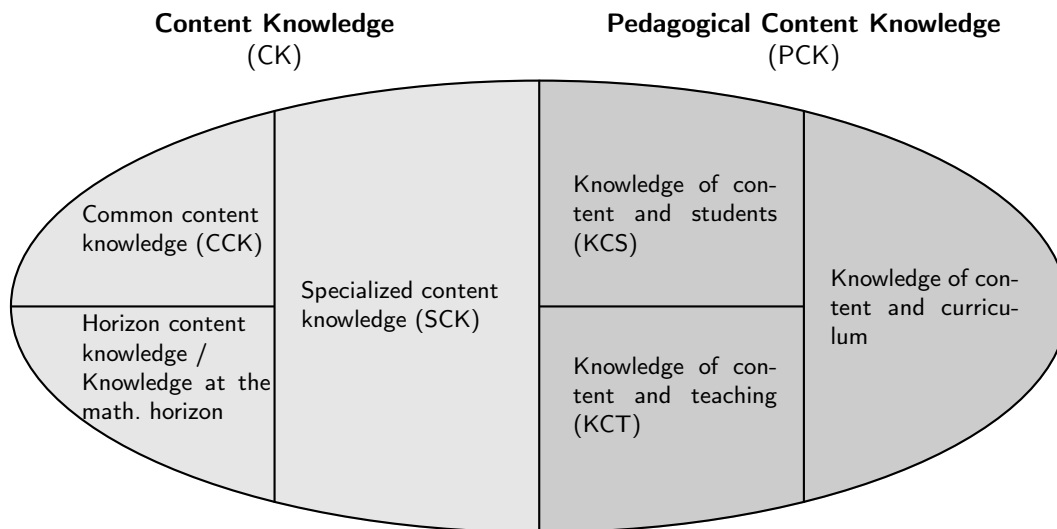


Abbildung 2.2: *Domains of Mathematical Knowledge for Teaching* (Abgezeichnet nach Ball, Thames und Phelps (2008, S. 403) und Ball und Bass (2009, S. 5))

2. Beziehungen zwischen Schul- und Hochschulmathematik in Top-Down Richtung (insb. Dekompression und didaktische Reduktion mathematischer Inhalte)
3. Beziehungen zwischen Schul- und Hochschulmathematik in Bottom-Up Richtung (insb. Erkennen von mathematischen Ideen/Inhalten, die in Äußerungen von Lernenden bzw. Schulbuchzugängen verborgen sind, Erkennen und Einordnen impliziter Annahmen in der Schulmathematik)

(Dreher et al., 2018, S. 330 f.)

Ein wesentlicher Unterschied zum *specialized content knowledge* des *Michigan Projects* liegt in der Trennung von Fachmathematik und Schulmathematik. Im Vergleich zur universitären Grundschullehrausbildung ist dieser Unterschied im Sekundarstufenlehramt deutlich größer, was bei der Beschreibung des SRCK berücksichtigt wurde. In ersten Untersuchungen konnten Heinze, Dreher, Lindmeier und Niemand (2016) nachweisen, dass PCK, SRCK und CK quantitativ erfassbar sind und dass sich SRCK tatsächlich empirisch von PCK und CK trennen lässt (Heinze et al., 2016, S. 340 ff.) und auf diese Weise der Konzeptualisierung im *Michigan Project* zumindest aus Sichtweise der quantitativ arbeitenden empirischen Bildungsforschung überlegen ist.

Das *COACTIV-Projekt* ist ein deutsches Forschungsprogramm mit dem Ziel, die „Genese, Struktur und Handlungsrelevanz professioneller Kompetenzen von Lehrkräften“ zu untersuchen (Baumert et al., 2011, S. 7). Schwerpunktmäßig geht es dabei um Mathematiklehrkräfte. Professionelles Handeln wird im Kompetenzmodell von COACTIV als Zusammenspiel von vier nichthierarchischen Kompetenzaspekten gefasst: *Professionswissen*, *Überzeugungen / Werthaltungen / Zielen*, *motivationaler Orientierung* und *selbstregulativen Fähigkeiten*. Jeder dieser Aspekte ist in Kompetenzbereiche und noch detaillierter in Kompetenzfacetten ausdifferenziert (Baumert & Kunter, 2011a, S. 33).

Die Modellierung der Kompetenzbereiche *Fachwissen* und *fachdidaktisches Wissen* beruht – wie schon das *Michigan Project* – auf der Wissensbasis von Shulman (Baumert & Kunter, 2011a, S. 36). In der Ausdifferenzierung der Kompetenzfacetten weichen Baumert und Kunter (2011a, S. 36 f.) jedoch explizit von der Wissenskategorisierung von Ball und Bass (2002) ab, da sich diese aus empirischer Perspektive als nicht trennscharf genug erwies.

Das COACTIV-Projekt unterscheidet vier Arten mathematischen Wissens, die „jeweils unterschiedliche Grade der stofflichen Durchdringung widerspiegeln“ (Baumert & Kunter, 2011a, S. 37):

- [1.] Akademisches Forscherwissen
- [2.] Profundes Verständnis der mathematischen Hintergründe der in der Schule unterrichteten Inhalte
- [3.] Beherrschung des Schulstoffes auf einem zum Ende der Schulzeit erreichbaren Niveau
- [4.] Mathematisches Alltagswissen von Erwachsenen

(Baumert & Kunter, 2011a, S. 37 f.)

Für das fachdidaktische Wissen werden drei Dimensionen unterschieden:

- [1.] Wissen über das didaktische und diagnostische Potenzial, die kognitiven Anforderungen und impliziten Wissensvoraussetzungen von Aufgaben, ihren didaktischen Sequenzierungen und die langfristige curriculare Anordnung von Stoffen,
- [2.] Wissen über Schülervorstellungen (Fehlkonzeptionen, typische Fehler, Strategien) und Diagnostik von Schülerwissen und Verständnisprozessen,
- [3.] Wissen über multiple Repräsentations- und Erklärungsmöglichkeiten.

(Baumert & Kunter, 2011a, S. 37 f.)

Die beiden Wissensformen können in COACTIV strukturell eindeutig voneinander unterschieden werden (Kunter & Baumert, 2011, S. 347). Darüber hinaus zeigen Baumert und Kunter (2011b, S. 185), dass die Entwicklung fachdidaktischen Wissens deutlich durch das verfügbare Fachwissen limitiert ist und dass Mängel im Fachwissen nicht durch fachdidaktisches Wissen ausgleichbar sind. Im Bezug auf die Lehramtsausbildung heißt es dementsprechend:

Es scheint, dass Ausbildungsprogramme, die Kompromisse in der fachwissenschaftlichen Ausbildung eingehen, negative Rückwirkungen auf die Entwicklung des fachdidaktischen Wissens und in der Konsequenz auf die erfolgreiche Unterrichtstätigkeit haben. Unterschiede im Fachwissen, die während der Ausbildung auftraten, bleiben über die gesamte Berufskarriere bestehen.

(Baumert & Kunter, 2011b, S. 185)

Mit Blick auf eine bessere Berufsorientierung fordern die Autoren eine stärkere Berücksichtigung der Schulmathematik in der Lehramtsausbildung, ohne dabei auf mathematische Strenge zu verzichten, und definieren das Verhältnis von Fachmathematik und Fachdidaktik in der Lehramtsausbildung als ein noch nicht vollständig bearbeitetes Themenfeld (Baumert & Kunter, 2011b, S. 186). Neubrand (2018, S. 6) nennt das oben vorgestellte Konzept des *school-related content knowledge* (Dreher et al., 2018) als ein Beispiel, dieses Verhältnis weiter auszuschärfen. Die Beispiele aus Abschnitt 2.3.1 (z.B. zu $0, \bar{9} = 1$) stützen dabei die Notwendigkeit fachdidaktischer Einordnungen der gelernten Fachmathematik. Das Zitat von Baumert und Kunter (2011b) darf nicht so verstanden werden, dass die fachwissenschaftliche Ausbildung die fachdidaktische Ausbildung ersetzen soll und fachdidaktisches Wissen automatisch mit der fachwissenschaftlichen Ausbildung mit aufgebaut wird.

Die Rolle des Fachs in der Lehramtsausbildung wird auch durch die Ergebnisse der Studie TEDS-M¹¹ (Tatto et al., 2012) bestärkt. Im Gegensatz zu COACTIV wurde TEDS-M international durchgeführt. Die verwendete Konzeptualisierung des mathematikbezogenen Fachwissens baut ebenfalls

¹¹Teacher Education and Development Study in Mathematics

auf dem Ansatz von Shulman auf und unterscheidet zwischen *mathematics content knowledge* (MCK) und *mathematics pedagogical content knowledge* (MPCK) (Tatto et al., 2012, S. 129 ff.). Eine weitere Aus-spezifizierung unterschiedlicher Wissenfacetten findet nicht statt. Neubrand (2018, S. 6) führt das darauf zurück, dass bei einer Studie dieser Größe die Robustheit der verwendeten Konzepte im Vordergrund steht. Im Unterschied zu den anderen oben vorgestellten Studien wurden in TEDS-M zusätzlich noch die Beliefs zukünftiger Lehrkräfte über die Natur der Mathematik und über das Lehren und Lernen von Mathematik erforscht (Tatto et al., 2012, S. 22).

Im Kontext dieser Arbeit möchte ich zwei Ergebnisse von TEDS-M hervorheben. In der Studie wird zwischen zwei grundsätzlichen Konzeptionen der Lehramtsausbildung unterschieden: mathematik-spezifisch (*mathematics specialists*) oder allgemein fachunabhängig (*generalists*) (Tatto et al., 2012, S. 201). Es stellt sich heraus, dass eine mathematikspezifische Konzeption der Lehramtsausbildung mit höherer Wahrscheinlichkeit gut vorbereitete Lehrkräfte produziert (Tatto et al., 2012, S. 202, Neubrand (2018, S. 6)). Generell konnte gezeigt werden, dass das Bemühen um Maßnahmen zur Verbesserung der Lehrqualität einen substantiellen Einfluss auf MCK und MPCK hat. Neubrand (2018, S. 6) fasst dies zusammen mit „In a word, concentration in teacher preparation courses on mathematics CK and PCK really counts.“

2.5 Synthese: Mathematiklehrkräfte als Mathematiker

Sowohl aus theoretischer als auch aus empirischer Perspektive wird mathematisches Fachwissen als Teil von Lehrerkompetenz gesehen und in verschiedenen empirischen Untersuchungen in seiner Relevanz als Disposition für professionelles Handeln bestätigt (Abschnitt 2.4). Grundlage dafür bilden Wissenstopologien, die auf Grundlage theoretischer und empirischer Einsichten im Rahmen unterschiedlicher Projekte entwickelt wurden. Im Sinne der Modellierung von Kompetenz als Kontinuum nach Blömeke et al. (2015) stellt diese dispositionale Sichtweise nur einen Teil der Beschreibung professioneller Handlungskompetenz dar. Ich habe ergänzend herausgearbeitet, welche Funktionen entsprechende Dispositionen für professionelles Lehrerhandeln haben. In Abschnitt 2.2 bin ich dazu zunächst auf die Unterscheidung von Mathematik-Treiben an Schule und Universität eingegangen und habe insbesondere ein legitimierendes Abhängigkeitsverhältnis herausgearbeitet. Dieses muss von Lehrkräften bei der Bewältigung professioneller Handlungssituationen (Abschnitt 2.1) berücksichtigt werden. Mathematisches Wissen und Können (als Disposition professioneller Handlungskompetenz) nimmt damit eine legitimierende Funktion ein (Abschnitt 2.3.1), ist aber keineswegs auf diese Rolle beschränkt. Als legitimierender Hintergrund ist es insbesondere relevant, um die intellektuelle Ehrlichkeit von Lerngelegenheiten eines allgemeinbildenden Mathematikunterrichts zu beurteilen. Darüber hinaus dient mathematisches Wissen und Können als fruchtbare Ressource für die Bewältigung professioneller Handlungssituationen (Abschnitt 2.3.1), als epistemologischer Kompass für professionelles Handeln (Abschnitt 2.3.2) und als fachliches Panorama (Abschnitt 2.3.3).

In dem Artikel *Is the teacher of mathematics a mathematician or not?* beantwortet Fletscher (1975) die im Titel des Artikels aufgeworfene Frage wie folgt:

I have come to the conclusion that the teacher of mathematics certainly needs to be a mathematician, and that he needs to be a special sort of mathematician. He needs the general mathematical background that enables him to talk on equal terms with mathematics graduates [...]. In addition the teacher needs specialist skills of his own, in the translation of mathematics from one form into

another, in understanding the pattern of thinking of his pupils at various stages of development and in understanding the relevance of structural ideas in mathematics to the teaching of it. [...] The mathematics teacher is not only a mathematician, he is a professional mathematician with unique responsibilities.

(Fletscher, 1975, S. 217)

Eine Person, die mathematisches Wissen und Können im oben geschilderten Sinne hat und nutzen kann, ist zweifelsohne mindestens zu einem Teil (auch) Mathematiker und die beschriebenen Funktionen beschreiben die im Zitat von Fletscher (1975) beschriebenen „specialist skills“.

All dies zeigt allerdings nicht, dass der bloße Erwerb mathematischen Wissens und Könnens (z.B. in mathematischen Fachveranstaltungen) ausreicht, damit es von Lehrkräften im oben beschriebenen Sinne funktional für professionelles Handeln eingesetzt werden kann. In der Tat stellt dies im Allgemeinen ein Problem dar (Stichwort: Zweite Diskontinuität). Eine Diskussion dieser „Lücke“ und möglicher Implikationen für die Lehramtsausbildung ist Bestandteil des nächsten Kapitels.

Kapitel 3

Wider die zweite Diskontinuität

In Kapitel 2 habe ich fachmathematisches Wissen und Können als wichtige Disposition für professionelles Lehrerhandeln beschrieben. Die primären Erwerbssituationen für fachmathematische Kompetenzen sind die Fachvorlesungen, die Lehramtsstudierende oft zusammen mit Fachstudierenden besuchen. In diesen gelingt es, Fachstudierende zu hochqualifizierten Mathematikerinnen und Mathematikern auszubilden, die auf dem Arbeitsmarkt sehr gute Chancen haben. Viele Lehramtsstudierenden beurteilen allerdings ihre fachliche Ausbildung als wenig nützlich für die spätere Profession und werden in dieser Einschätzung oft durch fertig ausgebildete Lehrkräfte (z. B. im Rahmen von Praktika) bestärkt. Dieses Phänomen ist unter dem Begriff *zweite Diskontinuität in der Gymnasiallehramtsausbildung* bekannt. In diesem Kapitel ordne ich diesen Begriff zunächst in die mathematikdidaktische Diskussion ein (Abschnitt 3.1). In den letzten Jahren gab es einige Projekte, die bereits für die Lehrpraxis relevante Ideen zur Überwindung der zweiten Diskontinuität geliefert haben. Einige dieser Ansätze stelle ich in Abschnitt 3.2 vor. In Abschnitt 3.3 schlage ich darauf aufbauend a-priori-Entwurfsprinzipien für Mathematikveranstaltungen vor, die das Potenzial haben der zweiten Diskontinuität entgegenzuwirken. Das Kapitel schließt mit einer Einschätzung, welche Beiträge Fachveranstaltungen zur Überwindung der zweiten Diskontinuität leisten können (Abschnitt 3.4).

3.1 Die zweite Diskontinuität als Narrativ und aktuelles Problem der Lehramtsausbildung

Kaum eine Referenz wird in der lehramtsbezogenen Hochschuldidaktik Mathematik so oft bemüht, wie die den Begriff der *doppelten Diskontinuität* prägenden Ausführungen von Felix F. Klein (1908, S. 1 f.) in seiner Einleitung zum ersten Teil der „Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus“.

Für gewöhnlich wird diese (subjektive) Formulierung Kleins als einleitende Charakterisierung für eine aktuelle Problemlage in der Lehramtsausbildung im Allgemeinen und am Übergang Schule-Hochschule im Speziellen gewählt, um dann basierend auf aktuelleren Erkenntnissen weiter zu argumentieren und Projekte und neue Einsichten zur Übergangsproblematik und deren Überwindung vorzustellen. Die unwidersprochene und inflationäre Benutzung der Referenz in Literatur und Vortragsfolien weist darauf hin, dass diese über 100 Jahre alte Formulierung ein Narrativ begrün-

det, das von vielen Beteiligten der Lehramtsausbildung auch heute noch als aktuell eingeschätzt wird.

Im Folgenden möchte ich zunächst die beiden Diskontinuitäten voneinander abgrenzen und dann die Aktualität der zweiten Diskontinuität anhand aktuellerer Forschungsbeiträge näher beschreiben.

In der Tat werfen die erste und die zweite Diskontinuität unterschiedliche und fast disjunkte Fragestellungen auf. Projekte zur ersten Diskontinuität beschäftigen sich mit der Beschreibung des Übergangs Schule-Hochschule und damit einhergehender Probleme mit unterschiedlichen Schwerpunkten (inhaltlich, lehr-/lernmethodisch, sozial) sowie Interventionen zur Überwindung dieser Probleme (z. B. Ableitinger, Kramer und Prediger, 2013; Roth, Bauer, Koch und Prediger, 2015; Hoppenbrock, Biehler, Hochmuth und Rück, 2016; Rach und Heinze, 2017; Biehler, 2018; Rach und Ufer, 2020).

Ein wesentlicher Punkt hierbei ist die Berücksichtigung und Nutzung mathematischen Vorwissens und mathematischer Vorerfahrungen aus der Schule bei der Gestaltung von Lehr/Lernprozessen zur Hochschulmathematik. Insbesondere ist die erste Diskontinuität nicht speziell lehramtsspezifisch, sondern auch im Kontext von anderen mathemathikhaltigen Studiengängen relevant (z. B. Wirtschaftswissenschaften (Feudel, 2020) oder Maschinenbau (Wolf, 2017)).

Zwar ist es nicht unwahrscheinlich, dass auch in anderen Studiengängen die Anschlussfähigkeit der erworbenen mathematischen Kompetenzen für ein bestimmtes Berufsfeld kritisiert wird, doch scheint das Problem als sogenannte *zweite Diskontinuität* in der Mathematiklehramtsausbildung besonders virulent zu sein. Ansätze zur Überwindung der zweiten Diskontinuität sind genuin berufsfeldspezifisch.

Unter der zweiten Diskontinuität wird verstanden, dass viele Lehramtsstudierende das in universitären Fachveranstaltungen erworbene mathematische Wissen und Können als nicht nützlich für die Bewältigung zukünftiger professioneller Handlungsanforderungen wahrnehmen. Dem gegenüber steht, dass, wie in Kapitel 2 beschrieben, mathematisches Wissen und Können eine notwendige Disposition professionellen Lehrerhandelns ist und dabei verschiedene relevante Funktionen einnimmt (Ressource und legitimierender Hintergrund, epistemologischer Kompass, fachliches Panorama, siehe Abschnitt 2.3). Die zweite Diskontinuität stellt einen Gegensatz zur Vermutung dar, dass Lehramtsstudierende das in Fachvorlesungen erworbene mathematischen Wissen und Können automatisch gewinnbringend beim Unterrichten einsetzen können. Diesen, gerade in der Vergangenheit oft angenommenen, Mechanismus bezeichnet Wu (2011, S. 372) als *Intellectual Trickle-Down Theory*:

It appears that [mathematics education faculties at universities] are content to let the mathematics community decide what secondary teachers should know [...]. [...] Mathematicians feed secondary teachers the kind of advanced mathematics that future math researchers should learn and expect the Intellectual Trickle-Down Theory to work overtime to give these teachers the mathematical content knowledge they need in the school classroom.

(Wu, 2011, S. 372)

Mittlerweile ist die zweite Diskontinuität (und damit das Nichtzutreffen der Intellectual Trickle-Down Theory) als ein aktuelles Problem der Ausbildung von Gymnasial-Lehrkräften in Forschung und Ausbildungspraxis breit akzeptiert und durch Literaturbeiträge gestützt.

Wu (2011, S. 373 ff.) selbst zeigt durch stoffdidaktische Analysen typischer Bereiche der Schulmathematik (wie Bruchrechnung), dass die übliche hochschulmathematische Sichtweise auf diese Teile der Mathematik per se nicht ausreichend zur Bewältigung typischer Unterrichtsfragestellungen ist. Im Abschlussbericht eines Symposiums zur Lehramtsausbildung schildern Hefendehl-Hebeker und Schuster (2006) Erfahrungen von Beteiligten aus verschiedenen Phasen der Lehramtsausbildung, die ebenfalls von Problemen der Verknüpfung des hochschulmathematischen Wissens und Könnens mit den Anforderungen des Mathematikunterrichts berichten. Ähnliche Beobachtungen bei der Arbeit mit Referendaren macht Körner (2015). Im Kontext des SRCK-Frameworks (Dreher et al. (2018), siehe auch S. 23) stellen Hoth, Jeschke, Dreher, Lindmeier und Heinze (2019) im Rahmen einer Fragebogenstudie für das erste Studienjahr fest, dass sich berufsspezifisches Fachwissen (SRCK) nicht automatisch mit akademischem Fachwissen (CK) mitentwickelt. Diese Referenzen belegen *objektive* Probleme bei der professionsbezogenen Nutzung mathematischen Wissens und Könnens.

Außerdem sind die Ergebnisse zur zweiten Diskontinuität konsistent zu den in Abschnitt 2.4 vorgestellten Konzeptualisierungen von professionellem Wissen von Mathematiklehrkräften, in denen stets professionsspezifische Zusatzkategorien eingeführt wurden, die akademisches Fachwissen, schulmathematisches Wissen und fachdidaktisches Wissen ergänzen und dabei eine explizit vermittelnde Rolle einnehmen. Es stellt sich die Frage, wo in der Lehramtsausbildung diese Wissenskategorien adressiert werden. Diese Frage werde ich am Ende dieses Abschnitts noch einmal aufgreifen.

In der zweiten Diskontinuität verbirgt sich aber ebenso eine *subjektive Facette*. Diese bezieht sich darauf, dass viele Studierende die Anschlussfähigkeit des erlernten Fachwissens a priori (oder zumindest nur aus der eigenen Schulerfahrung und wenigen Praxiserfahrungen heraus) als nicht gegeben einschätzen, und zwar unabhängig von einer objektiven Richtigkeit dieser Einschätzung. Selbst wenn Studierende mit dieser Einschätzung falsch liegen, birgt sie doch große Probleme sowohl bezogen auf die Studienmotivation als auch, im Sinne einer selbsterfüllenden Prophezeiung, auf die *Orientierungen* (Prediger, 2019, S. 370)¹² zur Nutzung fachmathematischen Wissens und Könnens im Unterricht zur Bewältigung professionstypischer Handlungsanforderungen

Solche Überzeugungen von Lehramtsstudierenden können mit dem theoretischen Konzept *Beliefs* beschrieben werden. Ich folge (analog zu ähnlichen Projekten wie Girnat (2017, S. 52) oder Isaev und Eichler (2022, S. 329)) der Definition von Philipp (2007, S. 259), der *Beliefs* als „psychologically held understandings, premises, or propositions about the world that are thought to be true“ charakterisiert. Auch in der TEDS-M-Studie (Tatto et al. (2012, S. 153, ff.), siehe auch Seite 25) wird auf die Arbeit von Philipp (2007) Bezug genommen und die *Beliefs* angehender Mathematiklehrkräfte erforscht. Als ein Ergebnis wird auf eine enge Verknüpfung zwischen den *Beliefs* der an der Konzeption und Durchführung der Lehrerausbildung beteiligten Personen und den ausgebildeten Lehrkräften hingewiesen:

We note that, almost without exception, the pattern of beliefs held by the future teachers in every country matched the pattern of beliefs held by the teacher educators. This finding suggests that change, if it is to occur, will not come easily, and that substantial change in the beliefs held by future teachers is unlikely unless it is preceded by change in the beliefs held by the teacher educators. To simply alter the teacher-preparation curriculum is unlikely to be sufficient.

(Tatto et al., 2012, S. 172)

¹²Unter *Orientierungen* versteht Prediger (2019, S. 370) eines von fünf Teilkonstrukten eines Frameworks für „content-specific teacher expertise“ und definiert den Begriff wie folgt: „Orientations refer to content-related and more general beliefs that implicitly or explicitly guide the teachers’ perceptions and prioritisations of jobs [...]“

Bei Innovationen der universitären Lehramtsausbildung sollte man diesen Aspekt berücksichtigen und neue Impulse immer auch in Bezug auf die damit verbundenen Beliefs auf Seite der Lehrenden (Professoren, Mitarbeiter, studentische Hilfskräfte) reflektieren.

Speziell mit Beliefs zur doppelten Diskontinuität beschäftigen sich Isaev und Eichler (2022). Zur Messung dieser Beliefs wurde ein Fragebogen entwickelt, in dem zwei Dimensionen von Beliefs zur doppelten Diskontinuität unterschieden werden. Die erste Dimension (kurz: DDIV¹³) bezieht sich auf Beliefs bezüglich der Kohärenz zwischen Schulmathematik und der universitären Mathematik. Die zweite Dimension (kurz: DDRB¹⁴) umfasst Beliefs bezüglich der Nützlichkeit der gelernten universitären Mathematik bezogen auf den späteren Lehrerberuf (Isaev & Eichler, 2022, S. 324).

Als inhaltliches Ergebnis der Pilotierung des Instruments konnte festgestellt werden, dass „die Beurteilung der Studierenden zur doppelten Diskontinuität insgesamt im mittleren Bereich lagen“. Außerdem bewerten die Studierenden der linearen Algebra (vorwiegend erstes Semester) beide Dimensionen besser, als die Studierenden der Analysis (in der Regel drittes Semester) (Isaev & Eichler, 2022, S. 335). Die Autoren sehen das als Indiz für einen „Abstraktionsschock“ im ersten Studienjahr. In beiden Gruppen wurden die Dimension der inhaltlichen Verbundenheit geringer eingeschätzt als die der berufliche Relevanz. Diese Pilotierung bezieht sich auf den Studienanfang. Ich werde an späterer Stelle (Abschnitt 10.2) noch einmal auf die beiden Skalen zurückkommen, da der Fragebogen im Rahmen meines Projektes ebenfalls eingesetzt wird. Dann können die Ergebnisse vom Studienanfang mit meinen Ergebnissen vom Ende des Bachelor-Studiums verglichen werden.

Dass die Einschätzungen von Lehramtsstudierenden zur inhaltlichen Verbundenheit und zur Berufsrelevanz (Die Begriffe sind hier in ihrer allgemein sprachlichen Bedeutung gemeint und nicht im Sinne der oben erwähnten Skalen!) eher zu Ungunsten der fachinhaltlichen Vorlesungen und mitunter vernichtend ausfallen (siehe z. B. Hefendehl-Hebeker (2013, S. 4 f.) für eine Zusammenfassung), wird auch von anderen Autoren, sowohl im Rahmen von kleineren Befragungen oder Fallberichten aus Studium und Referendarsausbildung (z. B. Hefendehl-Hebeker und Schuster (2006), Bungartz und Wynands (1998)) als auch in größer angelegten Erhebungen (z. B. Pieper-Seier (2002), Mischau und Blunck (2014)) bestätigt.

Zusammengefasst beschreibt die zweite Diskontinuität ein Problem, das aus einer objektiven (Referendare und Lehrkräfte können in professionellen Handlungssituationen nicht auf hilfreiche oder notwendige fachmathematische Dispositionen zugreifen) und einer subjektiven Facette (Lehramtsstudierende empfinden erlerntes fachmathematisches Wissen als wenig nützlich und/oder anschlussfähig) besteht. Die Überlagerung der beiden Facetten machen den Begriff komplexer als er auf den ersten Blick anmutet (und in Diskussionen genutzt wird). Rein kombinatorisch ergeben sich verschiedene Ursachenzuschreibungen für Phänomene der zweiten Diskontinuität, denen in unterschiedlicher Weise begegnet werden kann/muss. In dieser Arbeit möchte ich Konzepte für entsprechende Innovationen in Fachvorlesungen exemplarisch am Beispiel einer Geometrie-Vorlesung vorstellen und untersuchen.

¹³Doppelte Diskontinuität Inhaltliche Verbundenheit

¹⁴Doppelte Diskontinuität Relevanz Beruf

3.2 Professionsorientierte Lerngelegenheiten in Fachveranstaltungen: Schnittstellenaufgaben und ähnliche Konzepte

Seit einigen Jahren mehren sich in der Gymnasiallehrausbildung Entwicklungsprojekte zur Überwindung der doppelten Diskontinuität. Die Projekte sind dabei in ihrem Einfluss auf die Gestaltung des jeweiligen Studiengangs unterschiedlich weitreichend angelegt. Ein Beispiel für eine ganzheitliche Innovation, bei der die komplette Studienstruktur geändert wird, ist das Projekt *Mathematik Neu Denken* (Beutelspacher, Danckwerts, Nickel, Spies & Wickel, 2011). Im Kontext der doppelten Diskontinuität besonders wichtig ist dabei die Implementierung einer Veranstaltung zur „Schulanalysis vom höheren Standpunkt“. Diese bereitet sowohl die fachwissenschaftlichen Veranstaltungen Analysis I und II sowie eine fachdidaktische Veranstaltung zur Analysisdidaktik (Beutelspacher et al., 2011, S. 22 f.) vor. An anderen Universitäten wurde zwar nicht die gesamte Studienstruktur verändert, aber eine Anfängervorlesung (mit mehr oder weniger starker Professionsorientierung) vorgeschaltet. Beispiele mit unterschiedlichen Schwerpunktsetzungen sind die Veranstaltung „Mathematisches Problemlösen und Beweisen“ an der Universität Oldenburg (Grieser, 2017) und die Veranstaltung „Einführung in mathematisches Denken und Arbeiten“ an der Universität Paderborn (Hilgert, Hoffmann & Panse, 2015). An der Universität Wien folgen Schulmathematikveranstaltungen im Nachgang zu fachwissenschaftlichen Veranstaltungen. Dabei wird in Übungsaufgaben speziell die zweite Diskontinuität adressiert (Ableitinger et al., 2013).

Noch größer ist die Anzahl an Projekten, die sich mit einzelnen Innovationen wider die doppelte Diskontinuität (meist in Form von Aufgabenformaten) innerhalb bestehender Veranstaltungen beschäftigen. Diese werden sowohl in reinen Lehramtsveranstaltungen eingesetzt als auch als Maßnahme zur Binnendifferenzierung in Fachveranstaltungen, die von Lehramts- und Fachstudierenden gemeinsam besucht werden. Breit rezipiert und konzeptuelle Grundlage für viele weitere Projekte in diesem Kontext sind die *Schnittstellenaufgaben* von T. Bauer (2013, 2017). Schnittstellenaufgaben wurden auch an der LMU München (Rachel, Schadl & Ufer, 2018) und an der Universität Duisburg-Essen (Ableitinger et al., 2013) entwickelt und eingesetzt. An der Universität Kassel forschen Eichler und Isaev (2017) zur Beliefänderungen von Lehramtsstudierenden durch die Verwendung von *Lehramtsaufgaben* (Isaev & Eichler, 2022). Prediger (2013) erklärt, wie sogenannte *Unterrichtsmomente* als Lernanlässe in fachinhaltlichen Veranstaltungen dienen können.

Die doppelte Diskontinuität ist aber auch im internationalen Bereich Thema mathematikdidaktischer Projekte. Im Kontext des *Michigan-Project* (siehe S. 23) wurden spezielle Aufgaben (*MKT-Tasks*) zur Förderung des Erwerbs des *Mathematical Knowledge for Teaching* entwickelt (Suzuka et al., 2009). Diese ähneln in wesentlichen Punkten den *Schnittstellenaufgaben*, haben jedoch einen stärkeren Bezug zu den im Michigan-Project beschriebenen mathematikhaltigen professionellen Handlungsanforderungen (siehe S. 9). Im Rahmen von *ULTRA* (Upgrading Learning for Teachers in Real Analysis) wurden Module zur Ergänzung von Analysis-Veranstaltungen entwickelt. Diese Module orientieren sich an einem Konstruktionsprinzip, das als *Building-Up – Stepping-Down* bezeichnet wird (Wasserman, Fukawa-Connelly, Villanueva, Mejia-Ramos & Weber, 2017). Das *Building-Up* bezieht sich dabei auf die Behandlung eines Inhaltes der reellwertigen Analysis aufbauend auf einer Unterrichtssituation; *Stepping-Down* beschreibt dann den Rückbezug des hochschulmathematisch geklärten Phänomens auf den Mathematikunterricht. Grundlage dieses Ansatzes bildet die Theorie des *situierten Lernens* (Wasserman et al., 2017, S. 561 ff.).

Bezogen auf die Überwindung der doppelten Diskontinuität, sind bei den aufgeführten Projekten zwei Aspekte bemerkenswert: Zum einen beziehen sich die meisten Projekte auf den Studienanfang und zum anderen wird oft nicht zwischen der Überwindung der ersten und der zweiten Diskontinuität unterschieden. Vielmehr dient z. B. in *ULTRA* der Schulbezug als Ausgangspunkt und zugleich als Ziel der Beschäftigung mit Inhalten der Hochschulmathematik.

A priori ist erst einmal unklar, ob und inwieweit es sinnvoll ist, beide Diskontinuitäten gemeinsam abzuhandeln. Ich möchte dazu einige Überlegungen anstellen, und dafür plädieren, bei dieser Frage Vorsicht walten zu lassen. Wie oben ausgeführt (siehe S. 30), geht es bei der ersten Diskontinuität um das „Ankommen“ im mathematikspezifischen, universitären Umfeld. Dafür ist es (professionsunspezifisch) eine sinnvolle Idee, in Anfängerveranstaltungen, mathematische Vorerfahrungen aus der Schule zu reflektieren und zum Ausgangspunkt für mathematisches Denken und Arbeiten im wissenschaftlichen Sinne zu machen. Wenn diese Art von Schnittstellenaktivitäten allerdings eine notwendige Unterstützung für das Lernen der Studierenden darstellt, dann stellt sich die Frage, ob es wirklich gelingen kann, die neuen und offenbar schwierigen hochschulmathematischen Inhalte und Methoden direkt im nächsten Schritt in ihrer Rolle als Ressource für professionelles Handeln (vgl. Abschnitt 2.3.1) weiter zu verwenden. Dieser Weg direkt zurück in den Kontext des Mathematikunterrichts stellt, wenn man ihn denn erst meint, für den Lernprozess der Studierenden ganz offensichtlich eine zwar vielleicht motivierende aber auf jeden Fall sehr herausfordernde Anforderung dar.

Wird hingegen in weiterführenden Veranstaltungen, der Kontext des Mathematikunterrichts als primärer Ausgangspunkt zur Motivation des inhaltlichen Fortgangs genutzt, so besteht die Gefahr, dass Lehramtsstudierende ein sehr utilitaristisches Bild der akademischen Mathematik entwickeln, in dem sich mathematische Theorien nur zu pädagogischen Zwecken und nicht aus sich selbst heraus entwickeln. Dies birgt das Risiko, dass mathematisches Wissen und Können nur unzureichend im Sinne der Rolle des epistemologischen Kompasses (vgl. Abschnitt 2.3.2) genutzt werden kann, da die dafür notwendigen Enkulturationsprozesse nicht genügend Platz bekommen. Diese Sichtweise ist der von F. Klein (1908) nicht unähnlich, dessen bekanntes Zitat zur doppelten Diskontinuität gar nicht im Kontext des Studienbeginns entstanden ist. Vielmehr handelt es sich bei Kleins „Schulmathematik vom höheren Standpunkt“ um eine Veranstaltung kurz vor Studienende. Er setzt fundierte Kenntnisse der akademischen Mathematik voraus und stellt darauf aufbauend Verbindungen zur Schulmathematik her. Somit ist dieser Ansatz mehr als Maßnahme wider die zweite Diskontinuität einzuordnen.¹⁵

3.3 Umgang mit der zweiten Diskontinuität in Mathematikveranstaltungen

In diesem Abschnitt möchte ich einen Ansatz herausarbeiten, der zweiten Diskontinuität in Fachveranstaltungen entgegenzuwirken. Entsprechend der Ausführungen in Abschnitt 3.1 muss dazu sowohl die objektive als auch die subjektive Facette der zweiten Diskontinuität in den Blick genommen werden¹⁶. Zunächst einmal soll eine universitäre Mathematik-Fachveranstaltung qua

¹⁵Da es für die Zielsetzung der Arbeit nicht weiter relevant ist, möchte ich nicht vertieft auf Kleins didaktische Ideen eingehen, aber zumindest auf die sehr instruktive Ausarbeitung zu diesem Thema unter Berücksichtigung des historischen Kontextes von Allmendinger (2016) hinweisen.

¹⁶Ich möchte an dieser Stelle festhalten, dass, nur weil es bei der zweiten Diskontinuität um fachinhaltliche Anschlussfähigkeit geht, einschlägige Innovationen nicht automatisch in der alleinigen Verantwortung der Fachveranstaltungen lie-

Definition einen Beitrag dazu leisten, Mathematik als Wissenschaft mit spezifischen Erkenntnis- und Arbeitsmethoden zu erfahren. Im Sinne eines ganzheitlichen Bildes soll die Veranstaltung also inhaltlich und methodisch anschlussfähig an die Fachkultur und andere fachwissenschaftliche Veranstaltungen sein. Der Wissensaufbau folgt den üblichen wissenschaftlichen Standards der Mathematik. Diese können prototypisch durch den Dreischritt Definition – Satz – Beweis beschrieben werden: Alle zu behandelnden Gegenstände und Strukturen werden zunächst definiert oder referenziert. Anschließend werden mathematische Aussagen über diese aufgestellt, die dann mit rigorosen logischen Schlüssen auf Basis zusätzlicher Axiome verifiziert werden. Ich bezeichne diese Entwurfsanforderung an eine Fachveranstaltung im Lehramtsstudium als *Orientierung an der Fachsystematik*. Zu betonen ist, dass diese Forderung nicht bedeutet, dass der Dreischritt nicht durch sinnvolle Ergänzungen, wie Beispiele, Heuristiken oder graphische Darstellungen angereichert werden soll. Diese Art von Aufbereitung und Darstellung ist allerdings nicht lehramtspezifisch, sondern gängiger Bestandteil mathematischer Kommunikation in Schrift und Wort in mathematischer Lehre und Forschung. Ich fasse diese Entwurfsanforderung unter der Bezeichnung *Orientierung an der fachspezifischen Darstellungsmethodik*.

Um der objektiven Facette der zweiten Diskontinuität entgegen zu wirken, muss dieses Potenzial bereits in der Veranstaltungskonzeption bewusst angelegt werden. Das bedeutet, dass bei konzeptionellen Entscheidungen (z.B. bei der Inhaltsauswahl, Wahl eines Beweises, Wahl eines Beispiels), bei denen es mehrere ähnlich geeignete Möglichkeiten gibt, diejenige gewählt werden sollte, bei der man am besten einen Bezug zum späteren Beruf des Lehrers herstellen kann. Dieser Bezug muss nicht zwingend inhaltlicher Natur sein (im Sinne des Aufbaus mathematischen Wissens und Könnens, das als *Ressource* oder *legitimierender Hintergrund* dienen kann), sondern kann auch auf die Funktionen *epistemologischer Kompass* oder *fachliches Panorama* abzielen. Dieses Anlegen professionsspezifischen Potenzials bezeichne ich als *implizite Professionsorientierung*. Das *Implizite* daran ist, dass durch ein bloßes Treffen entsprechender konzeptioneller Entscheidungen zwar ein Beitrag zur Überwindung der objektiven Facette der zweiten Diskontinuität geleistet wird, dieser aber im Sinne der subjektiven Facette der zweiten Diskontinuität noch nicht expliziert wird (*explizite Professionsorientierung*). Dazu bedarf es zum einen noch Übungsaktivitäten (wie beispielsweise die in Abschnitt 3.2 vorgestellten *Schnittstellenaufgaben*), in denen das erlernte fachmathematische Wissen und Können funktional als Disposition für professionelles Lehrerhandeln explizit genutzt wird, und zum anderen muss diese Nutzung (gerade im Hinblick auf die Überwindung der subjektiven Facette der zweiten Diskontinuität) auch explizit reflektiert werden.

Zusammengefasst ergibt sich folgende Aufstellung von a-priori-Entwurfsprinzipien für eine Fachveranstaltung, die zur Überwindung der zweiten Diskontinuität beitragen soll.

1. *Orientierung an der Fachsystematik*: Die Veranstaltung verfolgt (analog zu den üblichen Fachmathematikvorlesungen) das Ziel, einen Bereich der akademischen Mathematik systematisch und strukturiert zu behandeln. Der Wissensaufbau folgt den üblichen wissenschaftlichen Standards der Mathematik. Diese können prototypisch durch den Dreischritt *Definition – Satz – Beweis* beschrieben werden. Der notwendige Detailgrad der Argumentationen muss dabei an den Wissensstand und die Erfahrungen der Studierenden angepasst sein.

gen. Man kann ebenso argumentieren, dass es Aufgabe der fachdidaktischen Veranstaltungen ist, stärker zwischen einer fachwissenschaftlichen und einer unterrichtlichen Perspektive zu vermitteln, oder aber, dass im Referendariat ein größerer Schwerpunkt auf der Reflexion fachinhaltlicher Kerne unter bewusster Nutzung fachwissenschaftlicher Dispositionen liegen muss. Im Optimalfall vernetzen sich alle Akteure und erarbeiten ein Gesamtkonzept.

2. *Orientierung an der fachspezifischen Darstellungsmethodik:* Die Beschäftigung mit der Mathematik nutzt in der Wissenschaftspraxis übliche methodische Elemente zum Erkenntnisgewinn und -austausch. Dementsprechend wird der in 1 beschriebene Dreischritt durch weitere Elemente ergänzt. Beispiele hierfür sind: Beispiele und Nichtbeispiele, Heuristiken, historische Einordnungen.
3. *Implizite Professionsorientierung:* Bei jeder im Rahmen der Veranstaltungskonzeption zu treffenden Entscheidung (bspw. inhaltliche Auswahl) soll die Professionsorientierung mit berücksichtigt werden. Das grundsätzliche Credo sollte sein: Bei jeder konzeptionellen Entscheidung, bei der es mehrere ähnlich geeignete Möglichkeiten gibt, sollte diejenige gewählt werden, bei der man am besten einen Bezug zum späteren Beruf des Lehrers herstellen kann.
4. *Explizite Professionsorientierung:* Im Rahmen der Veranstaltung werden an geeigneten Stellen spezielle Übungsaktivitäten angelegt, in denen das erlernte fachmathematische Wissen und Können explizit funktional als Disposition für professionelles Lehrerhandeln genutzt wird. Diese Nutzung (gerade im Hinblick auf die Überwindung der subjektiven Facette der zweiten Diskontinuität) muss darüber hinaus auch explizit reflektiert werden.

Offen ist die Frage danach, was in einer entlang dieser Prinzipien konzipierten Fachveranstaltung unter optimalen Bedingungen erreicht werden kann. Klar ist, dass eine unmittelbare Förderung professioneller Handlungskompetenz ein unrealistisches Ziel ist. Realitätsnahe Erwerbs- und Prüfungskontexte sind in universitären Fachveranstaltungen nicht umsetzbar. Trotzdem zeigen die in Abschnitt 3.2 vorgestellten Projekte, dass es möglich ist, in Fachveranstaltungen zumindest mittelbar einen Beitrag zum Erwerb professioneller Handlungskompetenz zu leisten, der über den Erwerb fachinhaltlicher Dispositionen hinaus geht. Dieser Kompetenzbeitrag bezieht sich dann im Sinne des Kontinuumsmodells der Handlungskompetenz (Blömeke et al., 2015, siehe S. 8) auf die situationsspezifischen Fähigkeiten und Fertigkeiten. Kern der in Abschnitt 3.2 vorgestellten Innovationen ist meist eine fiktive oder der Realität nachgestellte professionelle Handlungssituation (z. B. eine Schülerlösung, eine Aussage aus einem Unterrichtsgespräch oder eine Schulbuchseite), die aus einer fachlichen Perspektive zunächst analysiert und dann fiktiv bewältigt werden soll. Damit wird das Wahrnehmen (*Perception*) der Situation (im Vergleich zum Agieren im realen Unterricht) stark kanalisiert und gelenkt. Die *Interpretation* der Situation geschieht ebenfalls vorwiegend aus fachinhaltlicher Perspektive. Damit berücksichtigen die anschließenden Entscheidungen (Rückmeldung an den fiktiven Schüler, Bewertung eines Schulbuchauszugs) ebenfalls vor allem fachinhaltliche Argumente. Hinzu kommt, dass all dies ohne den Zeitdruck einer realen Situation geschieht.

Zusammengefasst soll in entsprechenden universitären Lerngelegenheiten eine professionsorientierte Situation vor einer bestimmten Facette kognitiver Dispositionen (hier: fachmathematische) analysiert und darauf aufbauend ein Plan für eine professionelle Handlung entworfen werden. Genau im Sinne dieser Art von *Beurteilung* führen wir in Biehler und Hoffmann (im Druck) den Begriff der *fachdidaktischen Urteilskompetenz* als Vorstufe professioneller Handlungskompetenz ein. Bei diesem Begriff drückt das *fachdidaktisch* die Fokussierung auf Situationen aus, in denen die professionelle Handlungsanforderung schwerpunktmäßig in der Relation zwischen Lernenden und Inhalt liegt; die Verwendung von *Urteil* zielt auf die im Idealfall bewusste, abwägende und durch professionelles Wissen fundierte Analyse der Situation sowie der daraus resultierenden Handlungsoptionen ohne Zeitdruck ab. Fachdidaktische Urteilskompetenz umfasst damit einen Teil des Kontinuums der professionellen Handlungskompetenz, der reales Handeln nicht erreicht, aber neben kognitiven Dispositionen auch situationsspezifische Fähigkeiten und Fertigkeiten beinhaltet.

3.4 Synthese: Fachveranstaltungen zur Überwindung der zweiten Diskontinuität

In diesem Kapitel habe ich herausgearbeitet, dass für die Überwindung der zweiten Diskontinuität eine *objektive* und eine *subjektive* Facette angegangen werden müssen. Erstere bezieht sich darauf, dass die Studierenden rein *objektiv* in die Lage versetzt werden müssen, ihr mathematisches Wissen und Können zur Bewältigung professionstypischer Handlungsanforderungen nutzen zu können. Die subjektive Facette beschreibt die Notwendigkeit, dass die Studierenden dieses Potenzial als solches auch einsehen und in ihre professionsbezogenen Beliefs und Orientierungen integrieren. Das bedeutet, dass es neben Lerngelegenheiten mit (fiktivem) explizitem Professionsbezug (z. B. Schnittstellenaufgaben, vgl. Abschnitt 3.2) auch Reflexionsanlässe bedarf. Beides sind wesentliche Punkte der *expliziten Professionsorientierung*. Dieses und die anderen drei in Abschnitt 3.3 (S. 35 f) erarbeiteten Entwurfsprinzipien, haben zum Ziel, die Rahmenbedingungen für die Gestaltung einer Fachveranstaltung im Lehramtsstudium unter besonderer Berücksichtigung der zweiten Diskontinuität abzustecken. Dabei wird das Ziel verfolgt professionelle Handlungskompetenz mittelbar über die Förderung *fachdidaktischer Urteilskompetenz* (S. 36) zu stärken. Dazu müssen Lerngelegenheiten entwickelt werden, in denen Studierende fachmathematische Dispositionen nutzen um professionsorientierte Situationen wahrzunehmen und zu interpretieren (im Sinne einer Stärkung der situationsspezifischen Fähigkeiten und Fertigkeiten im Kontinuumsmodell der Handlungskompetenz (Blömeke et al., 2015, siehe S. 8).

Kapitel 4

Geometrieunterricht und fachwissenschaftliche Bezüge

In den Kapiteln 2 und 3 habe ich allgemein theoretische Hintergründe zur Professionalisierung von Gymnasiallehrkräften mit Unterrichtsfach Mathematik aufgearbeitet. In diesem Kapitel möchte ich nun in den mathematischen Themenbereich einsteigen, der in diesem Projekt im Mittelpunkt steht: Die Geometrie. Ich möchte darstellen, welche Bereiche der Fachmathematik als Hintergrund für die Inhalte des Geometrieunterrichts dienen können. Diese Art Überlegung ist für die Konzeption lehramtsspezifischer Fachveranstaltungen sehr wichtig.

Hierzu liste ich in Abschnitt 4.1 die geometriebezogenen inhaltlichen Kompetenzen auf, die die Bildungsstandards für das Gymnasium festlegen. Diese Übersicht der Inhaltsbereiche des Geometrieunterrichts werde ich in Abschnitt 4.2 unter fachmathematischen Gesichtspunkten ordnen.

In Abschnitt 7.1 nutze ich diese Überlegungen, um über die inhaltliche Ausrichtung von Geometrieveranstaltungen für Lehramtsstudierende zu diskutieren. Dabei geht es mir nicht um spezielle Inhalte auf Ebene einzelner Definitionen und Aussagen (diese variieren mit jeder curricularen Änderung), sondern um eine fachsystematisch orientierte Grobstruktur, die aufzeigt, welche Bereiche moderner Mathematik den Themenbereichen des Geometrieunterrichts zugrunde liegen.

4.1 Inhalte und Ziele des aktuellen Geometrieunterrichts

Sowohl Weigand et al. (2014) (für die Sekundarstufe 1) als auch Henn und Filler (2015) (für die Sekundarstufe 2) leiten die Zielsetzungen von Geometrieunterricht aus den drei Grunderfahrungen von Winter (1995) ab (siehe S. 11). Diese schlagen sich sowohl in den Bildungsstandards (KMK, 2004, S. 6; KMK, 2012, S. 11) als auch in den curricularen Vorgaben für den gymnasialen Mathematikunterricht in NRW (MSW NRW, 2019, S. 8; MSW NRW, 2014, S. 11) nieder. Dabei muss erwähnt werden, dass die KMK (2004, S. 6) Winters Formulierungen abschwächt. Besonders die zweite Grunderfahrung wird abgeändert:

Mathematik mit ihrer Sprache, ihren Symbolen, Bildern und Formeln in der Bedeutung für die Beschreibung und Bearbeitung von Aufgaben und Problemen inner- und außerhalb der Mathematik kennen und begreifen,

(KMK, 2004, S. 6)

Das Erfahren von Mathematik als „deduktiv geordnete Welt“ fällt hier weg, was dadurch zu erklären ist, dass die KMK (2004) Bildungsstandards für den mittleren Schulabschluss, unabhängig von der Schulform, beschreibt. In den gymnasialspezifischen Kernlehrplänen in NRW wird die Formulierung wieder aufgegriffen.

Weigand et al. (2014, 17 ff.) beschreiben, wie eine Ausdifferenzierung der Grunderfahrungen (im Folgenden mit (G₁), (G₂) und (G₃) bezeichnet) für den Geometrieunterricht der Sekundarstufe I aussehen kann:

Unter der Überschrift „Geometrie und die Erschließung der Welt“ nennen Weigand et al. (2014, 17 f.) als geometriebezogene Ausschärfung von (G₁) zwei Teilaspekte. Zum einen soll der Geometrieunterricht zum bewussten Wahrnehmen der Umwelt beitragen und die Ausbildung von Wechselbeziehungen zwischen Umwelt und Mathematik unterstützen: Aus der Umwelt heraus können SuS „anschauliche Vorstellungen geometrische[r] Begriffe“ ausbilden; umgekehrt können SuS Geometrie benutzen, um die Umwelt zu analysieren, zu beurteilen und zu interpretieren. Zum anderen soll Geometrie im Mathematikunterricht als kulturelle Errungenschaft der Menschheit dargestellt werden.

Bezogen auf (G₂) beschreiben Weigand et al. (2014, 21, f.) Geometrie als „prototypisch für die Entwicklung von logisch schlussfolgernden, ordnenden und klassifizierenden Arbeits- und Denkweisen“. Sie betonen dabei die Förderung von Argumentations- und Verbalisierungsfähigkeiten. Das Kennenlernen von Geometrie als Beispiel für eine deduktiv geordnete Welt nennen die Autoren hier nicht, was nicht verwundert, da sich der Text nicht speziell auf den gymnasialen Mathematikunterricht bezieht. Am Gymnasium ist Kennenlernen von Geometrie als deduktives Theoriegebäude relevant (bspw. MSW NRW (2019, S. 16)).

Schließlich bezeichnen Weigand et al. (2014, S. 23) den Geometrieunterricht für das Problemlösen (siehe (G₃)) als „besonders geeignet“ und betonen weiter das Potenzial des Geometrieunterrichts, den SuS die Möglichkeit zu geben, selber Fragen zu stellen (Weigand et al., 2014, S. 24).

In den Bildungsstandards für den mittleren Schulabschluss (KMK, 2004) werden inhaltsbezogene Kompetenzen nach Leitideen geordnet. Bezogen auf Geometrie sind die Leitideen *Messen* und *Raum und Form* relevant. Diese überschreiben die folgenden mathematischen Kompetenzen.

(L₂) Leitidee Messen. Die Schülerinnen und Schüler

- nutzen das Grundprinzip des Messens, insbesondere bei der Längen-, Flächen- und Volumenmessung, auch in Naturwissenschaften und in anderen Bereichen,
- wählen Einheiten von Größen situationsgerecht aus (insbesondere für Zeit, Masse, Geld, Länge, Fläche, Volumen und Winkel),
- schätzen Größen mit Hilfe von Vorstellungen über geeignete Repräsentanten,
- berechnen Flächeninhalt und Umfang von Rechteck, Dreieck und Kreis sowie daraus zusammengesetzten Figuren,
- berechnen Volumen und Oberflächeninhalt von Prisma, Pyramide, Zylinder, Kegel und Kugel sowie daraus zusammengesetzten Körpern,

- berechnen Streckenlängen und Winkelgrößen, auch unter Nutzung von trigonometrischen Beziehungen und Ähnlichkeitsbeziehungen,
- nehmen in ihrer Umwelt gezielt Messungen vor, entnehmen Maßangaben aus Quellenmaterial, führen damit Berechnungen durch und bewerten die Ergebnisse sowie den gewählten Weg in Bezug auf die Sachsituation.

(KMK, 2004, 10 f.)

(L3) Leitidee Raum und Form. Die Schülerinnen und Schüler

- erkennen und beschreiben geometrische Strukturen in der Umwelt,
- operieren gedanklich mit Strecken, Flächen und Körpern,
- stellen geometrische Figuren im kartesischen Koordinatensystem dar,
- stellen Körper (z. B. als Netz, Schrägbild oder Modell) dar und erkennen Körper aus ihren entsprechenden Darstellungen,
- analysieren und klassifizieren geometrische Objekte der Ebene und des Raumes,
- beschreiben und begründen Eigenschaften und Beziehungen geometrischer Objekte (wie Symmetrie, Kongruenz, Ähnlichkeit, Lagebeziehungen) und nutzen diese im Rahmen des Problemlösens zur Analyse von Sachzusammenhängen,
- wenden Sätze der ebenen Geometrie bei Konstruktionen, Berechnungen und Beweisen an, insbesondere den Satz des Pythagoras und den Satz des Thales,
- zeichnen und konstruieren geometrische Figuren unter Verwendung angemessener Hilfsmittel wie Zirkel, Lineal, Geodreieck oder dynamische Geometriesoftware,
- untersuchen Fragen der Lösbarkeit und Lösungsvielfalt von Konstruktionsaufgaben und formulieren diesbezüglich Aussagen,
- setzen geeignete Hilfsmittel beim explorativen Arbeiten und Problemlösen ein.

(KMK, 2004, 11 f.)

In der gymnasialen Oberstufe besteht Geometrieunterricht ausschließlich aus analytischer Geometrie. Entsprechende inhaltsbezogene Kompetenzen sind in den Bildungsstandards für die allgemeine Hochschulreife (KMK, 2012) ebenfalls unter den Leitideen *Messen* und *Raum und Form* gefasst.

Bezogen auf die Leitidee *Messen* gibt es zwei geometriebezogene Kompetenzen, die anderen Kompetenzen beziehen sich auf Analysis (Steigungen, Änderungsraten, Bestände) und Stochastik. Diese lauten

Die Schülerinnen und Schüler können

- Streckenlängen und Winkelgrößen im Raum auch mithilfe des Skalarprodukts bestimmen,

[...]

- Inhalte von Flächen, die durch Funktionsgraphen begrenzt sind, bestimmen.

[...]

(KMK, 2012, S. 19)

Für das erhöhte Anforderungsniveau kommen noch zwei weitere Kompetenzen hinzu:

Die Schülerinnen und Schüler können darüber hinaus

- Abstände zwischen Punkten, Geraden und Ebenen bestimmen,
- das Volumen von Körpern bestimmen, die durch Rotation um die Abszissenachse entstehen.

(KMK, 2012, S. 19)

Zur Leitidee *Raum und Form* werden folgende Kompetenzen genannt:

Die Schülerinnen und Schüler können

- geometrische Sachverhalte in Ebene und Raum koordinatisieren,
- elementare Operationen mit geometrischen Vektoren ausführen und Vektoren auf Kollinearität untersuchen,
- das Skalarprodukt geometrisch deuten,
- Vektoren beim Arbeiten mit geradlinig bzw. ebenflächig begrenzten geometrischen Objekten anwenden,
- Geraden und Ebenen analytisch beschreiben und die Lagebeziehungen von Geraden untersuchen.

Die Schülerinnen und Schüler können darüber hinaus

- die Lagebeziehungen von Geraden und Ebenen untersuchen.

(KMK, 2012, S. 19)

4.2 Fachmathematische Hintergründe von Geometrieunterricht

Um fachmathematisches Wissen und Können im Sinne von Kapitel 2 funktional beim Unterrichten von Geometrie einsetzen zu können, muss zunächst geklärt werden, welche Bereiche der akademischen Mathematik dafür notwendig sind. In der Tat sind schon die mathematischen Hintergründe der in Abschnitt 4.1 beschriebenen inhaltsbezogenen Kompetenzen breit gefächert. Dieses Erkenntnis werde ich bei der Begründung von Planungsentscheidungen für eine Geometrieveranstaltung für Lehramtsstudierende (Abschnitt 7.1) wieder aufgreifen.

Direkt ins Auge sticht die *ebene axiomatische Geometrie*. Sie liefert Hintergründe für ebene Elementargeometrie, wie sie in der Mittelstufe unterrichtet wird. Den fachlichen Hintergrund für die analytische Geometrie der Oberstufe liefern, weitgehend disjunkt davon, die klassische lineare Algebra sowie gelegentlich angebotene Veranstaltungen zur linearen Algebra und analytischen Geometrie.

In den obigen Curriculums-Auszügen wird deutlich, dass im Geometrieunterricht das *Messen* eine wesentliche Rolle spielt. Zwar spielt die Länge von Strecken und die Größe von Winkeln auch in der ebenen axiomatischen Geometrie und der linearen Algebra eine Rolle, aber für alle tiefergehenden Fragen des Messens liefert die Maß- und Integrationstheorie die Fundierung. Den fachlichen Hintergrund für Konstruktionen liefert die Algebra. Und hinter der Klassifikation geometrischer Figuren und Körper über Ecken, Kanten oder Flächen, verbirgt sich die Graphentheorie.

Diese Vielfalt der fachinhaltlichen Perspektiven lässt sich gut am Begriff der *Strecke* veranschaulichen. Aus Sicht der ebenen Geometrie sind Strecken die Menge aller Punkte, die *zwischen* zwei Punkten liegen. Dabei beschreibt *zwischen* eine Ordnungsrelation auf Geraden (vgl. Abschnitt 9.3).

In der analytischen Geometrie sind Strecken Teilmengen eindimensionaler affiner Untervektorräume, die durch ein geschlossenes Intervall parametrisiert werden. Bezogen auf das Messen werden diese Parametrisierungen als stetige Wege aufgefasst, denen eine Länge über infinitesimal kurze Streckenzüge zugeordnet wird. Aus Sicht der Konstruktionen werden Äquivalenzklassen von Strecken mit den reellen Zahlen identifiziert und zur Beschreibung von möglichen und unmöglichen Konstruktionen bezogen auf bestimmte Konstruktionswerkzeuge genutzt. Geht es um die Klassifikation geometrischer Figuren und Körper, werden Strecken (z. B. zwischen Eckpunkten) als Kanten im graphentheoretischen Sinne aufgefasst. Je nach Unterrichtskontext muss eine Lehrperson alle diese Perspektiven einnehmen und flexibel zwischen ihnen wechseln können.

Es wird deutlich, dass sich hinter der Schulgeometrie eine Vielzahl unterschiedlicher Bereiche der akademischen Mathematik verbergen. Allerdings sind nicht alle dieser Bereiche standardmäßig auch Inhalte im Lehramtsstudium. Während Lineare Algebra eine typische Einführungsveranstaltung ist (aber auch sehr ungeometrisch mit einem stark algebraischen Fokus gelesen werden kann), spielt axiomatische ebene Geometrie im Fachstudium meist eine sehr untergeordnete Rolle und tritt höchstens in lehramtseigenen Veranstaltungen auf. Die Art von Geometrie, die im Fachstudium vorkommt – und für die Lehramtsstudierenden zumeist eine Vertiefungsoption darstellt – ist vor allem Differenzialgeometrie, algebraische Geometrie und/oder hyperbolische Geometrie¹⁷.

Unabhängig davon, wie man zu Qualität und Quantität von Mathematikveranstaltungen im Lehramtsstudium steht, gibt es eine offensichtliche Lücke bezogen auf Elementargeometrie. Diese wird durch den üblichen Veranstaltungskanon des Fachstudiums nicht abgedeckt. Die Konsequenz ist die unbedingte Notwendigkeit einer lehramtseigenen Veranstaltung zur Geometrie. Ansonsten bleibt die Mittelstufengeometrie ein Themenbereich, für den die Studierenden keinen funktional nutzbaren mathematischen Hintergrund besitzen.

¹⁷An dieser Stelle ist – gerade im Kontext dieser Arbeit zur ebenen Geometrie – anzumerken, dass die Relevanz der hyperbolischen Geometrie (insbesondere der zweidimensionalen) im Fachstudium weniger von Ihrer Rolle als Modell für einer Geometrie ohne gültiges Parallelenaxiom rührt, sondern in Querverbindungen zur Zahlentheorie und zur Theorie dynamischer Systeme begründet ist.

Kapitel 5

Lernmethodischer Hintergrund: Portfolioarbeit

In Kapitel 3 habe ich die Veränderungen von Beliefs und Orientierungen bezogen auf die Anschlussfähigkeit des erlernten Fachwissens als eine Herausforderung zur Überwindung der zweiten Diskontinuität herausgestellt („subjektive Facette“ der zweiten Diskontinuität, S. 31). Die dazu notwendigen Reflexionsprozesse müssen methodisch in Lehrveranstaltungen integriert werden. Ich folge dem Projekt *dikopost* (Digitales Kompetenzporfolio für Studierende) der Universität Darmstadt (vgl. bspw. Siebenhaar, Scholz, Karl, Hermann & Bruder, 2013) und nutze zu diesem Zweck Portfolios.

In diesem Abschnitt fasse ich generelle theoretische Hintergründe zum Einsatz von Portfolios bei der Gestaltung von Lernprozessen zusammen. Dabei gehe ich speziell auf die Nutzung von ePortfolios in der Hochschullehre ein. In Abschnitt 8.1 stelle ich dann im Detail das in diesem Projekt verwendete Konzept eines elektronischen *Schnittstellen-ePortfolios* vor.

5.1 Zum Begriff *Portfolio*

Häcker (2011, S. 33) beschreibt das Portfolio als eine aus der pädagogischen Praxis entstandene Idee mit vielen unterschiedlichen expliziten Umsetzungen. Erst im Nachhinein wurde versucht, diese Idee auf einer höheren Ebene konzeptionell zu fassen. Hinter diesem Versuch verbirgt sich die Suche nach einer als Definitionsgrundlage geeigneten Kernidee. Angesichts der Vielzahl an Methoden, die den Namen Portfolioarbeit tragen, wird es weder möglich sein, noch dem Konzept gerecht werden, eine enge Definition des Begriffs zu formulieren, die es erlaubt von *dem* Portfolio zu sprechen (Häcker, 2011).

Trotzdem ist es möglich, typische Merkmale des Portfolioeinsatzes zu identifizieren. Dazu stelle ich verschiedene Zugänge zum Portfoliobegriff vor.

Häcker (2011) fasst Metaphoriken aus unterschiedlichen Einsatzszenarien von Portfolios zusammen und schlägt folgende Begriffsannäherung vor:

Portfolios **verbinden Produkt und Prozess**. Sie gestatten den Autoren und Betrachtern, die Lernprodukte und den Lernprozess gemeinsam in den Blick zu nehmen und zu beurteilen. Die Verbindung von Produkt- und Prozessdarstellung erfordert ein **Höchstmaß an Reflexion** und eröffnet die Möglichkeit, Leistungsbeurteilung zum integralen Bestandteil eines übergreifenden, fortlaufenden Lernprozesses zu machen [...].

Häcker (2011, S. 35, Hervorhebungen: MH)

Die im Zitat hervorgehobenen Aspekte (Verbindung von *Produkt* und *Prozess*, *Reflexion*) werden auch von anderen Autoren als wesentliche Charakteristika der Portfolioarbeit identifiziert: Bräuer (2014, S. 30 f.) sieht das Portfolio als schriftliches Kommunikationsmedium beim Einsatz der sogenannten *reflexiven Praxis*, wobei „erst das kontinuierliche Zusammenspiel von Prozess und Produkt die Portfolioarbeit für alle Beteiligten [...] im Sinne von nachhaltig wirkender Bildungsarbeit fruchtbar werden lässt“ (Bräuer, 2014, S. 93).

Als mögliche, sehr allgemein gehaltene, Definition wird an verschiedenen Stellen (bspw. Häcker, 2011, S. 36; Ballweg, Scholz, Richter und Bruder, 2013, S. 189; Bräuer, 2014, S. 73; R. Bauer und Baumgartner, 2012, S. 9) auf Paulson, Paulson und Meyer (1991) verwiesen:

A portfolio is a purposeful collection of student work that exhibits the students efforts, progress, and achievements in one or more areas. The collection must include student participation in selecting contents, the criteria for selection, the criteria for judging merit, and evidence of student self-reflection.“¹⁸

(Paulson et al., 1991, S. 60)

Dieser Vorschlag betont kooperative Aspekte und stellt die Mitbestimmung insbesondere des Lernenden in den Vordergrund. Häcker (2011, S. 37) charakterisiert den Definitionsversuch durch die drei Prinzipien Kommunikation, Transparenz und Partizipation.

Die bis hier genannten Beispiele zeigen, welche Aspekte ein Portfolio ausmachen. Die Beispiele lassen allerdings Spielraum, wie die einzelnen Aspekte gewichtet werden. In der Tat zeigen die Praxisbeispiele, dass diese Gewichtung sehr unterschiedlich sein kann. Häcker (2005, S. 15) sieht diese Justierungsmöglichkeiten als wesentlichen Teil des Portfoliokonzeptes und schlägt ein dreidimensionales Modell zur Charakterisierung und Unterscheidung von Portfolioarten vor. Die dabei verwendeten Dimensionen / Kategorien (samt definierender Leitfragen) sind: „*Zweck* (Wozu wird das Portfolio erstellt?), *Inhalte* (Was kommt ins Portfolio hinein?) und *Entscheidung* (Bei wem liegen die Entscheidungen?)“ (Häcker, 2005, S. 15, Hervorhebungen: MH). Diese spannen den „Portfolioraum“ aller möglichen Portfolio-„Spielarten“ auf (Häcker, 2011, S. 38), der wie in Abbildung 5.1 dargestellt werden kann.

Das Modell liefert die Möglichkeit, ein Portfoliokonzept strukturiert zu charakterisieren. Dabei reicht das Spektrum vom „Portfolio als Entwicklungsinstrument“ (links unten) wie beispielsweise ein Portfolio, dass ein Junglehrer für sich selbst zur Reflexion seiner Unterrichtspraxis führt, bishin zum „Leistungsbeurteilungsinstrument“ (rechts oben), wie beispielsweise ein Bewerbungsportfolio für ein Kunststudium.

¹⁸Häcker (2011, S. 36) schlägt als Übersetzung vor: „Ein Portfolio ist eine zielgerichtete Sammlung von Arbeiten, welche die individuellen Bemühungen, Fortschritte und Leistungen der/des Lernenden auf einem oder mehreren Gebieten zeigt. Die Sammlung muss die Beteiligung der/des Lernenden an der Auswahl der Inhalte, der Kriterien für die Auswahl, der Festlegung der Beurteilungskriterien sowie Hinweise auf die Selbstreflexion der/des Lernenden einschließen.“

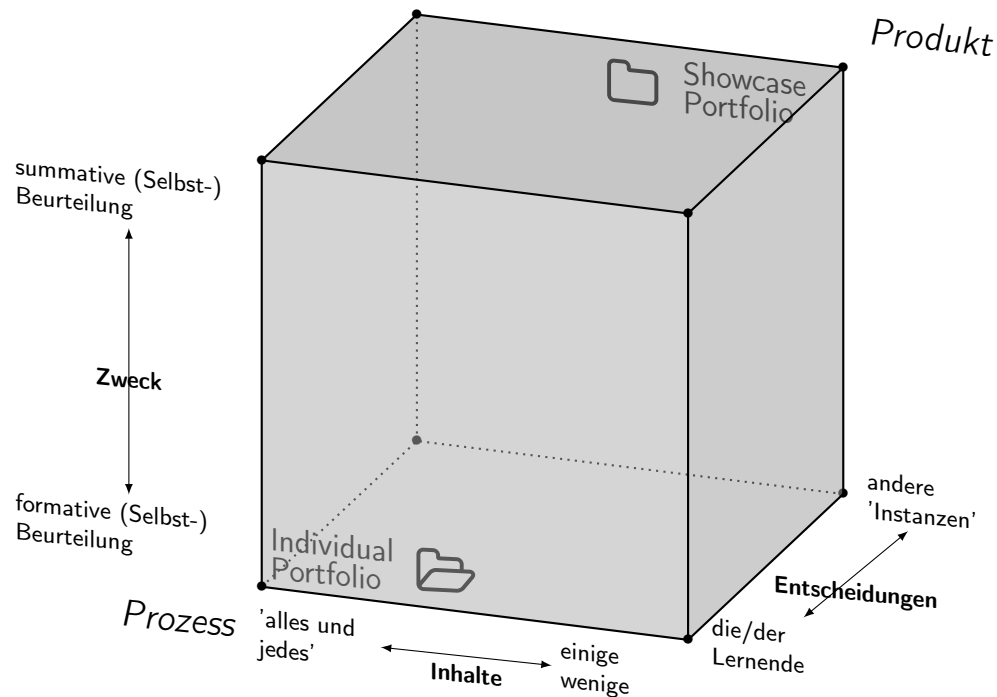


Abbildung 5.1: Dimensionen zur Charakterisierung und Unterscheidung von Portfolioarbeiten. Abgezeichnet nach Häcker (2005, S. 15), Häcker (2011, S. 38).

5.2 Portfolioarbeit als Prozess

Neben seinen oben referenzierten Überlegungen begrifflicher Art schlägt Häcker (2005, S. 15 ff.) als weitere Komponente zur strukturierten Beschreibung des Portfolioeinsatzes ein sechsstufiges Prozessmodell zur Portfolioarbeit vor. Dieses ist in der Schulpraxis entwickelt worden und legt eine Sichtweise auf das Portfolio als Medium zur Reflexion, Steuerung und Dokumentation einer beliebigen Projektarbeit¹⁹ zugrunde. Dieser Ansatz ist kohärent mit der oben vorgestellten Definition. Die sechs Phasen sind durch folgende Kernideen gekennzeichnet:

1. **Context definition.** Im Sinne maximaler Transparenz und der in der Definition geforderten *student participation* werden zu Beginn des Projektes Anforderungen und Handlungsspielräume besprochen. (Häcker, 2005, S. 15)
2. **Collection.** Grundsätzlich wird zunächst alles, was im Rahmen der Arbeit an den zu dem Projekt zugehörigen Lernzielen entsteht, in einem so genannten *Container* gesammelt. Es wird explizit noch keine Auswahl getroffen. (Häcker, 2005, S. 16)
3. **Selection.** Für das Portfolio wird eine begründete Auswahl von *Container*-Elementen getroffen. (Häcker, 2005, S. 16)
4. **Reflexion.** Reflexive Elemente / Arbeitsaufträge stellen einen wesentlichen Teil der Portfolioarbeit dar (siehe auch oben). Reflexionen können mündlich (bspw. im Gespräch mit der Lehrper-

¹⁹Als Ausgangspunkt für ein solches Projekt nennt Häcker (2005, S. 15) „ein selbst- oder fremd gesetztes Problem, eine Frage, eine Themen- bzw. Aufgabenstellung“.

son) oder in schriftlicher Form (bspw. Vor- bzw. Nachwort an einen fiktiven Leser) stattfinden. (Häcker, 2005, S. 16)

5. Projection. Am Ende der Portfolioarbeit werden (bspw. im Rahmen des unter *reflexion* erwähnten Nachwortes) „Konsequenzen aus den gewonnenen Einsichten“ sowohl inhaltlicher, als auch lernorientierter Natur für weitere Lernprozesse gezogen. (Häcker, 2005, S. 16)

6. Presentation. Abschließend wird das Portfolio im Rahmen der in *context definition* festgelegten Parameter veröffentlicht. „Das Portfolio wird nach seiner Fertigstellung zu einem Medium gemeinsamer Betrachtung, Kommunikation und Beurteilung zwischen der Schüler(in) und ihren Mitschüler(innen), ihrer Lehrer(in) und ggf. auch ihrer Eltern.“ (Häcker, 2005, 17, sic)

Zwar wurde das Phasenmodell für den Schulkontext formuliert, doch spielt das spezielle Lernumfeld Schule keine so entscheidende Rolle, dass es nicht durch die Hochschule ersetzt werden kann. Dieses Stufenmodell bildet zusammen mit dem oben beschriebenen dreidimensionalen „Portfolioraum“ (Abbildung 5.1) die Grundlage für eine theoriegeleitete Konzeption des Portfolioeinsatzes in der Veranstaltung *Geometrie für Lehramtsstudierende*.

5.3 ePortfolios

Im Rahmen der Geometrieveranstaltung soll das Portfolio nicht in klassischer Papierform, sondern elektronisch als *ePortfolio* geführt.

ePortfoliokonzepte vereinen den in 5.1 beschriebenen Portfoliogedanken mit der Nutzung digitaler Technologien; man erhält im wesentlichen „Digitale Sammelmappen“ (R. Bauer und Baumgartner, 2012, S. 9; Siebenhaar et al., 2013, S. 407). Diesen Kerngedanken präzisieren R. Bauer und Baumgartner (2012) im Rahmen folgender Definition:

Ein E-Portfolio ist eine spezifische Form eines Content-Management-Systems (CMS), das als eine elektronische Sammlung von digitalen Artefakten und deren Zurschaustellung fungiert, zu denen verschiedene Gruppen von NutzerInnen unterschiedliche Zugänge (Schreib- und Leserechte) haben. Es erlaubt eine Verknüpfung von Lernprodukt und Lernprozess und schafft dadurch eine Basis für die Dokumentation, Reflexion und Präsentation des eigenen Lernens.

R. Bauer und Baumgartner (2012, S. 56)

In dieser Definition werden unmittelbar zwei Aspekte deutlich, in denen sich die Funktionalität eines ePortfolios von der eines analogen Portfolios abhebt: Der Begriff *Artefakt* macht deutlich, dass sich die Sammlung nicht auf Textdokumente und gegebenenfalls Zeichnungen beschränkt ist. Genauso können beispielsweise Audio- und Videodateien, Speicherstände aus Lernsoftware (wie GeoGebra-Dateien) oder selbst programmierte Computerprogramme eingefügt werden. Darüber hinaus können diese Artefakte untereinander oder beispielsweise mit Lernzielen verlinkt werden. Das entstehende nicht-lineare Netzwerk unterstützt den Reflexionsprozess (R. Bauer & Baumgartner, 2012, S. 56). Als zweiter Aspekt wird explizit auf eine klassische Benutzerrechteverwaltung verwiesen, wie sie typisch für Content-Management-Systeme ist.

Weitere Vorteile von ePortfolios nennen Hilzensauer und Hornung-Prähauser (2006)²⁰: Multimediale Präsentation und Verknüpfung von Portfolioelementen (Ansprechen aller Sinneskanäle); Speicherbarkeit, Sicherbarkeit und Duplizierbarkeit; orts- und zeitungebundener Zugriff; Förderung von Medienkompetenz. Brunner und Born (2007) nennen schnelle und zeitlich passende Reaktionsmöglichkeiten als weitere in der Praxis wertvolle Vorteile gegenüber dem analogen Portfolio.

Speziell für den Einsatz in dem in dieser Arbeit vorgestellten Projekt ergibt sich als weiterer Vorteil, dass alle Portfolioaktivitäten für Forschungszwecke digital zur Verfügung stehen (und zwar pseudonymisiert, siehe Abschnitt 8.1).

5.4 ePortfolios speziell in universitären Mathematikveranstaltungen

In der Literatur findet man verschiedene Beispiele für den Einsatz von Portfolios in der Lehre (sowohl elektronisch als auch klassisch, sowohl in Schule als auch Hochschule). In diesem Abschnitt stelle ich das Projekt *dikopost* (Digitales Kompetenzportfolio für Studierende) der Universität Darmstadt (vgl. bspw. Siebenhaar et al., 2013) vor. Es liefert ein Rahmenkonzept zum begleitenden Portfolioeinsatz in Universitätsveranstaltungen, das insbesondere auch im Rahmen einer Mathematikdidaktikvorlesung angewandt wurde.

Bei der Umsetzung von ePortfolio-Konzepten in *dikopost* werden vier notwendige Komponenten beschrieben (siehe dazu: Ballweg et al., 2013, S. 190 f. Bruder, Scholz und Menhard, 2012, S. 3; Menhard, Scholz und Bruder, 2012, S. 53; Siebenhaar et al., 2013, S. 409):

1. Die Lehrperson erstellt (ggf. zusammen mit den Lernenden) ein schriftlich fixiertes *Kompetenzprofil / Kompetenzraster*. Auf dieses wird während der Veranstaltung im Allgemeinen und der eigentlichen ePortfolioarbeit im Speziellen Rückbezug genommen. Passend dazu bietet sich der Einsatz eines Selbsteinschätzungsbogens an.
2. Als *Prozessportfolio* dient das ePortfolio zum Sammeln der im Rahmen des Kompetenzerwerbs erstellten Arbeitsprodukte (sowohl Bearbeitungen vorgegebener Aufgaben als auch solche, die beim Selbstlernen entstanden sind) und zur Darstellung der eigenen Lernprozesse. Zum Semesterende werden (evtl. nach bestimmten Vorgaben) Teile des Prozessportfolios im Rahmen eines *Produktportfolios* gezielt ausgewählt und strukturiert dargestellt. Dieses bildet dann die Basis für eine abschließende Prüfung.
3. Im Semesterverlauf werden regelmäßig Anlässe zum *Feedback*-Geben (durch Lehrende, Tutoren oder Kommilitonen) und zur *Reflexion* gegeben (mündlich oder schriftlich).
4. Zum Semesterende gibt es eine *Abschlusspräsentation/-reflexion*, die durch eine benotete Prüfung ergänzt werden kann. Das Portfolio nimmt dabei eine wesentliche Rolle sein.

Die vier Komponenten sind kohärent mit den von Häcker (2005, S. 15 ff.) (S. 47) formulierten Phasen und stellen eine praxisnahe Umsetzung dieser im Hochschulkontext dar. Das später in dieser

²⁰Die entsprechende Online-Ressource ist nicht mehr verfügbar und wird hier sekundär nach R. Bauer und Baumgartner (2012, S. 10) und Siebenhaar et al. (2013, S. 407 f.) zitiert.

Arbeit vorgestellte Konzept eines Schnittstellen-ePortfolios (Abschnitt 8.1) baut auf dem *dikopost*-Ansatz auf. In Abschnitt 8.1.5 werde ich es unter Verwendung des in diesem Kapitel bereitgestellten Hintergrundes charakterisieren und theoretisch fundieren.

Teil II

Projektübersicht

Kapitel 6

Vorstellung des Projekts

Vor den in Teil I vorgestellten theoretischen Hintergründen ist das Projekt *SiMpLe-Geo* (Schnittstellen in Mathematikveranstaltungen zur professionsorientierten Lehramtsausbildung – Geometrie) angesiedelt. Darin geht es um die ganzheitliche Entwicklung und Beforschung einer Geometrieveranstaltung für das gymnasiale Lehramtsstudium. Die Veranstaltung soll zum Erwerb fachmathematischer Kompetenzen im Themenbereich Geometrie beitragen und dabei die professionsbezogenen Herausforderungen der zweiten Diskontinuität (Kapitel 3) in ihrer objektiven (S. 31) und subjektiven Facette (S. 31) berücksichtigen.

Die Veranstaltung mit dem Titel *Geometrie für Lehramtsstudierende* ist im Modulhandbuch für das dritte Studienjahr vorgesehen (Details in Abschnitt 7.1) und fand im Sommersemester 2019 zum ersten Mal statt. Diese Arbeit bezieht sich neben diesem 1. Zyklus noch auf die Veranstaltungsdurchläufe im Wintersemester 2019/2020 (2. Zyklus) und Sommersemester 2020 (3. Zyklus). In diesen Semestern habe ich die Veranstaltung im Rahmen des Projekts eigenverantwortlich konzipiert und durchgeführt. Das Projekt *SiMpLe-Geo* selbst ist damit aber noch nicht abgeschlossen; im Anschluss an diese Arbeit sollen noch weitere Daten ausgewertet werden und weitere Veranstaltungsdurchläufe durchgeführt werden (siehe Abschnitt 16.4). Anzumerken ist, dass der 3. Zyklus aufgrund der COVID-19-Pandemie als eLearning-Veranstaltung stattfinden musste und dadurch nicht wie geplant durchgeführt und beforscht werden konnte. Die daraus resultierenden Besonderheiten werde ich an den jeweiligen Stellen erläutern.

Ausgangspunkt der Veranstaltungskonzeption sind die auf Seite 35 beschriebenen *a-priori-Entwurfsprinzipien*. Im Sinne der *impliziten Professionsorientierung* musste ein inhaltliches Gesamtkonzept entwickelt werden, in das sich dann spezielle professionsorientierte Lerngelegenheiten (im Sinne der *expliziten Professionsorientierung*) sinnvoll eingliedern. Auf beiden Ebenen sind vor- und nachbereitende fachlich-didaktischen Analysen sowie die Auswertung empirisch erhobener Daten erforderlich.

Ich stelle diese unterschiedlichen Arbeitsschwerpunkte des Projekts in den folgenden beiden Teilen dieser Arbeit vor: Teil III beinhaltet die inhaltliche (Kapitel 7) und methodische (Kapitel 8) Vorstellung der Veranstaltung. Anschließend werde ich die inhaltliche Ausgestaltung durch diverse fachlich-didaktische Analysen fundieren (Kapitel 9) und abschließend Untersuchungen zu Einschätzungen der Studierenden zur Gesamtveranstaltung vorstellen (Kapitel 10).

Die Konzeption, Beforschung und darauf basierende Überarbeitung einzelner professionsorientierter Lerngelegenheiten ist Bestandteil von Teil IV. Ich beginne mit der Begründung der Auswahl von *Isometrie*, *Symmetrie* und *Kongruenz* als inhaltliche Schwerpunktthemen für professionsorientierte Lerngelegenheiten (Kapitel 11) und erläutere anschließend die forschungsmethodischen Hintergründe für diesen Teil des Projekts (Kapitel 12). Für die beiden Themenfelder *Kongruenz* und *Symmetrie* habe ich sogenannte *Schnittstellenwochen* (Abschnitt 8.2) entwickelt. Die dafür notwendigen fachlich-didaktische Analysen und darauf aufbauend konzipierte Veranstaltungsinhalte sowie erste empirische Ergebnisse der Begleitforschung stelle ich in den Kapiteln 13 und 14 vor und beschreibe daraus resultierende Überarbeitungen. In Kapitel 15 wird abschließend der Stand der Entwicklungsforschung zu den beiden Schnittstellen zusammengefasst.

Im Schlussteil der Arbeit (Teil V) fasse ich die Einsichten, die im Rahmen der Arbeit gewonnen werden konnten, sowohl aus der Perspektive der Lehrpraxis als auch aus der Perspektive der Mathematikdidaktik zusammen (Kapitel 16) und gebe einen Ausblick auf sowohl die nächsten Schritte im Rahmen von *SiMpLe-Geo* als auch auf sich anschließende Projektideen (Abschnitt 16.4).

Im aktuellen Kapitel stelle ich zunächst die dem vorgestellten Aufbau zugrundeliegenden Forschungsfragen vor (Abschnitt 6.1) und ordne die Arbeit forschungsmethodisch ein (Abschnitt 6.2).

6.1 Forschungsfragen

In dem in dieser Arbeit vorgestellten Projekt finden Veranstaltungskonzeption, Begleitforschung und Überarbeitung der Veranstaltungskonzeption eng verzahnt statt. Die zugrunde liegenden Forschungsfragen lassen sich in *designbezogene* Forschungsfragen mit *konzeptuellem Schwerpunkt* und *durchführungsbezogene-empirische* Forschungsfragen unterteilen.

FF-A *designbezogene* Forschungsfragen mit *konzeptuellem Schwerpunkt*

- FF-A.1 Wie kann eine Geometrieveranstaltung inhaltlich und methodisch gestaltet sein, die den a-priori-Entwurfsprinzipien (S. 35) für Fachveranstaltungen zur Überwindung der zweiten Diskontinuität genügt?
- FF-A.2 Welche fachinhaltlichen Entwurfs-Entscheidungen unterscheiden die konzipierte Veranstaltung von alternativen Zugängen, und inwieweit ist das gewählte Vorgehen im Vergleich zu den Alternativen funktionaler für die Überwindung der zweiten Diskontinuität?
- FF-A.3 Wie können professionsorientierte Lerngelegenheiten (kurz: *Schnittstellenlerngelegenheiten*) im Kontext der Geometrieveranstaltung aussehen, die das Potenzial haben, zur Überwindung der zweiten Diskontinuität beizutragen?

FF-B *Durchführungsbezogene-empirische* Forschungsfragen

- FF-B.1 Welche professionsbezogenen Einstellungen zu fachmathematischen Veranstaltungen bringen die Studierenden mit in die Veranstaltung, und wie unterscheiden sich diese von entsprechenden Einstellungen bezogen speziell auf die Veranstaltung *Geometrie für Lehramtsstudierende*?
- FF-B.2 Welche Lernendenvoraussetzungen haben die Studierenden bezogen auf die geometrischen Konzepte *Kongruenz* und *Symmetrie*?

- FF-B.3 Wie evaluieren (insbesondere auch in Bezug auf die eigene Professionalisierung) die Studierenden die Gesamtveranstaltung und die speziellen professionsorientierten Lerngelegenheiten?
- FF-B.4 (*Ausblick*) Inwieweit initiieren die professionsorientierten Lerngelegenheiten (Schnittstellenlerngelegenheiten) die durch sie intendierten Lernprozesse? Welche typischen Bearbeitungsprozesse und Hürden können beobachtet werden? (*Die Beantwortung dieser Forschungsfrage geschieht nicht mehr im Rahmen dieser Arbeit, wird aber im Forschungsdesign in Vorbereitung auf anschließende Projekte konsequent mitgedacht.*)

Die *designbezogenen* Forschungsfragen mit *konzeptuellem Schwerpunkt* FF-A zielen auf die inhaltliche und methodische Gestaltung der Gesamtveranstaltung (Forschungsfragen FF-A.1, FF-A.2) im Allgemeinen und auf die Gestaltung von Schnittstellenlerngelegenheiten (Forschungsfrage FF-A.3) im Speziellen ab. Die inhaltliche und methodische Struktur der Veranstaltung stellt ein normatives Theorieelement dar, das durch fachlich-didaktische Analysen (wie stoffdidaktische Analysen bspw. zur intellektuellen Ehrlichkeit didaktischer Elementarisierungen, fachinhaltliche Vergleiche und (Re-)Konstruktionen mathematischer Hintergrundtheorien) und die Einbeziehung und Verknüpfung verschiedener etablierter Theorieelemente (Kapitel 2, 3, 4, 5) entwickelt und initial abgesichert wird (vgl. Prediger, 2015, S. 655 f.). Die Beantwortung dieser Forschungsfragen nimmt einen großen Teil dieser Arbeit in Anspruch und bildet die notwendige Grundlage für konzeptuelle Weiterentwicklungen und empirische Untersuchungen (Forschungsfragen FF-B).

Die Beantwortung der durchführungsbezogenen-empirischen Forschungsfragen FF-B.1 und FF-B.3 soll eine erste Absicherung des Veranstaltungskonzepts mit besonderem Fokus auf die intendierte Wirkung entgegen der subjektiven Facette der zweiten Diskontinuität (S. 3.1) ermöglichen. Forschungsfrage FF-B.2 zielt speziell auf die Lernendenvoraussetzungen zu den beiden Schnittstellenwochen (Kongruenz und Symmetrie) ab und liefert damit einen wichtigen Baustein für die Entwicklungsforschungsprozesse zu diesen Themen (vgl. Kapitel 12). Die Beantwortung der Forschungsfrage FF-B.4 im Rahmen dieser Arbeit war ursprünglich ebenfalls geplant, allerdings stellte sich die Beantwortung der *designbezogenen* Forschungsfragen mit *konzeptuellem Schwerpunkt* (und damit die theoriebasierte Entwicklung der Veranstaltung) als so umfangreich und komplex heraus, dass eine Beantwortung von FF-B.4 den Umfang dieser Arbeit übersteigen würde. Dennoch ist sie hier aufgeführt, da an verschiedenen Stellen inhaltliche und methodische Entscheidungen beschrieben und Daten erhoben werden, die auf die Beantwortung der Frage in der Weiterführung des Projekts *SiMpLe-Geo* über diese Arbeit hinaus abzielen.

6.2 Einordnungen zur Art der Forschung

Die Vorstellung des Projekts und die Forschungsfragen weisen gleichermaßen Forschungsziele wie Entwicklungsziele in einem realen Lehrkontext aus. Damit wird in *SiMpLe-Geo* die oft erwähnte Kluft zwischen Theorie- und Praxis (bspw. Burkhardt und Schoenfeld (2003)) mit dem Ziel überbrückt, dass die erzielten Ergebnisse einen direkten Gewinn für Hochschullehrende darstellen.

Um diese Art von Projekt einzuordnen, kann das *Quadrantenmodell* von Stokes (2011, S. 73) verwendet werden. Der folgende Absatz gibt einen kurzen Überblick; eine ausführlichere Ausarbeitung kann man beispielsweise bei Link (2012, S. 45 ff.) nachlesen. Aufbauend auf der Erkenntnis, dass ein lineares Modell (Basic research → Applied research → Development → Production and operati-

ons) das Zusammenwirken von Forschung und Entwicklung in der Praxis nicht korrekt beschreibt, schlägt Stokes (2011, S. 10) eine Unterscheidung in zwei Dimensionen zur Beschreibung von Forschungsprojekten vor. Diese betitelt er mit „Considerations of use“ (Zielt ein Forschungsvorhaben auf praktischen Nutzen ab?) und „Quest for fundamental understanding“ (Zielt ein Forschungsvorhaben auf die Generierung neuer Erkenntnisse im Sinne der Grundlagenforschung ab?)²¹. Aus diesen Dimensionen ergibt sich, dass in Abbildung 6.1 dargestellte Modell mit vier Quadranten.

Research is inspired by:

		<i>Considerations of use?</i>	
		No	Yes
<i>Quest for fundamental understanding?</i>	Yes	Pure basic research (Bohr)	Use-inspired basic research (Pasteur)
	No		Pure applied research (Edison)

Abbildung 6.1: Quadrantenmodell nach Stokes (2011, S. 73).

Die jeweiligen Quadranten sind benannt nach berühmten Personen aus dem naturwissenschaftlich-technischen Bereich, deren Arbeit prototypisch für den jeweiligen Quadranten ist. Für die weiteren Betrachtungen relevant ist der so genannte *Pasteurs Quadrant*, der praktischen Nutzen und Potenzial für Grundlagenforschung vereint. Burkhardt und Schoenfeld (2003, S. 7) nutzen dieses Modell um eine Wunschvorstellung für Lehr-Lern-Forschung zu beschreiben, die die Theorie-Praxis-Distanz verringert.

In den Lehr-Lern-Wissenschaften im Allgemeinen und der Mathematikdidaktik im Speziellen findet man entsprechende Forschungsparadigmen unter den Begriffen *Design Research*, *Design Based Research* oder *Entwicklungsforschung*. Dabei handelt es sich nicht um ein einzelnes Paradigma, sondern um eine Vielzahl von Ansätzen mit unterschiedlichen Zielen und Schwerpunkten. Als deutschen Oberbegriff verwende ich im Folgenden (*fachdidaktische*) *Entwicklungsforschung*.

Projekte aus dem Bereich der Entwicklungsforschung können nach van den Akker, Gravemeijer, McKenney und Nieveen (2006, S. 5) durch fünf gemeinsame Eigenschaften charakterisiert werden, auf die in der einschlägigen Literatur immer wieder Bezug genommen wird (bspw. Bakker und Eerde (2015, S. 437), Link (2012, S. 102), Plomp (2013, S. 20), Zwetschler (2015, S. 107)):

- *interventionistisch*: Das Forschungsvorhaben zielt auf die Entwicklung einer Intervention in der realen Welt ab.
- *iterativ*: Das Forschungsvorhaben beinhaltet ein zyklisches Vorgehen, bestehend aus Entwicklung, retrospektiver Analyse und Überarbeitung.
- *prozessorientiert*: Das Forschungsvorhaben vermeidet Input-Output-Messungen im Rahmen eines Blackbox-Modells; stattdessen liegt der Fokus auf dem Verstehen und Verbessern von Interventionen.

²¹Die Übersetzungen der Dimensionen wurden übernommen von Link (2012, S. 48 f.).

- *nutzungsorientiert*: Das im Rahmen des Forschungsvorhabens entwickelte Design wird auch auf seine Praxistauglichkeit in realen Kontexten hin bewertet.
- *theorieorientiert*: Das im Rahmen des Forschungsvorhabens entwickelte Design basiert (zumindest teilweise) auf theoretischen Erkenntnissen und die Erprobung trägt zur Theoriebildung bei.

Plomp (2013, S. 20) schlägt (begründet durch verschiedene Literaturbeiträge) vor, diese Auflistung um einen weiteren Punkt zu erweitern:

- *Einbeziehung von Praktikerinnen und Praktikern*: Das Forschungsvorhaben beinhaltet die aktive Teilnahme oder Zusammenarbeit mit Praktikerinnen und Praktikern in allen Teilen. Dies erhöht die Chance, dass die Intervention tatsächlich relevant und praktisch für den realen Lehr-Lern-Kontext ist. Dies wiederum erhöht die Wahrscheinlichkeit für eine erfolgreiche Umsetzung.

Das Projekt *SiMpLe-Geo* erfüllt alle diese Punkte und kann damit als Entwicklungsforschungsprojekt im Sinne von van den Akker et al. (2006) und Plomp (2013) aufgefasst werden: Dadurch, dass das Projekt im Kontext einer real stattfindenden und regulär im Modulhandbuch verankerten Veranstaltung stattfindet, sind die Attribute *interventionistisch* und *nutzungsorientiert* garantiert. Die Nutzungsorientiertheit wird darüber hinaus noch dadurch unterstützt, dass im Anschluss an die in dieser Arbeit beschriebene Hauptphase des Projekts das entwickelte Konzept von mindestens einem anderen Lehrenden weiter eingesetzt wird. Außerdem werden die Arbeitsergebnisse in Form eines Lehrbuches veröffentlicht (vgl. Abschnitt 16.4).

Die *Iterativität* wurde durch die mehrfache Durchführung der Veranstaltungen in drei aufeinander folgenden Semestern gewährleistet. Die Auswertung der dabei erhobenen Daten im Sinne der Beantwortung der Forschungsfrage FF-B.2 sowie der geplanten Beantwortung der Forschungsfrage FF-B.4 sorgt für einen *prozessorientierten* Schwerpunkt des Projektes. Der in den Kapiteln 2, 3, 4 und 5 aufbereitete theoretische Hintergrund garantiert zusammen mit der Beantwortung der *designbezogenen* Forschungsfragen mit *konzeptuellem Schwerpunkt* die *Theorieorientierung*. Die im Gesamtprojekt angestrebte Theoriebildung bezieht sich sowohl auf das Lehren und Lernen einzelner geometrischer Inhalte im Hochschulkontext als auch auf den gelingenden Einsatz von Schnittstellenlerngelegenheiten.

Durch den durchgehenden Austausch mit anderen Lehrenden, die Erfahrung mit Geometrie-Veranstaltungen für Lehramtsstudierende haben (insb. Joachim Hilgert, Dieter Remus und Tobias Weich, siehe auch Abschnitt 7.3.1), wurden auch Praktiker in alle Phasen des Projekts mit einbezogen. Damit ist auch die letzte der oben genannten Anforderungen erfüllt.

Teil III

Konzeption der Veranstaltung *Geometrie für Lehramtsstudierende*

Kapitel 7

Inhaltliche Gestaltung der Veranstaltung *Geometrie für Lehramtsstudierende*

In diesem Kapitel stelle ich die Veranstaltung *Geometrie für Lehramtsstudierende* im Detail vor. Hierzu verorte ich die Veranstaltung zunächst im Lehramtsstudium an der Universität Paderborn (Abschnitt 7.1) und gebe anschließend einen Überblick über die inhaltliche Gestaltung (Abschnitt 7.2) sowie die inhaltliche Genese der Veranstaltung (Abschnitt 7.3).

7.1 Einordnung des Projekts in den Lehrbetrieb der Universität Paderborn

Die Veranstaltung ist dem fachwissenschaftlichen Teil des Bachelorstudiengangs des Lehramts Mathematik für Gymnasien und Gesamtschulen zugeordnet und findet im 6. Semester statt. Die allgemeinen Bestimmungen dieses Studiengangs legen fest, dass Studierende in fachwissenschaftlichen Veranstaltungen fachbezogene Kompetenzen in folgendem Sinne erwerben sollen:

In den fachwissenschaftlichen Studien erwerben die Studierenden ein grundlegendes, an entsprechende Masterstudiengänge anschlussfähiges Fachwissen. Die Absolventinnen und Absolventen

- haben ein solides und strukturiertes Fachwissen (Verfügungswissen) zu den grundlegenden Gebieten ihrer Fächer erworben; sie können darauf zurückgreifen und dieses Fachwissen ausbauen;
- sind mit den Erkenntnis- und Arbeitsmethoden ihrer Fächer vertraut;
- sind in der Lage, diese Methoden in zentralen Bereichen ihrer Fächer anzuwenden.

(Universität Paderborn, 2016a, S. 7)

Als ein Ziel des anschließenden Masterstudiengangs formuliert die Prüfungsordnung das Kompetenzziel

[Die Studierenden] verfügen über anschlussfähiges mathematisches und mathematikdidaktisches Wissen, das es ihnen ermöglicht, gezielte Vermittlungs-, Lern- und Bildungsprozesse im Unterrichtsfach Mathematik zu gestalten und neue fachliche und fächerverbindende Entwicklungen selbstständig in den Unterricht und in die Schulentwicklung einzubringen.

(Universität Paderborn, 2016b, S. 3)

Im Masterstudiengang ist allerdings keine verpflichtende Geometrieveranstaltung mehr vorgesehen (Universität Paderborn, 2016b) und in den letzten Jahren auch nie als Wahlmöglichkeit angeboten worden. Dies hängt vor allem damit zusammen, dass die Wahlmöglichkeiten für die Mastermodule im gymnasialen Lehramtsstudium in der Regel Bachelorveranstaltungen des zweiten Studienjahrs des Fachstudiums sind. Im Fachstudium sind allerdings keine Veranstaltungen zur Elementargeometrie vorgesehen. Also ist es Aufgabe der hier behandelten Bachelorveranstaltung *Geometrie für Lehramtsstudierende*, anschlussfähiges mathematisches Wissen zum mathematischen Teilgebiet *Geometrie* im Sinne des zweiten Zitats aufzubauen.

Dazu müssen die Inhalte der Veranstaltung überhaupt das Potenzial besitzen, anschlussfähig zu den üblichen Themen des Geometrieunterrichts (siehe Kapitel 4) zu sein, also zur Elementargeometrie der Sekundarstufe I und/oder zur analytischen Geometrie der Oberstufe.²² Die Veranstaltung *Lineare Algebra* liefert üblicherweise bereits Teile des fachlichen Hintergrundes für die analytische Geometrie. Was komplett fehlt, ist ein fachlicher Hintergrund der Elementargeometrie der Sekundarstufe I und eine Verknüpfung dieser mit der analytischen Geometrie der Sekundarstufe II. In der Veranstaltung *Geometrie für Lehramtsstudierende* muss diese Lücke gefüllt werden. Damit ist der inhaltliche Schwerpunkt der Veranstaltung klar: Elementargeometrie mit Bezügen zur analytischen Geometrie.

Die curricularen Grundlagen sind durch die Bachelor-of-Education-Prüfungsordnung (Universität Paderborn, 2016a) vorgegeben. Die Veranstaltung *Geometrie für Lehramtsstudierende* ist eine Ausgestaltung des Aufbaumoduls *Reine Mathematik*. Laut Prüfungsordnung hat das Modul einen Workload von 150 Stunden und ist dem sechsten Fachsemester zugeordnet (Universität Paderborn, 2016a, S. 20). Von diesem Workload sind für die Kontaktzeit 4 Semesterwochenstunden (2 Stunden Vorlesung, 2 Stunden Präsenzübung) vorgesehen. Das Modulhandbuch ordnet dem Modul zwei mögliche Lehrveranstaltungen zu: Die Studierenden können entweder eine Elementargeometrie-Vorlesung besuchen (die in der Regel speziell für die Lehramtsstudierenden angeboten wird) oder an der Vorlesung *Funktionentheorie* aus dem Fachmathematik-Studiengang teilnehmen. Letztere Variante ermöglicht den Studierenden, das Modul auch im Wintersemester abzuschließen, während die Elementargeometrie-Veranstaltung üblicherweise nur im Sommersemester stattfindet.

Für die Elementargeometrie-Veranstaltung fordert das Modulhandbuch unter anderem folgende fachbezogene Lernziele:

Die Studierenden

- kennen und erklären die Axiome der euklidischen Geometrie
- kennen und beschreiben ein Modell der hyperbolischen Geometrie

(Universität Paderborn, 2016a, S. 20)

²²Die Behandlung dreidimensionaler Körper in der Sekundarstufe I wird an dieser Stelle ausgeklammert. Dies wird zwar in der Schule unter dem Thema *Geometrie* geführt, ist aber aus mathematischer Sicht eher der Integrationstheorie (Volumenberechnungen) oder der Graphentheorie (Polyederklassifikation) zuzuordnen (siehe Abschnitt 4.2).

Die inhaltlichen Vorgaben lassen einen breiten Spielraum zur freien Gestaltung. Im nächsten Abschnitt stelle ich zunächst meine Ausgestaltung der Veranstaltung detaillierter vor. Anschließend beschreibe ich in Abschnitt 7.3 die Entstehungsgeschichte der Veranstaltung und welchen Beitrag andere Dozenten zur vorliegenden Gestaltung haben. Eine vertiefte Analyse insbesondere mit Vergleichen zur alternativen axiomatischen Zugängen folgt in Kapitel 9.

7.2 Überblick über Veranstaltungsinhalte und Struktur

Die Vorlesung ist in drei Teile unterteilt, wobei Teil 2 und Teil 3 aufeinander aufbauen. Zusätzlich gibt es zwei so genannte *Schnittstellenwochen* zu den Themen *Symmetrie* und *Kongruenz*. In den nächsten Abschnitten fasse ich die Inhalte der einzelnen Veranstaltungsteile kurz zusammen.

Teil 1: Geometrie mit Mitteln der linearen Algebra

Teil 2: Geometrie in metrischen Räumen

Teil 3: Geometrie mit Parallelenaxiom

Wohl wissend, dass natürlich auch die lineare Algebra auf *Axiomen* aufbaut, werde ich im folgenden trotzdem die Geometrie in metrischen Räumen und die Geometrie mit Parallelenaxiom unter dem Begriff *axiomatische Geometrie* fassen²³. Damit meine ich, dass sich die Axiome direkt auf die Beschreibung der Geometrie und nicht (wie in der linearen Algebra) auf die Beschreibung einer Struktur, zu der Geometrien ein mögliches Modell sind, beziehen.

In Tabelle 7.1 ist ein inhaltlicher Überblick über die einzelnen Semesterwochen dargestellt. Ein Kurzschrift zur axiomatischen Geometrie (Teil 2 und Teil 3) befindet sich zusätzlich in Anhang A.

7.2.1 Teil 1: Geometrie mit Mitteln der linearen Algebra

Die lineare Algebra stellt für Studierende des dritten Studienjahrs in der Regel die einzige Möglichkeit dar, systematisch und rigoros Geometrie zu betreiben. In der Veranstaltung werden die entsprechenden Vorkenntnisse der Studierenden aufgegriffen und darauf aufbauend verschiedene geometrische Konzepte in der Sprache der linearen Algebra eingeführt und erkundet. Ausgehend vom euklidischen Vektorraum $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ werden zunächst geometrische Grundbegriffe wie Geraden, Winkel und Orthogonalität definiert. Die Definitionen sind jeweils konsistent mit der analytischen Geometrie der Oberstufe mit dem Unterschied, dass in der Vorlesung kein Pfeilklassenkonzept benutzt wird. Stattdessen wird durchgehend mit Spaltenvektoren als Elementen des \mathbb{R}^2 gearbeitet. Alle Begriffe in diesem Teil der Veranstaltung sind mit dem Adjektiv *euklidisch* versehen. Dies dient zur Unterscheidung von den später in einem allgemeineren axiomatischen Kontext definierten Begriffen.

Mathematische Bemerkung 7.2.1 (Definition: Euklidische Gerade)

Seien $A, B \in \mathbb{R}^2$ verschieden. Dann bezeichnen wir mit $\mathbb{R}(B - A) + A$ die **euklidische Gerade**²⁴ durch A und B .

²³Die Bezeichnung *synthetisch* ist meiner Erfahrung nach heutzutage weniger gebräuchlich.

Inhaltsübersicht	
<i>Teil 1: Geometrie mit Mitteln der linearen Algebra</i>	
1	Organisation, Geometrie und lineare Algebra, Kongruenz, euklidische Isometrien
2	Euklidische Spiegelungen, Projektionen und Rotationen
3	Mittelsenkrechten, der Kongruenzsatz SSS und der euklidische Dreispiegelungssatz
4	Systematisierung der euklidischen Abbildungsgeometrie
5	Schnittstellenwoche Kongruenz
<i>Teil 2: Geometrie in metrischen Räumen</i>	
6	Geometrische Grundbegriffe in metrischen Räumen: Kreise, Geraden, Isometrien
7	Inzidenzaxiom, Spiegelungsaxiom und Saccheri-Ebenen, Orthogonalität
8	Punktspiegelungen und Mittelsenkrechten
9	Kongruenzsätze, Dreispiegelungssatz, Winkel sowie Winkelsätze, die das Parallelenaxiom nicht benötigen
10	Symmetrie
11	Schnittstellenwoche Symmetrie
<i>Teil 3: Geometrie mit Parallelenaxiom</i>	
12	Axiomatisierung, Parallelenaxiom und obere Halbebene, inkl. mathemathikhistorischer Hintergründe
13	Vektorraum der Parallelverschiebungen
14	Strahlensatz und Hauptsatz (isometrische Isomorphie zu (\mathbb{R}^2, d_2))

Tabelle 7.1: Inhaltlicher Überblick über die einzelnen Semesterwochen in der Version des dritten Veranstaltungszyklus (Sommersemester 2020). Die Übersicht ist angelegt auf 14 statt 15 Vorlesungswochen, da aufgrund von Feiertagen meist eine Vorlesung und eine Übung ausfällt.

Mathematische Bemerkung 7.2.2 (Definition: Euklidischer Winkel und seine Größe)

Seien $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ mit $A, C \neq B$ und g^+ bzw. h^+ die beiden euklidischen Strahlen von B durch A bzw. C . Dann definieren wir den **euklidischen Winkel** $\angle ABC$ durch (g^+, h^+) . Dabei nennen wir die beiden Strahlen die **Schenkel** und B den **Scheitel** von $\angle ABC$. Die Notation $\angle AB$ steht für $\angle AoB$, wobei o der Koordinatenursprung ist.

Für einen euklidischen Winkel $\angle ABC$ definieren wir die **euklidische Winkelgröße** durch

$$\angle ABC := \arccos \left(\frac{\langle A - B, C - B \rangle_2}{\|A - B\|_2 \|C - B\|_2} \right) \in [0, \pi]$$

Mathematische Bemerkung 7.2.3 (Definition Euklidische Orthogonalität)

Wir nennen $A, B \in \mathbb{R}^2$ **euklidisch orthogonal**, wenn $\langle A, B \rangle_2 = 0$ gilt. Zwei euklidische Geraden $g = \mathbb{R}v + w$ und $h = \mathbb{R}a + b$ (mit $a, b, v, w \in \mathbb{R}^2, v, w \neq 0$) nennen wir **euklidisch orthogonal**, wenn v und a euklidisch orthogonal sind.

Anschließend werden *euklidische Isometrien* definiert. Diese bilden die Grundlage für die Definition von Kongruenz (siehe auch Kapitel 13 für Überlegungen zur Definition des Kongruenzbegriffs).

Mathematische Bemerkung 7.2.4 (Definition: Euklidische Isometrie)

Eine Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ nennen wir eine **euklidische Isometrie**, falls φ bijektiv ist und für alle $u, v \in \mathbb{R}^2$ gilt:

$$\|\varphi(u) - \varphi(v)\|_2 = \|u - v\|_2.$$

Abstände zwischen Bildpunkten entsprechen also den entsprechenden Urbild-Abständen.

Mathematische Bemerkung 7.2.5 (Definition: Kongruenz euklidischer Figuren)

Seien $F, G \subset \mathbb{R}^2$. Wir nennen F **kongruent** zu G (Notation: $F \cong G$), falls es eine euklidische Isometrie φ mit $\varphi(F) = G$ gibt.

Danach werden im ersten Teil der Veranstaltung zwei Ziele verfolgt: Zum einen der Nachweis des Kongruenzsatzes SSS und zum anderen eine vollständige Charakterisierung der euklidischen Isometrien. Für den Beweis des Kongruenzsatzes wird ein Ansatz vorgestellt, der als weitere Konzepte nur euklidische Geradenspiegelungen sowie Mittelsenkrechten und deren Ortslinieneigenschaft benötigt. Ein Korollar dieses Satzes ist dann der bekannte *Dreispiegelungssatz*:

Mathematische Bemerkung 7.2.6 (Korollar: Euklidischer Dreispiegelungssatz)

Jede euklidische Isometrie $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lässt sich als Verknüpfung von maximal drei euklidischen Spiegelungen schreiben.

Im Kontext der Charakterisierung der euklidischen Isometrien ist ein wichtiges Teilresultat, dass die linearen euklidischen Isometrien gerade die Spiegelungen an Ursprungsgraden und die Rotationen um den Ursprung sind. Aus dem Dreispiegelungssatz wird gefolgert, dass jede euklidische Isometrie affin-linear ist. Also kann insgesamt gefolgert werden, dass jede euklidische Isometrie die Verknüpfung einer Translation (die auch die Identität sein darf) mit einer Spiegelung an einer Ursprungsgrade oder mit einer Rotation um den Ursprung ist. Durch systematisches Ausprobieren aller Varianten erhält man dann die Aussage, dass es neben Spiegelung, Rotation und Translation nur noch die Gleitspiegelung braucht, um alle Arten euklidischer Isometrien zu beschreiben. Abschließend wird noch gezeigt, wie alle diese Abbildungen im Sinne des Dreispiegelungssatzes durch Geradenspiegelungen dargestellt werden können.

7.2.2 Teil 2: Geometrie in metrischen Räumen

Der zweite Teil der Vorlesung startet mit der Behandlung geometrischer Grundbegriffe in metrischen Räumen und löst sich damit vom Fundament der linearen Algebra (in Abschnitt 7.3.2 gehe ich näher auf diesen „Neustart“ ein). Auch ohne die Forderung weiterer Axiome lassen sich hier bereits Kreise, Geraden und Isometrien definieren. Die Definition von Geraden in metrischen Räumen wird in Abschnitt 9.2 im Detail besprochen.

Mathematische Bemerkung 7.2.7 (Definition: Metrische Gerade)

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $g \subset X$ bezeichnen wir als **metrische Gerade**, wenn wir eine Abbildung $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow X$ mit den folgenden Eigenschaften finden können:

- (1) $\gamma(\mathbb{R}) = g$
- (2) $\forall t, s \in \mathbb{R} : d(\gamma(t), \gamma(s)) = |t - s|$, (*Isometrie-eigenschaft*)

Diese Abbildung nennen wir **(isometrische) Parametrisierung der metrischen Gerade g** .

Mathematische Bemerkung 7.2.8 (Definition: Isometrie)

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Eine Abbildung $\varphi : X \rightarrow Y$ heißt **Isometrie**, falls für alle $P, Q \in X$ gilt

$$d_Y(\varphi(P), \varphi(Q)) = d_X(P, Q).$$

Es können auch bereits erste Aussagen über diese Grundbegriffe bewiesen werden, insbesondere, dass bijektive Isometrien Kreise immer auf Kreise und Geraden immer auf Geraden abbilden.

Anhand von Beispielen verschiedener metrischer Räume kann gezeigt werden, dass das Konzept *metrischer Raum* alleine nicht ausreicht, um die ebene Geometrie der Mittelstufe zu beschreiben. Zum einen gibt es metrische Räume in denen zwar die Definition einer metrischen Geraden formal sinnvoll ist, es aber keine Beispiele für solche gibt (zum Beispiel bezüglich der diskreten Metrik). Zum anderen gibt es metrische Räume (zum Beispiel \mathbb{R}^2 versehen mit der 1-Norm), in denen es zu zwei verschiedenen Punkten mehr als eine metrische Gerade gibt. Beide Fälle werden mit dem *Inzidenzaxiom* ausgeschlossen, dass die Forderung nach der Existenz von höchstens *und* mindestens einer metrischen Gerade durch zwei beliebige verschiedene Punkte beinhaltet:

Mathematische Bemerkung 7.2.9 (Inzidenzaxiom)

Sei (X, d) ein metrischer Raum mit mindestens zwei Punkten. Wir sagen, dass X das **Inzidenzaxiom** der ebenen Geometrie erfüllt, falls es zu je zwei Punkten $A, B \in X$ mit $A \neq B$ genau eine metrische Gerade gibt, die A und B enthält.

Als zweites Axiom wird das *Spiegelungsaxiom* eingeführt. Es schließt zum Beispiel (\mathbb{R}^3, d_2) aus, da dort die im Axiom unter 1. formulierte Trennungseigenschaft nicht zutrifft. Metrische Räume, die beide Axiome (7.2.9 und 7.2.10) erfüllen, werden als *Saccheri-Ebene* bezeichnet. Dieser Name folgt der Bezeichnung von Iversen (1992).

Mathematische Bemerkung 7.2.10 (Spiegelungsaxiom)

Sei (X, d) ein metrischer Raum, der das Inzidenzaxiom erfüllt. Wir sagen, dass X das **Spiegelungsaxiom** der ebenen Geometrie erfüllt, wenn für jede Gerade $k \subset X$ gilt:

1. Das Komplement $X \setminus k$ der Geraden k zerfällt in genau zwei Bogenzusammenhangskomponenten. Diese nennen wir die **Seiten** von k .
2. Es gibt eine bijektive Isometrie $\sigma_k : X \rightarrow X$, die k punktweise fixiert und die beiden Seiten von k vertauscht. Eine solche Isometrie nennen wir die **Spiegelung** an k .

Mathematische Bemerkung 7.2.11 (Definition: Saccheri-Ebene)

Einen metrischen Raum (X, d) , der sowohl das Inzidenzaxiom 7.2.9 als auch das Spiegelungsaxiom 7.2.10 erfüllt, nennen wir eine **Saccheri-Ebene**.

Saccheri-Ebenen sind geeignet, viele Begriffe und Aussagen der Mittelstufengeometrie zu beschreiben. In der Vorlesung werden unter anderem Punktspiegelungen und Mittelsenkrechten behandelt und darauf aufbauend Kongruenzsätze bewiesen. Insbesondere folgt, analog zum Vorgehen im

ersten Teil der Veranstaltung, aus dem Beweis des Kongruenzsatzes SSS wieder der Dreispiegelungssatz.

Mathematische Bemerkung 7.2.12 (Korollar: Dreispiegelungssatz)

In einer Saccheri-Ebene (X, d) lässt sich jede Isometrie $\varphi : X \rightarrow X$ als Verknüpfung von maximal drei Spiegelungen schreiben.

Zusätzlich werden weitere bekannte Sätze der Schulgeometrie wie der Scheitelwinkelsatz und der Basiswinkelsatz bewiesen.

Abschließend wird der Frage nachgegangen, welche Modelle es für Saccheri-Ebenen gibt. Im Rahmen des Übungsbetriebs wird nachgewiesen, dass die aus der Schule bekannte Geometrie im Sinne des Vektorraums (\mathbb{R}^2, d_2) eine Saccheri-Ebene ist. Aber auch die obere Halbebene $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$ mit dem hyperbolischen Abstandsbegriff stellt sich als Saccheri-Ebene heraus. In der Tat sind damit (bis auf Isometrie) alle Modelle für Saccheri-Ebenen gefunden. Ein zentrales Unterscheidungsmerkmal der beiden Modelle nutzt den bisher noch nicht definierten Begriff der *Parallelität*:

Mathematische Bemerkung 7.2.13 (Definition: Parallelität)

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Wir bezeichnen zwei Geraden $g, h \subset X$ als **parallel** (kurz: $g \parallel h$), wenn $h \cap k = \emptyset$ oder $h = k$ gilt.

In der oberen Halbebene sind Parallelen durch einen Punkt zu einer Geraden nicht eindeutig. Dies motiviert ein weiteres Axiom und leitet zum dritten und letzten Teil der Veranstaltung über.

7.2.3 Teil 3: Geometrie mit Parallelenaxiom

Im dritten Teil der Veranstaltung stehen Saccheri-Ebenen im Mittelpunkt, die zusätzlich noch das sogenannte *Parallelenaxiom* erfüllen. Diese werden als *euklidische Ebenen* bezeichnet.

Mathematische Bemerkung 7.2.14 (Parallelenaxiom)

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Wir sagen, dass X das **Parallelenaxiom** erfüllt, wenn es zu jeder Geraden $g \subset X$ und jedem Punkt $P \in X$ genau eine Gerade $h \subset X$ mit $P \in h$ gibt, die parallel zu g ist.

Mathematische Bemerkung 7.2.15 (Definition: Euklidische Ebenen)

Wir nennen eine Saccheri-Ebene eine **euklidische Ebene**, wenn sie das Parallelenaxiom 7.2.14 erfüllt.

Ziel dieses Veranstaltungsabschnitts ist der Beweis des Hauptsatzes über euklidische Ebenen.

Mathematische Bemerkung 7.2.16 (Hauptsatz über euklidische Ebenen)

Jede euklidische Ebene ist isometrisch isomorph zu (\mathbb{R}^2, d_2) .

Dieses Resultat liefert, dass durch euklidische Ebenen tatsächlich genau die Art ebener Geometrie beschrieben wird, die in der Sekundarstufe behandelt wird.

Als entscheidend für den Beweis erweist sich die Einführung einer weiteren Struktur auf den euklidischen Ebenen. Es werden *Parallelverschiebungen* definiert und dann gezeigt, dass diese einen reellen zweidimensionalen Vektorraum bilden. Die dafür notwendigen Rechenoperationen werden über elementargeometrische Überlegungen definiert. So wird zum Beispiel die Skalarmultiplikation über zentrische Streckungen umgesetzt.

Der Hauptsatz schlägt insbesondere den Bogen zurück zum ersten Teil der Veranstaltung, da er zeigt, dass euklidische Ebenen bis auf Isomorphie genau dem dort im Fokus stehenden Vektorraum entsprechen.

7.2.4 Schnittstellenwochen

Zusätzlich zu den eigentlichen Veranstaltungswochen gibt es noch zwei sogenannte *Schnittstellenwochen* zu den Themen *Kongruenz* und *Symmetrie*. In diesen Veranstaltungswochen geht es speziell darum, aufzuzeigen, wie das in der Veranstaltung erworbene Fachwissen professionsorientiert genutzt werden kann. Das Konzept stelle ich in Abschnitt 8.2 näher vor, die inhaltlichen Details führe ich in den Kapiteln 13 und 14 aus. Die Wahl der Themen Kongruenz und Symmetrie als Inhalte für die Schnittstellenwochen begründe ich in Kapitel 11.

7.3 Anmerkungen zur Genese des Vorlesungskonzepts

Ich habe die Veranstaltung nicht alleine ausgearbeitet. In seiner jetzigen Form ist der inhaltliche Aufbau das Ergebnis eines mehrjährigen Prozesses, der im Jahr 2012 (im Rahmen einer Vorgängerveranstaltung im 2. Semester, vgl. Abschnitt 7.3.1) beginnt und an dem mehrere Personen beteiligt waren. Ich selbst habe diese Veranstaltung als Student besucht und in den darauf folgenden Jahren regelmäßig als studentische Hilfskraft und wissenschaftlicher Mitarbeiter betreut, bis ich sie dann im Rahmen dieses Projektes selbst übernommen und weiterentwickelt habe. In diesem Abschnitt gebe ich dazu zunächst einen allgemeinen Überblick und gehe dann im Detail auf einige wichtige Schritte der Weiterentwicklung ein.

7.3.1 Vorgängerveranstaltung: *Grundlagen der Geometrie* (2. Semester)

Das Axiomensystem der Saccheri-Ebene geht auf ein ausgearbeitetes Vorlesungsmanuscript von Birger Iversen zurück, das unter dem Titel „An Invitation to Geometry“ veröffentlicht worden ist (Iversen, 1992). Folgende Ausschnitte aus der Einleitung des Originaltextes geben einen guten Eindruck in das Programm des Buches:

These notes take the reader for a tour into the geometry of the plane through a systematic study of three axioms. Let us agree that a plane is a metric space X which satisfies the incidence axiom and the reflection axiom to be presented below. But first we must agree that a geodesic curve in a metric space X is a distance preserving map $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow X$ and geodesic line is the image set of a geodesic curve. [...] The purpose of these notes is to provide a proof of the following **Classification Theorem**: A plane which satisfies the parallel axiom is isometric to the Euclidean plane, while a plane which does not satisfy the parallel axiom is isometric to H^2 after rescaling.

(Iversen, 1992, INTRODUCTION)

In der von 2011 bis 2016 gültigen Prüfungsordnung (UPB, 2011) für das gymnasiale Mathematiklehramtsstudium war eine Geometrieveranstaltung (3+2 SWS) für das zweite Semester vorgesehen. Diese wurde 2012 von Joachim Hilgert nach dem Text von Iversen (1992) ausgestaltet (Hilgert, 2012) und 2014 in einem erneuten Durchlauf der Veranstaltung überarbeitet (Hilgert, 2014). Der inhaltliche Aufbau folgte den Abschnitten I und II von Iversen (1992); Abschnitt III (Iversen, 1992, S. 86 ff.), der sich mit axiomatischer hyperbolischer Geometrie beschäftigt, wurde in der Vorlesung nicht behandelt. Dafür gab es jedoch einen längeren Vorlauf zu den Metriken, Normen, inneren Produkten und Winkeln (Hilgert, 2014, S. 1 ff.) sowie je einen kurzen Abschnitt zu linearen euklidischen Isometrien und zur analytischen Geometrie. Diese Themen werden im Originaltext nicht ausgeführt, waren aber aufgrund der Verortung im zweiten Semester erforderlich, da die Studierenden zu diesem Zeitpunkt keine weiterführenden Vorlesungen zur Analysis und zur linearen Algebra belegt hatten. Die inhaltliche Gestaltung der Veranstaltung war durch das Ziel motiviert, Lehramtsstudierenden in der zur Verfügung stehenden Zeit einen an ihre Vorkenntnisse anschlussfähigen und effizienten axiomatischen Zugang zur Elementargeometrie vorzustellen²⁵. Reihenfolgen und viele Formulierungen (in übersetzter Form) wurden aus Iversen (1992) übernommen.

Im Sommersemester 2016 wurde die Veranstaltung von Tobias Weich gelesen und dabei die bestehende inhaltliche Konzeption der Veranstaltung mit anderen Schwerpunktsetzungen weiter ausgebaut (Weich, 2016). Ein wesentlicher Unterschied liegt in der intensiveren Behandlung geometrischer Grundbegriffe (Kreis, Gerade, Winkel, Isometrie) aus der Perspektive von metrischen Räumen, normierten Vektorräumen und euklidischen Vektorräumen. Die Behandlung von Saccheri-Ebenen erfolgte analog zu Hilgert (2014). Änderungen gab es im Bereich der euklidischen Ebene. Hier wurde die Rolle von Parallelverschiebungen als Pendant zu den Vektoren aus der analytischen Geometrie im Mathematikunterricht stärker betont. Dies führte insbesondere zu einer kleinschrittigeren Vorbereitung des Beweises des Hauptsatzes euklidischer Ebenen. Zusätzlich wurde das Skript durch Metaüberlegungen zum Theorieaufbau und zum mathematischen Arbeiten ergänzt.

Die Veranstaltung fand im zweiten Semester (also nach der alten Prüfungsordnung (UPB, 2011)) zum letzten Mal im Sommersemester 2017 statt und wurde von Dieter Remus gelesen. Sein Skript (Remus, 2017) folgt dem Vorgehen von Weich (2016), geht aber noch tiefer auf die Theorie normierter Räume ein. Dabei wird allgemein gezeigt, für welche normierten Räume alle metrischen Geraden Vektorraumgeraden sind.

7.3.2 *Geometrie für Lehramtsstudierende (4. Semester)*

Für die Durchführung der Veranstaltung (jetzt im sechsten Semester) im Sinne der neuen Prüfungsordnung (Universität Paderborn, 2016a) habe ich diese bestehenden Skripte (Hilgert, 2014; Weich, 2016; Remus, 2017) als Grundlagen für mein eigenes Vorlesungskonzept verwendet. Die im Vergleich zur in Abschnitt 7.3.1 beschriebenen Vorgängerveranstaltung reduzierte Stundenzahl machte es nötig, Veranstaltungsinhalte wegzulassen. Dem kam entgegen, dass ein größeres Vorwissen vorausgesetzt werden konnte. In den Veranstaltungen Lineare Algebra (I+II) und Analysis (I+II) wurden folgende für die Vorlesung relevante Themen bereits behandelt: Metriken, Normen, Skalarprodukte und Zusammenhänge zwischen diesen Begriffen (z.B. induzierte Metrik, induzierte Norm), lineare Abbildungen und deren Darstellungsmatrizen, endlichdimensionale reelle Vektorräume, Stetigkeit in metrischen Räumen. Weiter habe ich auf die axiomatische Einführung des Bogenmaßes zur Beschreibung von Winkelgrößen verzichtet. In der Vorlesung wurde zwar erwähnt,

²⁵Diese Motivation ist zitiert nach persönlichen Gesprächen mit Joachim Hilgert.

dass jedem Winkel eine Größe zugeordnet werden kann und dass zwei Winkel genau dann kongruent sind, wenn sie die gleiche Winkelgröße haben, auf Beweise wurde aber auf Zeitgründen verzichtet (siehe S. 354 in Abschnitt A.8 des Kurzschriftes im Anhang).

Die in Tabelle 7.1 auf Seite 64 dargestellte inhaltliche Struktur enthält neben diesen Kürzungen auch inhaltliche Weiterentwicklungen. Über diese gebe ich nachfolgend einen kurzen Überblick und verweise für die Details auf jeweilige andere Abschnitte dieser Arbeit.

Eine wesentliche Neuerung besteht in *Teil 1: Geometrie mit Mitteln der linearen Algebra* (siehe Abschnitt 7.2.1). Auch in der Vorgängerveranstaltung wurde der euklidische Raum \mathbb{R}^2 behandelt, allerdings nur in seiner Rolle als Modell einer Saccheri-Ebene. Im Teil 1 der Vorlesung wurde eine für sich stehende konsistente Theorie von (\mathbb{R}^2, d_2) aufbauend auf den Vektorraumaxiomen vorgestellt. Entsprechende Skripte gibt es viele, die Aufgabe für die Vorlesung bestand darin, einen Aufbau zu wählen, der Parallelen zur späteren Behandlung der Saccheri-Ebene aufweist. Ich verdeutliche diese Idee am Beispiel des Beweises des Kongruenzsatzes SSS.

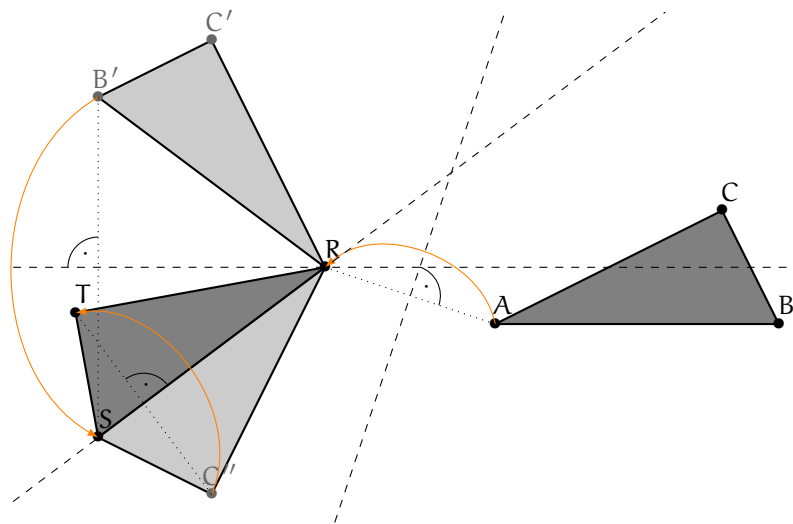


Abbildung 7.1: Beweisidee für den Kongruenzsatz SSS, die sowohl in der Saccheri-Ebene als auch im euklidischen Raum \mathbb{R}^2 funktioniert.

Die verwendete Beweisidee besteht darin, sukzessive an Mittelsenkrechten zu spiegeln. Dass bereits aufeinanderliegende Punkte unter diesen Spiegelungen invariant bleiben, begründet man über die Ortslinieneigenschaft der Mittelsenkrechten (Abbildung 7.1).

Die geometrischen Begriffe, die eingeführt werden müssen, um dieses Argument zu führen, sind in Abbildung 7.2 strukturiert dargestellt. Die orangenen Pfeile stellen die Argumentationskette innerhalb der Saccheri-Ebenen-Axiomatik dar, die blauen Pfeile die Argumentationskette innerhalb des euklidischen Raumes \mathbb{R}^2 auf Grundlage der Vektorraumaxiomatik. Beide Wege führen unabhängig voneinander zum Ziel. Da der euklidische Raum \mathbb{R}^2 gleichzeitig aber auch ein Modell für eine Saccheri-Ebene ist, können die euklidischen Begriffe auch als Instanzen der Saccheri-Begriffe betrachtet werden. Diese Beziehung ist durch die grünen Pfeile dargestellt.

In diesem Beispiel zeigt sich, wie mit voranschreitender Konstruktion der Theorie die ursprünglich zugrunde liegende Axiomatik unsichtbar wird. Während sich die Zugänge zu Geraden, Spiege-

lungen oder Orthogonalität deutlich unterscheiden, können die SSS-Beweise durch simples Suchen und Ersetzen einzelner Begriffe fast automatisiert ineinander übersetzt werden.

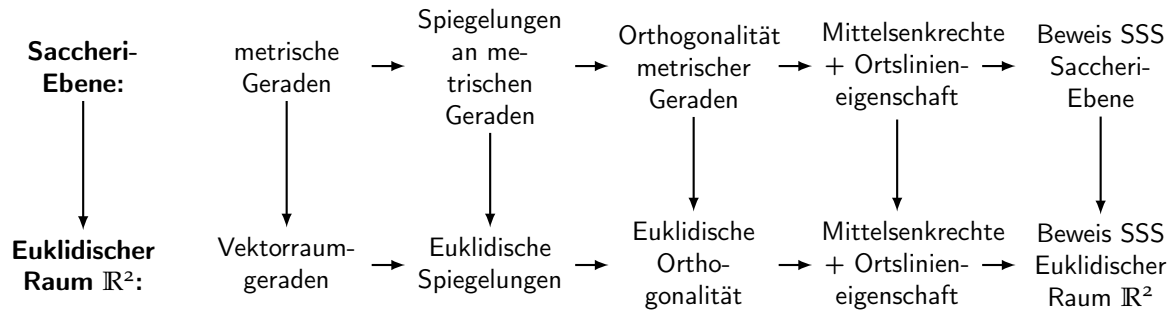


Abbildung 7.2: Schritte zum Beweis des Kongruenzsatzes SSS im euklidischen Raum \mathbb{R}^2 und in der Saccheri-Ebene.

Für die Lehramtsausbildung hat dieser parallele Aufbau den Vorteil, dass geometrische Begriffe aus unterschiedlichen schulrelevanten Perspektiven betrachtet (elementargeometrisch, koordinatengeometrisch) und diese Perspektiven in vielfältiger Weise miteinander in Bezug gesetzt werden.

Eine weitere Überarbeitung des Ausgangskonzepts besteht in der Betonung (sowohl aus euklidischer als auch aus Saccheri-Ebene-Perspektive) der Querschnittsthemen Kongruenz, Symmetrie und Isometrie, die ein für die Schulmathematik hoch relevantes Begriffsdreieck darstellen (siehe Kapitel 11). Die Systematisierung der euklidischen Bewegungen wurde in Vorlesung, Übung und ePortfolio ausgiebig behandelt (siehe unter anderem ePortfolioaufgaben 11 (S. 395) und 12 (S. 395)). Zur fachinhaltlichen und professionsorientierten Behandlung der Themen Kongruenz und Symmetrie wurden je eine Schnittstellenwoche (siehe Kapitel 13, 14) komplett neu konzipiert.

Neben der in diesem Kapitel beschriebenen inhaltlichen Umgestaltung, habe ich im Rahmen des Projektes auch Innovationen auf methodischer Ebene umgesetzt. Dazu gehören neben den bereits erwähnten *Schnittstellenwochen*, die Implementation eines veranstaltungsbegleitenden *SchnittstellenePortfolio* sowie die Konzeption und der Einsatz von selbst-korrigierenden *Stack-Aufgaben*. Diese werden in Kapitel 8 näher erläutert.

Kapitel 8

Methodische Gestaltung der Veranstaltung *Geometrie für Lehramtsstudierende*

Nach der Vorstellung der inhaltlichen Veranstaltungskonzeption in Kapitel 7 stelle ich in diesem Kapitel vier wesentliche methodische Entscheidungen vor und ordne sie in ihrer Funktionalität für das Erreichen der Veranstaltungsziele ein. In Abschnitt 8.1 beschäftige ich mich mit dem veranstaltungsbegleitenden *Schnittstellen-ePortfolio*. Viele der dort eingesetzten Schreibanlässe sind eng verknüpft mit den sogenannten *Schnittstellen-Wochen* (Abschnitt 8.2). Anschließend schildere ich den Einsatz von *STACK*-Aufgaben (Abschnitt 8.3) und *GeoGebra* (Abschnitt 8.4). Im abschließenden Abschnitt 8.5 wird das Zusammenspiel der vorgestellten Veranstaltungselemente unter Verwendung des didaktischen Prinzips des *Constructive Alignments* zusammengefasst.

8.1 Schnittstellen - ePortfolio

Wie bereits in Kapitel 5 allgemein beschrieben, eignet sich die Portfolioarbeit in besonderem Maße als ganzheitlicher Ansatz zur Verknüpfung von inhaltlichen und reflektierenden Lernprozessen und wird deswegen als wichtiges methodisches Element in der Veranstaltung *Geometrie für Lehramtsstudierende* mit dem Ziel eingesetzt, die Überwindung der zweiten Diskontinuität im Kontext einer Fachveranstaltung (Abschnitt 3.4) zu unterstützen. Das dabei entstandene Konzept des *Schnittstellen-ePortfolios* wird in diesem Abschnitt im Detail vorgestellt.

8.1.1 Ziele des ePortfolio-Einsatzes

Der Einsatz eines veranstaltungsbegleitendes Portfolios verknüpft Lehr- und Forschungsziele miteinander. Zum einen bietet das ePortfolio die Möglichkeit, Lernaktivitäten zu Förderung fachdidaktischer Urteilskompetenz von rein fachinhaltlichen Lernaktivitäten zu trennen. Für die Begleitforschung des Projektes bieten die ePortfolios der Studierenden einen reichhaltigen Datenfundus. Dieser ermöglicht direkte Einblicke in professionsbezogene Lernprozesse der Studierenden (im Sin-

ne der Forschungsfrage FF-B.4) und liefert ebenfalls Informationen über die Beliefs der Studierenden zu ihrer eigenen Professionalisierung und zur zweiten Diskontinuität (durch entsprechende Reflexionsaufgaben, Forschungsfrage FF-B.1).

8.1.2 Organisation des ePortfolio-Einsatzes

Wie in Mathematikveranstaltungen üblich, gab es in jeder Veranstaltungswoche ein Übungsblatt mit Haus- und Präsenzaufgaben. Diese beinhalteten in manchen Veranstaltungswochen auch ein oder mehrere Arbeitsaufträge für das ePortfolio. Der Umfang der Hausaufgaben war in diesen Wochen entsprechend reduziert. Im Gegensatz zu den fachinhaltlichen Aufgaben wurden die Arbeitsaufträge für das ePortfolio nicht bepunktet, sondern nur auf Existenz überprüft. In Anhang C.2 findet man eine Übersicht aller eingesetzten Arbeitsaufträge.

Für die technische Realisierung des ePortfolios wurde der hochschuleigene Cloudservice *sciebo* verwendet²⁶. Das Schnittstellen-ePortfolio ist ein Ordner, dem die Produkte der Arbeitsaufträge hinzugefügt wurden. Alle Studierenden haben in *ihrem* ePortfolio-Ordner damit sofort alle ePortfolio-Aktivitäten beisammen. Zu jeder Bearbeitung gab es individuelle Rückmeldungen mit nicht verpflichtenden Verbesserungsvorschlägen durch eine studentische Hilfskraft (SHK). Dazu haben die Studierenden der SHK den ePortfolio-Ordner über das Freigabe-System von *sciebo* freigegeben. Ich als Dozent hatte keinen Zugriff auf die Studierenden-Ordner und habe alle Bearbeitungen nur in pseudonymisierter Form – vermittelt durch die SHK – gesehen. Diese Pseudonymität mir als Dozent gegenüber unterstrich die Bedeutung der ePortfolioarbeit als Lerngelegenheit mit hohem Reflexionsanteil (im Gegensatz zu einer Leistungsgelegenheit). Der SHK wurde dabei die Rolle einer Vertrauensperson der Studierenden zuteil. Die so entstehende Doppelrolle stellte in der Praxis kein Problem dar und wurden von den Studierenden ohne Weiteres akzeptiert.

8.1.3 Arbeitsaufträge für das Schnittstellen-ePortfolio

Die Arbeitsaufträge zur Gestaltung des Schnittstellen-ePortfolios lassen sich in vier Kategorien unterteilen: *Kompetenzraster*, *Schnittstellenaufgaben*, *Reflexionsanlässe* und *Abbildungssteckbriefe*. In diesem Abschnitt werden alle Kategorien näher beschrieben. Alle Referenzen auf spezielle Arbeitsaufträge verweisen auf die Materialübersicht in Anhang C.2.

Wie unter anderem im *dikopost*-Projekt vorgeschlagen (Abschnitt 5, Seite 49) wurden *Kompetenzraster* zur Selbsteinschätzung zum Veranstaltungsbeginn und zum Veranstaltungsende eingesetzt (ePortfolioaufgaben 3 (S. 388) und 21 (S. 399)). Die beiden Kompetenzraster sind identisch, sodass eine Reflexion über den durch die Veranstaltung generierten Lernzuwachs möglich ist. Die dort formulierten Selbsteinschätzungen beziehen sich nicht auf den kompletten fachmathematischen Veranstaltungsinhalt sondern – im Sinne der Intention des Schnittstellen-ePortfolios – auf professionsorientierte Teilaspekte. Hierzu gehören unter anderem relevante Begriffe und Theoreme der Schulgeometrie und deren mathematische Hintergründe sowie Selbsteinschätzungen zum Füllen fachdidaktischer Urteile in verschiedenen Situationen.

Die meisten der ePortfolioaufgaben sind *Schnittstellenaufgaben* (vgl. Abschnitt 3.2) zur Förderung fachdidaktischer Urteilskompetenz (Abschnitt 3.4). Inhaltlich können alle Schnittstellenaufgaben

²⁶<https://uni-paderborn.sciebo.de>

den Themen *Kongruenz*, *Isometrie* und *Symmetrie* zugeordnet werden. In Kapitel 11 wird die Auswahl dieser Themenschwerpunkte näher begründet.

Reflexionsanlässe werden sowohl bezogen auf einzelne Schnittstellenaufgaben, als auch bezogen auf größere Teile der Gesamtveranstaltungen gegeben. Die Schnittstellenaufgabe *Zwei Winkel und eine Seite* wurde sowohl vor der Behandlung der entsprechenden Inhalte in der Veranstaltung eingesetzt (ePortfolioaufgaben 5 (S. 391)) als auch danach (ePortfolioaufgaben 7 (S. 393)). Beim zweiten Mal war explizit ein Vergleich der beiden Bearbeitungen gefordert (Aufgabenteil d). Damit stellt dieses Aufgabenpaar ein Beispiel für einen Reflexionsanlass dar, der sich auf einzelne Schnittstellenaufgaben bezieht. Auf diese Weise werden Produkte der Studierenden (wie zum Beispiel fachdidaktische Urteile) in Verbindung mit den vorangegangenen Lernprozessen gebracht. Die ePortfolioaufgabe *Abschlussreflexion* (ePortfolioaufgabe 20 (S. 399)) hingegen ist ein Beispiel für einen Reflexionsansatz, der sich auf einen größeren Teil der Veranstaltung (in diesem Fall die Gesamtveranstaltung) bezieht.

In den beiden Aufgaben der Kategorie *Abbildungssteckbriefe* (ePortfolioaufgaben 4 (S. 389) und 19 (S. 399)) sollen die Studierenden systematisch ihr Wissen über wichtige geometrische Abbildungen (orthogonale Projektion, Spiegelung, Rotation, zentrische Streckung, Kreisspiegelung) zusammenstellen. Das Erstellen dieser Steckbriefe hat verschiedene Funktionen: Zum einen unterstützt es die Studierenden dabei, professionsrelevantes Wissen zu systematisieren und zu sichern. Neben dieser auf langfristige Verfügbarkeit angelegten Funktion bilden die Steckbriefe auch einen wichtigen Hintergrund für die selbstgesteuerten eLearning-Aktivitäten mit *Moodle-Stack* (siehe Abschnitt 8.3).

8.1.4 Rolle des Schnittstellen-ePortfolios für den Modulabschluss

Wie bereits beschrieben, werden die einzelnen ePortfolio-Aktivitäten zwar auf Existenz geprüft und kommentiert, aber nicht inhaltlich bewertet. Die Bearbeitung *aller* ePortfolio-Aktivitäten (unabhängig von deren Korrektheit) ist allerdings verpflichtender Bestandteil der Prüfungszulassung. Auf diese Weise kann sichergestellt werden, dass die Studierenden den Professionsbezug der Veranstaltung reflektieren.

In den mündlichen Modulprüfungen spielt das ePortfolio dennoch eine Rolle, da die Studierenden Teile ihres ePortfolios als Gesprächsgrundlage mit zur Prüfung bringen. Welche Aufgabenbearbeitungen das sind, können die Studierenden in einem gewissen Rahmen selbst entscheiden. Weitere Details zum Ablauf der mündlichen Prüfungen werden in Abschnitt 8.5 beschrieben.

8.1.5 Theoretische Einordnung des vorgestellten ePortfolio-Konzepts

Das Konzept des *Schnittstellen-ePortfolios* erfüllt, wie oben beschrieben, die in Abschnitt 5.1 beschriebenen Kerncharakteristika von Portfolioarbeit, *Produkt-Prozess-Verbindung* und *Reflexion*. Zur weiteren Charakterisierung nutze ich das in Abschnitt 5.1 vorgestellte dreidimensionale Modell von Häcker (2005): Das Schnittstellen-ePortfolio dient der formativen Selbstbeurteilung der Studierenden (*Zweck-Dimension*). Zwar gibt es Rückmeldungen durch eine studentische Hilfskraft, diese dienen aber nicht einer Beurteilung der Studierenden. Die Inhalte des ePortfolios sind durch die ePortfolio-Aufgaben begrenzt (*Inhalts-Dimension*). Allerdings liefern viele der Aufgaben den Studierenden die Möglichkeit, individuelle Entscheidungen zu treffen (*Entscheidungs-Dimension*). Die genaue Spezifikation der Inhalte durch die ePortfolioaufgaben dient zum einen dazu, den Arbeits-

aufwand, den die Studierenden in das Schnittstellen-ePortfolio stecken, zu kontrollieren. Darüber hinaus haben die allermeisten Studierenden wenig Erfahrung mit der Methode, sodass die Gefahr besteht, dass ein zu frei definiertes Portfolio-Konzept zur Überforderung führt.

Die in gewissem Rahmen selbst ausgewählten ePortfolioinhalte, die die Studierenden mit zu ihren mündlichen Modulabschlussprüfungen bringen, können als eigenständiges Portfolio aufgefasst werden. Dessen Charakteristika gleichen eher denen eines *Showcase Portfolios* (Abbildung 5.1 (S. 47)) zur summativen Beurteilung.

Damit folgt das von mir gewählte Vorgehen dem Vorgehen im *dikopost*-Projekt von Siebenhaar et al. (2013) (Abschnitt 5.3): Während des Semesters wurde ein *Prozessportfolio* geführt, aus dessen Inhalten zum Semesterende ein *Produktportfolio* ausgewählt wurde. Letzteres war Gesprächsgrundlage in den mündlichen Abschlussprüfungen. Darüber hinaus haben die Studierenden während des Semesters regelmäßige Rückmeldungen durch eine studentische Hilfskraft bekommen und ihren eigenen Lernprozess reflektiert.

8.2 Schnittstellenwochen

Neben dem im vorigen Abschnitt vorgestellten ePortfolio stellen die beiden *Schnittstellenwochen* (vergleiche Abschnitt 7.2, insbesondere Tabelle 7.1 (S. 64)) das zweite wesentliche Veranstaltungselement zur Umsetzung von Professionsorientierung dar. Während in den übrigen Veranstaltungswochen der Fokus auf der fachinhaltlichen Beschäftigung mit Themen der ebenen Geometrie liegt, werden in den beiden Schnittstellenwochen explizit Bezüge zwischen den Veranstaltungsinhalten und der angestrebten Profession (Mathematik unterrichten) thematisiert und in den Mittelpunkt gestellt. Damit unterscheiden sich die entsprechenden Vorlesungen und Präsenzübungen auch methodisch deutlich von den Vorlesungen und Präsenzübungen der restlichen Wochen. Desweiteren gibt es in den beiden Schnittstellenwochen keine bepunkteten Hausaufgaben sondern ausschließlich Arbeitsaufträge für das Schnittstellen-ePortfolio. Ein wesentlicher Grundgedanke hinter diesem Konzept ist der angestrebten Professionsorientierung dadurch Bedeutung zu verleihen, dass sie auch explizit in den Vorlesungen behandelt werden, statt sie nur im Übungsbetrieb mitlaufen zu lassen. Auf die Details der Gestaltung der Schnittstellenwochen gehe ich in den Kapiteln 11, 13 und 14 im Detail ein.

8.3 eTests zur analytischen Geometrie (STACK)

Zur Behandlung analytischer Geometrie in einer Veranstaltung gehört auch, dass die Studierenden in der Lage sind, entsprechende Rechnungen explizit durchzuführen. Im Kontext der *Geometrie für Lehramtsstudierende* besonders relevant ist der sichere Umgang mit verschiedenen geometrischen Abbildungen (Spiegelungen, Rotationen, Projektionen, zentrische Streckungen und Kreis-Spiegelungen) sowie der Wechsel zwischen der Darstellung von Geraden im euklidischen Raum \mathbb{R}^2 als Vektorraumgerade $\mathbb{R}v + w$ und als Hyperebene $G(a, \beta) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \langle x, a \rangle = \beta\}$. Das Erstellen und Korrigieren entsprechender Übungsaufgaben verbraucht Ressourcen, die an anderer Stelle besser eingesetzt werden können. Insbesondere können im normalen Übungsbetrieb nur eine begrenzte Anzahl solcher Aufgaben behandelt werden. Es ist fraglich, ob sich auf diese Weise die notwendigen rechnerischen Routinen einstellen.

Mit Hilfe des Moodle-Plugins *STACK*²⁷ konnte ich dieser Schwierigkeit begegnen. *STACK* steht für *System for Teaching and Assessment using a Computer algebra Kernel*. Das System stellt für Lernplattformen wie *Moodle* oder *Ilias* einen neuen Fragentyp („*STACK*“) bereit, der, parallel zu anderen plattformeigenen Fragentypen (wie Multiple Choice oder Lückentext) in eTests benutzt werden kann. *STACK*-Fragen ermöglichen die Nutzung des CAS-Systems *Maxima*²⁸ sowohl bei der randomisierten Erzeugung von Aufgabenstellungen als auch bei der Überprüfung von Studierendeneingaben. (vgl. z. B. Sangwin, 2015)

In der Veranstaltung wurde dieser Fragentyp eingesetzt, um Aufgaben zur analytischen Geometrie (mit den oben genannten inhaltlichen Schwerpunkten) umzusetzen. Tabelle 8.1 gibt einen entsprechend thematisch sortierten Überblick über die verwendeten *STACK*-Aufgaben²⁹. Für alle Fragen werden spezielle Aufgabenparameter (Vektoren, Winkel, etc.) randomisiert erzeugt, sodass bei jedem Einsatz der Aufgabe andere Rechnungen durchzuführen sind.

Bezeichner	Thema	Aufgabenstellung	Randomisierte Parameter
STACK-1-01	Rotationen	Geben Sie die Drehmatrix M für eine Drehung im/gegen den Uhrzeigersinn um α um den Ursprung an.	α , Drehsinn
STACK-1-2	Rotationen	Gegeben ist der Punkt A , der durch eine Drehung um den Ursprung auf B abgebildet wird. Gegeben Sie zunächst den Winkel zwischen A und B in Radiant sowie in Grad an. Geben Sie dann die Einträge der zugehörigen Drehmatrix M an, sodass $M \cdot A = B$ ist.	A, B
STACK-1-3	Rotationen	Gegeben ist der Punkt X . Ergänzen Sie die erste Koordinate von P so, dass es eine Drehmatrix gibt, durch die X auf P abgebildet wird.	X , zweite Koordinate von P
STACK-1-4	Spiegelungen	Gegeben sei $v \in \mathbb{R}^2$. Geben Sie die Darstellungsmatrix M der Spiegelung an $\mathbb{R}v$ an.	v
STACK-1-5	Spiegelungen	Gegeben sei der Punkt $A \in \mathbb{R}^2$, welcher durch eine Spiegelung an der Geraden $\mathbb{R}v$ auf den Punkt W abgebildet werden soll. Gesucht sind ein passender Vektor v sowie die zugehörige Matrix.	A, W
STACK-1-6	Spiegelungen	Gegeben sei der Punkt $A = (A_1 \cdot a, A_2)$ mit $a \in \mathbb{R}$ beliebig aber fest. Dieser soll an der Geraden $g = \mathbb{R}v + w$ gespiegelt werden. Geben Sie den gespiegelten Punkt an.	A_1, A_2, v, w

²⁷<https://www.ed.ac.uk/maths/stack>

²⁸<http://maxima.sourceforge.net/>

²⁹Alle Aufgaben habe ich zusammen mit meiner studentischen Hilfskraft Sven Hüsing entwickelt.

STACK-1-7	Spiegelungen/ Projektionen	Gegeben sei der Punkt $A = (A_1 \cdot a, A_2)$ mit $a \in \mathbb{R}$ beliebig aber fest. Dieser soll an der Geraden $g = \mathbb{R}v$ gespiegelt werden. Geben Sie zunächst die orthogonale Projektion von A auf $\mathbb{R}v$ an und dann den gespiegelten Punkt.	A_1, A_2, v
STACK-1-8	Projektionen	Gegeben sei der Punkt $A = (A_1 \cdot a, A_2)$ mit $a \in \mathbb{R}$ beliebig aber fest, sowie $v \in \mathbb{R}^2$. Geben Sie die orthogonale Projektion von A auf $\mathbb{R}v$ an.	A_1, A_2, v
STACK-2-1	Geraden	Gegeben ist die Gerade $G(a, \beta) \subset \mathbb{R}^2$. Geben Sie den Abstand d der Geraden zum Ursprung an.	a, β
STACK-2-2	Geraden	Gegeben ist die Gerade $\mathbb{R}v + w \subset \mathbb{R}^2$. Geben Sie den Abstand d der Geraden zum Ursprung an.	v, w
STACK-2-3	Geraden	Es sei $a \in \mathbb{R}^2$ und $\beta \in \mathbb{R}$, sodass $G(a, \beta)$ eine Gerade in \mathbb{R}^2 ist. Geben Sie $v, w \in \mathbb{R}^2$ an, sodass $G(a, \beta) = \mathbb{R}v + w$ ist.	v, w
STACK-2-4	Geraden	Es seien $v, w \in \mathbb{R}^2$. Geben Sie $a \in \mathbb{R}^2$ an, sodass $\mathbb{R}v + w = G(a, \beta)$ mit $\beta = 1$.	v, w
STACK-2-4	Kreisspiegelungen	Sei K ein Kreis mit Mittelpunkt M und Radius r in (\mathbb{R}^2, d_2) . Zudem sei $z \in \mathbb{R}^2$. Geben Sie den Spiegelungspunkt von z am Kreis K an.	M, r, z
STACK-2-5	Steckungen	Gegeben seien $P, Z \in \mathbb{R}^2$ und $k \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie die zentrische Streckung von P mit Streckzentrum Z und Streckfaktor k in der euklidischen Ebene \mathbb{R}^2 , versehen mit der euklidischen Metrik.	P, Z, k
STACK-2-6	Streckungen	Gegeben seien $P, Z \in \mathbb{R}^2$. Geben Sie den Streckfaktor $k \in \mathbb{R}$ an, sodass im euklidischen Raum \mathbb{R}^2 der Punkt P auf Q zentrisch gestreckt wird.	P, Z, Q
STACK-2-7	Streckungen	Gegeben seien $P \in \mathbb{R}^2$ sowie $k \in \mathbb{R}$. Geben Sie das Streckzentrum $Z \in \mathbb{R}^2$ an, sodass P im euklidischen Raum \mathbb{R}^2 mit Streckfaktor k auf $Q \in \mathbb{R}^2$ zentrisch gestreckt wird.	P, k, Q

Tabelle 8.1: Übersicht über die in der Veranstaltung *Geometrie für Lehramtsstudierende* eingesetzten STACK-Aufgaben.

In Abbildung 8.1 findet man ein Beispiel für die Umsetzung einer STACK-Aufgabe im Moodle-Kurs.

Die STACK-Aufgaben wurden in der Veranstaltung in zwei Blöcken (STACK-1-* und STACK-2-*) eingesetzt. Zu beiden Blöcken gehört je ein eTest, dessen Bestehen notwendiger Teil der Zulas-

Frage nachbessern | Frage-Tests und eingesetzte Varianten

Gegeben sei der Punkt $A = (13, 26)$, welcher durch eine Spiegelung an der Geraden $\mathbb{R}v$ auf den Punkt $W = (19, 22)$ abgebildet werden soll. Gesucht sind ein passender Vektor v sowie die zugehörige Matrix.

Geben Sie zunächst einen passenden Vektor $v = (v_1, v_2)$ an:

$v_1 =$ $v_2 =$

Geben Sie dann die Einträge der zugehörigen Darstellungsmatrix M an:

$M = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_2 & a_3 \end{pmatrix}$ mit:

$a_0 =$ $a_1 =$

$a_2 =$ $a_3 =$

• Arbeiten Sie immer mit exakten Werten und **nicht** mit Rundungen (also bspw. $\text{sqrt}(2)$ statt 1.41 oder $1/3$ statt 0.3333).

Abbildung 8.1: Screenshot einer Variante der Aufgabe STACK-1-5.

sungsvoraussetzungen für die Modulabschlussprüfung ist. Beide Tests bestanden aus einer zufallsbasierten Auswahl von fünf bzw. vier der in Tabelle 8.1 vorgestellten Fragen. Pro Frage hatten die Studierenden 5 Minuten Zeit und es durfte maximal eine Frage falsch beantwortet werden. Beide eTests durften je zweimal wiederholt werden. Zur Vorbereitung auf diese Tests gab es thematisch sortierte Trainingsaufgabensätze. Diese konnten die Studierenden eigenverantwortlich beliebig oft wiederholen. Die randomisierten Aufgabenparameter garantierten immer neue Aufgabenvarianten. Darüber hinaus konnten die Studierenden – ebenfalls beliebig oft – einen Übungs-eTest bearbeiten. Die beiden Übungs-eTests entsprachen von den Modalitäten her den „scharfen“ eTests, die erreichten Ergebnisse zählten aber nicht zur Prüfungszulassung. In Abbildung 8.2 wird der beschriebene Dreischritt durch einen Screenshot aus dem Moodle-Kurs zur Veranstaltung verdeutlicht.

eTest 1

- TRAININGSAUFGABEN Euklidische Rotationen
- TRAININGSAUFGABEN Euklidische Spiegelungen und Projektionen
- TRAININGSAUFGABEN Test (5 zufällige Fragen)
- eTest 1 (euklidische Rotation, Spiegelung und Projektion)
 - Zum Bestehen brauchen Sie **4** von **5** möglichen Punkten
 - Sie haben **drei** Versuche und pro Versuch **25 Minuten** Zeit
 - Der Test ist bis zum **5. Juni (23:59)** freigeschaltet

eTest 2

- TRAININGSAUFGABEN Geradendarstellungen
- TRAININGSAUFGABEN Kreispiegelungen und zentrische Streckungen
- eTest 2 (Geradendarstellungen, Kreispiegelungen, zentrische Streckungen)
 - Zum Bestehen brauchen Sie **3** von **4** möglichen Punkten
 - Sie haben **drei** Versuche und pro Versuch **20 Minuten** Zeit
 - Der Test ist bis zum **19. Juli (23:59)** freigeschaltet

Abbildung 8.2: Einsatz der eTests im Moodle-Kurs der Veranstaltung *Geometrie für Lehramtsstudierende* (Screenshot).

Der Kerngedanke hinter dieser Art des Vorgehens besteht darin, dass die Studierenden ihren Lernprozess eigenverantwortlich gestalten und selbst einschätzen, wann sie bereit für den relevanten Versuch sind. Dafür stehen ihnen quasi unbegrenzte Übungsmöglichkeiten (inklusive automatisierten Rückmeldungen) zur Verfügung.

8.4 Einsatz eines Dynamischen Geometriesystems (*GeoGebra*)

Ein weiteres relevantes Element in der Veranstaltungsdurchführung war die Nutzung des Dynamischen Geometriesystems *GeoGebra*³⁰. Dieses kam vor allem auf zwei Arten zum Einsatz. Zum einen habe ich *GeoGebra* im Rahmen der Vorlesungen genutzt und *GeoGebra*-Dateien zu einigen Definitionen und Aussagen erstellt. Zum anderen mussten die Studierenden selbst *GeoGebra*-Dateien im Rahmen des *Schnittstellen-ePortfolios* erstellen (ePortfolioaufgabe 8 (S. 393), ePortfolioaufgabe 12 (S. 395)).

8.5 Synthese: Umsetzung von Constructive Alignment

Die in den vorherigen Abschnitten beschriebenen Veranstaltungselemente bilden einen wesentlichen Teil des Prüfungskonzepts der Veranstaltung *Geometrie für Lehramtsstudierende*. Für die Zulassung zur mündlichen Modulprüfung mussten die Studierenden folgende Voraussetzungen erfüllen:

- Erreichen von mindestens 50% der Hausaufgabenpunkte
- Anfertigung des Schnittstellen-ePortfolios (Abschnitt 8.1)
- Erfolgreiche Bearbeitung der beiden eTests zur analytischen Geometrie (Abschnitt 8.3)

Die Modulprüfungen selbst dauerten 45 Minuten und bestanden aus drei Phasen. Den Prüfungsbeginn (erste 10 Minuten) konnten die Studierenden selbst gestalten. Dazu konnten Sie (unter gewissen Vorgaben) Teile ihres *Schnittstellen-ePortfolios* mitbringen. In dem Prüfungsteil sollten die Studierenden aufbauend auf diesen selbst gewählten Beispielen zeigen, dass sie in der Lage sind, fachlich korrekt und reflektiert Verbindungen zwischen Vorlesungsinhalten und der Schulgeometrie herzustellen. Im zweiten Prüfungsteil (10 Minuten) bekamen die Studierenden zufällig eine der in der Veranstaltung behandelten geometrischen Abbildungen zugeteilt. Diese musste dann detailliert vorgestellt werden. In den verbleibenden 25 Minuten wurden die Studierenden dann in üblicher Weise über fachmathematische Inhalte der Veranstaltung geprüft.

Ziel dieser Gestaltung des Prüfungskonzepts ist, Veranstaltungsziele, Veranstaltungsinhalte und Prüfungen im Sinne des *constructive alignments* (Biggs, 1996) in Einklang zu bringen. Auf diese Weise möchte ich gewährleisten, dass das Thema Professionsorientierung von den Studierenden nicht als „Beiwerk“ angesehen wird, das im Endeffekt aber vernachlässigt wird, weil es nicht prüfungsrelevant ist.

³⁰<https://www.geogebra.org/>

Kapitel 9

Fachlich-didaktische Analysen

In diesem Kapitel gehe ich auf verschiedene mathematische (vor allem geometrische) Konzepte ein und beschreibe, welche Rolle sie in dem in Kapitel 7 vorgestellten Vorlesungskonzept spielen. Damit leisten die folgenden Ausführungen einen weiteren Beitrag zur Beantwortung der Forschungsfrage FF-A.1³¹. Zum Vergleich im Sinne der Forschungsfrage FF-A.2³² analysiere ich, in welcher Weise sich diese Konzepte in anderen Zugängen zur euklidischen Geometrie wieder finden lassen. Von besonderer Bedeutung ist hierbei zum einen der euklidische (Vektor-)Raum \mathbb{R}^2 und zum anderen der in den „Grundlagen der Geometrie“ von Hilbert (1977) gewählte axiomatische Zugang. Letzterer stellt aus mathematikhistorischer Sicht einen wichtigen Meilenstein in der Entwicklung der ebenen Geometrie dar (Scriba & Schreiber, 2010, 501 f.). Das von Hilbert beschriebene Vorgehen prägte den Aufbau vieler weiterer Axiomatisierungen. Insbesondere die Unterteilung der Axiome in die Axiome der Verknüpfung (Inzidenz), Anordnung, Kongruenz und Stetigkeit tauchen bei der Durchsicht verschiedener Zugänge zur ebenen Geometrie immer wieder auf (z. B. Kunz, 1976; Filler, 1993; Kasten & Vogel, 2018). Darüber hinaus nutzt Hilbert (im Gegensatz zum Saccheri-Ebenen-Zugang) in diesem Axiomensystem keine geometrischen Abbildungen (Isometrien). Auch dies spricht für Hilbert als kongruenzgeometrische Vergleichsreferenz zur eher abbildungsgeometrischen Saccheri-Ebene. Als begleitende Übersicht zu den folgenden Analysen findet man in Anhang B (S. 375) eine Übersicht über alle Axiome der Hilbert-Axiomatik sowie wichtige Modelle für Teilmengen des Axiomensystems (Abbildung B.1 (S. 378)).

Im Folgenden werde ich auf die Themen *Reelle Zahlen* (Abschnitt 9.1), *Geraden* (Abschnitt 9.2), *Abstände und Längen* (Abschnitt 9.3), *Spiegelungsaxiom* (Abschnitt 9.4), *Parallelenaxiom* (Abschnitt 9.5), *von der axiomatischen zur analytischen Geometrie* (Abschnitt 9.6), *Kongruenz und Isometrie* (Abschnitt 9.7) und *Behandlung nichteuklidischer Geometrie* (Abschnitt 9.8) eingehen. Zu jedem der Konzepte werde ich dessen Behandlung in der Veranstaltung *Geometrie für Lehramtsstudierende* vorstellen und dann, wie oben beschrieben, mit alternativen Zugängen sowohl aus mathematischer Ebene als auch in Bezug auf die Zielsetzungen der Veranstaltung vergleichen. Abschließend werde ich in Abschnitt 9.9 das Axiomensystem der Saccheri-Ebene basierend auf den themenspezifischen Analysen charakterisieren und Vor- und Nachteile des Zugangs für die Gymnasiallehramtsausbildung im Vergleich zu alternativen Zugängen aufzeigen.

³¹FF-A.1 Wie kann eine Geometrieveranstaltung inhaltlich und methodisch gestaltet sein, die den a-priori-Entwurfsprinzipien (S. 35) für Fachveranstaltungen zur Überwindung der zweiten Diskontinuität genügt?

³²FF-A.2 Welche fachinhaltlichen Entwurfs-Entscheidungen unterscheiden die konzipierte Veranstaltung von alternativen Zugängen, und inwieweit ist das gewählte Vorgehen im Vergleich zu den Alternativen funktionaler für die Überwindung der zweiten Diskontinuität?

9.1 Reelle Zahlen

Die reellen Zahlen stellen für alle Vorlesungsabschnitte ein wichtiges Konzept dar, das jeweils von Beginn an vorausgesetzt wird. Für die Behandlung des euklidischen Raums \mathbb{R}^2 ist dies offensichtlich; für die Definition von Saccheri-Ebenen als spezieller metrischer Raum (Definition A.4.10 (S. 342)) ergibt sich die Notwendigkeit aus der Definition der Metrik als Abbildung mit Wertebereich $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Von zentraler Bedeutung sind die reellen Zahlen darüber hinaus bei der Definition metrischer Geraden (Definition 9.2.1 (S. 82), Definition A.2.1 (S. 334)). In Abschnitt 9.2 werde ich detailliert beschreiben, welche Eigenschaften metrischer Geraden durch Eigenschaften der reellen Zahlen zustande kommen (siehe insbesondere Tabelle 9.1).

Bei der Identifikation euklidischer Ebenen mit dem euklidischen Raum \mathbb{R}^2 wird das Koordinatensystem gewissermaßen aus zwei metrischen Geraden konstruiert. Durch die Definition metrischer Geraden als isometrische Kopien von \mathbb{R} ist dadurch der Koordinatenkörper für die Koordinatisierung bereits in passender Weise festgelegt. Dieses Thema wird in Abschnitt 9.6 noch einmal im Detail besprochen.

Hilbert (1977) setzt die reellen Zahlen in seinem axiomatischen Aufbau nicht voraus. Eigenschaften von Geraden, die in der Saccheri-Ebene aus der von \mathbb{R} übernommenen Struktur folgen, formuliert Hilbert als Axiome (z. B. die Zwischen-Relation, Details in Abschnitt 9.2). Für die Koordinatisierung seiner axiomatisch beschriebenen Geometrie konstruiert Hilbert konsequent geometrisch einen Koordinatenkörper aus den Axiomen heraus. Somit sind die reellen Zahlen bei Hilbert zwar nicht vorausgesetzt, aber implizit durch die gewählte Axiomatik Teil der konstruierten Geometrie.

9.2 Geraden

Neben Punkten sind Geraden wesentliche Objekte der ebenen Geometrie. Sie können in unterschiedlicher Weise definiert werden. Welche Definition man wählt, hängt neben dem zugrunde liegenden Axiomensystem auch davon ab, welche Intuitionen zum geometrischen Objekt *Gerade* in der Definition aufgegriffen werden sollen.

In der Veranstaltung *Geometrie für Lehramtsstudierende* habe ich folgende Definition einer Gerade in einem metrischen Raum verwendet (vgl. auch Definition A.2.1 (S. 334) und 7.2.7 (S. 65)):

Mathematische Bemerkung 9.2.1 (Definition: Metrische Gerade)

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $g \subset X$ bezeichnen wir als **metrische Gerade**, wenn wir eine Abbildung $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow X$ mit den Eigenschaften

$$(1) \quad \gamma(\mathbb{R}) = g$$

$$(2) \quad \forall t, s \in \mathbb{R} : d(\gamma(t), \gamma(s)) = |t - s|, \text{ (Isometrieeigenschaft)}$$

finden können. Diese Abbildung heißt **(isometrische) Parametrisierung der metrischen Gerade g** .

Diese Definition baut auf den reellen Zahlen sowie metrischen Räumen auf. Die zugrunde liegende Intuition ist, Geraden als „Kopien“ von \mathbb{R} anzusehen (siehe Abbildung 9.1). Die Kopie ist durch (1)

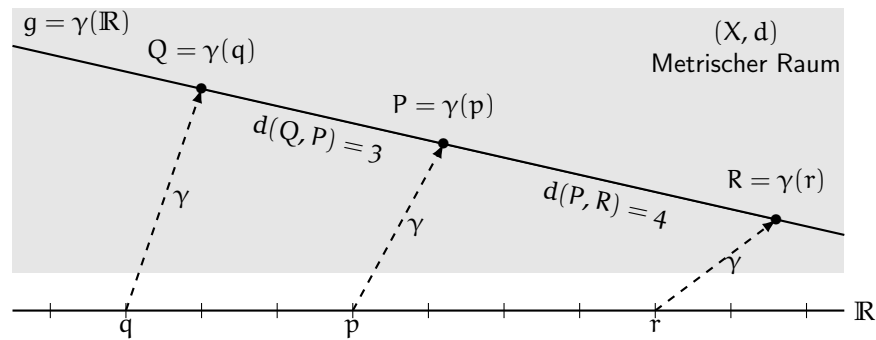


Abbildung 9.1: Parametrisierung einer metrischen Geraden.

und (2) so angelegt, dass verschiedene Eigenschaften von \mathbb{R} durch eine bijektive Isometrie $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow g$ auf g übertragen werden.³³ Auf diese Weise wird die Punktmenge $g \subset X$ über die isometrische Parametrisierung durch \mathbb{R} mit Eigenschaften ausgestattet, die man aus der geometrischen Intuition heraus von einer Geraden erwarten würde. Einige Beispiele sind in Tabelle 9.1 (S. 84) aufgelistet.

Mit der in der mathematischen Bemerkung 9.2.1 gewählten Geraden-Definition habe ich in gewisser Weise normativ festgesetzt, dass in der Veranstaltung *Geometrie für Lehramtsstudierende* Geraden Teilmengen metrischer Räume sind, die sich durch $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ isometrisch parametrisieren lassen.

Metrische Gerade ist der Name für bestimmte Objekte in einem metrischen Raum. Die Definition ist für jeden metrischen Raum sinnvoll. Allerdings ist im Allgemeinen nicht klar, welche *Inzidenzaussagen* zwischen einem metrischen Raum und seinen metrischen Geraden bestehen. Mit *Inzidenzaussagen* meine ich Existenz-, Vielfachheits- und insbesondere Eindeutigkeitsbeziehungen zwischen einer vorgegebenen Punktmenge (hier der metrische Raum) und ausgezeichneten Teilmengen (hier die metrischen Geraden). Für das Treiben euklidischer Geometrie ist die Gültigkeit der folgenden drei Inzidenzaussagen besonders relevant. Sie formalisieren wesentliche geometrische Intuitionen zum Zusammenspiel von Punkten und Geraden und stellen eine Grundlage zur vergleichenden Analyse verschiedener Geradenkonzepte in verschiedenen Modellen bereit.

- (I1) Zu zwei verschiedenen Punkten gibt es stets eine Gerade.
- (I2) Zu zwei verschiedenen Punkten gibt es höchstens eine Gerade.
- (I3) Zu einer Geraden und einem nicht in dieser Gerade enthaltendem Punkt gibt es stets eine Gerade, die den Punkt enthält und disjunkt zur ersten Gerade ist.
- (I4) Zu einer Geraden und einem nicht in dieser Gerade enthaltendem Punkt gibt es höchstens eine Gerade, die den Punkt enthält und disjunkt zur ersten Gerade ist.

Die Inzidenzaussagen (I1) und (I2) sind für metrische Geraden in metrischen Räumen im Allgemeinen falsch, wie die mathematische Bemerkung 9.2.2 zeigt.

Mathematische Bemerkung 9.2.2

Sei $g = \mathbb{R}(1, 0) + (0, 1) \subset \mathbb{R}^2$. Dann gibt es im metrischen Raum³⁴ $(\mathbb{R}^2 \setminus g, d_\infty)$ sowohl Punktpaare,

³³Die Surjektivität folgt direkt aus (1) in der mathematischen Bemerkung 9.2.1. Aus (2) folgt, dass es sich bei γ um eine Isometrie handelt. Damit muss γ auch injektiv, also bijektiv sein.

Eigenschaften metrischer Geraden	Zugrunde liegende Eigenschaften der reellen Zahlen
(1) g ist eine vollständige Teilmenge von (X, d) . Diese Eigenschaft ist zum Beispiel wichtig, wenn es darum geht, ob Schnittpunkte geometrischer Objekte tatsächlich existieren.	\mathbb{R} ist vollständig und γ eine bijektive Isometrie, also konvergiert eine Cauchy-Folge in g genau dann, wenn die Urbildfolge in \mathbb{R} konvergiert.
(2) Sei $P \in g$. Dann gibt es für jede positive reelle Zahl d genau zwei Punkte auf g , die von P den Abstand d haben.	Die Eigenschaft folgt direkt aus der Lösung der zugehörigen Parameter-Betragsgleichung (siehe Lemma A.2.6 (S. 335)).
(3) Von drei verschiedenen Punkten auf g liegt immer genau ein Punkt <i>zwischen</i> den anderen beiden Punkten.	Diese Eigenschaft überträgt sich sofort aus der Anordnung der Parameter (siehe Definition A.2.8 (S. 336) und Proposition A.2.9 (S. 336)).
(4) Liegt ein Punkt $C \in g$ zwischen zwei Punkten $A, B \in g$, so gilt $d(A, B) = d(A, C) + d(C, B)$. Punkte, die auf g zwischen A und B liegen, stellen also in gewisser Weise keinen Umweg von A nach C dar. Dieser Aspekt wird in Abschnitt 9.3 noch genauer diskutiert.	Die Abstandsgleichheit überträgt sich durch die isometrische Parametrisierung sofort aus den reellen Zahlen (vgl. A.2.10 (S. 336)).

Tabelle 9.1: Eigenschaften der reellen Zahlen, die durch die isometrische Parametrisierung Eigenschaften metrischer Geraden festlegen. In dieser Tabelle sei (X, d) ein metrischer Raum, $g \subset X$ eine metrische Gerade und $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow X$ eine isometrische Parametrisierung von g .

durch die es keine metrische Gerade gibt, als auch Punktpaare, durch die es mehr als eine metrische Gerade gibt.

Beweis. Seien $P_1 = (0, 2)$ und $P_2 = (0, 0)$. Dann gibt es keine metrische Gerade $h \subset \mathbb{R}^2 \setminus g$ mit $P_1, P_2 \in g$. Zum Beweis nehmen wir an, dass es eine solche Gerade h gibt. Dann gibt es eine isometrische Parametrisierung $\gamma_h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus g$ mit $\gamma(\mathbb{R}) = h$. Dann ist die Abbildung $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die jeder reellen Zahl t die zweite Koordinate von $\gamma_h(t)$ zuordnet stetig. Aus dem Zwischenwertsatz folgt, dass es auf h einen Punkt geben muss, der 1 als Wert der zweiten Koordinate hat, also auf g liegt, was ausgeschlossen ist. Also gibt es im metrischen Raum $(\mathbb{R}^2 \setminus g, d_\infty)$ Punkte, durch die es keine gemeinsame Gerade gibt.

Dass es auch Punkte gibt, durch die es mehr als eine gemeinsame Gerade gibt, folgt direkt aus der mathematischen Bemerkung 9.2.10 (S. 87). Dort wird in einem anderen Kontext gezeigt, dass es durch $(0, 0)$ und $(1, 0)$ mindestens zwei metrische Geraden gibt. □

In der Tat gibt es aber metrische Räume in denen nur (I₁) (siehe mathematische Bemerkung 9.2.10 (S. 87) zusammen mit 9.2.9 (S. 87)) gilt. (I₁) und (I₂) gelten zum Beispiel im metrischen Raum (\mathbb{R}^2, d_2) . Im axiomatischen Zugang der Vorlesung werden (I₁) und (I₂) durch das *Inzidenzaxiom* (Mathematische Bemerkung 7.2.9) postuliert.

Auch die Inzidenzaussagen (I₃) und (I₄) sind im Kontext metrischer Räume im Allgemeinen falsch. Als Nichtbeispiel funktioniert die französische Eisenbahnmetrik (Mathematische Bemerkung 9.2.11 (S. 88)). Dort wird es so sein, dass alle metrischen Geraden einen gemeinsamen Punkt haben, also

nicht disjunkt zueinander sein können. Als Nichtbeispiel für (I₄) dient die hyperbolische Geometrie (Abschnitt 9.5, Abschnitt 9.8).

Fordert man allerdings *Inzidenzaxiom* (Mathematische Bemerkung 7.2.9) und *Spiegelungsaxiom* (Mathematische Bemerkung 7.2.10), so ist (I₃) immer wahr (vgl. den Satz A.10.2 (S. 360) über die automatische Existenz einer Parallelen in Saccheri-Ebenen). Die Aussage (I₄) wird im Verlauf der Vorlesung durch das Parallelenaxiom (Mathematische Bemerkung 7.2.14) axiomatisch garantiert.

Ich möchte die gewählte Definition nun mit anderen Zugängen zum Geradenbegriff vergleichen. Dabei werde ich aufzeigen, dass unterschiedliche definitorische Forderungen zu unterschiedlichen allgemeinen oder spezifischen Geradenbegriffen führen, für die unterschiedliche weitere Eigenschaften gelten. Dazu definiere ich zunächst als Beispiele *Vektorraumgeraden* (affin lineare Untervektorräume der Dimension 1) und *Hilbert-Geraden* (nach Hilbert (1977): „Grundlagen der Geometrie“). Dann vergleiche ich diese sowohl mit metrischen Geraden als auch paarweise untereinander.

Mathematische Bemerkung 9.2.3 (Definition: Vektorraumgerade)

Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum mit $\dim V \geq 2$. Ich nenne $g \subset V$ eine *Vektorraumgerade*, wenn es $v, w \in V$ mit $v \neq 0_V$ gibt, sodass $g = \mathbb{R}v + w$ ist.

In der mathematischen Bemerkung 9.2.3 wird eine Definition für Geraden in endlichdimensionalen reellen Vektorräumen angegeben. Dabei werden die für diesen Zweck entarteten Beispiele, nämlich Vektorräume der Dimension 0 oder 1 ausgeschlossen. Als mathematische Grundlagen benötigt diese Definition die reellen Zahlen sowie die Vektorraumaxiomatik. Sie folgt der Idee, dass in einem koordinatisierten Raum eine Gerade durch eine Richtung (v in der Definition) und einen Stützpunkt (w in der Definition) beschrieben werden kann. Vektorraumgeraden in diesem Sinne erfüllen auf jeden Fall die ersten drei der auf Seite 83 formulierten Inzidenzaussagen (mathematische Bemerkung 9.2.4, 9.2.5).

Mathematische Bemerkung 9.2.4 (Inzidenzaussagen für Vektorraumgeraden – Teil 1)

Sei V ein endlichdimensionaler \mathbb{R} -Vektorraum mit $\dim V \geq 2$. Dann gibt es zu jedem verschiedenen Paar $A, B \in V$ genau eine Vektorraumgerade g mit $A, B \in g$.

Beweis. Seien $A, B \in V$ verschieden. Dann ist $g = \mathbb{R}(B - A) + A \in \mathcal{G}$ eine Vektorraumgerade, die A und B enthält. Sei $h = \mathbb{R}v + w$ eine weitere Vektorraumgerade, die A und B enthält. Es gibt also $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ mit $A = \mu v + w$ und $B = \nu v + w$. Ferner sei $C \in g$ mit $C = \lambda(B - A) + A$. Dann gilt

$$C = \lambda(B - A) + A = \lambda(\nu v + w - \mu v - w) + \mu v + w = (\lambda(\nu - \mu) + \mu)v + w \in h.$$

Also ist $g \subset h$ und weil beides affine Untervektorräume der Dimension 1 sind, folgt $g = h$. Durch A und B gibt es also genau eine Vektorraumgerade. \square

Mathematische Bemerkung 9.2.5 (Inzidenzaussagen für Vektorraumgeraden – Teil 2)

Sei V ein endlichdimensionaler \mathbb{R} -Vektorraum mit $\dim V \geq 2$. Ferner seien $g = \mathbb{R}v + w$ eine Vektorraumgerade und $P \in V \setminus g$ ein Punkt. Dann gibt es mit $h = \mathbb{R}v + P$ eine zu g disjunkte Vektorraumgerade in V , die P enthält.

Beweis. Evident. \square

Die Inzidenzaussage (I₄) ist für Vektorraumgeraden genau dann gültig, wenn die Dimension des Vektorraums 2 ist (mathematische Bemerkung 9.2.6).

Mathematische Bemerkung 9.2.6 (Inzidenzaussagen für Vektorraumgeraden – Teil 3)

Sei V ein endlichdimensionaler \mathbb{R} -Vektorraum mit $\dim V \geq 2$. Ferner seien $g = \mathbb{R}v + w$ eine Vektorraumgerade und $P \in V \setminus g$ ein Punkt. Dann ist die nach der mathematischen Bemerkung 9.2.5 existierende zu g disjunkte Vektorraumgerade h durch P genau dann eindeutig bestimmt, wenn $\dim V = 2$ ist.

Beweis. Sei $k = \mathbb{R}a + P$ eine Vektorraumgerade durch P . Dann sind g und k genau dann disjunkt, wenn $P - w$ nicht im von a und v aufgespannten Untervektorraum liegt. Für $\dim V = 2$ muss dann aus Dimensionsgründen $a \in \mathbb{R}v$ sein, ansonsten wäre der durch a und v aufgespannte Untervektorraum bereits ganz \mathbb{R}^2 . Also folgt $k = h$. Für $\dim V > 2$ gilt diese Einschränkung nicht. \square

Aus Perspektive der höherdimensionalen analytischen Geometrie beschreibt die mathematische Bemerkung 9.2.6 die Existenz windschiefer Geraden. Dabei wird auch die Grenze der zweidimensionalen Parallelitätsdefinition deutlich. Nach dieser wären windschiefe Geraden parallel. Dies entspricht aber nicht unbedingt der Intuition.

Die zweite Formalisierung von Geraden, die ich diskutiere, sind die so genannten *Hilbert-Geraden* (mathematische Bemerkung 9.2.7)

Mathematische Bemerkung 9.2.7 (Definition: Hilbert-Geraden)

Seien \mathbb{P} eine nichtleere Menge und $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(\mathbb{P})$ eine Menge von Teilmengen von \mathbb{P} mit folgenden Eigenschaften:

1. Zu verschiedenen $A, B \in \mathbb{P}$ gibt es stets ein $g \in \mathcal{G}$ mit $A, B \in g$.
2. Zu verschiedenen $A, B \in \mathbb{P}$ gibt es nicht mehr als ein $g \in \mathcal{G}$ mit $A, B \in g$.
3. Alle $g \in \mathcal{G}$ sind mindestens zweielementig. Es gibt wenigstens drei Elemente $A, B, C \in \mathbb{P}$, für die es kein $g \in \mathcal{G}$ mit $A, B, C \in g$ gibt.

Ich nenne $g \subset \mathbb{P}$ eine *Hilbert-Gerade* (vgl. Hilbert, 1977, S. 3), wenn $g \in \mathcal{G}$ ist.

Außer der Mengentheorie werden keine weiteren axiomatischen Voraussetzungen für diese Definition benötigt. Es werden keine speziellen Eigenschaften von Hilbert-Geraden angegeben, sondern bloß als Teilmengen einer Menge definiert, die die drei beschriebenen Inzidenzaussagen erfüllen. Hilbert (1977, S. 3) nennt diese drei Forderungen *Axiome der Verknüpfung*. Die ersten beiden der auf Seite 83 formulierten Inzidenzaussagen ((I₁) und (I₂)) sind offensichtlich erfüllt. (I₃) und (I₄) hingegen sind im Allgemeinen nicht erfüllt. Ein Nichtbeispiel für (I₃) ist in der mathematischen Bemerkung 9.2.8 aufgeschrieben. Als Nichtbeispiel für (I₄) dienen die Geraden in der hyperbolischen Geometrie, die ebenfalls als Hilbert-Geraden aufgefasst werden können (Hilbert, 1977, 159 f.) und für die bekanntermaßen das Parallelenaxiom nicht erfüllt ist.

Mathematische Bemerkung 9.2.8

Sei $\mathbb{P} = \{A, B, C\}$ eine beliebige Menge mit genau drei Elementen. Dann sind die Elemente von

$G = \{\{A, B\}, \{B, C\}, \{A, C\}\}$ Hilbert-Geraden. Offensichtlich gibt es in diesem Modell keine disjunkten Geraden.

Diese drei Definitionen (mathematische Bemerkungen 9.2.1, 9.2.3 und 9.2.7) liefern plausible aber paarweise sehr unterschiedliche Sichtweisen auf das Konzept einer *Gerade*. Ich vergleiche zunächst *metrische Geraden* (mathematische Bemerkung 9.2.1) mit *Vektorraumgeraden* (mathematische Bemerkung 9.2.3).

Damit ein Vergleich möglich ist, muss ein Vektorraum betrachtet werden, auf dem eine Metrik definiert ist. Ist die Metrik von einer Norm induziert³⁵, so ist jede Vektorraumgerade auch eine metrische Gerade. Dies ist der Inhalt der mathematischen Bemerkung 9.2.9.

Mathematische Bemerkung 9.2.9

Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein endlichdimensionaler normierter Vektorraum mit $\dim V \geq 2$. Dann ist jede Vektorraumgerade bezüglich der durch $\|\cdot\|$ induzierten Metrik $d_{\|\cdot\|}$ eine metrische Gerade.

Beweis. Sei $g = \mathbb{R}v + w$ eine Vektorraumgerade. Zum Beweis wählt man folgende Parametrisierung von g : $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow V, \quad t \mapsto t \cdot \frac{v}{\|v\|} + w$. Dann gilt offensichtlich $\gamma(\mathbb{R}) = g$. Außerdem gilt für alle $s, t \in \mathbb{R}$

$$d_{\|\cdot\|}(\gamma(s), \gamma(t)) = \|\gamma(s) - \gamma(t)\| = \left\| (s-t) \cdot \frac{v}{\|v\|} \right\| = |s-t| \cdot \left\| \frac{v}{\|v\|} \right\| = |s-t|.$$

□

Umgekehrt ist aber nicht jede metrische Gerade in $(V, d_{\|\cdot\|})$ auch eine Vektorraumgerade. Ein Gegenbeispiel wird in der mathematischen Bemerkung 9.2.10 vorgestellt.

Mathematische Bemerkung 9.2.10

Im normierten Raum $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ gibt es durch die Punkte $A = (0, 0)$ und $B = (1, 0)$ neben der Vektorraumgeraden noch mindestens eine weitere metrische Gerade.

Beweis. Sei $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch:

$$t \mapsto \gamma(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} t + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \end{pmatrix}, & t \leq 0 \\ \begin{pmatrix} t + \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \end{pmatrix}, & t > 0 \end{cases}.$$

Dann ist $\gamma(\mathbb{R})$ eine metrische Gerade (vgl. Abbildung 9.2), die durch die γ parametrisiert wird. Für den Beweis seien $s, t \in \mathbb{R}$. Ohne Einschränkung können wir $s \leq t$ annehmen und müssen dann die folgenden drei Fälle unterscheiden:

1. $s, t \leq 0$:

$$\|\gamma(t) - \gamma(s)\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} t-s \\ \frac{1}{2}(t-s) \end{pmatrix} \right\|_\infty = |t-s|.$$

2. $s, t > 0$:

$$\|\gamma(t) - \gamma(s)\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} t-s \\ \frac{1}{2}(s-t) \end{pmatrix} \right\|_\infty = |t-s|.$$

³⁵Es gilt also $d(x, y) = \|x - y\|$ für alle $x, y \in V$.

3. $s \leq 0 < t$:

$$\|\gamma(t) - \gamma(s)\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} t - s \\ -\frac{1}{2}(t + s) \end{pmatrix} \right\|_\infty = |t - s|.$$

Also ist $\gamma(\mathbb{R})$ eine metrische Gerade. □

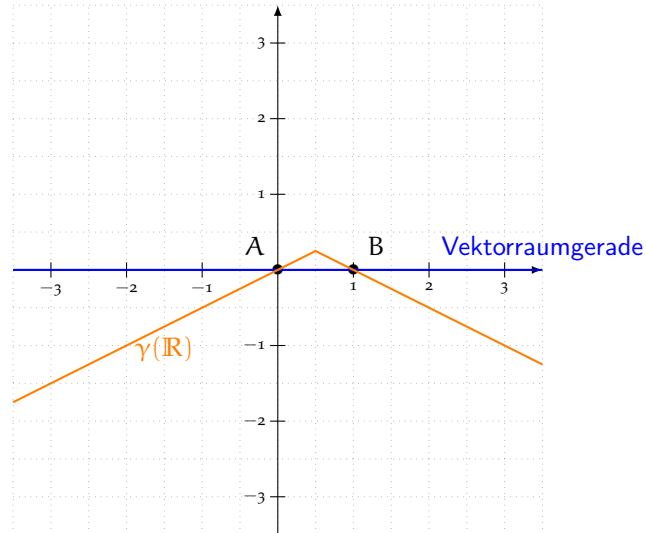


Abbildung 9.2: Bezüglich der $\|\cdot\|_\infty$ -Norm gibt es außer der Vektorraumgerade noch weitere metrische Geraden durch die Punkte A und B.

Verzichtet man auf die Forderung, dass die Metrik auf V von einer Norm induziert wird, so müssen Vektorraumgeraden keine metrischen Geraden mehr sein. Ein Beispiel hierfür ist der reelle Vektorraum \mathbb{R}^2 versehen mit der *französischen Eisenbahnmetrik* (mathematische Bemerkung 9.2.11).

Mathematische Bemerkung 9.2.11

Die *französische Eisenbahnmetrik* $d_P : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist für ein beliebiges $P \in \mathbb{R}^2$ wie folgt definiert:

$$d_P(x, y) = \begin{cases} \|x - y\|_2, & \text{falls } x, y \text{ und } P \text{ auf einer Vektorraumgeraden liegen,} \\ \|x - P\|_2 + \|P - y\|_2, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir betrachten den Fall $P = (0, 0)$. Seien außerdem $A, B \in \mathbb{R}^2$ mit $A = (1, 0)$ und $B = (0, 1)$. Dann ist die Vektorraumgerade $g = \mathbb{R}(B - A) + A$ durch A und B keine metrische Gerade.

Beweis. Zum Beweis wählen wir $C = (0, 5)^T$. Wäre g eine metrische Gerade, gäbe es eine isometrische Parametrisierung $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(\mathbb{R}) = g$. Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ die Parameter von A, B, C. Dann müsste gelten:

$$\begin{cases} |a - b| = d_P(A, B) = 2 \\ |a - c| = d_P(A, C) = 1 + \sqrt{\frac{1}{2}} \\ |b - c| = d_P(B, C) = 1 + \sqrt{\frac{1}{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = a \pm 2 \\ c = a \pm 1 + \sqrt{\frac{1}{2}} \\ c = b \pm 1 + \sqrt{\frac{1}{2}} \end{cases} \quad \text{Widerspruch.}$$

Die Vektorraumgerade kann also bezüglich der französischen Eisenbahnmetrik keine metrische Gerade sein. □

Das Beispiel aus der mathematischen Bemerkung 9.2.10 zeigt auch, dass metrische Geraden nicht zwingend Hilbert-Geraden sein müssen: Die metrischen Geraden in $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ erfüllen die Eigenschaft 2. aus der Definition der Hilbert-Geraden nicht, da es durch die Punkte A und B mehr als eine metrische Gerade gibt. Umgekehrt sind Hilbert-Geraden in metrischen Räumen auch nicht immer metrische Geraden (siehe mathematische Bemerkung 9.2.12).

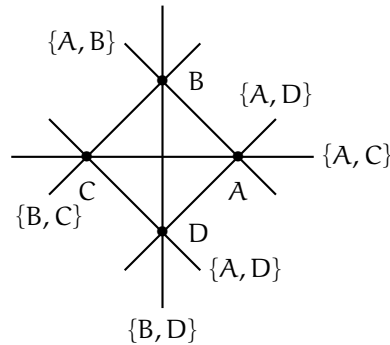


Abbildung 9.3: In dieser Geometrie sind alle zweielementigen Teilmengen der Punktmenge $\mathbb{P} = \{A, B, C, D\}$ Hilbert-Geraden.

Mathematische Bemerkung 9.2.12

Sei $\mathbb{P} = \{A, B, C, D\}$ eine beliebige Menge mit genau vier Elementen. Dann sind die Elemente von $\mathbb{G} = \{g \subset \mathbb{P} \mid g \text{ hat genau zwei Elemente}\}$ Hilbert-Geraden (vgl. Abbildung 9.3). Da es aber bezüglich keiner Metrik auf \mathbb{P} möglich ist, \mathbb{R} injektiv auf zweipunktige Teilmengen abzubilden, können die Elemente von \mathbb{G} keine metrischen Geraden sein.

Abschließend bleibt noch das Verhältnis zwischen Hilbert-Geraden und Vektorraumgeraden zu klären. Es ist leicht zu zeigen, dass in einem beliebigen endlichdimensionalen reellen Vektorraum V die Vektorraumgeraden auch Hilbert-Geraden sind. Ausgeführt wird das Argument in der mathematischen Bemerkung 9.2.13.

Mathematische Bemerkung 9.2.13

Seien V ein endlichdimensionaler \mathbb{R} -Vektorraum mit $\dim V \geq 2$ und $\mathbb{G} \subset \mathcal{P}(V)$ die Menge aller Vektorraumgeraden von V . Dann ist jedes $g \in \mathbb{G}$ eine Hilbert-Gerade.

Beweis. Nach der mathematischen Bemerkung 9.2.4 gibt es durch A und B eine Vektorraumgerade.

Außerdem besteht eine Vektorraumgerade $\mathbb{R}v + w$ immer mit $v + w$ und $2 \cdot v + w$ immer aus mindestens zwei Elementen. Der Punkt $(1, 0, \dots, 0)$ liegt nicht auf der Vektorraumgeraden durch die Punkte $(0, \dots, 0)$ und $(1, \dots, 1)$. Also sind Vektorraumgeraden tatsächlich Hilbert-Geraden. \square

Umgekehrt gibt es aber Beispiele für Hilbert-Geraden in Vektorräumen, die keine Vektorraumgeraden (und auch keine metrischen Geraden) sind (mathematische Bemerkung 9.2.14).

In Abbildung 9.4 (S. 90) sieht man einen Überblick über die bis hier analysierten Zusammenhänge.

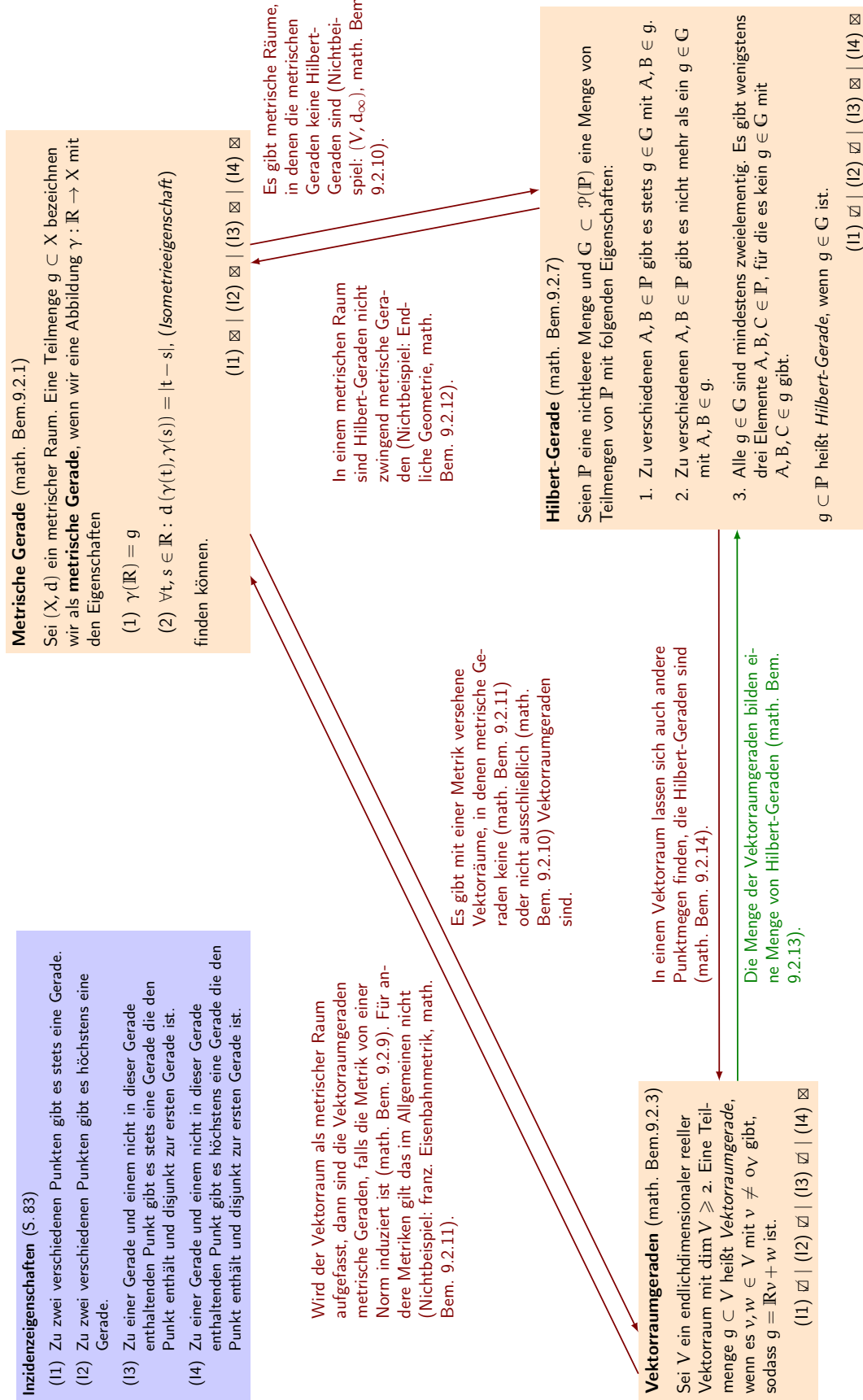


Abbildung 9.4: Zusammenfassung des Vergleichs unterschiedlicher Zugänge für Geraden.

Mathematische Bemerkung 9.2.14

Im reellen Vektorraum \mathbb{R}^2 sind die Elemente von

$$\left\{ g \subset \mathbb{R}^2 \mid \begin{array}{l} g \text{ ist ein Kreis mit Mittelpunkt auf der } x_1\text{-Achse oder} \\ g \text{ ist eine senkrecht auf der } x_1\text{-Achse startende Halbgerade.} \end{array} \right\}$$

Hilbert-Geraden in \mathbb{R}^2 , aber keine Vektorraumgeraden.

Beweis. Evident. □

Der Vergleich der drei Definitionen zum Konzept einer „Gerade“ verdeutlicht, wie unterschiedliche Definitionen eines Begriffs die darauf aufbauenden Überlegungen beeinflussen können. Damit ist so ein Vergleich aus mathematikdidaktischer Sicht sehr instruktiv. Definiert man Geraden als Vektorraumgeraden, so ist man direkt in der euklidischen Geometrie. Eine Diskussion des Parallelenaxioms – die wichtig in einer Lehramtsveranstaltung zur Geometrie ist (vgl. Abschnitt 9.8) – ist in diesem Fall nicht möglich. Auch weitere Eigenschaften, wie die Frage danach, durch wie viele Punkte eine Gerade eindeutig festgelegt ist, ergeben sich in natürlicher Weise aus der Definition. Das Gegenteil stellen die Hilbert-Geraden dar. Bis auf die Forderung weniger Inzidenzen gibt es keine weiteren Festlegungen. Das führt zu einer großen Vielfalt von Situationen, in denen diese Definition anwendbar ist. Schaut man bei Hilbert (1977) nach, so stellt man fest, dass es, abgesehen von diesen ersten Forderungen noch vieler weiterer Axiome bedarf, bis als einziges Modell die euklidische Geometrie übrig bleibt (vgl. Übersicht in Anhang B). Während dieses kleinschrittige Vorgehen aus didaktischer Perspektive eine Herausforderung darstellt (da jedes Mal die Notwendigkeit der Einführung eines weiteren Axioms motiviert/begründet werden sollte), ermöglicht sie aus fachmathematischer Sicht ein detailliertes Studium der logischen Abhängigkeiten verschiedener geometrischer Eigenschaften.

An dieser Stelle möchte ich der Vollständigkeit halber noch axiomatische Zugänge erwähnen, die Geraden als Hilbert-Geraden betrachten, aber von vorneherein das Parallelenaxiom als weitere Inzidenzaussage fordern. So ein Zugang wird zum Beispiel von Holland (1974, S. 13) im Buch „Geometrie für Lehrer und Studenten“ genutzt. Zwar ist es aus fachmathematischer Sicht unüblich, eine solch starke Aussage an den Anfang zu stellen, kann aber an dieser Stelle durch das Ziel motiviert werden, eine Hintergrundtheorie speziell für den Schulunterricht zu liefern (Holland, 1974, S. 7) (ohne auf den Fall der nichteuklidischen Geometrien einzugehen).

Die Definition metrischer Geraden mischt den Ansatz der Definition von Vektorraumgeraden, Geraden explizit anzugeben, mit dem größeren Modellraum, wie er auch in der Definition der Hilbert-Gerade zu finden ist. Die isometrische Parametrisierung durch \mathbb{R} schließt endliche und diskrete Situationen aus und liefert außerdem in kanonischer Weise eine Zwischenrelation für die Punkte einer Geraden. Im Vergleich zu den Hilbert-Geraden sind deutlich weniger weitere Schritte bis zur euklidischen Geometrie nötig, allerdings beinhaltet die Definition durch die Verwendung der reellen Zahlen deutlich stärkere Voraussetzungen. Darüber hinaus greift die Definition der metrischen Geraden das Konzept der Parametrisierung auf, die auch der Darstellung $\mathbb{R}v + b$ zugrunde liegt.

Die Definition metrischer Geraden ist in allen metrischen Räumen sinnvoll und führt zu keinen Widersprüchen. Metrische Geraden müssen aber nicht in allen metrischen Räumen existieren. Es wird also genau beschrieben, welche Teilmengen als Geraden bezeichnet werden, aber nicht gefordert, dass es solche auch immer geben muss. Die Definition der Hilbert-Gerade funktioniert anders. Es werden nur Räume betrachtet, in denen Geraden existieren, jedoch wird nur impliziert erklärt, was

eine Gerade ist. Der wesentliche Unterschied ist, dass man von einer einzelnen Teilmenge nie sagen kann, ob sie eine Hilbert-Gerade ist. Dafür bedarf es immer einer Menge von Objekten, die eine Menge von Hilbert-Geraden sein kann oder auch nicht. Diese Art implizit-relationaler Definition wird später beim Kongruenzbegriff (Abschnitt 9.7) noch einmal auftauchen und von mir – auch aus didaktischer Perspektive – diskutiert werden.

9.3 Abstände und Längen

Abstand und Länge sind zwei geometrische Konzepte, die zwar verwandt sind, aber wohlunterschieden werden müssen. Diese Notwendigkeit sieht man schon im alltagssprachlichen Gebrauch dieser Begriffe: Auch wenn der Abstand zweier Orte klar ist, heißt das weder, dass es einen Weg irgendeiner Länge zwischen diesen beiden Orten gibt, noch dass es einen Weg gibt, der als Länge den Abstand hat. Hat man umgekehrt die Möglichkeit, die Länge eines Weges zwischen zwei Orten zu messen, so ist eine Definition eines Abstandes über die kürzeste Verbindung zweier Punkte nicht trivial. Insbesondere ist nicht klar, ob es so ein Längenminimum überhaupt gibt.

Im in der Vorlesung *Geometrie für Lehramtsstudierende* gewählten Aufbau der Geometrie auf metrischen Räumen ist von vorne herein ein Abstandskonzept angelegt. Dieses ist aber für einen axiomatischen Aufbau der euklidischen Geometrie nicht nötig. Wieder soll Hilbert (1977) als Vergleichsreferenz dienen.

Seien (X, d) ein metrischer Raum und $g \subset X$ eine metrische Gerade. In Tabelle 9.1 (S. 84) habe ich verschiedene Eigenschaften einer solchen metrischen Geraden aufgelistet, unter anderem: Liegt ein Punkt $C \in g$ zwischen zwei Punkten $A, B \in g$, so gilt $d(A, B) = d(A, C) + d(C, B)$. Punkte, die auf g zwischen A und B liegen, stellen also *in gewisser Weise keinen Umweg* von A nach B dar.

Die etwas schwammige Formulierung „in gewisser Weise keinen Umweg“ ist der Tatsache geschuldet, dass die Nutzung des Begriffs „Umweg“ voraussetzt, das Konzept eines Weges und dessen Länge zu kennen. In metrischen Räumen ist allerdings nur der Abstand zwischen zwei Punkten gegeben. Der Unterschied zwischen den beiden Begriffen *Abstand* und *(Weg)Länge* wird sofort deutlich, wenn man den metrischen Raum $(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, d_2)$ betrachtet. Für die Punkte $A = (1, 0)$ und $B = (-1, 0)$ gilt $d_2(A, B) = 2$, aber man überlegt sich schnell, dass es keinen stetigen Weg der Länge 2 gibt. Durch die Metrik wird ein Abstand geliefert, über die Existenz und Länge von Wegen zwischen zwei Punkten wird keine Aussage getroffen.

Existiert allerdings eine metrische Gerade durch zwei Punkte, so bilden alle Punkte, die zwischen den beiden Punkten auf der metrischen Gerade liegen, einen kürzesten Weg zwischen den Punkten. Die Länge ist genau der Abstand. (vgl. Definition A.2.11, Bemerkung A.2.12 und Bemerkung A.2.13 (S. 337)). Metrische Geraden haben also die Eigenschaft, dass sie alle in ihnen enthaltenen Punkte auf kürzeste Weise miteinander verbinden. Gibt es, wie in der mathematischen Bemerkung 9.2.10 durch zwei Punkte eines metrischen Raumes mehr als eine metrische Gerade, so wird durch all diese Geraden ein kürzester Weg beschrieben.

Ich erkläre nun zum Vergleich, wie man diese „Kürzeste-Wege“-Eigenschaft (präzise: die strikte Dreiecksungleichung für nicht kollineare Punkte) im Axiomensystem von Hilbert (1977) formuliert und nachweist. Wie bereits erwähnt, steht hier initial kein Abstandsbegriff zur Verfügung. Die

grundlegende Definition der folgenden Analyse ist die der *Hilbert-Strecke*³⁶ (mathematische Bemerkung 9.3.1).

Mathematische Bemerkung 9.3.1 (Definition: Hilbert-Strecke)

Hilbert (1977, S. 5) definiert die Strecke AB ($= BA$) als Menge alle Punkte, die *zwischen* A und B liegen. Die Punkte A und B werden als *Endpunkte* bezeichnet.

Dabei ist *zwischen* eine dreistellige Relation, die im intuitiven Sinne die relative Lage von drei Punkten auf einer Hilbert-Geraden zueinander beschreibt. Hilbert (1977, 4f.) definiert den Begriff in seinen Axiomen der Anordnung.

Hilbert postuliert anschließend verschiedene Eigenschaften für Hilbert-Strecken (siehe die Auswahl in der mathematischen Bemerkung 9.3.2).

Mathematische Bemerkung 9.3.2 (Postulate über Hilbert-Strecken)

III.1 Wenn A, B zwei Punkte auf einer Hilbert-Geraden a sind und ferner A' ein Punkt auf [...] einer [...] Hilbert-Geraden a' ist, so kann man auf einer gegebenen Seite der Hilbert-Geraden a' von A' stets einen Punkt B' finden, so daß die Hilbert-Strecke AB der Hilbert-Strecke $A'B'$ kongruent [...] ist, in Zeichen: $AB \equiv A'B'$. (Hilbert, 1977, S. 11)

III.2 Wenn eine Hilbert-Strecke $A'B'$ und eine Hilbert-Strecke $A''B''$ derselben Hilbert-Strecke AB kongruent sind, so ist auch die Hilbert-Strecke $A'B'$ der Hilbert-Strecke $A''B''$ kongruent; [...] (Hilbert, 1977, S. 11)

III.3 Es seien AB und BC zwei Hilbert-Strecken, ohne gemeinsame Punkte auf der Hilbert-Geraden a und ferner $A'B'$ und $B'C'$ zwei Hilbert-Strecken auf [...] einer [...] Hilbert-Geraden a' ebenfalls ohne gemeinsame Punkte; wenn dann

$$AB \equiv A'B' \text{ und } BC \equiv B'C'$$

ist, so ist auch stets $AC \equiv A'C'$. (Hilbert, 1977, S. 12)

III.1 beschreibt die Möglichkeit der *Streckenabtragung*. Zwei Dinge sind hier bemerkenswert. Zum einen wird zwar die Existenz eines Punktes gefordert, sodass die Strecken kongruent sind, aber nicht die Eindeutigkeit. Zum anderen wird der Begriff *Kongruenz* als nicht weiter spezifizierte Beziehung zwischen zwei Hilbert-Strecken verwendet. Seine Bedeutung bzw. Definition erhält der Begriff erst implizit durch die Postulate. Die Eindeutigkeit der Streckenabtragung beweist Hilbert (1977, S. 15) später aus der Eindeutigkeit der Winkelabtragung (die er postuliert) und einer Vorstufe des Kongruenzsatzes SWS (den er ebenfalls postuliert). Für Überlegungen zu Länge und Abstand ist die Eindeutigkeit essentiell, da sie die Grundlage für die Idee legt, dass auf einem Strahl zu einem durch eine Streckenlänge definiertem Abstand genau ein Punkt existiert, der diesen Abstand vom Ursprung hat.

³⁶Hilbert (1977) bezeichnet diese Objekte natürlich einfach als Strecke. Ich nutze die Vorsilbe, damit immer deutlich ist, in welcher Axiomatik gerade argumentiert wird.

Aus III.1 und III.2 folgt bereits, dass der so definierte Kongruenzbegriff eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Strecken ist (siehe auch Hilbert, 1977, 11 f.).

In III.3 wird die *Addierbarkeit* von Hilbert-Strecken postuliert. Interpretiert man Hilbert-Strecken als die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten, so folgt aus III.3 sofort die gewünschte Eigenschaft: Hilbert-Geraden verbinden alle in ihnen enthaltenen Punkte auf kürzeste Weise miteinander. Dass die Interpretation von Strecken als kürzeste Verbindungen gerechtfertigt ist, zeigt das Argument in der mathematischen Bemerkung 9.3.3.

Mathematische Bemerkung 9.3.3 (Strikte Dreiecksungleichung für Hilbert-Strecken)

Seien \mathbb{P} eine Punktmenge und $\mathbb{G} \subset \mathcal{P}(\mathbb{P})$ so, dass die Axiome der Verknüpfung (Hilbert, 1977, 3 f.), die Axiome der Anordnung (Hilbert, 1977, 4 f.) sowie die Axiome der Kongruenz (Hilbert, 1977, 11 ff.) erfüllt sind.

Seien $A, B, C \in \mathbb{P}$ nicht kollinear. Trägt man dann auf dem Hilbert-Halbstrahl von A durch B an A zunächst die Hilbert-Strecke $AC + CB$ (vgl. Addierbarkeit von Hilbert-Strecken, Hilbert, 1977, S. 12) an und nennt den entstehenden Endpunkt B' , so liegt B zwischen A und B' (siehe Axiomengruppe II, Hilbert (1977, S. 4 f.) für die Definition von *zwischen*).

Es gilt dann also $AB < AC + CB$ im Sinne des Größenvergleichs von Hilbert-Strecken (Hilbert, 1977, S. 23).

Beweis. Ich erkläre zunächst, warum $AB \neq AC + CB$ ist. Sei $D \in \mathbb{P}$ der Punkt, den man erhält, wenn man auf der Hilbert-Halbgeraden durch A und C an C die Hilbert-Strecke CB anträgt (siehe Abbildung 9.5). Dann ist das Dreieck $\triangle BCD$ nach Konstruktion gleichschenkelig, also sind mit Satz II (Hilbert, 1977, S. 15) die beiden Basiswinkel kongruent (α in der Beweisskizze). Wäre nun auch $AD \equiv AB$, wären analog auch die Basiswinkel des dann gleichschenkligen Dreiecks $\triangle BAD$ kongruent zueinander. Da $\angle CDB$ in beiden Dreiecken auftaucht, wären dann insbesondere $\angle DBC$ und $\angle DBA$ kongruent. Dies widerspricht aber der Eindeutigkeit der Winkelantragung (III.4, Hilbert, 1977, S. 13 f.) an den Strahl BD . Also muss $AB \neq AC + CB$ gelten.

Im zweiten Schritt erkläre ich, warum auch $AB > AC + CB$ nicht gelten kann. Ich nehme an, dass $AB > AC + CB$ gilt. Seien C' und B' die Punkte auf der Hilbert-Halbgeraden von A durch B , die dann entstehen, wenn man an A zunächst AC und anschließend an das so entstandene C' die Hilbert-Strecke CB anträgt. Wegen der Widerspruchsannahme liegt B' zwischen C' und B . Ferner sei E der Punkt auf der Halbgeraden von A durch C , den man erhält, wenn man an D die Hilbert-Strecke $B'B$ anträgt (siehe Abbildung 9.6).

In dieser Konstruktion wäre dann $AE \equiv AB$ und $AD \equiv AB'$. Da die Dreiecke $\triangle AB'E$ und $\triangle ABD$ zusätzlich noch einen gemeinsamen Winkel haben, sind sie kongruent (Satz 12, Hilbert, 1977, S. 16). Insbesondere gilt dann $\angle EB'A \equiv \angle ADB$ und $\angle AEB' \equiv \angle DBA$. Der Größenvergleich für Winkel (Hilbert, 1977, S. 22) und der Außenwinkelsatz (Hilbert, 1977, S. 24) liefern dann den Widerspruch $\angle DBA > \angle DBA$ (siehe Abbildung 9.7):

$$\begin{array}{ccccccc} & \text{Größen-} & & \text{Basiswinkel-} & & \text{Außenwinkel-} & & \text{Widerspruchsannahme und} \\ & \text{vergleich} & & \text{satz (s.o.)} & & \text{satz} & & \text{Größenvergleich Winkel} \\ \angle DBA & > & \angle DBC & \equiv & \angle CDB \equiv \angle ADB & > & \angle AEB & > & \angle AEB' \equiv \angle DBA. \end{array}$$

□

Betrachtet man also Züge von Hilbert-Strecken als Verbindungen zwischen zwei Punkten, so stellt die Strecke zwischen diesen beiden Punkten in der Tat den kürzesten Weg dar. Da es zu zwei Punkten immer eine Strecke gibt, kann man durch die Kongruenzklassen, in die die Menge aller Hilbert-Strecken zerfallen, einen Abstandsbegriff definieren. Werden zusätzlich die Stetigkeitsaxiome (Hilbert, 1977, S. 30) gefordert, so lassen sich alle diese Kongruenzklassen mit den nichtnegativen

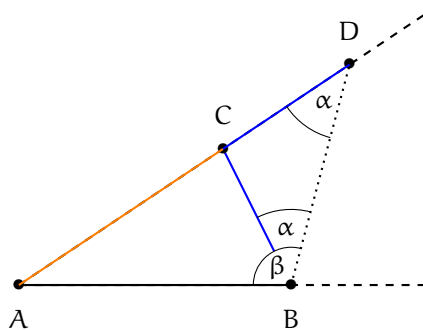


Abbildung 9.5: Beweisskizze zur mathematischen Bemerkung 9.3.3, Teil 1.

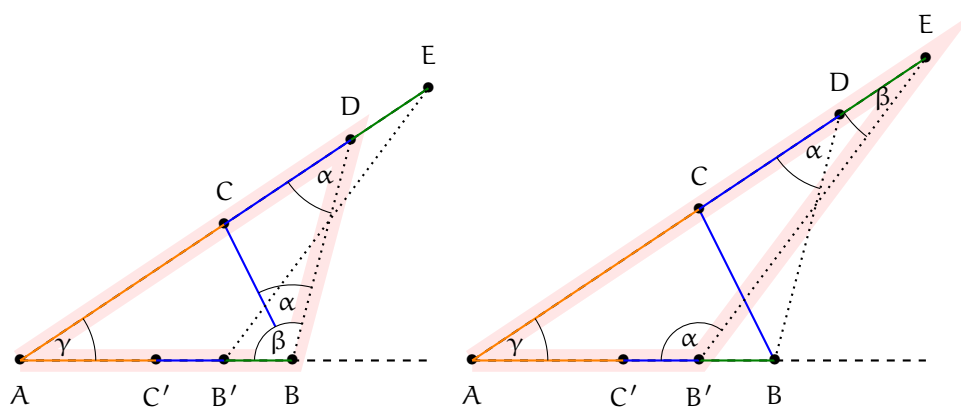


Abbildung 9.6: Beweisskizze zur mathematischen Bemerkung 9.3.3, Teil 2.

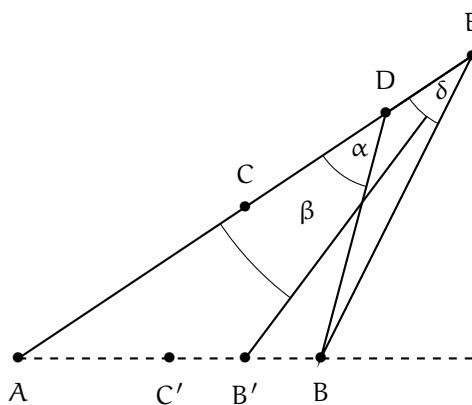


Abbildung 9.7: Beweisskizze zur mathematischen Bemerkung 9.3.3, Teil 3. Mit dem Außenwinkelsatz ist $\alpha > \delta$ und wegen $AB' < AB$ (Widerspruchsannahme) ist $\delta > \beta$. Insgesamt folgt also $\alpha > \beta$.

reellen Zahlen identifizieren (siehe Abschnitt 9.6). Der Abstandsbegriff ist dann tatsächlich eine Metrik. Aus den Ausführungen dieses Abschnitts folgt, dass Hilbert in seinen „Grundlagen der Geometrie“ zwar keine Metriken/Abstände nutzt oder auch nur erwähnt, sich diese Begriffe jedoch aus seiner Axiomatik (unabhängig vom Parallelenaxiom!) herausarbeiten lassen.

9.4 Das Spiegelungsaxiom

Im Axiomensystem der Saccheri-Ebene stellt das Spiegelungsaxiom (mathematische Bemerkung 9.4.1) eines von zwei Axiomen zur Beschreibung der neutralen Geometrie dar.³⁷

Mathematische Bemerkung 9.4.1 (Spiegelungsaxiom)

Sei (X, d) ein metrischer Raum, der das Inzidenzaxiom erfüllt. Wir sagen, dass X das **Spiegelungsaxiom** der ebenen Geometrie erfüllt, wenn für jede Gerade $k \subset X$ gilt:

1. Das Komplement $X \setminus k$ der Geraden k zerfällt in genau zwei Bogenzusammenhangskomponenten (Definition A.4.7 (S. 341)). Diese nennen wir die **Seiten** von k .
2. Es gibt eine bijektive Isometrie $\sigma_k : X \rightarrow X$, die k punktweise fixiert und die beiden Seiten von k vertauscht. Eine solche Isometrie nennen wir die **Spiegelung** an k .

In diesem Abschnitt werde ich die Rolle des Spiegelungsaxioms für den Theorieaufbau beschreiben und dabei auch auf die geometrischen Intuitionen eingehen, die mit dem Axiom verbunden sind. Anschließend werde ich kurz erklären, wie die Aussagen des Spiegelungsaxioms im Axiomensystem von Hilbert (1977) eingebettet sind.

Beide Teile des Spiegelungsaxioms klären das Verhältnis von Geraden zum umgebenden metrischen Raum. Teil 1 beschreibt dabei eine Trennungseigenschaft: Jede Gerade trennt den Raum in zwei Seiten und man kann nicht von einer Seite auf die andere Seite wechseln, ohne die Gerade zu schneiden, also nicht um die Gerade „herumlaufen“. Umgekehrt können zwei Punkte, die auf einer Seite liegen, immer durch einen stetigen Weg miteinander verbunden werden. Später kann diese Aussage noch dahingehend verschärft werden, dass zwei Punkte genau dann auf einer Seite liegen, wenn die Verbindungsstrecke (als Spezialfall eines stetigen Weges) die Gerade nicht schneidet (Korollar A.6.14 (S. 351)). Die beiden Seiten einer Gerade sind also zwei maximale konvexe Teilmengen des Komplements. Diese Aussage ist zum Beispiel zentral für den Beweis der Ortslinieneigenschaft der Mittelsenkrechten (Proposition A.6.15 (S. 351)).

Durch die Trennungseigenschaft wird in gewisser Weise die Zweidimensionalität (nicht im Sinne der linearen Algebra, aber im Sinne einer *ebenen* Geometrie) einer Saccheri-Ebene angelegt. Beispielsweise erfüllt der euklidische Raum (\mathbb{R}^3, d_2) das Inzidenzaxiom (die metrischen Geraden sind dann genau die Vektorraumgeraden), aber offenbar nicht die Trennungseigenschaft aus dem Spiegelungsaxiom.

Teil 2 des Spiegelungsaxioms versieht Saccheri-Ebenen mit einer Symmetrieeigenschaft: Jede Gerade stellt eine Symmetrieachse dar und die Seiten jeder Geraden sind dadurch gleichartig. Diese Symmetrieeigenschaft bildet dann zum Beispiel die Grundlage für die Definition von Orthogona-

³⁷Das andere Axiom ist das Inzidenzaxiom aus der mathematischen Bemerkung 7.2.9 (S. 66).

lität (Definition A.5.4 (S. 344)). Wegen des Dreispiegelungssatzes (Korollar A.7.5 (S. 353)) werden dadurch außerdem bereits alle anderen Symmetrieeigenschaften einer Saccheri-Ebene festgelegt. Interessant ist, dass die Eindeutigkeit der Spiegelung an einer Geraden nicht postuliert werden muss, sondern gefolgert werden kann (Korollar A.5.3 (S. 343)).

Die Trennungseigenschaft ist auch bei Hilbert (1977) zu finden. Sie wird dort aber nicht als Axiom sondern als Satz formuliert (mathematische Bemerkung 9.4.2).

Mathematische Bemerkung 9.4.2 (Satz 8 – Trennungseigenschaft von Geraden)

Jede Gerade a , welche in einer Ebene α liegt, trennt die nicht auf ihr liegenden Punkte dieser Ebene α in zwei Gebiete von folgender Beschaffenheit: ein jeder Punkt A des einen Gebietes bestimmt mit jedem Punkt B des anderen Gebietes eine Strecke AB , innerhalb deren ein Punkt der Geraden a liegt; dagegen bestimmen zwei Punkte A und A' ein und desselben Gebietes eine Strecke AA' , welche keinen Punkt von a enthält. (Hilbert, 1977, S. 8 f.)

Zwar gibt Hilbert keinen Beweis an, jedoch folgt im Text der Satz auf die Vorstellung der Axiomengruppe II (Axiome der Anordnung) (Hilbert, 1977, S. 4 f.). Zentral ist die Verwendung von Axiom II.4, das auch unter dem Namen *Pasch-Axiom* bekannt ist (Volkert, 2015, S. 15 f.). In Abbildung 9.8 wird die Idee für ein entsprechendes Argument skizziert.

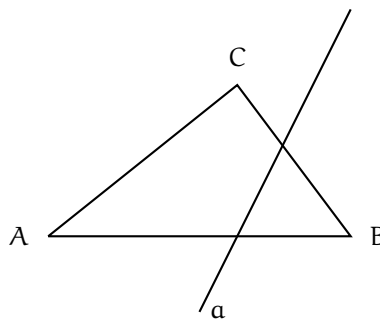


Abbildung 9.8: Axiom II.4 (Hilbert, 1977, S. 5 f., auch *Pasch-Axiom*) besagt: Es seien A, B, C drei nicht in gerader Linie gelegene Punkte und a eine Gerade in der Ebene ABC , die keinen der Punkte A, B, C trifft: wenn dann die Gerade a durch einen Punkt der Strecke AB geht, so geht sie gewiss auch durch einen Punkt der Strecke AC oder durch einen Punkt der Strecke BC .

Daraus lässt sich die Trennungseigenschaft von Geraden (mathematische Bemerkung 9.4.2) folgern: Jeder Punkt C liegt entweder auf der selben Seite von a wie A oder auf der selben Seite von a wie B . Entscheidend ist, ob die Verbindungsstrecke AC einen gemeinsamen Punkt mit a hat. Das *Pasch-Axiom* fließt dadurch ein, dass es festlegt, dass wenn z. B. C auf der selben Seite wie A liegt (die Verbindungsstrecke also keinen gemeinsamen Punkt mit a hat), automatisch beide Verbindungsstrecken zu B einen gemeinsamen Punkt mit a haben. Dann liegt B auf der anderen Seite wie A und C , wie gewünscht.

Im Kontext der Saccheri-Ebene kann die *Pasch*-Aussage als *Satz von Pasch* unmittelbar aus Korollar A.6.14 (S. 351) gefolgert werden. Interessant ist noch anzumerken, dass auch Hilbert den Status der Trennungseigenschaft als Axiom kannte und in einem Brief benutzt, den er zeitlich vor dem zentralen Axiomensystem aus Hilbert (1977) verfasst hat (vgl. Anhang I von Hilbert (1977, S. 127) sowie zur historischen Einordnung Volkert (2015, S. 48)). Warum er sich in den *Grundlagen* dann für das *Pasch-Axiom* entschieden hat, ist unklar.

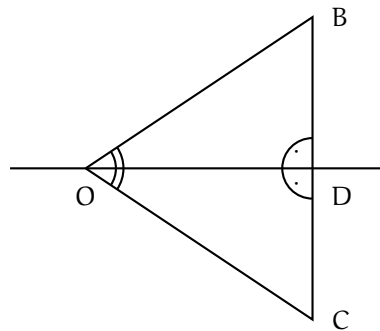


Abbildung 9.9: In O werden zu beiden Seiten kongruente Strecken angetragen, sodass die entstehenden Winkel mit Scheitel O kongruent sind. Die Nebenwinkel $\angle ODB$ und $\angle ODC$ sind dann ebenfalls kongruent, also beides rechte Winkel (Hilbert, 1977, S. 18). Dies beweist zum einen die Existenz rechter Winkel, liefert zum anderen aber auch eine Konstruktionsmethode für Geradenspiegelungen im Kontext der Hilbert-Axiomatik.

Da Hilbert (1977) nicht abbildungsgeometrisch arbeitet, findet sich natürlich kein Konzept einer Spiegelung in seinen Ausführungen. Dennoch ist auch dort die aus dem Spiegelungsaxiom resultierende Symmetrieeigenschaft angelegt. Sie folgt aus der Axiomengruppe III der Kongruenz (Hilbert, 1977, S. 15 ff.) und dem dortigen Argument für die Existenz eines rechten Winkels (Hilbert, 1977, S. 17 f.). Unter einem rechten Winkel versteht Hilbert (1977, S. 15) einen solchen Winkel, der zu seinem Nebenwinkel kongruent ist. Für das Argument werden kongruente Winkel mit kongruenten Schenkeln an unterschiedliche Seiten einer Geraden aber mit selbem Scheitelpunkt angetragen. Die Endpunkte der freien Schenkel bilden eine Strecke, die mit der Geraden rechte Winkel einschließt (Abbildung 9.9). Auf diese Weise werden die Punkte B und C in Abbildung 9.9 entsprechend der Idee einer Geradenspiegelung einander zugeordnet.

9.5 Das Parallelenaxiom

Bei der Axiomatisierung der ebenen Geometrie ist das Parallelenaxiom – insbesondere auch aus mathematikhistorischer Perspektive – von besonderer Bedeutung. Euklid formulierte es in den *Elementen* als das bereits durch seine bloße Länge hervorstechende Postulat 5 in folgender Weise:

[Gefordert soll sein], daß, wenn eine gerade Linie beim Schnitt mit zwei geraden Linien bewirkt, daß innen auf derselben Seite entstehende Winkel zusammen kleiner als zwei rechte werden, dann die zwei geraden Linien bei Verlängerung ins Unendliche sich treffen auf der Seite, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner als zwei rechte sind.

(Euklid (1980) zitiert nach Trudeau (1998, S. 50))

Jahrhundertlang haben Mathematiker (letztendlich erfolglos) versucht, diese Aussage als Satz aus den anderen Axiomen zu folgern. Schon die *Elemente* selbst erwecken den Eindruck, dass auch Euklid Zweifel daran hatte, dass es sich tatsächlich um ein notwendiges Postulat handelt. Trudeau (1998) formuliert hierzu:

Die Tatsache, daß bis zum Satz 29 kein Satz von ihm [dem Postulat 5] abhängt, danach aber jeder Satz mit Ausnahme von Satz 31, erweckt den Eindruck, als habe er seine Verwendung so lange

wie möglich hinausschieben wollen. Darüber hinaus gibt es Sätze, bei denen er sich der Mühe unterzieht, sie ohne Postulat 5 zu beweisen, obwohl er sie viel leichter hätte beweisen können, wenn er darauf gewartet hätte, daß das Postulat auf der Bildfläche erscheint – z.B. der WWS-Teil des Satzes 26, der eine unmittelbare Konsequenz von Satz 32 ist.

(Trudeau, 1998, 139 f.)

Bei dem Versuch das Parallelenaxiom (Postulat 5) zu beweisen, stießen Mathematiker auf verschiedenste Ersatzpostulate. Alle erwiesen sich aber im Endeffekt als äquivalent zum Parallelenaxiom. Die folgende Auflistung einiger dieser Aussagen zeigt deren breite Fächerung. Sie ist Teil einer umfangreichen Sammlung von Trudeau (1998, 151 f.):

- Parallele gerade Linien sind äquidistant. (Poseidonios, erstes Jahrhundert vor Christus.)
- Alle Punkte, die von einer gegebenen Linie äquidistant sind und auf einer gegebenen Seite liegen, bilden eine Gerade (Christoph Clavius, 1574)
- Es gibt mindestens ein Paar äquidistanter Linien.
- Es existiert mindestens ein Rechteck. (Gerolamo Saccheri, 1733)
- Die Winkelsumme im Dreieck beträgt 180° . (Gerolamo Saccheri, 1733)
- Es ist möglich ein Dreieck zu konstruieren, dessen Fläche größer ist als eine gegebene Fläche. (Carl Friedrich Gauß, 1799)³⁸

In der Veranstaltung *Geometrie für Lehramtsstudierende* wurde das Parallelenaxiom wie in der mathematischen Bemerkung 9.5.2 formuliert. Dabei wird folgende Definition von *parallel* zugrunde gelegt:

Mathematische Bemerkung 9.5.1 (Parallelität)

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Wir bezeichnen zwei Geraden $g, h \subset X$ als **parallel** (kurz: $g \parallel h$), wenn $h \cap k = \emptyset$ oder $h = k$ gilt.

Mathematische Bemerkung 9.5.2 (Parallelenaxiom)

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Wir sagen, dass X das **Parallelenaxiom** erfüllt, wenn es zu jeder Geraden $g \subset X$ und jedem Punkt $P \in X$ genau eine Gerade $h \subset X$ mit $P \in h$ und $g \parallel h$ gibt.

³⁸Während die anderen Äquivalenzen zum Parallelenaxiom einsichtig oder „elementargeometrische Folklore“ sind, ist dieses Resultat vielleicht weniger bekannt und für mich auf jeden Fall sehr überraschend. Dellori (2018) entwickelt in ihrer Bachelorarbeit „Axiomatische Zugänge zur nichteuklidischen Geometrie im Rahmen der Saccheri-Ebene“ einen Beweis im Kontext der Saccheri-Ebene. Die Details würden hier den Rahmen sprengen, ich schildere aber die wesentliche Idee: Man zeigt, dass es in der hyperbolischen Ebene mindestens ein Dreieck gibt, das eine Innenwinkelsumme von kleiner π hat. Die Differenz zu π wird dabei als Winkeldefekt bezeichnet. So ein Dreieck hat dann also einen positiven Winkeldefekt (Dellori, 2018, Satz 3.3.2, S. 32 f.). Daraus folgert man, dass dann bereits alle Dreiecke der hyperbolischen Ebene einen positiven Winkeldefekt bzw. eine Innenwinkelsumme kleiner π haben (Dellori, 2018, Satz 3.3.3 - Korollar 3.3.5, S. 33). Über eine Triangulierung hyperbolischer Polygone wird dann das Konzept einer Flächenäquivalenz eingeführt und man kann zeigen, dass der Winkeldefekt eines Polygons (der der Summe der Winkeldefekte der Dreiecke aus einer Triangulierung des Polygons entspricht) ein sinnvolles Maß für den Flächeninhalt darstellt (Dellori, 2018, Abschnitt 5.3). Das Argument schließt dann mit dem Beweis, dass es in der hyperbolischen Ebene Polygone mit Winkeldefekt größer π gibt (Folgt mit der Additivität der Winkeldefekte von Dreiecken). Die Fläche so eines Polygons ist dann größer als die Fläche jedes hyperbolischen Dreiecks (Dellori, 2018, Satz 5.3.18 und Korollar 5.3.19, S. 75). Umgekehrt ist in der euklidischen Ebene aber die Konstruktion eines Dreiecks mit beliebig großem Flächeninhalt möglich.

Die Formulierung ist ähnlich zu der von Hilbert (mathematische Bemerkung 9.5.3). Der Hauptunterschied besteht in der Quantifizierung. In der Vorlesung *Geometrie für Lehramtsstudierende* wird die Existenz *genau einer* Parallelen postuliert; Hilbert beschränkt sich auf *höchstens eine*. Die Äquivalenz ist klar mit dem Satz über die automatische Existenz von Parallelen in Saccheri-Ebenen (Proposition A.10.2 (S. 360)).³⁹

Mathematische Bemerkung 9.5.3 (Parallelenaxiom bei Hilbert)

Es sei a eine beliebige Gerade und A ein Punkt außerhalb a : dann gibt es in der durch a und A bestimmten Ebene höchstens eine Gerade, die durch A läuft und a nicht schneidet.

(Hilbert, 1977, S. 28)

Bemerkenswert ist, dass das Parallelenaxiom in dieser Form eigentlich eine Inzidenzeigenschaft postuliert. Der natürliche Platz im axiomatischen Aufbau wäre also bei den anderen postulierten Inzidenzeigenschaften am Beginn des axiomatischen Aufbaus. Im Buch „Geometrie für Lehrer und Studenten“ wählt Holland (2007, S. 13) genau diesen Aufbau und nennt das Parallelenaxiom als Teil der Inzidenzaxiome.

Dass das Parallelenaxiom in vielen Axiomatisierungen trotzdem ans Ende gestellt wird, hängt mit seiner Klassifikationsmächtigkeit zusammen. Damit meine ich: Eine Geometrie, die durch das Axiomensystem der euklidischen Geometrie ohne das Parallelenaxiom beschrieben wird, wird oft als *neutrale* Geometrie bezeichnet. Neutrale Geometrien erlauben die Definition vieler Begriffe und den Nachweis vieler Sätze, die man intuitiv mit der ebenen Geometrie verbindet. Dazu gehören Orthogonalität, Mittelsenkrechten, Kongruenzsätze und einige Winkelsätze (Basiswinkelsatz, Scheitelwinkelsatz, Nebenwinkelsatz). Sowohl das Parallelenaxiom als auch dessen Negation schränken die Modelle (bis auf Isomorphie) auf jeweils genau eines ein (euklidische Geometrie und hyperbolische Geometrie). Daraus folgt insbesondere, dass es (bis auf Isomorphie) genau zwei unterschiedliche Modelle einer neutralen Geometrie gibt.

Wählt man also einen axiomatischen Aufbau der Geometrie, der das Parallelenaxiom ans Ende stellt, so lassen sich daran die Eigenschaften *Vollständigkeit* und *Unabhängigkeit* eines Axiomensystems exemplarisch diskutieren.

In der Veranstaltung *Geometrie für Lehramtsstudierende* wird das Modell der Poincaré-Halbebene als Modell der hyperbolischen Geometrie in inhaltlich anschaulicher Weise unter Verwendung von Zirkel-und-Lineal-Konstruktionen behandelt (siehe Abschnitt 9.8). Auf diese Weise kann die Unabhängigkeit des Parallelenaxioms belegt werden und damit auch die Notwendigkeit aufgezeigt werden, die Axiomatik der Saccheri-Ebene weiter zu ergänzen, um die euklidische Geometrie zu erreichen. Nicht nachgewiesen wird in der Veranstaltung, dass die Saccheri-Ebene zusammen mit der Negation des Parallelenaxioms ein vollständiges Axiomensystem liefert. Die dazu nötige Konstruktion einer Isomorphie zur oberen Halbebene würde den fachlichen Rahmen der Veranstaltung deutlich sprengen.

Abschließend sei an dieser Stelle noch auf die Geometrie im euklidischen Raum \mathbb{R}^2 hingewiesen. Man zeigt schnell, dass es zu einer beliebigen Vektorraumgeraden $g = \mathbb{R}v + w \subset \mathbb{R}^2$ und einem $B \in \mathbb{R}^2$ genau eine Parallele zu g durch B gibt, nämlich $\mathbb{R}v + B$ (mathematische Bemerkung 9.2.6 (S. 86)).

³⁹Man vergleiche hierzu auch die Ausführungen zum Saccheri-Viereck (Abschnitt 9.8.4, insb. Abbildung 9.28). Der Fall, dass es zu einem Punkt-Geradenpaar *keine* Parallele gibt, taucht in der Saccheri-Ebene nicht auf. Er gilt jedoch in der sphärischen Geometrie, die aber nicht durch den Saccheri-Zugang abgedeckt ist. Schon der gewählte Geradenbegriff ist auf Grund der Parametrisierung durch \mathbb{R} nicht kompatibel zu den Großkreisen als kürzeste Verbindung auf einer Kugeloberfläche.

Durch die Vektorraumaxiome ist also das Parallelenaxiom (zumindest, wenn man als Geraden nur Vektorraumgeraden zulässt) automatisch mit erfüllt.

9.6 Von der axiomatischen zur analytischen Geometrie

Ein zentrales Resultat der Veranstaltung *Geometrie für Lehramtsstudierende* ist der finale *Hauptsatz über euklidische Ebenen* (mathematische Bemerkung 9.6.1).

Mathematische Bemerkung 9.6.1 (Hauptsatz über euklidische Ebenen)

Jede euklidische Ebene (im Sinne der Definition in der mathematischen Bemerkung 7.2.15 (S. 67)) ist isometrisch isomorph zu (\mathbb{R}^2, d_2) .

Durch diesen Satz wird die Brücke von der axiomatischen zur analytischen Geometrie geschlagen. Letztere ist gewissermaßen die Zielgeometrie, die die Entwicklung des Axiomensystems leitet. Der Hauptsatz belegt das Erreichen des Ziels und damit auch die Vollständigkeit des Axiomensystems (Saccheri-Ebene + Parallelenaxiom). Ein ähnliches Resultat findet man auch bei Hilbert (1977, S. 68): „Diese [...] erweiterte Geometrie ist keine andere als die gewöhnliche analytische Cartesische Geometrie des Raumes [...].“

In diesem Abschnitt gebe ich zunächst einen Überblick über die Strategie, mit der in der Veranstaltung der Hauptsatz bewiesen wurde. Zentral dafür sind die Betrachtung von Parallelverschiebungen. Anschließend werde ich diesen Zugang mit einem Zugang vergleichen, wie er unter anderem von Hilbert vorgeschlagen, aber auch in vielen anderen Büchern und Skripten aufgegriffen wurde. Der Hauptunterschied besteht darin, dass Hilbert die reellen Zahlen nicht voraussetzt, sondern als sogenannten Koordinatenkörper geometrisch konstruiert.

Das erklärte Ziel in der Vorlesung ist, zu zeigen und zu erklären, dass Saccheri-Ebenen (mathematische Bemerkung 7.2.11), in denen das Parallelenaxiom (mathematische Bemerkung 9.5.2) erfüllt ist (sogenannte *euklidische Ebenen*, siehe mathematische Bemerkung 7.2.15), bis auf isometrische Isomorphie bereits der Schulgeometrie, also dem euklidischen Raum (\mathbb{R}^2, d_2) entsprechen. Es wird zunächst gezeigt, dass eine beliebige euklidische Ebene (\mathbb{E}, d) als zweidimensionaler reeller Vektorraum aufgefasst werden kann. Anschließend wird gezeigt, dass der Abstand zweier Punkte in \mathbb{E} immer aus den reellen Skalaren der Darstellung bezüglich einer Orthonormalbasis mit Hilfe des Satzes von Pythagoras berechnet werden kann.

Die Vektorraumstruktur (\mathbb{E}, d) wird nicht direkt in \mathbb{E} konstruiert, sondern auf der Menge der *Parallelverschiebungen* $\mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ (siehe Definition A.12.1 (S. 362)). Diese Teilmenge der Isometrien von \mathbb{E} wird mit $V(\mathbb{E})$ bezeichnet⁴⁰. Man stellt fest, dass eine Parallelverschiebung durch einen einzigen Punkt und dessen Bild bereits eindeutig bestimmt ist (Proposition A.12.5). \mathbb{E} lässt sich dann mit $V(\mathbb{E})$ identifizieren, in dem man einen beliebigen Punkt $O \in \mathbb{E}$ auswählt (den „Ursprung“) und einen Punkt $P \in \mathbb{E}$ mit der Parallelverschiebung τ_{OP} identifiziert, die O auf P abbildet (Korollar A.12.6 (S. 363)).

Um die Menge der Parallelverschiebungen $V(\mathbb{E})$ mit einer normierten \mathbb{R} -Vektorraumstruktur zu versehen, müssen zunächst die dafür nötigen Rechenoperationen definiert werden:

⁴⁰Hinter dieser Notation verbirgt sich die Vorstellung, dass die Parallelverschiebungen aus schulgeometrischer Sicht die Rolle der „Vektoren“ übernehmen sollen.

Längen auf $V(\mathbb{E})$: Für eine beliebige Parallelverschiebung ist der Abstand zwischen jedem Punkt und dem entsprechenden Bildpunkt gleich (Proposition A.12.7 (S. 363)). So lässt sich eine wohldefinierte Abbildung $|\cdot| : V(\mathbb{E}) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ definieren, die als *Länge einer Parallelverschiebung* bezeichnet wird (Definition A.12.8 (S. 363)). Wird $V(\mathbb{E})$, wie nachfolgend beschrieben, mit einer Vektorraumstruktur versehen, ist $|\cdot|$ eine Norm auf $V(\mathbb{E})$ (Lemma A.12.15).

Addition auf $V(\mathbb{E})$: Auf $V(\mathbb{E})$ wird die Addition zweier Parallelverschiebungen als deren Verkettung definiert. $(V(\mathbb{E}), +)$ ist dann eine abelsche Untergruppe von $\text{Isom}(\mathbb{E})$ (Proposition A.12.4 (S. 362)).

\mathbb{R} -Multiplikation auf $V(\mathbb{E})$: In beliebigen Saccheri-Ebenen lassen sich zentrische Streckungen definieren (Definition A.12.9 (S. 364)). Dabei bezeichnet $\zeta_{Z,\lambda}$ die zentrische Streckung mit Streckzentrum Z und Streckfaktor λ . Verkettet man nun eine Parallelverschiebung $\tau \in V(\mathbb{E})$ mit einer zentrischen Streckung mit Streckfaktor $\lambda \in \mathbb{R}$ zu

$$\mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}, \quad P \mapsto \zeta_{P,\lambda}(\tau(P)),$$

erhält man wieder eine Parallelverschiebung (Proposition A.12.12 (S. 364)). Darauf aufbauend wird über

$$(\lambda \cdot \tau)(P) = \zeta_{P,\lambda}(\tau(P))$$

eine \mathbb{R} -Multiplikation auf $V(\mathbb{E})$ definiert (Definition A.12.13 (S. 365)).

Mit diesen Definitionen ist $(V(\mathbb{E}), +, \cdot, |\cdot|)$ ein normierter reeller Vektorraum (Satz A.12.17 (S. 366)). Um einen Vektorraumisomorphismus $V(\mathbb{E}) \rightarrow \mathbb{R}^2$ zu erhalten, konstruiert man eine Orthonormalbasis für $V(\mathbb{E})$ (orthogonal und Länge gleich 1 im Saccheri-Sinn). Hierzu wählt man in \mathbb{E} wie oben einen Ursprung $O \in \mathbb{E}$ und wählt zwei beliebige zueinander orthogonale Geraden durch O . Auf beiden Geraden wählt man dann je einen Punkt E_1 bzw. E_2 mit Abstand 1 zu O . Die Parallelverschiebungen τ_{OE_1} und τ_{OE_2} bilden dann eine Basis (Satz A.14.1 (S. 370)). Wird eine beliebige Parallelverschiebung durch diese Basis dargestellt, so liefern die beiden Skalare der Linearkombination die Identifikation mit \mathbb{R}^2 :

$$\tau = \lambda\tau_{OE_1} + \mu\tau_{OE_2} \quad \mapsto \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Insgesamt erhält man dann die in der mathematischen Bemerkung 9.6.2 beschriebene Identifikation von euklidischen Ebenen mit dem \mathbb{R}^2 .

Mathematische Bemerkung 9.6.2 (Identifikation einer euklidischen Ebene mit \mathbb{R}^2)

Sei (\mathbb{E}, d) eine euklidische Ebene. Wählt man ein beliebiges $O \in \mathbb{E}$ (Ursprung) und beliebige, zueinander orthogonale Geraden $x_1, x_2 \subset \mathbb{E}$ durch O sowie Punkte $E_1 \in x_1$ und $E_2 \in x_2$ mit $d(O, E_1) = d(O, E_2) = 1$, kann \mathbb{E} mit \mathbb{R}^2 durch die folgende Abbildung Θ identifiziert werden.

$$\Theta : \begin{cases} \mathbb{E} \xrightarrow{\Phi_Q} V(\mathbb{E}) \xrightarrow{\Psi} \mathbb{R}^2, \\ P \xrightarrow[\substack{\text{bij.} \\ (\text{A.12.6})}]{\tau_{OP}} \tau_{OP} \xrightarrow[\substack{\text{VR Isom.} \\ (\text{A.14.1})}]{\quad} (\lambda, \mu). \end{cases} \quad , \quad \text{mit } \tau_{OP} = \lambda\tau_{OE_1} + \mu\tau_{OE_2}.$$

Als letzter Schritt für den Beweis dafür, dass durch euklidische Ebenen genau die Geometrie des euklidischen Raums \mathbb{R}^2 beschrieben wird, muss noch gezeigt werden, dass $\Theta : (\mathbb{E}, d) \rightarrow (\mathbb{R}^2, d_2)$

eine Isometrie ist. Dieses Problem lässt sich darauf reduzieren zu beweisen, dass in jeder euklidischen Ebene (\mathbb{E}, d) der Satz des Pythagoras (mathematische Bemerkung 9.6.3) gilt (Bemerkung A.14.2 (S. 371)). Die Gültigkeit des Satzes von Pythagoras in euklidischen Ebenen bedeutet, dass der Abstand zweier Punkte dort in gleicher Weise mit Hilfe eines rechtwinkligen Dreiecks berechnet werden kann, wie in (\mathbb{R}^2, d_2) .

Mathematische Bemerkung 9.6.3 (Satz des Pythagoras in euklidischen Ebenen)

Seien (\mathbb{E}, d) eine euklidische Ebene und $\triangle ABC$ ein Dreieck, bei dem die Seite durch A und C orthogonal auf der Seite durch B und C steht. Dann gilt für $a = d(B, C)$, $b = d(A, C)$ und $c = d(A, B)$

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Der Beweis des Satzes (Seite 372) baut auf der zweimaligen Anwendung des Kathetensatzes auf und ist eine einfache Rechnung. Als Vorbereitung für den Beweis des Kathetensatzes (Satz A.14.6 (S. 372)) wird eine Art Skalarprodukt von zwei Parallelverschiebungen definiert (mathematische Bemerkung 9.6.4)⁴¹.

Mathematische Bemerkung 9.6.4 (Produkt zweier Parallelverschiebungen)

Seien (\mathbb{E}, d) eine euklidische Ebene, $\tau_1, \tau_2 \in V(\mathbb{E}) \setminus \{\text{id}_{\mathbb{E}}\}$ und $O \in \mathbb{E}$. Dann wird $s_{\tau_1}(\tau_2)$ definiert durch:

$$s_{\tau_1}(\tau_2) := |\tau_1| \cdot d(O, \tau_2(O))^{g_{O, \tau_1}}.$$

Dabei bezeichnet $\tau_2(O)^{g_{O, \tau_1}}$ die orthogonale Projektion (Definition A.5.4 (S. 344)) von $\tau_2(O)$ auf die metrische Gerade mit Stützpunkt O und Richtung τ_1 (Satz A.13.1 (S. 368)).

Der Kathetensatz folgt dann direkt aus der Tatsache, dass dieses Produkt $s_{\tau_1}(\tau_2)$ in τ_1 und τ_2 symmetrisch ist (Lemma A.14.4). In Abbildung 9.10 wird dieser Zusammenhang verdeutlicht.

Auch in den „Grundlagen der Geometrie“ wird erklärt, wie das dort vorgestellte Axiomensystem (Übersicht in Anhang B (S. 375)) in einer ebenen Koordinatengeometrie dargestellt werden kann. Hilbert beschreibt die geometrische Konstruktion eines Koordinatenkörpers auf Grundlage des Parallelenaxioms (IV) aber ohne Nutzung der beiden Stetigkeitsaxiome (V). Dies wird später noch von Bedeutung sein, da deswegen der mit Hilfe des Satzes von Pappos-Pascal konstruierte Koordinatenkörper nicht zwingend \mathbb{R} sein muss. Ich werde auf Seite 105 hierauf genauer eingehen.

Die Konstruktion des Koordinatenkörpers betitelt Hilbert (1977, S. 60) als *Streckenrechnung*. Alle Rechenoperationen werden für Hilbert-Strecken eingeführt. Im Endeffekt sind die Objekte des Koordinatenkörpers aber Äquivalenzklassen kongruenter Strecken. Hilbert erwähnt dies nicht explizit (Volkert, 2015, S. 183).

Um mit Hilbert-Strecken zu rechnen, werden eine Addition und eine Multiplikation definiert. Dabei sind alle Überlegungen von konsequent geometrischer Natur (Volkert, 2015, S. 182). Die Addition entspricht dem Hintereinander-Abtragen der beiden Summanden-Strecken auf einer Geraden, wie

⁴¹Damit s tatsächlich ein Skalarprodukt ist, fehlt noch die Additivität; Homogenität in beiden Komponenten und Symmetrie werden in Lemma A.14.4 (S. 372) bewiesen. Die positive Definitheit ist klar. (vgl. auch Bemerkung A.14.5 (S. 372))

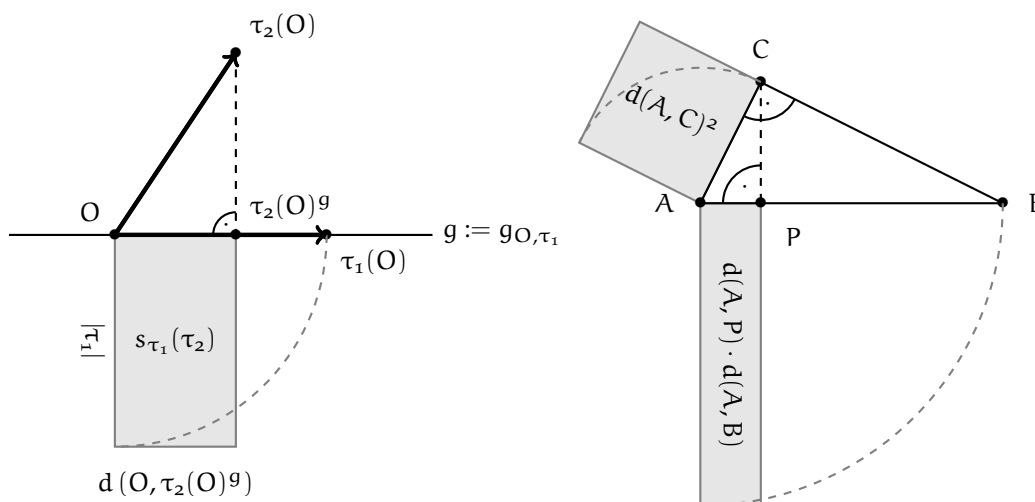


Abbildung 9.10: In der linken Abbildung wird das Produkt $s_{\tau_1}(\tau_2)$ geometrisch interpretiert. Die geometrische Deutung entspricht der geometrischen Interpretation des euklidischen Skalarprodukts im \mathbb{R}^2 : Multipliziert wird die Länge der orthogonalen Projektion eines Vektors mit der Länge des Vektors auf den projiziert wird. Das rechte Bild zeigt die Figur zum Kathetensatz. Da C die Projektion von B auf die Gerade durch A und C und P die Projektion von C auf die Gerade durch A und B ist, können beide grau gefärbten Flächen durch das in der mathematischen Bemerkung 9.6.4 definierte Produkt beschrieben werden.

sie durch die Addierbarkeit von Hilbert-Strecken (Axiom III.3, Hilbert (1977, S. 12))⁴² postuliert wird.

Die Multiplikation von Hilbert-Strecken bedarf einer komplizierteren Konstruktion (Hilbert, 1977, S. 60 f.). Während die Addition maßstabsunabhängig ist, muss für die Multiplikation eine Einheitsstrecke als Referenz festgelegt werden. Dazu wählt man irgendeine Hilbert-Strecke, die im Folgenden als 1 bezeichnet wird. Die Multiplikation von zwei Hilbert-Strecken a und b wird dann wie in Abbildung 9.11 konstruiert.

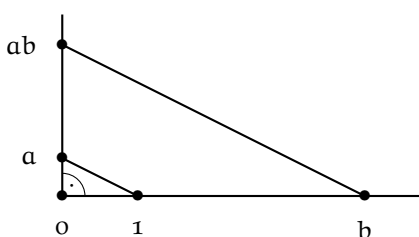


Abbildung 9.11: Multiplikation von Hilbert-Strecken a und b : Auf dem einen Schenkel eines rechten Winkels werden sowohl die Einheitsstrecke 1 als auch b vom Scheitel O aus abgetragen. Auf dem anderen Schenkel wird von O aus a abgetragen. Die eindeutige Parallele zur Geraden durch die Endpunkte von 1 und a durch den Endpunkt von b schneidet den Winkelschenkel, auf dem a abgetragen wurde, in einem Punkt. Die Strecke zwischen diesem Punkt und O definiert das Produkt ab . (Hilbert, 1977, S. 60 f.)

Interpretiert man die Äquivalenzklassen kongruenter Strecken als Abstandsmaß (vergleiche auch Abschnitt 9.3), dann verbirgt sich hinter dieser Definition der Multiplikation genau die Idee des Strahlensatzes.

⁴²Auf die Addition von Strecken bin ich auf Seite 94 schon im Kontext der strikten Dreiecksungleichung für Hilbert-Strecken (mathematische Bemerkung 9.3.3) eingegangen.

Während die Kommutativität und Assoziativität der Strecken-Addition aus den linearen Kongruenz-Axiomen III 1 - 3 folgen (Hilbert, 1977, S. 60), bedarf es für die Nachweise dieser Rechengesetze bezogen auf die Multiplikation des wichtigen *Satzes von Pappos-Pascal*⁴³ (mathematische Bemerkung 9.6.5).

Mathematische Bemerkung 9.6.5 (Satz von Pappos-Pascal)

Es seien A, B, C bzw. A', B', C' je drei Punkte auf zwei sich schneidenden Hilbert-Geraden, die vom Schnittpunkte der Hilbert-Geraden verschieden sind; ist dann CB' parallel BC' und CA' parallel AC' , so ist auch BA' parallel AB' (siehe Abbildung 9.12). (Hilbert, 1977, S. 54)

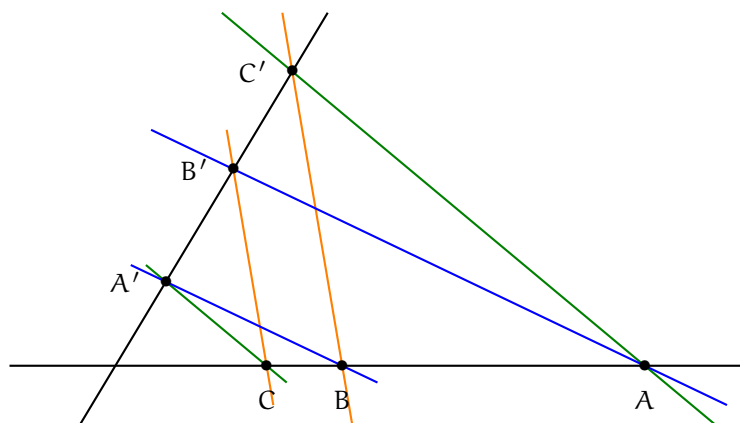


Abbildung 9.12: Skizze zum Satz von Pappos-Pascal (mathematische Bemerkung 9.6.5). Aus der Parallelität der orangenen bzw. grünen Geraden folgt die Parallelität der blauen Geraden.

Ich möchte an dieser Stelle nicht die komplette Streckenrechnung im Detail beschreiben und beweisen. Dies bringt für meinen Vergleich unterschiedlicher Zugänge zur ebenen Geometrie keinen Mehrwert. Exemplarisch beschreibe ich in Abbildung 9.13, wie der Satz von Pappos-Pascal in den Nachweis der Kommutativität der Strecken-Multiplikation eingeht.

Hilbert (1977, S. 63 ff.) erklärt, dass diese Streckenrechnung alle Eigenschaften erfüllt, die man aus algebraischer Sicht für einen Körper braucht. Anschließend erklärt er, dass jedem Punkt einer Ebene (die die Axiome der Gruppen I bis IV erfüllt) über orthogonale Projektionen auf zwei zueinander orthogonale Hilbert-Geraden (Achsen) durch zwei Äquivalenzklassen kongruenter Hilbert-Strecken Koordinaten zugeordnet werden können. Er unterscheidet dazu noch auf beiden Achsen vom Ursprung ausgehend eine positive und eine negative Richtung (Hilbert, 1977, S. 66). Abschließend zeigt Hilbert (1977, S. 66 f.) noch, dass in diesem Koordinatensystem Hilbert-Geraden genau die Objekte sind, für die die Koordinaten der enthaltenen Punkte (x, y) eine lineare Gleichung der Form $bx - ay - bc = 0$ erfüllen. Dabei sind a, b, c Strecken, also Elemente des geometrisch konstruierten Koordinatenkörpers, die eine Hilbert-Gerade eindeutig festlegen. Damit erklärt Hilbert (1977, S. 67) die Koordinatisierung seiner axiomatischen Geometrie für beendet: „Der weitere Aufbau der Geometrie kann von nun an nach den Methoden geschehen, die man in der analytischen Geometrie gemeinhin anwendet.“

⁴³Hilbert (1977) bezeichnet diesen Satz als *pascalschen Satz*. Ich nutze aber die (historisch korrekte) Bezeichnung *Satz von Pappos-Pascal* und folge damit Volkert (2015, S. 53), der ausführt, dass der Satz von Pascal „allgemein von nicht entarteten Kegelschnitten ausgeht, während der hier betrachtete Sonderfall – als Satz von Pappos-Pascal bezeichnet – nur den Entartungsfall zweier sich schneidender Geraden behandelt“.

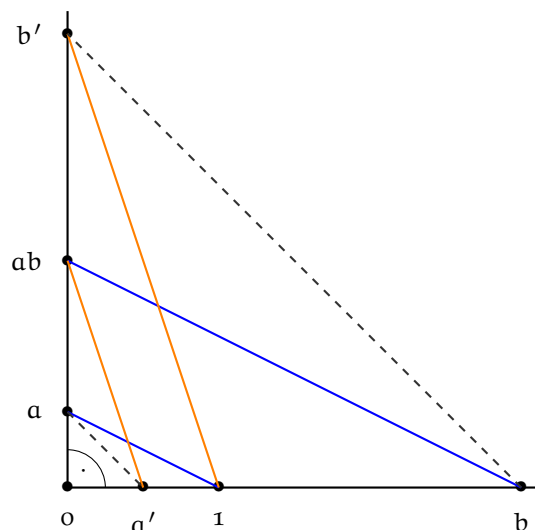


Abbildung 9.13: Kommutativität der in Abbildung 9.11 definierten Multiplikation von Hilbert-Strecken: In der Zeichnung sind die Hilbert-Strecken $a \equiv a'$ und $b \equiv b'$ mit ihren Endpunkten identifiziert. Die gestrichelten Hilbert-Geraden sind parallel (Basiswinkelsatz zusammen mit der Umkehrung des Stufenwinkelsatzes). Nach Definition der Multiplikation (Abbildung 9.11) erhält man ba als Schnittpunkt der Parallelen zur Hilbert-Geraden durch b' und 1 durch a' . Nach dem Satz von Pappos-Pascal (Abbildung 9.12) ist die Hilbert-Gerade durch a' und ab eine solche Parallele. Mit dem Parallelenaxiom folgt $ab = ba$, wie gewünscht.

Der Ausgangspunkt dieses Abschnittes war, zu erklären, wie in verschiedenen Axiomensystemen der ebenen Geometrie die Identifizierung mit dem euklidischen Raum \mathbb{R}^2 funktioniert. Im Kontext der „Grundlagen der Geometrie“ fehlt noch eine genauere Charakterisierung des konstruierten Koordinatenkörpers. Hilbert (1977, S. 47 f.) gibt eine Körpererweiterung des Körpers der gebrochen rationalen Funktionen an, auf der er ein Modell einer nichtarchimedischen Geometrie konstruiert (d. h. alle Axiome bis auf das archimedische, sind erfüllt, vgl. auch Abbildung B.1 (S. 378)). Somit ist das Treiben analytischer Geometrie auch ohne die Stetigkeitsaxiome möglich. Aber auch die Forderung der Archimedizität (Axiom V.1) charakterisiert den Koordinatenkörper noch nicht eindeutig als \mathbb{R} . Beispielsweise bildet auch die Körpererweiterung der mit Zirkel und Lineal konstruierbaren Strecken eine solche Geometrie; eine Tatsache, der Hilbert (1977, S. 115 ff.) ein ganzes Kapitel widmet. Erst die Forderung des vollständigen Axiomensystems (also auch des zweiten Stetigkeitsaxioms, dem Vollständigkeitsaxiom) führt zur eindeutigen Charakterisierung des konstruierten Koordinatenkörpers als \mathbb{R} .

Ich habe Hilberts Vorgehen beschrieben, um zu zeigen, dass die von ihm postulierte ebene Geometrie genau durch den \mathbb{R}^2 koordinatisiert werden kann. Dass es sich dabei um die Geometrie handelt, die auf dem euklidischen Abstandsbegriff aufbaut, ergibt sich dadurch, dass die Hilbert-Geraden genau die Vektorraumgeraden sind.

Hilbert stellt noch einen alternativen Zugang zur Streckenrechnung (und damit zur Koordinatisierung) vor, der ohne die Axiome der Kongruenz auskommt, stattdessen aber eine verschärfte Form des Parallelenaxioms nutzt. Dann kann mit Hilfe des Satzes von Desargues eine Streckenrechnung konstruiert werden, deren Multiplikation nicht kommutativ ist und deswegen nur einen Schiefkörper bildet (Volkert, 2015, S. 191).

Die Koordinatisierung einer axiomatischen Geometrie mit Hilfe der Sätze von Pappos, Pappos-Pascal und/oder Desargues im Speziellen sowie die Betrachtung von sogenannten papposschen bzw. desarguesschen Ebenen im Allgemeinen finden sich in vielen Texten zur synthetischen Geometrie und stellen gewissermaßen einen Standardweg zur Algebraisierung geometrischer Argumente dar.

Gerade durch die letzten Abschnitte wird deutlich, dass Hilberts Axiomensystem aufgrund seiner Feingliedrigkeit das Studium von deutlich mehr Modellen und Nichtmodellen einzelner Untermenngen der Axiome erlaubt, als es im Kontext der Saccheri-Ebene möglich ist.

Im Bezug auf die Identifizierung der axiomatischen mit der analytischen Geometrie gibt es wesentliche Unterschiede, die letztendlich darauf zurückführbar sind, dass in der Saccheri-Ebene Geraden per Definition quasi Kopien von \mathbb{R} sind, während bei Hilbert, Geraden erst mit einer Körperstruktur ausgestattet werden müssen. In beiden Systemen beruht die Identifizierung auf stark geometrischen Argumenten. Diese werden bei Hilbert dafür genutzt, den Koordinatenkörper zu konstruieren, während sie im Saccheri-Kontext zur Konstruktion des Vektorraumes dienen. In gewisser Weise kann man sagen, dass Hilbert sich zunächst auf eindimensionale Strukturen beschränkt, aus denen im letzten Schritt das kartesische Koordinatensystem gebaut wird. Bei der Untersuchung der euklidischen Ebenen (Saccheri-Ebene mit Parallelenaxiom) ist das kartesische Koordinatensystem ein Korollar aus der Zweidimensionalität des Vektorraums $V(\mathbb{E})$.

9.7 Kongruenz und Isometrie

Die *Isometrie* stellt in der Veranstaltung *Geometrie für Lehramtsstudierende* einen wesentlichen Begriff und ein wichtiges Werkzeug für den axiomatischen Aufbau einer Geometrie im Kontext metrischer Räume dar. Schon die Definition metrischer Geraden (Definition A.2.1 (S. 334), siehe auch Abschnitt 9.2) baut wesentlich auf der Idee der isometrischen Parametrisierung auf, und sowohl Kongruenz als auch Symmetrie werden über Isometrien definiert⁴⁴. Dabei ist zur Behandlung der Saccheri-Ebene und anschließend der euklidischen Ebene keine vollständige Klassifizierung aller Isometrien nötig. Neben der Identität werden nur Spiegelungen, Punktspiegelungen und Translationen (als Parallelverschiebungen) im Theorieaufbau genutzt. Rotationen, Gleitspiegelungen oder Grenzdrehungen (nur in der hyperbolischen Geometrie) spielen dabei keine besondere Rolle.

Die folgende Auflistung gibt einen Überblick über wichtige Aussagen zu Isometrien, die bei der Behandlung der Saccheri-Ebene zur Anwendung kommen:

Spiegelungen. In einer Saccheri-Ebene (X, d) werden Spiegelungen als bijektive Isometrien definiert, die eine metrische Gerade punktweise fixieren und die Seiten dieser Geraden vertauschen. Dass es zu jeder metrischen Geraden eine solche Spiegelung gibt, ist Teil des *Spiegelungsaxioms* (Axiom A.4.9 (S. 342)). Damit sind Spiegelungen (neben der Identität) die einzigen Isometrien, die bereits in der Formulierung des Axiomensystems angelegt sind. Das Spiegelungsaxiom fordert nur die Existenz einer Spiegelung, die Eindeutigkeit kann im Saccheri-Kontext bewiesen werden (Satz A.5.3 (S. 343) (i)). Daraus folgt sofort, dass eine Isometrie, die eine Gerade punktweise fixiert, nur die Spiegelung oder die Identität sein kann (Satz A.5.3 (S. 343) (ii)). Das

⁴⁴Die Bedeutung der Begriffe Kongruenz, Isometrie und Symmetrie sowie Zusammenhänge zwischen diesen Begriffen werden ab Kapitel 11 detaillierter beleuchtet.

bedeutet insbesondere, dass in einer Saccheri-Ebene eine Isometrie, die drei nicht kollineare Punkte fixiert, die Identität sein muss.⁴⁵

Aus dem Beweis des Kongruenzsatzes SSS (Satz A.7.3 (S. 352)) folgt, dass sich jede Isometrie einer Saccheri-Ebene als Verknüpfung von maximal drei Spiegelungen schreiben lässt (Dreispiegelungssatz, Korollar A.7.5 (S. 353)). Insbesondere ist die so dargestellte Isometrie bereits eindeutig bestimmt (Korollar A.7.4 (S. 353)).

Insgesamt wird deutlich, dass die Gruppe der Isometrien einer Saccheri-Ebene von den Spiegelungen erzeugt wird. Dies unterstreicht die Relevanz dieser Isometrie für die gewählte Axiomatisierung.

Orthogonalität. Am Beispiel des Begriffs *Orthogonalität* (Definition A.5.4 (S. 344)) sieht man gut, wie Isometrien zur Definition geometrischer Grundbegriffe verwendet werden können.

Translationen/Parallelverschiebungen. Für die Untersuchung euklidischer Ebenen spielen Parallelverschiebungen eine besondere Rolle (Definition A.12.1 (S. 362)). Sie stellen die Objekte dar, über die die Identifizierung euklidischer Ebenen mit dem euklidischen Raum \mathbb{R}^2 vollzogen wird (siehe auch Abschnitt 9.6). Stellt man Parallelverschiebungen als Pfeilklassen dar, so wird deutlich, dass sich diese Art des Aufbaus direkt an die analytische Geometrie der gymnasialen Oberstufe anknüpfen lässt.

Parallelverschiebung ist nur ein anderer Name für eine Translation (Definitionen A.9.1 (S. 357), A.12.1 und Bemerkung A.12.2 (S. 362)). Der Namenswechsel wird dadurch motiviert, dass erst das Parallelenaxiom diese Isometrien zu mächtigen Werkzeugen macht, da es notwendig für das Vorliegen der Gruppenstruktur ist (siehe Proposition A.12.4 (S. 362)).

Nichteuklidische Isometrien. Der folgende Aspekt war zwar in der Veranstaltung aus Zeitgründen kein Thema, liefert aber doch ein Argument für die Mächtigkeit des gewählten Zugangs. Aus diesem Grund beschreibe ich ihn kurz: Betrachtet man Saccheri-Ebenen mit dem Ziel der vollständigen Systematisierung aller Arten von Isometrien, so stellt es keine große Schwierigkeit dar, einen Kandidaten zu finden, der nur existieren kann, falls das Parallelenaxiom nicht erfüllt ist. Zu dieser Erkenntnis führt folgende Überlegung: Translationen werden über die Verkettung von zwei Spiegelungen an Geraden mit einer gemeinsamen Senkrechten definiert (A.9.1 (S. 357)). In der euklidischen Geometrie existiert so eine gemeinsame Senkrechte zweier paralleler Geraden immer. Allerdings folgt diese Aussage aus keiner der bewiesenen Aussagen für allgemeine Saccheri-Ebenen. Die Spiegelungen an zwei parallelen Geraden ohne gemeinsame Lotgerade könnte also eine weitere Isometrie beschreiben, die nur in nichteuklidischen Geometrien auftritt. Betrachtet man zum Beispiel die obere Halbebene, so sieht man diese Vermutung bestätigt. Dort kann nachgewiesen werden, dass Geraden mit gemeinsamem Fernpunkt (sogenannte asymptotische Geraden) parallel sind, aber keine gemeinsame Lotgerade haben. Die aus Spiegelungen an solchen Geraden erzeugten Isometrien werden als Grenzdrehungen oder Horolationen (z. B. Iversen (1992, S. 97)) bezeichnet.

Bijektivität. Dass Isometrien zwischen beliebigen metrischen Räumen *injektiv* sind, folgt direkt aus der ersten Metrikeigenschaft (mathematische Bemerkung 9.7.1). Wie das Beispiel der Isometrie $n \mapsto n + 1$ im metrischen Raum $(\mathbb{N}, |\cdot|)$ zeigt, sind Isometrien im Allgemeinen jedoch nicht bijektiv. Die Bijektivität von Spiegelungen wird bei der Konstruktion der Saccheri-Ebene vorausgesetzt, die Bijektivität beliebiger Isometrien ist eine zu beweisende Aussage.

⁴⁵Hier geht natürlich noch ein, dass eine Isometrie, die zwei Punkte fixiert, bereits die ganze Gerade durch diese beiden Punkte fest hält. Das folgt aber direkt aus der isometrischen Parametrisierbarkeit der Geraden durch \mathbb{R} .

An dieser Stelle musste eine Lücke in der Argumentation von Iversen (1992) gefüllt werden. Im Beweis des Kongruenzsatzes SSS zeigt Iversen (1992, S. 14), dass die durch drei Spiegelungen an Mittelsenkrechten konstruierte Isometrie (vgl. auch Satz A.7.3) eindeutig ist:

Let τ be a second isometry which transforms $\triangle ABC$ into $\triangle RST$. Observe that $\gamma = \tau^{-1}\sigma$ fixes A , B and C . It follows that γ fixes the line h through A and B point for point. Finally, apply rigidity 2.4 to conclude $\gamma = \text{id}$.

(Iversen, 1992, S. 14, Theorem 4.1, Proof)

Dieses Argument funktioniert allerdings nur, wenn klar ist, dass Isometrien immer (und damit insbesondere auch τ) bijektiv sind. Sonst kann die Umkehrabbildung τ^{-1} nicht gebildet werden.⁴⁶

Der in der mathematischen Bemerkung 9.7.2 dargestellte Beweis wurde von Joachim Hilgert und mir entwickelt und schließt diese Lücke.

Mathematische Bemerkung 9.7.1 (Injektivität von Isometrien)

Seien $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrische Räume und $\varphi : X \rightarrow Y$ eine Isometrie. Dann ist φ injektiv, denn für alle $x_1, x_2 \in X$ mit $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$ gilt

$$0 \stackrel{(M1)}{=} d_Y(\varphi(x_1), \varphi(x_2)) \stackrel{\varphi \text{ Isom.}}{=} d_X(x_1, x_2) \stackrel{(M1)}{\Rightarrow} x_1 = x_2.$$

Mathematische Bemerkung 9.7.2 (Bijektivität von Isometrien in Saccheri-Ebenen)

Sei (X, d) eine Saccheri-Ebene und $\phi : X \rightarrow X$ eine Isometrie. Dann ist ϕ bijektiv.

Beweis. ϕ ist als Isometrie auf jeden Fall injektiv. Wir nehmen nun an, dass ϕ nicht surjektiv ist, es also ein $x_0 \in X$ gibt mit $x_0 \notin \text{Bild}(\phi)$. Da $X \neq \emptyset$, gibt es auf jeden Fall ein $a \in \text{Bild}(\phi)$. Insbesondere gilt dann $a \neq x_0$. Sei $g \subset X$ die Gerade durch x_0 und a . Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

(F1) Es gibt $b \in \text{Bild}(\phi) \setminus \{a\}$ mit $b \in g$ (siehe auch Abbildung 9.14):

Wegen der Injektivität von ϕ sind $\phi^{-1}(b)$ und $\phi^{-1}(a)$ wohldefiniert und verschieden. Also gibt es genau eine Gerade \tilde{g} durch diese beiden Urbilder. Da Isometrien Geraden surjektiv auf Geraden abbilden, gilt $\phi(\tilde{g}) = g$. Wegen $x_0 \in g$ wäre dann aber $x_0 \in \text{Bild}(\phi)$, was im Widerspruch zur Definition von x_0 steht.

(F2) Für alle $b \in g \setminus \{a\}$ gilt $b \notin \text{Bild}(\phi)$:

Wir behaupten, dass es keinen Punkt $a_1 \in X \setminus g$ mit $a_1 \in \text{Bild}(\phi)$ geben kann.

Wir nehmen an, dass es so ein a_1 gibt. Dann ist (mit dem analogen Argument wie in (F1)) auch die gesamte Gerade k durch a und a_1 in $\text{Bild}(\phi)$ (siehe auch Abbildung 9.15). Weil sich g und k in a schneiden, aber ungleich sind, existiert nach Proposition A.6.10 ein Punkt $a_2 \in k \subset \text{Bild}(\phi)$, der auf der anderen Seite von g liegt als a_1 .

Sei $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ ein stetiger Weg von $\phi^{-1}(a_1)$ nach $\phi^{-1}(a_2)$, bei dem $\gamma([0, 1])$ auf einer Seite von $\phi^{-1}(k)$ liegt. So ein Weg existiert nach Proposition A.6.11. Dann gilt $\phi^{-1}(a) \notin \gamma([0, 1])$.

Die Abbildung $\phi \circ \gamma$ ist ein stetiger Weg von a_1 nach a_2 . Da a_1 und a_2 nach Definition in unterschiedlichen Seiten von g liegen, muss dieser Weg die Gerade g schneiden. Dieser Schnittpunkt ist nach Konstruktion ungleich a , liegt aber in $\text{Bild}(\phi) \cap g$. Dies steht im Widerspruch zur Grundannahme von (F2). Damit ist die Behauptung gezeigt.

Aus der Behauptung folgt $\text{Bild}(\phi) \subset g$, also $\text{Bild}(\phi) = \{a\}$, was wegen der Injektivität von ϕ nicht sein kann. Das bedeutet, auch in diesem Fall ergibt sich ein Widerspruch.

⁴⁶An dieser Stelle gilt der Dank Dieter Remus, der im Sommersemester 2017 auf die Lücke gestoßen ist.

Die Isometrie ϕ muss also surjektiv und damit bijektiv sein. □

(Vergleiche auch Satz A.6.12 (S. 350))

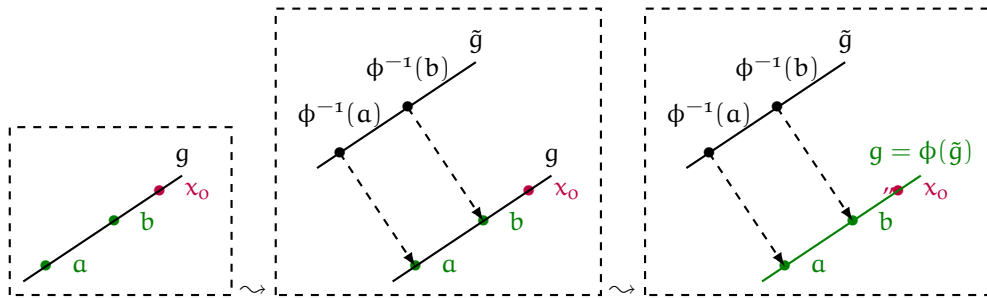


Abbildung 9.14: Beweisskizze zum ersten Fall des Beweises in der mathematischen Bemerkung 9.7.2: g ist das Bild der nach dem Inzidenzaxiom eindeutigen Gerade \tilde{g} durch die Urbilder von a und b . Damit ist ganz g im Bild von ϕ , also auch x_0 . Widerspruch.

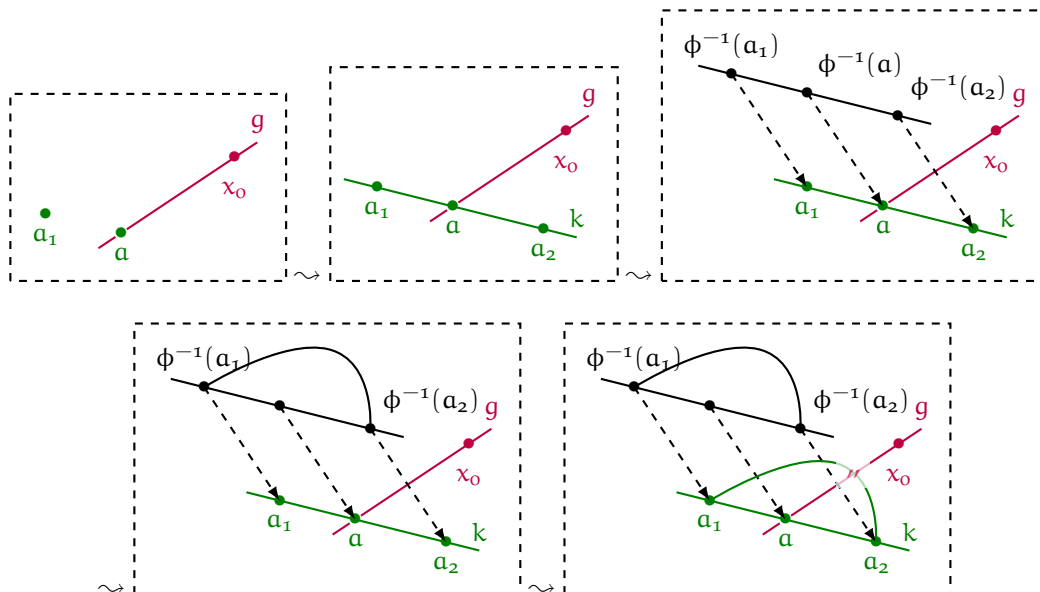


Abbildung 9.15: Beweisskizze zum zweiten Fall des Beweises in der mathematischen Bemerkung 9.7.2: Das Bild des konstruierten Weges schneidet g in einem Punkt, der nicht a ist, was den Widerspruch erzeugt.

Ein axiomatischer Aufbau der euklidischen Geometrie ist allerdings auch ohne die Verwendung geometrischer Abbildungen möglich. Wieder sollen Hilberts „Grundlagen der Geometrie“ als Vergleich dienen. Dort wird *Kongruenz* als undefinierter Grundbegriff eingeführt, der erst durch die Axiome der Axiomengruppe III mit Sinn gefüllt wird. Hilbert (1977, S. 11 f.) beschreibt mit dem Begriff *kongruent* eine Beziehung zwischen zwei Hilbert-Strecken (siehe auch mathematische Bemerkung 9.3.2 (S. 93)). Später erweitert er den Begriff auf Beziehungen zwischen zwei Winkeln (Hilbert, 1977, S. 13), um zwei Dreiecke als kongruent zu bezeichnen, wenn alle korrespondierenden Innenwinkel und Strecken kongruent sind (Hilbert, 1977, S. 16). Hierzu postuliert Hilbert (Axiom III.5, Hilbert (1977, S. 14)), dass bei zwei Dreiecken, bei denen zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel jeweils kongruent sind, auch die Kongruenz eines der anliegenden Winkel gilt. Bis auf

ein kurzes Argument, das er in Satz 12 (Hilbert, 1977, S. 16) nachliefert, ist damit ein Großteil des bekannten Kongruenzsatzes WSW als Axiom gefordert.

In einem letzten Schritt wird der Kongruenzbegriff noch auf beliebige endliche Punktmengen erweitert: „Zwei Figuren [meint: irgendeine endliche Anzahl von Punkten] heißen *kongruent*, wenn ihre Punkte sich paarweise einander so zuordnen lassen, daß die auf diese Weise einander zugeordneten Strecken und Winkel sämtlich einander kongruent sind.“ (Hilbert, 1977, S. 27)

Implizit hat Hilbert auf diese Weise auch die Kongruenz unendlicher Punktmengen erklärt, die durch endlich viele Punkte eindeutig spezifiziert sind (wie zum Beispiel ein Viereck durch 4 Punkte). Eine Kongruenz komplizierterer Figuren kann auf diesem Weg jedoch (im Gegensatz zum oben geschilderten abbildungsgeometrischen Vorgehen) nicht beschrieben werden. Auch wenn er den Kongruenzbegriff unabhängig von geometrischen Abbildungen beschreibt, sieht er doch einen Zusammenhang zwischen Kongruenz und Bewegungen. Er betont an mehreren Stellen, dass durch den Kongruenzbegriff auch der Bewegungsbegriff definiert werde (Hilbert, 1977, S. 11, S. 27). Damit ist gemeint, dass eine Bewegung implizit dadurch definiert werden kann, dass sie alle durch den so definierten Kongruenzbegriff entstehenden Kongruenzklassen von Strecken und Winkeln auf sich selbst abbildet.

Der umrissene Zugang aus Hilbert (1977) zeigt, dass eine Grundlegung der euklidischen Geometrie ohne Nutzung von Isometrien möglich ist. Der Vollständigkeit halber möchte ich noch das Buch „Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff“ (Bachmann, 1973) erwähnen. Bachmann nähert sich der ebenen Geometrie ebenfalls unter Verwendung von Isometrien, allerdings in einer konsequent algebraisch-gruppentheoretischen Weise. Im Zugang der Saccheri-Ebene spielt die Gruppenstruktur der Isometrien nur eine untergeordnete Rolle. Der Fokus liegt eher auf den geometrischen Eigenschaften einzelner Abbildungen.

9.8 Zur Behandlung nichteuklidischer ebener Geometrie

Wie bereits in Abschnitt 9.5 beschrieben, ist es sehr wünschenswert, in der Veranstaltung *Geometrie für Lehramtsstudierende*, ein Modell der hyperbolischen Geometrie zu behandeln. Nur so kann die Rolle des Parallelenaxioms in angemessener Weise verdeutlicht werden. Für mich sprechen zwei Argumente dagegen, die Veranstaltung um einen Abschnitt zu ergänzen, in dem eines der bekannten Modelle (Poincaré-Scheibe, Poincaré-Halbebene, Kleinsches Modell) rigoros behandelt und durchgerechnet wird:

1. In einem sowieso schon knapp bemessenen fachmathematischen Studienplan würde an dieser Stelle viel Zeit für teils sehr technische Inhalte⁴⁷ verwandt, die an anderer Stelle bei der Behandlung der Hintergründe der Schulgeometrie fehlt.
2. Eine Behandlung wie in 1. beschrieben, würde an der oben formulierten Zielsetzung vorbeigehen: Im Fokus stünde die formale Beschreibung der nichteuklidischen Geometrie und nicht oder nur nachrangig der Blick auf Konsequenzen, die sich aus der Negation des Parallelenaxioms ergeben.

⁴⁷Selbst eine Behandlung der Grundlagen, wie dem Buch von Behrends (2019), würde mehrere Vorlesungswochen benötigen.

In diesem Abschnitt möchte ich einen von mir erarbeiteten Weg vorstellen, um die Poincaré-Halbebene als Modell einer Saccheri-Ebene in einer Lehramtsveranstaltung in einer inhaltlich-anschaulichen Weise zu behandeln.⁴⁸ Dieser Zugang zur hyperbolischen Geometrie schont die kognitiven Ressourcen beim Modellverständnis und macht sie stattdessen für instruktive Vergleiche zwischen euklidischer und hyperbolischer Geometrie verfügbar. Dieser Idee folgend, werde ich in diesem Abschnitt eine konstruktive Erkundung der hyperbolischen Geometrie mit Zirkel und Lineal-Konstruktionen (ZuL) beschreiben. Hierzu formuliere ich zunächst ein ZuL-Modell der Poincaré-Halbebene (Abschnitt 9.8.2). Anschließend stelle ich exemplarisch einzelne Lernaktivitäten vor (Abschnitt 9.8.2). Zu allen Lernaktivitäten findet man unter <https://www.geogebra.org/m/qwczkrg> begleitende GeoGebra-Dateien. Abschließend stelle ich in Abschnitt 9.8.4 noch übergeordnete stoffdidaktische Überlegungen zum Einsatz unterschiedlicher Modelle der hyperbolischen Geometrie in der Lehre (insbesondere im Lehramtsstudium) vor.

9.8.1 Kurzüberblick: Die Poincaré-Halbebene als Saccheri-Ebene

Eines der Standardmodelle der hyperbolischen Geometrie ist die Poincaré-Halbebene. Diese ist gegeben durch den metrischen Raum $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$ mit

$$\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \Im z > 0\}, \quad d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2) := \log \frac{|z_1 - \bar{z}_2| + |z_1 - z_2|}{|z_1 - \bar{z}_2| - |z_1 - z_2|}$$

In der mathematischen Bemerkung 9.8.1 wird erklärt, wie die Poincaré-Halbebene als Saccheri-Ebene aufgefasst werden kann.

Mathematische Bemerkung 9.8.1 (Eigenschaften der Poincaré-Halbebene) (i) $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$ ist ein metrischer Raum.

(ii) Die metrischen Geraden in $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$ sind genau von folgender Form:

(1) $\{a + bi \mid (a - M)^2 + b^2 = r^2 \text{ und } b > 0\}$ für feste $M, r \in \mathbb{R}$ mit $r > 0$ (Typ-1-Geraden)

(2) $\{M + bi \mid b > 0\}$ für ein festes $M \in \mathbb{R}$ (Typ-2-Geraden)

Insbesondere ist das Inzidenzaxiom erfüllt.

(iii) Für alle $M \in \mathbb{R}$ und $r > 0$ ist die Abbildung

$$\sigma_{M,r} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H} \quad z = a + bi \mapsto \frac{r^2}{|z - M|^2}(z - M) + M$$

die Spiegelung im Sinne des Spiegelungsaxioms an der durch M und r definierten Typ-1-Geraden.

(iv) Für alle $M \in \mathbb{R}$ ist die Abbildung

$$\sigma_M : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}, \quad z = a + bi \mapsto (2M - a) + bi$$

die Spiegelung im Sinne des Spiegelungsaxioms an der durch M definierten Typ-2-Geraden.

⁴⁸Wesentliche Elemente dieses Abschnitts wurden von mir bereits in einem Artikel in „Der Mathematikunterricht“ (Hoffmann, 2020) veröffentlicht.

(v) Insgesamt erfüllt $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$ sowohl das Inzidenz- als auch das Spiegelungsaxiom und ist somit eine Saccheri-Ebene.

Beweis. Zum Beispiel Agricola und Friedrich (2015, S. 154 ff.). □

Die Aussagen (ii) bis (iv) lassen sich geometrisch deuten: Typ-1-Geraden sind euklidische Halbkreise mit Mittelpunkt M auf der ersten Koordinatenachse und Typ-2-Geraden sind euklidische Halbgeraden mit Ursprung M auf der ersten und parallel zur zweiten Koordinatenachse (vgl. Abbildung 9.16).

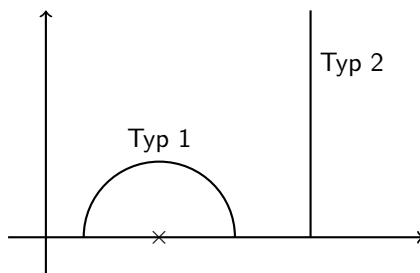


Abbildung 9.16: Geraden in der Poincaré-Halbebene.

Die in (iii) und (iv) beschriebenen Spiegelungen lassen sich euklidisch als Einschränkung von Kreis- und Geradenspiegelungen auf \mathbb{H} interpretieren, was konsistent mit der geometrischen Deutung der beiden Geradentypen (vgl. Abbildung 9.16) ist.

Mathematische Bemerkung 9.8.2 (Überblick: Kreisinversonen)

Kreisinversonen sind Abbildungen, die die Idee des „am Kreis spiegeln“ in folgender Weise umsetzen: Das Innere eines Kreises (außer dem Mittelpunkt) wird mit dem Äußeren vertauscht; der Kreis selbst punktweise fixiert. Außerdem befinden sich Urbild und Bildpunkt auf einem Strahl, der im Kreismittelpunkt M startet. Für den Radius $r = 1$ sind die Abstände von Bild Q und Urbild P zu M Kehrwerte voneinander. Für ein beliebiges $r > 0$ gilt der Zusammenhang $r = \|P - M\|_2 \cdot \|Q - M\|_2$. Damit folgt insbesondere die erwähnte Fixpunkteigenschaft der Kreislinie. Wenn das Urbild P nicht auf dem Kreis liegt, steht Q mit ihm in der Beziehung wie in Abbildung 9.17. Die Begründung liefert der Kathetensatz.

9.8.2 Ein ZuL-Zugang für die hyperbolische Geometrie

Die im vorigen Abschnitt ausgelassenen Nachweise, insbesondere der Tatsache, dass es sich bei den definierten Objekten tatsächlich um Geraden bezüglich dem durch $d_{\mathbb{H}}$ spezifizierten Abstandsbe- griff handelt, benötigen fortgeschrittene mathematische Werkzeuge, die Lehramtsstudierenden in der Regel, wenn überhaupt, erst im Masterstudium zur Verfügung stehen.

Die geometrische anschauliche Beschreibbarkeit der oberen Halbebene mit Objekten und Konzepten der euklidischen Geometrie erweist sich als didaktischer Glücksfall. Statt zu überlegen, wie in

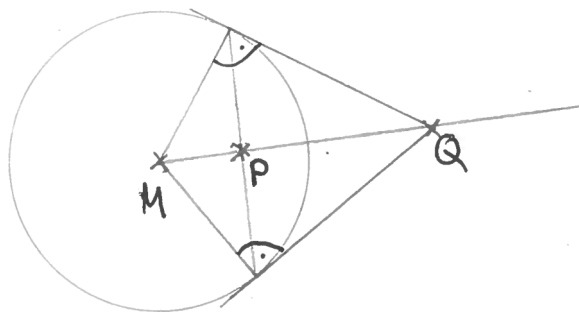


Abbildung 9.17: Planskizze zur Kreis inversion.

effizienter Weise das nötige Wissen in Exkursform dargeboten werden kann, besteht die Möglichkeit, die Poincaré-Halbebene mithilfe der euklidischen Sichtweise in didaktisch reduzierter Form zu erkunden. Ein entsprechendes Konzept möchte ich nun vorstellen.

Der Grundgedanke ist folgender: Wir nehmen als gegeben an, dass es einen Abstandsbegriff auf der Poincaré-Halbebene gibt, bei dem die Geraden von oben beschriebener Bauart und damit euklidisch interpretierbar und insbesondere auch mit Zirkel und Lineal konstruierbar sind. Wir erhalten damit folgenden Zugang zur Poincaré-Halbebene:

1. Konstruiert wird in der euklidischen Zeichenebene, eingeschränkt auf eine der beiden durch eine gegebene euklidische Gerade l (die bei der Identifizierung der Ebene mit \mathbb{C} die Rolle der reellen Achse übernimmt und deswegen „waagrecht“ gezeichnet wird) festgelegten Seiten. l darf selbst für Hilfspunkte der Konstruktionen verwandt werden, ist aber kein Teil der eigentlichen hyperbolischen Ebene, die weiterhin als \mathbb{H} bezeichnet wird.
2. Durch zwei Punkte A und B mit gemeinsamem Lotfußpunkt $M \in l$ kann die hyperbolische Typ-2-Gerade als euklidischer Strahl durch A und B mit Ursprung M konstruiert werden.
3. Durch zwei Punkte $A, B \in \mathbb{H}$ ohne gemeinsamen Lotfußpunkt auf l kann die hyperbolische Typ-1-Gerade als euklidischer Halbkreis durch A und B mit Mittelpunkt $M \in l$ konstruiert werden.
4. Die hyperbolische Spiegelung an einer Typ-2-Geraden wird als euklidische Geradenspiegelung konstruiert.
5. Die hyperbolische Spiegelung an einer Typ-1-Geraden wird als euklidische Kreis inversion konstruiert.

Alle fünf oben beschriebenen Konstruktionen lassen sich mit den ZuL-Grundkonstruktionen durchführen (z. B. Weigand et al. (2014, S. 55 ff.)). Die Konstruktion der Typ-2-Geraden (2.) und der entsprechenden Spiegelung (4.) sind evident und werden hier nicht weiter ausgeführt. Ich beschreibe die anderen drei Konstruktionen im Detail.

Zur Konstruktion einer Typ-1-Geraden bildet man die Mittelsenkrechte (ZuL-Standardkonstruktion) der beiden gegebenen Punkte und wählt deren Schnittpunkt mit l als den Halbkreismittpunkt (vgl. Abbildung 9.18). Die Korrektheit dieser Konstruktion ergibt sich aus der Ortslinieneigenschaft der

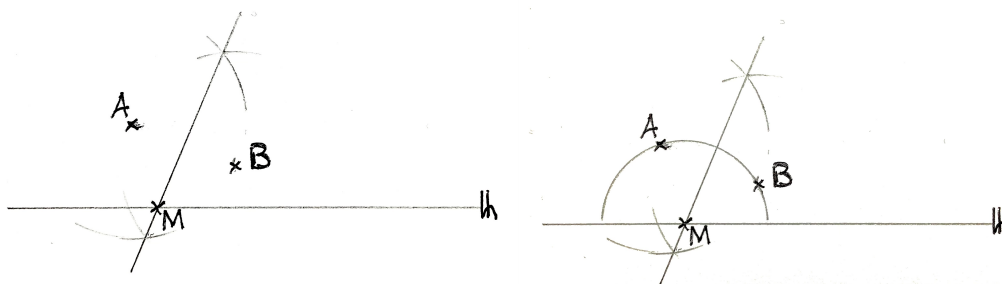


Abbildung 9.18: Konstruktion einer Typ-1-Geraden.

Mittelsenkrechten. Eine genaue Konstruktionsbeschreibung findet man im dynamischen Arbeitsblatt MH01⁴⁹.

Wie die Kreisinverson eines Punktes an einen Kreis konstruiert werden kann, hängt davon ab, ob der zu spiegelnde Punkt inner- oder außerhalb des Kreises liegt (Punkte auf dem Kreis bleiben invariant). Da Kreisinversonen Involutionen sind, kann für beide Fälle die Skizze aus Abbildung 9.17 verwendet werden. Wie oben bereits erwähnt, nutzt man ein rechtwinkliges Dreieck. Die Hypotenuse ist $[M, Q]$ und P ist ein Höhenfußpunkt. Für die Konstruktion der Kreisinverson mit Zirkel und Lineal bedeutet das nun, dass sie sich auf die üblichen Tangentenkonstruktionen zurückführen lässt. Die ausführlichen Konstruktionsbeschreibungen finden sich in den dynamischen Arbeitsblättern MH02⁵⁰ und MH03⁵¹.

9.8.3 Erkundung der nichteuklidischen Geometrie mit Zirkel und Lineal

In diesem Abschnitt wird der in Abschnitt 9.8.2 erläuterte konstruktiven Zugang genutzt, um die hyperbolische Geometrie näher zu erkunden. Die in den nachfolgenden Unterabschnitten beschriebenen Konstruktionen stellen eine Auswahl interessanter Einblicke in die Geometrie der Poincaré-Halbebene dar, die man, angepasst an die jeweilige Lerngruppe, im Rahmen von Übungsaufgaben thematisieren kann.

Parallele Geraden: Keine, eine, viele?

Die mathematische Bemerkung 9.8.1 liefert zunächst nur, dass \mathbb{H} eine Saccheri-Ebene ist. Als erstes soll gezeigt werden, dass das Parallelenaxiom nicht gilt. Es ist einfach, durch einen Punkt zu einer gegebenen Geraden, egal welchen Typs, zwei Geraden zu konstruieren, die parallel sind, d.h. keine Punkte gemeinsam haben. (Abbildung 9.19)

⁴⁹Direktlink: <https://www.geogebra.org/m/ssm3ecv6>

⁵⁰Direktlink: <https://www.geogebra.org/m/estuufnc>

⁵¹Direktlink: <https://www.geogebra.org/m/m8vuyj69>

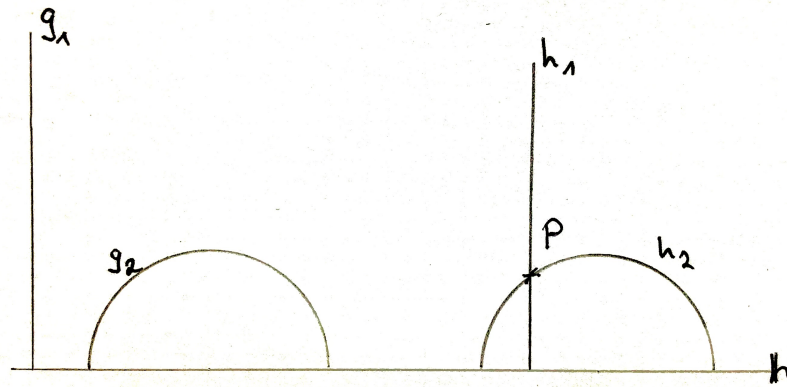


Abbildung 9.19: Verschiedene parallele Geraden zu g_1 bzw. g_2 durch P .

Halbkreise und Strahlen: Alles einerlei?

Aus euklidischer Perspektive wirkt die geometrische Gleichsetzung von Halbkreisen und Strahlen, wie sie im Geradenbegriff der Poincaré-Halbebene stattfindet, gewöhnungsbedürftig. In der Tat zeigt sich aber, dass Kreisinvolutionen diese beiden Objekte ineinander überführen können.

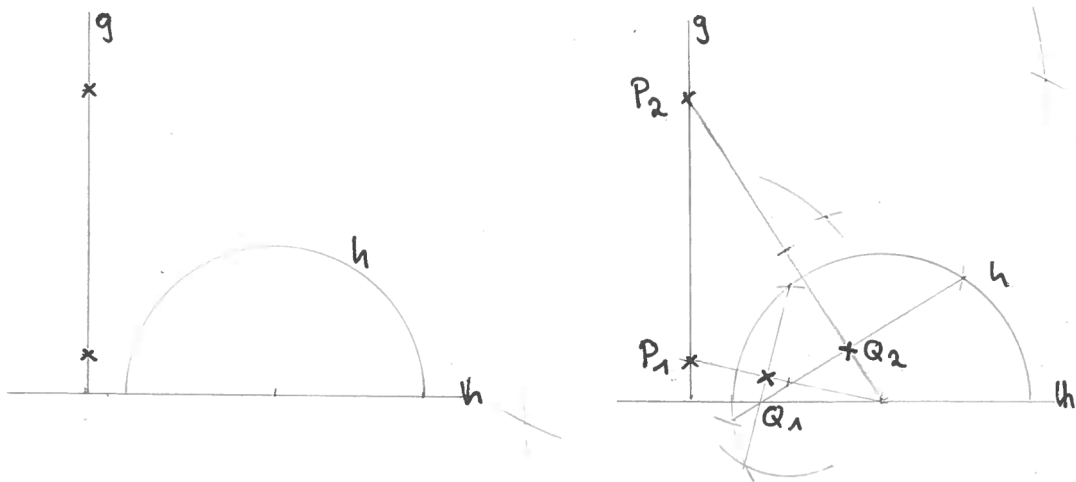


Abbildung 9.20: Spiegelung von g an h (Teil 1).

Gegeben seien beispielsweise eine Typ-2-Gerade g und eine Typ-1-Gerade h (Abbildung 9.20, links). Um g an h zu spiegeln, spiegelt man zunächst zwei Punkte $P_1, P_2 \in g$ und erhält neue Punkte Q_1, Q_2 (Abbildung 9.20, rechts). Man nutzt, dass Spiegelungen Geraden auf Geraden abbilden, und kann so die Gerade g' durch Q_1 und Q_2 konstruieren. Diese ist ein euklidischer Halbkreis (Abbildung 9.21).

An dieser Stelle haben wir aber bereits benutzt, dass Geraden auf Geraden abgebildet werden. Dass dies tatsächlich so ist, kann man plausibel machen, indem man einen weiteren beliebigen Punkt $P \in g$ an h spiegelt und feststellt, dass man so immer einen Punkt auf g' erhält (Abbildung 9.22).

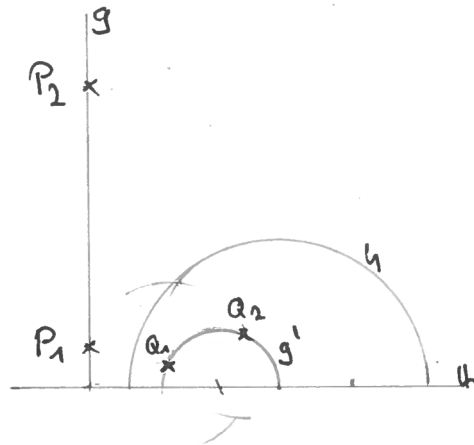


Abbildung 9.21: Spiegelung von g an h (Teil 2).

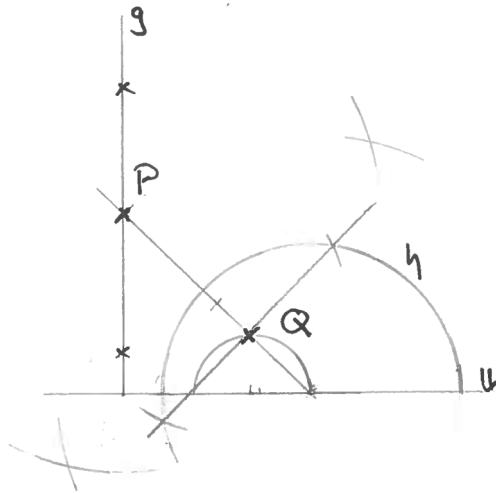


Abbildung 9.22: Jeder Punkt auf g wird tatsächlich auf die konstruierte Gerade abgebildet.

Wenn die Spiegelachse h eine Typ-2-Gerade ist, dann sind Ur- und Bildgerade offensichtlich vom selben Typ (siehe auch dynamisches Arbeitsblatt MHo4⁵²). Wie sind die Verhältnisse, wenn die Spiegelachse h eine Typ-1-Gerade ist? Wenn die Urgerade g außerhalb von h liegt, ist die Bildgerade g' offensichtlich in jedem Fall eine Typ-1-Gerade. Kann sich als Bildgerade g' auch eine Typ-2-Gerade ergeben? In der Tat ist dies genau dann der Fall, wenn die Urgerade g im euklidischen Mittelpunkt der Spiegelachse endet, und zwar sowohl wenn sie Typ-1-, als auch wenn sie Typ-2-Gerade ist.

Diese Erkenntnis kann man nun ausnutzen, um die erste Konstruktion weiter zu vereinfachen: Offenbar braucht man nur einen Punkt der Typ-2-Geraden zu spiegeln, da man weiß, dass der euklidische Mittelpunkt der Spiegelgeraden ebenfalls ein Punkt des Spiegelbildes ist.

⁵²Direktlink: <https://www.geogebra.org/m/cdb5b4hm>

Abstände erkunden: Warum man den Rand nicht erreicht

Ein weiterer Aspekt der Poincaré-Halbebene, der für den euklidisch geschulten Betrachter zunächst einmal besonders wirkt, ist die Tatsache, dass \mathbb{h} nicht zu \mathbb{H} gehört und auch durch keine hyperbolische Konstruktion aus \mathbb{H} heraus erreicht werden kann. Dahinter steckt natürlich, dass der hyperbolische Abstand von zwei Punkten divergiert, wenn der Imaginärteil der Punkte kleiner wird. Folgende Konstruktion veranschaulicht dieses Phänomen:

Man wählt einen Punkt $M \in \mathbb{h}$ und zeichnet die Typ-2-Gerade g mit Fußpunkt M . Außerdem wählt man auf g zwei unterschiedliche Punkte P_0 und P_1 , wobei P_1 zwischen P_0 und M liegt. Durch die Punkte konstruiert man je eine Typ-1-Gerade h_0 bzw. h_1 , beide mit euklidischem Mittelpunkt M . Nun wird sukzessive gespiegelt: h_0 an h_1 ergibt h_2 und $P_2 \in g$, h_1 an h_2 ergibt h_3 und $P_3 \in g$, h_2 an h_3 ergibt h_4 und $P_4 \in g$, usw. (siehe Abbildung 9.23).

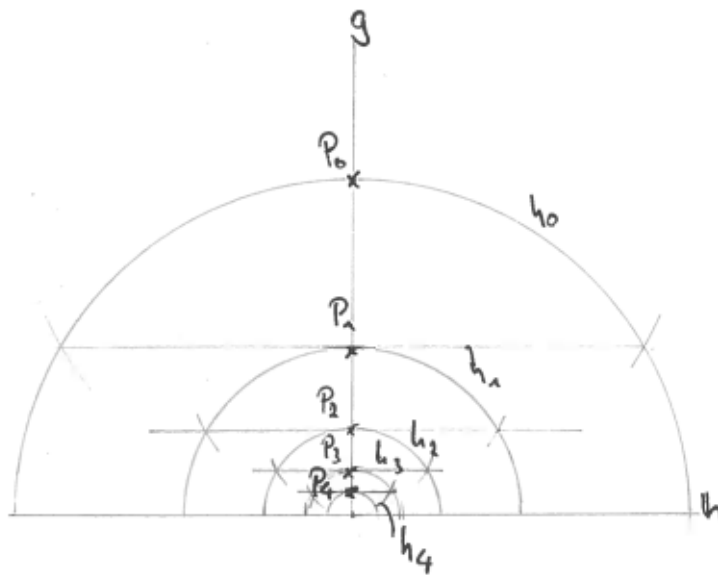


Abbildung 9.23: Die Punkte auf g liefern eine äquidistante Einteilung bezüglich der hyperbolischen Metrik $d_{\mathbb{H}}$.

Nach Konstruktion erhält man eine im hyperbolischen Sinne äquidistante Einteilung von g durch die Punkte P_i und kann sehen, dass diese im euklidischen Sinne kontrahiert, je weiter man sich h nähert. Die Konstruktion bleibt tatsächlich übersichtlich, weil immer nur die P_i an h_{i+1} gespiegelt werden müssen und dabei h_i als Hilfslinie für die notwendige Mittelsenkrechtenkonstruktion genutzt werden kann. Besonders anschaulich wird die Konstruktion, wenn man zu Beginn P_1 als euklidischen Mittelpunkt von P_0 und M wählt. (siehe auch dynamisches Arbeitsblatt MH05⁵³)

Orbits von Translationsgruppen: Warum man auf der Poincaré-Halbebene keine elementargeometrisch fundierte Vektorraumstruktur finden kann

In diesem Abschnitt werden Translationen als Verkettungen von zwei Spiegelungen an parallelen Geraden mit gemeinsamer Lotgerade betrachtet. Diese Lotgerade gibt die Richtung der Transla-

⁵³Direktlink: <https://www.geogebra.org/m/dhegsrjy>

tionen vor. In der euklidischen Geometrie erhält man auf diese Weise Parallelverschiebungen, die die Grundlage für die Konstruktion einer Vektorraumstruktur darstellen. Eine wichtige Eigenschaft ist, dass alle Verschiebungen eines Punktes in dieselbe Richtung auf derselben Geraden landen. Genauer: Die Menge aller Bildpunkte eines Punktes unter Anwendung aller Translationen mit gleicher Richtung ist eine Gerade.

In der hyperbolischen Geometrie kann man mit einer einfachen Konstruktion einsehen, dass diese Eigenschaft dort nicht gilt. Dazu konstruiert man vier Typ-1-Geraden g_1, g_2, g_3, g_4 , die senkrecht auf einer Typ-2-Geraden h stehen, d.h. die alle den Fußpunkt M von h als euklidische Mittelpunkte haben. Dann ist die Verknüpfung der drei hyperbolischen Spiegelungen „erst an g_1 und dann an g_2 “ bzw. „dann an g_3 “ bzw. „dann an g_4 “ jeweils eine Translation mit Richtung h . Wendet man nun auf einen Punkt auf h alle drei Translationen an, so liegen alle drei Bildpunkt wieder auf h

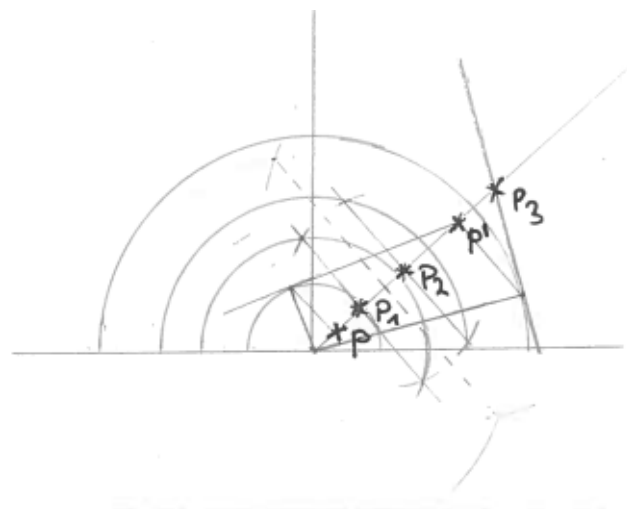


Abbildung 9.24: Die Bilder verschiedener Translationen in gleicher Richtung liegen nicht zwingend auf einer hyperbolischen Geraden.

Wählt man aber einen Punkt P , der nicht auf h liegt, so liegen die Bildpunkte auf einem euklidischen Strahl durch M und P , aber offensichtlich nicht auf einer gemeinsamen hyperbolischen Geraden (Abbildung 9.24). Dies zeigt, dass jeder Versuch, hyperbolische Geraden durch Translationen zu parametrisieren, zum Scheitern verurteilt ist. (siehe auch dynamisches Arbeitsblatt MH06⁵⁴)

Weiterführendes: Winkelmessen und Innenwinkelsummen

Für das letzte Beispiel ist es erforderlich zu wissen, dass Schnittwinkel hyperbolischer Geraden durch die Winkel der zugehörigen euklidischen Schnittangenten definiert werden. Diese lassen sich wiederum mit Zirkel und Lineal konstruieren. Nur für das Messen der Winkel braucht es dann zusätzlich ein Geodreieck.

Konstruiert man nun unterschiedliche hyperbolische Dreiecke (Abbildung 9.25) und misst die Innenwinkel, so stellt man fest, dass die Summe stets kleiner als π und von Dreieck zu Dreieck unterschiedlich ist. Der euklidische Innenwinkelsummensatz gilt offenbar nicht und damit gelten

⁵⁴Direktlink: <https://www.geogebra.org/m/gtkxfnr>

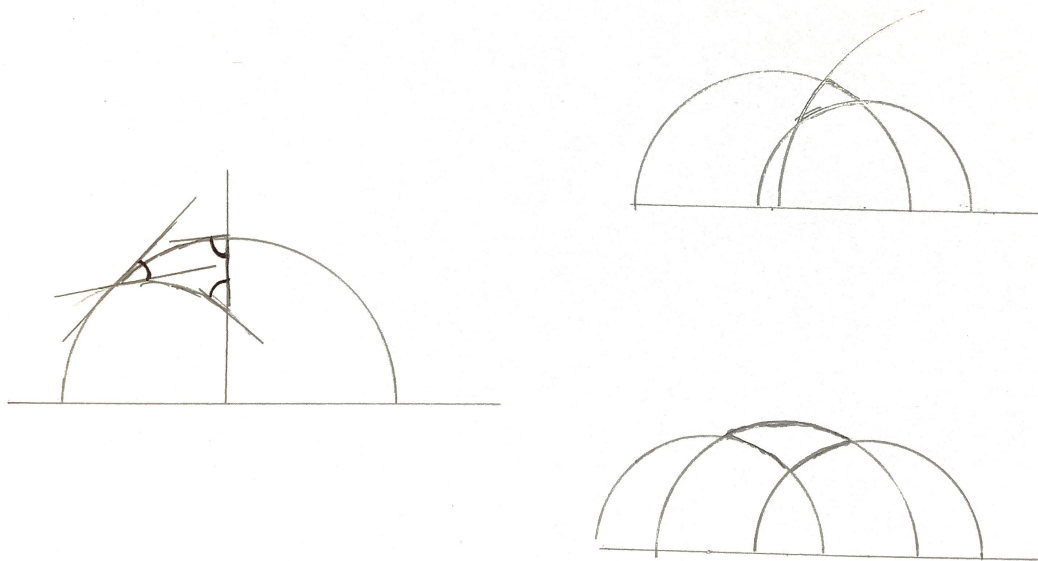


Abbildung 9.25: Verschiedene hyperbolische Dreiecke.

auch viele weitere Sätze der Schulmathematik nicht, die den Innenwinkelsummensatz im Beweis benutzen.

9.8.4 Didaktische Überlegungen zu Modellen der hyperbolischen Geometrie

Als Grundlage für den ZuL-Zugang zur hyperbolischen Geometrie habe ich die Poincaré-Halbebene genutzt. Dies war eine bewusste Entscheidung, da sich dieses Modell meiner Meinung nach besonders gut für den ZuL-Zugang eignet. In diesem Abschnitt diskutiere ich abschließend andere Modelle und begründe die von mir getroffene Wahl.

In der Literatur findet man fünf Modelle der hyperbolischen Geometrie: Die Pseudosphäre, ein Hälfte des zweischaligen Hyperboloids, die Poincaré-Halbebene, die Poincaré-Scheibe und das Kreisscheibenmodell von Beltrami-Klein (Filler, 1993; Lenz, 1967; Wagner, 2017). Möchte man in einer Lehrveranstaltung über hyperbolische Geometrie sprechen, ist die Wahl eines der Modelle eine wichtige didaktische Entscheidung. Die Verwendung von genau einem Modell kann den Vorteil haben, dass sich die Studierenden an die dort zur Verfügung stehenden Werkzeuge und Heuristiken gewöhnen können. Die parallele Nutzung mehrerer Modelle birgt unter anderem die Gefahr, dass sich Heuristiken vermischen, und sie kostet Zeit. Ein Vorteil besteht allerdings in der Möglichkeit, durch Modellvergleiche typische Charakteristika hyperbolischer Geometrie zu identifizieren und diese von Eigenheiten der einzelnen Modelle abzugrenzen.

Für die Veranstaltung *Geometrie für Lehramtsstudierende* habe ich mich für die Beschränkung auf ein Modell entschieden. Die Pseudosphäre und das zweischalige Hyperboloid (Abbildung 9.26) sind aufgrund ihrer Dreidimensionalität für einen grafisch orientierten, konstruktiven Zugang nicht geeignet. Die drei verbleibenden Modelle werden in Tabelle 9.2 in der jeweiligen Definition des Punktraums und der Geradendarstellung miteinander verglichen. In Abbildung 9.27 findet man Visualisierungen dieser drei Modelle.

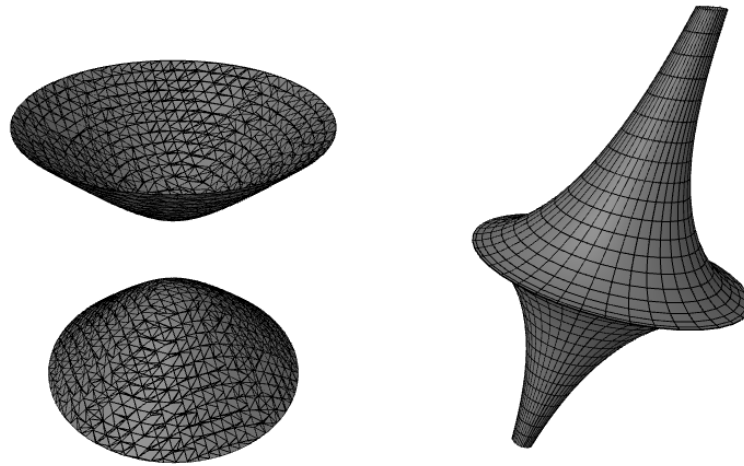


Abbildung 9.26: Zweisechaliges Hyperboloid (links) und Pseudosphäre (rechts).

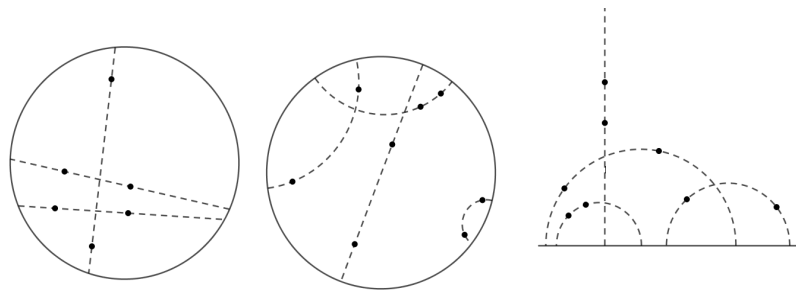


Abbildung 9.27: Punkte und hyperbolische Gerade in unterschiedlichen Modellen: Beltrami-Klein (links), Poincaré-Scheibe (mittig) und Poincaré-Halbebene (rechts).

Das Modell der Poincaré-Halbebene habe ich in diesem Abschnitt bereits vorgestellt. Die Poincaré-Scheibe ist der Halbebene ähnlich, nutzt aber die Einheitskreisscheibe als Punktraum. Das Beltrami-Klein-Modell entspricht einer Idee, die Hilbert im Anhang I seiner „Grundlagen der Geometrie“ in einem Brief an Klein beschreibt (Hilbert, 1977, S. 125 ff.). Die im euklidischen Sinne gerade Linie wird weiterhin als kürzeste Verbindung zweier Punkte genommen, jedoch die Längenmessung so verändert, dass der Rand der Kreisscheibe, die den Punktraum definiert (Hilbert spricht hier von einem allgemeineren „nirgends konvexen Körper“), unendlich weit weg ist.

In Vorbereitung eines Vergleichs der drei Modelle möchte ich kurz auf mathemathikhistorische Hintergründe zum Parallelenaxiom und zur hyperbolischen Geometrie eingehen. Diese liefern eine Grundlage für eine spätere fachlich-didaktische Beurteilung.

Hofstadter (2018) berichtet von Girolamo Saccheri (1667-1733), der sich bemüht, die Annahme, dass die Negation des Parallelenaxioms wahr ist, zum Widerspruch zu führen:

[Saccheri bewies] mit großem Geschick einen Satz [...] nach dem anderen [...] und [wurde] der Sache schließlich müde [...]. An einem gewissen Punkte angelangt entschied er, daß er zu einem Satz gekommen war, der der „Natur einer Geraden zuwider lief“. Das war, was er sich erhofft hatte – in seiner Vorstellung war es die lange gesuchte Kontradiktion. Als er so weit gekommen

Bezeichnung	Punktraum	Aussehen der Geraden
Beltrami-Klein-Modell	Innere Punkte einer euklidischen Kreisscheibe	Euklidische Sehnen im Inneren der Kreisscheibe
Poincaré-Scheibe	Innere Punkte der komplexen Einheitskreisscheibe	Kreisbögen, die euklidisch senkrecht auf dem Rand stehen sowie Durchmesser
Poincaré-Halbebene	Obere komplexe Halbebene	Halbkreise und Strahlen, die beide senkrecht auf der reellen Achse stehen

Tabelle 9.2: Vergleich zweidimensionaler Modelle der hyperbolischen Geometrie.

war, veröffentlichte er sein Werk unter dem Titel *Euklid von jedem Makel gereinigt* – und dann starb er.

Hofstadter (2018, S. 100)

Seine Überlegungen drehten sich dabei um das sogenannte Saccheri-Viereck (Abbildung 9.28) (Scriba & Schreiber, 2010, S. 364 ff.). Gemeint ist ein Viereck, bei dem auf einer Strecke an beiden Endpunkten orthogonal zwei weitere, gleichlange Strecken angetragen sind, deren Endpunkte wiederum miteinander verbunden werden. Unabhängig von der Gültigkeit des Parallelenaxioms ist so ein Viereck (bis auf Kongruenz) eindeutig durch die Länge der Grundseite und die Länge der orthogonalen Strecken bestimmt.



Abbildung 9.28: Saccheri-Viereck. Die beiden Strecken, die orthogonal zur Grundseite stehen, sind gleich lang. Über die Größe der beiden oberen Winkel, kann man per se keine Aussage treffen.

Der Kern von Saccheris Argument ist folgender: Apriori gibt es die drei in Abbildung 9.28 angegebenen Möglichkeiten für das Aussehen eines Saccheri-Vierecks: Die beiden oberen Winkel sind aus Symmetriegründen gleich groß und somit beide entweder größer, gleich oder kleiner $\frac{\pi}{2}$.

Auch ohne Verwendung des Parallelenaxioms kann man zeigen, dass in einer Saccheri- Ebene (und damit in jeder neutralen Geometrie) die beiden oberen Winkel nicht größer als $\frac{\pi}{2}$ sein können (z. B. Iversen (1992, S. 40)). Damit ist der erste Fall unmöglich. In sphärische Geometrien hingegen, existieren solche Vierecke. Diese werden allerdings durch Axiomensysteme wie dem von Hilbert oder von der hier verwendeten Saccheri-Ebene nicht erfasst.

Nimmt man die Negation des Parallelenaxioms als wahr an, so kann man zeigen, dass die dritte in Abbildung 9.28 dargestellte Form (Winkel $< \frac{\pi}{2}$) auftritt und darüber hinaus die mittlere Form (vier rechte Winkel) sogar ausgeschlossen ist. Diese Feststellung widerspräche – und hier enden Saccheris Überlegungen – der Natur der Geraden. Damit könnte er Folgendes gemeint haben:

Durch die beiden zur Grundseite senkrecht stehenden Strecken, sind in eindeutiger Weise zwei parallele Geraden definiert (Begründung: In neutralen Geometrien gibt es zu jeder Strecke genau

eine Gerade von der die Strecke eine Teilmenge ist. Außerdem sind zwei Geraden mit einer gemeinsamen Lotgeraden – hier die Grundseite - in neutralen Geometrien immer parallel). Diese beiden parallelen Geraden sind jedoch, wie man am Saccheri-Viereck sieht, nicht äquidistant. Eine anderer potenzieller Widerspruch zur „Natur der Geraden“ besteht darin, dass die beiden Geraden nicht an jeder Stelle eine gemeinsame Lotgerade haben. In der Tat ist in der hyperbolischen Geometrie die Gerade, die man aus der Grundseite des Saccheri-Vierecks erhält, sogar die einzige gemeinsame Lotgerade.

Aus heutiger Sicht ist klar, dass Saccheri mit dem Verweis auf die „Natur der Gerade“ über eine intuitive Vorstellung von Geraden argumentiert hat, die nicht Bestandteil der Definition war. Ein sehr lesenswertes fiktives Streitgespräch zum selben Thema liefert Trudeau (1998). In diesem wird unter Verwendung vieler instruktiver Skizzen genau über solche Konsequenzen der Negation des Parallelenaxioms diskutiert. Es endet mit den (teilweise resignierten) Zeilen:

Wollen Sie damit sagen, daß [die Negation des] Postulat[s] von Playfair [eine zur Negation des Parallelenaxioms äquivalente Aussage, Anm. des Autors] der „Natur einer geraden Linie“ zuwiderläuft?

„Ja, ich glaube schon.“

Saccheri sagte in einer ähnlichen Situation einmal genau dasselbe [...].

„Naja, Sie sagten ja, ich befände mich in guter Gesellschaft.“

(Trudeau, 1998, S. 187 ff.)

Die Erkenntnis bzw. die Akzeptanz, dass die Eigenschaften hyperbolische Geraden in irgendeiner Weise von den euklidisch geprägten Vorstellungen („Natur der geraden Linie“) abweichen, ist zwingender Bestandteil der Beschäftigung mit jedem Modell der hyperbolischen Geometrie. Ich bezeichne die auf Geraden bezogenen Vorstellungsumbrüche als *hyperbolisches Moment*.

Von den drei ebenen Modellen hyperbolischer Geometrie halte ich die beiden Poincaré-Modelle als Grundlage für ein grafisch orientiertes heuristisches Modell für besser geeignet. In beiden Modellen ist das hyperbolische Moment durch die Tatsache, dass dort Geraden teilweise euklidischen Kreisbögen entsprechen, offensichtlich. Im Gegensatz dazu sind im Modell von Beltrami-Klein alle Geraden auch im euklidischen Sinne „gerade“. Das hyperbolische Moment verbirgt sich in subtiler Weise in der Längenmessung. Ohne ein Verständnis der verwendeten Metrik ist nicht einsichtig, warum die hyperbolischen Geraden aus euklidischer Sicht das Innere einer Strecke sind und alle Geraden in eine, aus euklidischer Sicht durch einen Kreis beschränkte, Menge passen.

Natürlich lassen sich auch die euklidischen Darstellungen von Geraden in den beiden Poincaré-Modellen nur über die Metrik wirklich verstehen; beide Modelle sind aber auch dazu geeignet, auf die Thematisierung der Längenmessung zu verzichten und trotzdem die Unterschiede zu euklidischen Geraden augenfällig zu machen.

Mit dem Axiomensystem der Saccheri-Ebene im Hintergrund spricht aus meiner Sicht vor allem für die beiden Poincaré-Modelle, dass in beiden die hyperbolischen Geradenspiegelung als euklidische Geradenspiegelung oder euklidische Kreisspiegelungen aufgefasst werden können. Spiegelungen an Geraden im Beltrami-Klein-Modell sind hingegen komplizierter.

Die Poincaré-Scheibe ist aus euklidischer Sicht drehsymmetrisch, sodass bei ihrer Erkundung keine Fallunterscheidungen nötig sind. Hingegen bilden die Typ-2-Geraden der Poincaré-Halbebene

Sonderfälle, die bei rechnerischen Zugängen zu Fallunterscheidungen führen. Aus grafischer Perspektive bieten die Typ-2-Geraden allerdings eine in gewisser Weise „ausgezeichnete Richtung“, die als Startpunkt für Konstruktionen dienen kann. In dieser Rolle haben Typ-2-Geraden das Potenzial einer Vermittlerrolle zwischen euklidischer und hyperbolischer Geometrie. Sie sind die Grundlage für die Übersichtlichkeit und Überzeugungskraft von Konstruktionen wie denen auf den Seiten 118 und 118. Dies ist der Grund, warum ich mich für die Verwendung der Poincaré-Halbebene in der Veranstaltung entschieden habe.

9.8.5 Abschließendes zur Behandlung nichteuklidischer ebener Geometrie

Die obigen Ausführungen zeigen zunächst einmal das inhaltliche Potenzial des ZuL-Zugangs zur Erkundung der hyperbolischen Ebene. Natürlich liefert eine bloße Darstellung eines Zugangs noch keine empirische Evidenz dafür, dass die Studierenden auf diese Weise elementares Wissen zur nichteuklidischen Geometrie und zu typischen Phänomenen aufbauen. Diese Überprüfung steht noch aus, ist aber kein Bestandteil dieser Arbeit. Aus dem Praxiseinsatz kann ich berichten, dass das beschriebene Vorgehen auf jeden Fall dazu führt, dass die Studierenden in den mündlichen Modulprüfungen tatsächlich in der Lage sind, sich substanziell und mit aussagekräftigen Skizzen präformal zur hyperbolischen Geometrie und deren Abgrenzung zur euklidischen Geometrie zu äußern. Somit wird ihnen insbesondere deutlich, dass das Parallelenaxiom tatsächlich ein Axiom sein muss. Darüber hinaus liefern die in diesem Abschnitt geschilderten Aktivitäten einen weiteren Anlass zur Beschäftigung mit den Axiomen und Sätzen der Saccheri-Ebene.

9.9 Synthese: Eignung des Axiomensystems der Saccheri-Ebene für die Gymnasiallehramtsausbildung

In Kapitel 7 habe ich die inhaltliche Gestaltung der Veranstaltung *Geometrie für Lehramtsstudierende* überblicksmäßig entlang zentraler Definitionen und Sätze vorgestellt und die Genese der Veranstaltung beschrieben (Abschnitt 7.3). Während der Veranstaltungsabschnitt zur *Geometrie mit Mitteln der linearen Algebra* (Abschnitt 7.2.1) vom Aufbau her vergleichbar mit anderen einschlägigen Skripten ist, ist die anschließende axiomatische Behandlung der ebenen Geometrie (Abschnitte 7.2.2, 7.2.3) eher untypisch. Dieser Teil der Veranstaltung beruht auf einem Text von Iversen (1992), der zuerst von Hilgert (2012, 2014) aufbereitet, dann von anderen Dozenten erweitert (Weich, 2016; Remus, 2017) und abschließend von mir im Rahmen des hier vorgestellten Projekts überarbeitet wurde. Im Fokus der Betrachtung stehen metrische Räume, die mit der axiomatischen Struktur der *Saccheri-Ebene* (mathematische Bemerkung 7.2.11 (S. 66)) ausgestattet sind. Ein detailliertes Kurzskript mit allen wesentlichen mathematischen Details zum axiomatischen Zugang findet man in Anhang A. Alle Entwicklungen und Überarbeitungen fanden mit dem Ziel statt, ebene Geometrie in einer auf die Zielgruppe *Lehramtsstudierende* optimierten Weisen zu lehren.

In diesem Kapitel habe ich den verwendeten axiomatischen Aufbau, gegliedert nach den zentralen (geometrischen) Konzepten, genauer analysiert und mit alternativen Zugängen zur euklidischen Geometrie (euklidischer Vektorraum \mathbb{R}^2 , „Grundlagen der Geometrie“ von Hilbert (1977)) verglichen. Diese Analysen bilden nun die Grundlage dafür, den Zugang zusammenfassend zu charakterisieren und die Eignung (insb. in Abgrenzung zum „klassischen“ Zugang von Hilbert (1977))

für die Nutzung in einer professionsorientierten Fachveranstaltung zu diskutieren. Damit wird ein wesentlicher Beitrag zur Beantwortung der Forschungsfragen FF-A.1⁵⁵ und FF-A.2⁵⁶ geleistet.

In Abschnitt 9.1 habe ich herausgearbeitet, dass die *reellen Zahlen* in der Veranstaltung bereits durch die Nutzung metrischer Räume vorausgesetzt werden. Die Veranstaltung *Geometrie für Lehramtsstudierende* im dritten Studienjahr angesiedelt ist, ist es sinnvoll und ökonomisch nicht vom „leeren Blatt“ aus zu starten, sondern auf mathematische Inhalte der Grundvorlesungen aufzubauen. Eine wesentliche Konsequenz der initialen Voraussetzung der reellen Zahlen ist, dass alle geometrischen Objekte automatisch vollständig (im Sinne der Analysis) sind. Es gibt also keine Probleme mit der Existenz von Schnittpunkten. Darüber hinaus können im Schlussteil der Veranstaltung Parallelverschiebungen (Definition A.12.1 (S. 362)) in euklidischen Ebenen sofort als \mathbb{R} -Vektorraum aufgefasst und über Koordinatengeraden reell koordinatisiert werden (Satz A.14.1 (S. 370)).

Als besonders nützlich erweist sich die Voraussetzung der reellen Zahlen bei der Definition von Geraden (Abschnitt 9.2) als durch \mathbb{R} in isometrischer Weise parametrisierbare Teilmengen. Auf diese Weise sind metrische Geraden quasi Kopien der reellen Zahlengerade und erben entsprechend verschiedene Eigenschaften, die man aus dem schulischen Umgang mit Geraden intuitiv vermuten würde (Tabelle 9.1 auf Seite 84). Im Gegensatz zum Zugang von Hilbert (1977) und den relational definierten Hilbert-Geraden, werden metrische Geraden durch (für einen spezifischen Kandidaten) überprüfbare Eigenschaften definiert. Der Parametrisierungsgedanke erinnert dabei an die aus der Schule bekannten Vektorraumgeraden. Eine Zusammenfassung findet man in Abbildung 9.4 (S. 90).

Das Messen von Abständen und Längen nimmt in der Schulgeometrie einen hohen Stellenwert ein. Abstände sind im Zugang der Veranstaltung *Geometrie für Lehramtsstudierende* durch den Aufbau auf metrischen Räumen von vorne herein angelegt. Ein Längenkonzept für stetige Wege kann darauf aufbauend in wohldefinierter Weise definiert werden. Insbesondere stellen metrische Geraden kürzeste Wege zwischen den auf ihnen enthaltenden Punkten dar. (Abschnitt 9.3). Bei Hilbert (1977) gibt es beide Konzepte zunächst einmal nicht, sie können aber aus seiner *Streckenrechnung* hergeleitet werden.

In Abschnitt 9.4 habe ich mich intensiver mit dem *Spiegelungsaxiom* beschäftigt. Im Kern liefert das Axiom zum einen eine Trennungseigenschaft für Geraden (und damit unter anderem die *Ebenheit* der Geometrie) und zum anderen eine Symmetrieeigenschaft (aus der alle anderen Symmetrieeigenschaften der Ebene erzeugt werden können). Beide Eigenschaften formalisieren in elementarer Weise zentrale Intuitionen zur ebenen Geometrie, die bei Hilbert (1977) das Ergebnis deutlich technischerer Folgerungen aus anderen Axiomen sind. Aus didaktischer Perspektive ist sowohl der Nachweis der Trennungseigenschaft über das *Pasch-Axiom* (das aus Studierendensicht zunächst erst einmal eine Aussage über Dreiecke ist) als auch die Konstruktion von Spiegelpunkten über das Antragen von Winkeln (basierend auf einem postulierten Kongruenzsatz) deutlich unintuitiver.

Das Parallelenaxiom (Abschnitt 9.5) selbst unterscheidet sich in den unterschiedlichen Zugängen nur marginal. Die Notwendigkeit des Axioms kann im Saccheri-Zugang in inhaltlich-anschaulicher Weise über die in Abschnitt 9.8.2 beschriebenen Konstruktionen mit Zirkel und Lineal geschehen. Dabei wird der didaktische Glücksfall ausgenutzt, dass grundlegende Aspekte der Poincaré-Halbebene (als Beispiel für hyperbolische Geometrie) in instruktiver Weise mit konstruktiven Me-

⁵⁵FF-A.1 Wie kann eine Geometrieveranstaltung inhaltlich und methodisch gestaltet sein, die den a-priori-Entwurfsprinzipien (S. 35) für Fachveranstaltungen zur Überwindung der zweiten Diskontinuität genügt?

⁵⁶FF-A.2 Welche fachinhaltlichen Entwurfs-Entscheidungen unterscheiden die konzipierte Veranstaltung von alternativen Zugängen, und inwieweit ist das gewählte Vorgehen im Vergleich zu den Alternativen funktionaler für die Überwindung der zweiten Diskontinuität?

thoden der euklidischen Geometrie behandelt werden können. So lassen sich die für die Saccheri-Ebenen so zentralen Spiegelungen in der oberen Halbebene als euklidische Geradenspiegelungen und euklidische Kreisversionen in einfacher Weise konstruieren.

Beim Nachweis, dass durch alle Axiome bis auf Isomorphie genau der euklidische Raum \mathbb{R}^2 beschrieben wird, unterscheiden sich der Zugang in der Veranstaltung und der Zugang von Hilbert (1977) deutlich (Abschnitt 9.6). Gemeinsam ist die Nutzung von stark geometrischen Argumenten. Diese werden bei Hilbert dafür genutzt, den Koordinatenkörper zu konstruieren, während sie im Saccheri-Kontext zur Konstruktion des Vektorraumes der Parallelverschiebungen dienen. Diese Konstruktion verläuft sehr nah zur analytischen Geometrie der Oberstufe.

Grundsätzlich kann der Zugang in der Veranstaltung *Geometrie für Lehramtsstudierende* als abbildungsgeometrisch in dem Sinne beschrieben werden, dass viele Argumente mit Hilfe von Eigenschaften geführt werden, die unter der Anwendung von Isometrien (vgl. Abschnitt 9.7) auf eine Situation invariant bleiben. Dazu zählt die Invarianz von Abständen, die Invarianz von Lagebeziehungen (wie parallel, orthogonal oder kollinear) sowie die Invarianz einzelner Punkte oder Geraden (z. B. die Invarianz der Spiegelgeraden unter Anwendung der entsprechenden Spiegelung). Trotzdem ist der Zugang nicht streng abbildungsgeometrisch in dem Sinne, dass Isometrien aus einer konsequent gruppentheoretischen Perspektive betrachtet werden und die Beschreibung und Charakterisierung der Isometriegruppe im Vordergrund steht.

Auch die Kongruenzrelation wird unter Verwendungen von Isometrien definiert (Definition A.7.2). Dies ist ein wesentlicher Unterschied zum Zugang von Hilbert (1977), der die Kongruenzrelation sukzessive durch Axiome ausschärft (Abschnitt 9.7). In Kapitel 13 argumentiere ich im Detail, warum ich eine Definition von Kongruenz über Isometrien für die Veranstaltung *Geometrie für Lehramtsstudierende* für sinnvoller halte als die Nutzung von Kongruenz als postulierte Relation. Hier möchte ich aber bereits einige der dort ausgeführten Argumente vorwegnehmen: Ein Problem besteht darin, dass der zweite Zugang keine zugängliche und überprüfbare Definition dafür liefert, was es bedeutet, dass zwei Figuren kongruent sind (Dieses Problem habe ich oben bereits beim Geraden-Konzept erwähnt). Stattdessen wird der Kongruenzbegriff implizit darüber spezifiziert, dass Situationen postuliert werden, in denen Figuren kongruent sind. Insbesondere wird dabei der Kongruenzsatz WSW als Axiom genutzt und wird dadurch im Vergleich zu anderen Kongruenzsätzen in einer meines Erachtens aus inhaltlicher Sicht nicht gerechtfertigten Weise hervorgehoben. Im in der Veranstaltung gewählten abbildungsgeometrischen Zugang können alle Kongruenzsätze für Dreiecke bewiesen werden. Dadurch steht die komplette (in sich geschlossene) klassische Kongruenzgeometrie zur Verfügung. Durch den Aufbau des Kongruenzbegriffs auf Isometrien spart man sich einen sukzessiv-impliziten axiomatischen Zugang zum Kongruenzbegriff, der einen Kongruenzsatz als Axiom nutzen muss und letztendlich nur für Figuren funktioniert, die durch eine endliche Punktmenge eindeutig bestimmt sind. Darüber hinaus erlaubt es der Zugang über Isometrien, Symmetriebetrachtungen in natürlicher Weise in das Veranstaltungskonzept zu integrieren, ein Thema, das bei Hilbert (1977) keine Rolle spielt.

Im Vergleich zu den meisten anderen Axiomatisierungen der ebenen Geometrie kommt das Axiomensystem der Saccheri-Ebene mit wenigen Axiomen aus. Dies hängt zum einen mit der expliziten Definition von Geraden unter Nutzung der reellen Zahlen zusammen. Viele Eigenschaften von Geraden, die sonst postuliert werden müssen, können in diesem Axiomensystem bewiesen werden. Zum anderen fängt das Axiomensystem nicht bei „Null“ an, sondern nutzt neben den reellen Zahlen weitere Konzepte zeitgemäßer Mathematik wie Stetigkeit oder metrische Räume. Für die Nut-

zung im Kontext der Veranstaltung *Geometrie für Lehramtsstudierende* (2 SWS Vorlesung) ergeben sich dadurch Vorteile. Zum einen erlaubt die geringe Anzahl von nur drei Axiomen, alle Axiome im Detail zu besprechen und ihre Notwendigkeit über die Behandlung von passenden Nichtbeispielen zu begründen. Die Nutzung bereits bekannter mathematischer Konzepte macht die Veranstaltung anschlussfähig an die anderen Veranstaltungen des Mathematiklehramtsstudiums. Dadurch wird die Geometrie als vernetztes Teilgebiet der akademischen Mathematik dargestellt. Umgekehrt werden bereits behandelte mathematische Konzepte wieder aufgegriffen. Ich denke, dass so ein Zugang im Kontext einer fachmathematisch sowieso stark eingeschränkten Lehramtsausbildung sinnvoller ist, als wenn man die Geometrie als ein für sich stehendes, unabhängiges Teilgebiet der Mathematik behandelt. Insbesondere würde der Aufbau der reellen Zahlen aus der Geometrie heraus (so oben in diesem Abschnitt und in Abschnitt 9.6) ein weiteres Themenfeld aufmachen, das zwar inhaltlich sehr spannend ist, aber nicht vorrangig behandelt werden muss.

Ich habe in diesem Abschnitt an verschiedenen Stellen herausgearbeitet, warum ich den gewählten Zugang für die Lehramtsausbildung geeigneter halte, als einen Zugang der stark an Hilbert (1977) angelehnt ist. Wesentlich ist dabei, dass viele geometrische Konzepte in einer Weise eingeführt werden, die wenig technisch und nah an einem handelnden Umgang mit geometrischen Situationen ist. Dennoch möchte ich abschließend noch einmal explizit auf Vorteile der Grundlegung der Geometrie von Hilbert (1977) eingehen. Die Modellvarianz im Axiomensystem der Saccheri-Ebene beschränkt sich im Wesentlichen auf Modelle mit unterschiedlichen Konzepten von metrischen Geraden sowie auf die hyperbolische und die euklidische Geometrie. Im Vergleich dazu kann durch systematisches Weglassen/Hinzunehmen einzelner Axiome in der Theorie von Hilbert (1977) eine viel größere Menge unterschiedlicher Geometrien erkundet werden (z.B. endliche Geometrien, Geometrien in nicht vollständigen Räumen, nichtarchimedische Geometrien, ...). Dies ermöglicht sehr differenzierte Analysen zu Abhängigkeiten verschiedener geometrischer Konzepte und dadurch eine Durchdringungstiefe, wie sie in einer notwendigerweise durch Exemplarität gekennzeichneten Veranstaltung im Lehramtsstudium nicht möglich ist.

Kapitel 10

Untersuchungsergebnisse zur Gesamtveranstaltung

Im Sinne der Beantwortung der Forschungsfragen FF-B.1⁵⁷ und FF-B.3⁵⁸ wurden in einem Pre-Post-Design, professionsbezogene Beliefs der Studierenden bezogen auf bisher besuchte Mathematikfachveranstaltungen (Pre) und bezogen auf die Veranstaltung *Geometrie für Lehramtsstudierende* (Post) erhoben. Darüber hinaus haben die Studierenden im Rahmen des Posttests die Veranstaltung in Bezug auf die Umsetzung der a-priori-Entwurfsprinzipien für professionsorientierte Fachveranstaltungen (vgl. Abschnitt 3.3 f.) und in Bezug auf die umgesetzten methodischen Entscheidungen (Kapitel 8) evaluiert. Diese Untersuchungen werden in den folgenden beiden Abschnitten vorgestellt und ausgewertet.

10.1 Einschätzungen der Studierenden zu den Entwurfsprinzipien und zur methodischen Gestaltung der Veranstaltung

10.1.1 Vorstellung des Untersuchungsdesigns

Diese Studie untersucht zwei Aspekte der Veranstaltungsgestaltung. Der erste Aspekt betrifft die in Abschnitt 3.3 herausgearbeiteten Entwurfsprinzipien für Fachveranstaltungen, die zur Überwindung der zweiten Diskontinuität beitragen sollen (*Orientierung an der Fachsystematik, Orientierung an der fachspezifischen Darstellungsmethodik, implizite Professionsorientierung und explizite Professionsorientierung*). Der zweite Aspekt ist die in Kapitel 8 dargestellte methodische Gestaltung der Veranstaltung. Mithilfe eines Fragebogens, den die Studierenden am Ende des letzten Vorlesungstermins ausgefüllt haben, wurden ihre Einschätzungen zu diesen beiden Schwerpunkten unter Verwendung geschlossener Items erhoben. Darüber hinaus gab es Items zur Erhebung von professionsbezogenen Beliefs, die zu der in Abschnitt 10.2 vorgestellten Studie gehören und dort vorgestellt werden.

⁵⁷FF-B.1 Welche professionsbezogenen Einstellungen zu fachmathematischen Veranstaltungen bringen die Studierenden mit in die Veranstaltung, und wie unterscheiden sich diese von entsprechenden Einstellungen bezogen speziell auf die Veranstaltung *Geometrie für Lehramtsstudierende*?

⁵⁸FF-B.3 Wie evaluieren (insbesondere auch in Bezug auf die eigene Professionalisierung) die Studierenden die Gesamtveranstaltung und die speziellen professionsorientierten Lerngelegenheiten?

Die eingesetzten Items wurden auf Grundlage des in dieser Arbeit vorgestellten theoretischen Hintergrundes passgenau für die Veranstaltung *Geometrie für Lehramtsstudierende* entwickelt. Bezogen auf die Entwurfsprinzipien, wurden die Studierenden gebeten, zunächst einzuschätzen, für wie relevant sie deren Umsetzung einschätzen (Tabelle 10.1). Die Items EntwurfPrinzRelevanz_1 und

Item	Ausprägungen	Bezeichner
Wie wichtig sollte Ihrer Meinung nach die Berücksichtigung folgender Aspekte bei der Konzeption einer Fachmathematik Vorlesung für Lehramtsstudierende (GyGe/BK) sein?		
Alle behandelten Gegenstände und Strukturen werden zunächst formal definiert oder (aus bspw. Vorgängerveranstaltungen) referenziert.		EntwurfPrinzRelevanz_1
Alle aufgestellten mathematischen Aussagen werden durch rigorose logische Schlüsse bewiesen.		EntwurfPrinzRelevanz_2
In der Vorlesung werden Begriffe oder Aussagen durch Beispiele und Nichtbeispiele verdeutlicht.		EntwurfPrinzRelevanz_3
Zusätzlich zu den fachmathematischen Inhalten wird thematisch passendes, historisches Hintergrundwissen vermittelt.	gar nicht wichtig; nicht wichtig; eher nicht wichtig; eher wichtig; wichtig; sehr wichtig	EntwurfPrinzRelevanz_4
Während der Vorlesung werden auf der Metaebene Anmerkungen zum mathematischen Denken und Arbeiten gegeben.		EntwurfPrinzRelevanz_5
Die Vorlesung wird so konzipiert, dass es an möglichst vielen Stellen Anknüpfungspunkte zum späteren Lehrerberuf gibt.		EntwurfPrinzRelevanz_6
Es gibt, ergänzend zu den normalen Aufgaben, Schnittstellenaufgaben, in denen Bezüge zwischen Schul- und Hochschulmathematik expliziert werden.		EntwurfPrinzRelevanz_7

Tabelle 10.1: Items aus dem *Posttest zur doppelten Diskontinuität und Veranstaltungsevaluation* zur Einschätzung der Relevanz der in Abschnitt 3.3 vorgeschlagenen Entwurfsprinzipien für Fachveranstaltungen, die zur Überwindung der zweiten Diskontinuität beitragen sollen.

EntwurfPrinzRelevanz_2 beziehen sich auf wesentliche Punkte der praktischen Umsetzung der *Orientierung an der Fachsystematik* (S. 35), die Items EntwurfPrinzRelevanz_3 bis EntwurfPrinzRelevanz_5 auf ausgewählte Bereiche der *Orientierung an der fachspezifischen Darstellungsmethodik* (S. 35). Der in Item EntwurfPrinzRelevanz_4 angesprochene historische Bezug, bezieht sich darauf, dass an zwei Stellen der Veranstaltung historische Exkurse zu den Themen *Geschichte der Axiomatik* und *Geschichte des Parallelenaxioms* gemacht wurden. Diese sind zwar im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter relevant, da sie keinen besonderen Professionsbezug aufweisen, aber trotzdem Bestandteil der Veranstaltungskonzeption und damit auch der entsprechenden Evaluation. Die Relevanzeinschätzungen zur Umsetzung der expliziten und impliziten Professionsorientierung 4 wurden mit den Items EntwurfPrinzRelevanz_6 und EntwurfPrinzRelevanz_7 erhoben.

Im Anschluss an die Relevanzeinschätzungen zu den Entwurfsprinzipien wurden die Studierenden gebeten, die Umsetzung der genannten Aspekte im Rahmen der Veranstaltung *Geometrie für Lehr-*

amtsstudierende zu bewerten (Tabelle 10.2). Die Items ergeben sich in paralleler Weise zu den vorher vorgestellten Items zur Relevanz der Entwurfsprinzipien.

Item	Ausprägungen	Bezeichner
Wie gut wurden Ihrer Meinung nach die folgenden Aspekte in der Veranstaltung „Geometrie für Lehramtsstudierende“ umgesetzt:		
Alle behandelten Gegenstände und Strukturen werden zunächst formal definiert oder (aus bspw. Vorgängerveranstaltungen) referenziert.		EntwurfPrinzUmsetzung_1
Alle aufgestellten mathematischen Aussagen werden durch rigorose logische Schlüsse bewiesen.		EntwurfPrinzUmsetzung_2
In der Vorlesung werden Begriffe oder Aussagen durch Beispiele und Nichtbeispiele verdeutlicht.		EntwurfPrinzUmsetzung_3
Zusätzlich zu den fachmathematischen Inhalten wird thematisch passendes, historisches Hintergrundwissen vermittelt.	gar nicht gut umgesetzt; nicht gut umgesetzt; eher nicht gut umgesetzt;	EntwurfPrinzUmsetzung_4
Während der Vorlesung werden auf der Metaebene Anmerkungen zum mathematischen Denken und Arbeiten gegeben.	gut umgesetzt; besonders gut umgesetzt	EntwurfPrinzUmsetzung_5
Die Vorlesung wird so konzipiert, dass es an möglichst vielen Stellen Anknüpfungspunkte zum späteren Lehrerberuf gibt.		EntwurfPrinzUmsetzung_6
Es gibt, ergänzend zu den normalen Aufgaben, Schnittstellenaufgaben, in denen Bezüge zwischen Schul- und Hochschulmathematik expliziert werden.		EntwurfPrinzUmsetzung_7

Tabelle 10.2: Items aus dem *Posttest zur doppelten Diskontinuität und Veranstaltungsevaluation* zur Umsetzung der in Abschnitt 3.3 vorgeschlagenen Entwurfsprinzipien in der Veranstaltung *Geometrie für Lehramtsstudierende*.

In einem dritten Fragenblock (Tabelle 10.3) haben die Studierenden eine subjektive Einschätzung zur Nützlichkeit des *Schnittstellen-ePortfolios* abgegeben (Item *ePortfolio_Nuetzlichkeit*) sowie den Umfang des Einsatzes aller in Kapitel 8 vorgestellten Veranstaltungselemente (bis auf die Schnittstellenwochen, die getrennt evaluiert wurden) bewertet (Items *Umfang_ePortfolio*, *Umfang_eRechenaufgaben*, *Umfang_Visualisierungen*).

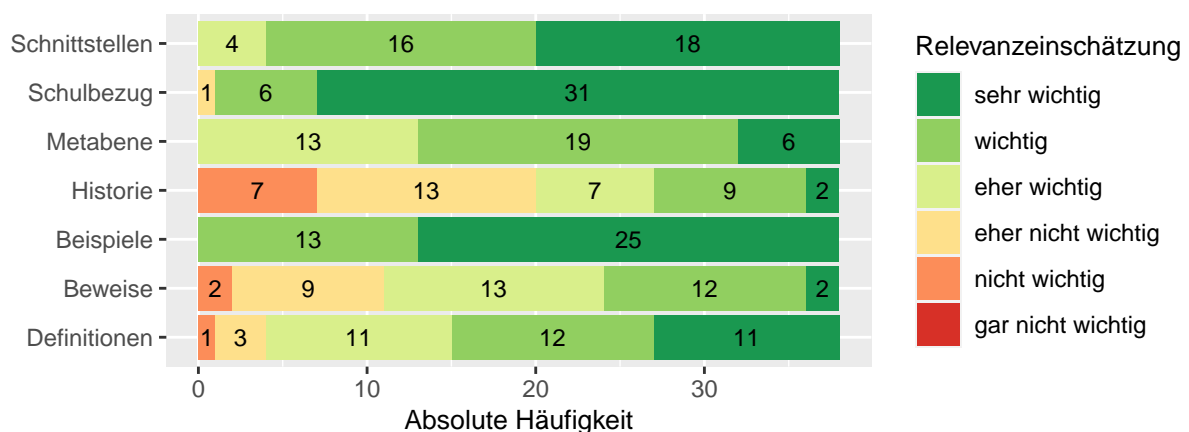
Im folgenden Abschnitt werden die mit den oben vorgestellten Items erhobenen Daten präsentiert und eingeordnet. Insgesamt stehen $n = 38$ Datensätze (Zyklus 1: $n = 17$, Zyklus 2: $n = 11$, Zyklus 3: $n = 10$) zur Verfügung. Die erhobenen Daten wurden mit klassischen Methoden deskriptiver Statistik ausgewertet und visualisiert (z. B. Hedderich und Sachs (2012, S. 60 ff.)). Die komplette Auswertung wurde mit *R* durchgeführt.

Item	Ausprägungen	Bezeichner
Wie hilfreich war für Sie die begleitende Arbeit an Ihrem ePortfolio?	nicht hilfreich; eher nicht hilfreich; eher hilfreich; hilfreich; sehr hilfreich	ePortfolio_Nuetzlichkeit
Wie bewerten Sie den Einsatz folgender Veranstaltungselemente in der Veranstaltung?		
ePortfolio-Aufgaben		Umfang_ePortfolio
eRechenaufgaben	viel zu oft; zu oft; genau richtig; zu wenig;	Umfang_eRechenaufgaben
Visualisierungen mit Geogebra o. Ä.	viel zu wenig	Umfang_Visualisierungen

Tabelle 10.3: Items aus dem *Posttest zur doppelten Diskontinuität und Veranstaltungsevaluation* zur Bewertung der eingesetzten Veranstaltungselemente.

10.1.2 Darstellung der Untersuchungsergebnisse

In Abbildung 10.1 sind die Einschätzungen der Studierenden zur Relevanz der in Abschnitt 3.3 vorgeschlagenen Entwurfsprinzipien dargestellt. Zunächst fällt auf, dass die Vermittlung historischen



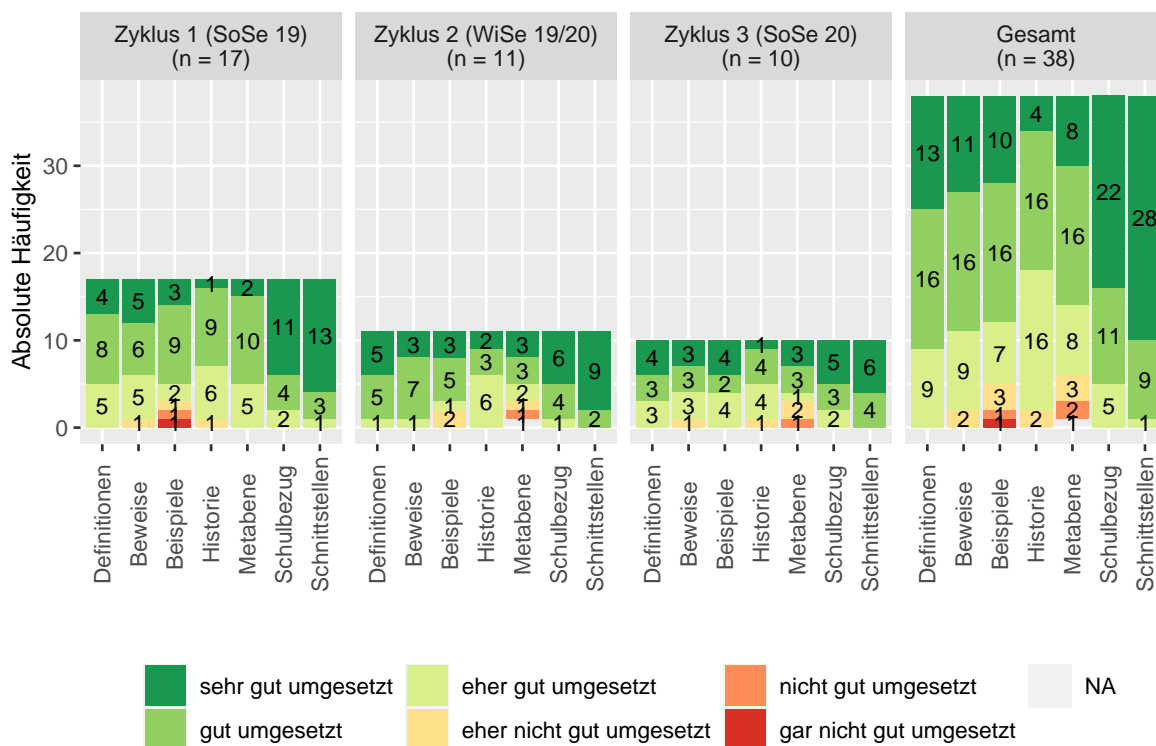
Einschätzung der Relevanz der entwickelten Entwurfsprinzipien für Schnittstellenveranstaltungen (n = 38)

Abbildung 10.1: Darstellung der Ergebnisse zur Einschätzung der Relevanz der in Abschnitt 3.3 vorgeschlagenen Entwurfsprinzipien durch die Studierenden aller drei Zyklen (Items EntwurfPrinzRelevanz_1 bis EntwurfPrinzRelevanz_7).

Hintergrundwissens als am unwichtigsten eingeschätzt wurde; mehr als die Hälfte der Studierenden werten diesen Teil der *Orientierung an der fachspezifischen Darstellungsmethodik* als „(eher) nicht wichtig“. Vor dem Hintergrund, dass historische Exkurse in den meisten Veranstaltungen nicht auftauchen, ist diese Bewertung nicht verwunderlich: Mangels entsprechenden Erfahrungen, können die Studierenden einen möglichen (professionsbezogenen) Mehrwert nicht einschätzen. Die anderen Items zur *Orientierung an der fachspezifischen Darstellungsmethodik* (Anmerkungen auf der Metabene zum mathematischen Denken und Arbeiten; Einsatz von Beispielen und Nichtbeispielen) werden durchgehend als relevant eingeschätzt. Fast alle Studierenden geben an, dass sie die Umsetzung von *expliziter* und *impliziter Professionsorientierung* (Schnittstellen, Schulbezug) für „wichtig“ bis „sehr wichtig“ halten. Hingegen werden die beiden Items zur *Orientierung an der Fachsystematik*

zwar immer noch von den meisten Studierenden als „(eher) wichtig“ aber insgesamt schwächer als die anderen Punkte (bis auf die Historie) bewertet. Sowohl dieses Ergebnis als auch die vorher erwähnten hohe Relevanzeinschätzungen zu Professionsorientierung sind konsistent zu der in Kapitel 3 dargestellten zweiten Diskontinuität und der damit verbundenen geringen Einschätzung der Nützlichkeit von Hochschulmathematik für späteres professionelles Handeln.

Die Bewertung der Umsetzung der vorgeschlagenen Entwurfsprinzipien im Kontext der Veranstaltung *Geometrie für Lehramtsstudierende* ist in Abbildung 10.2 visualisiert. Der Großteil der Studieren-



Umsetzung der entwickelten Entwurfsprinzipien in der Veranstaltung *Geometrie für Lehramtsstudierende*

Abbildung 10.2: Darstellung der Ergebnisse zur Umsetzung der in Abschnitt 3.3 vorgeschlagenen Entwurfsprinzipien in der Veranstaltung *Geometrie für Lehramtsstudierende* (Items EntwurfPrinzUmsetzung_1 bis EntwurfPrinzUmsetzung_7).

den bewertet die Entwurfsprinzipien als „gut umgesetzt“ oder „sehr gut umgesetzt“. Als Konsequenz aus den einzelnen negativen Evaluationsergebnisse aus Zyklus 1 zum Einsatz von Beispielen, wurde in den darauffolgenden Zyklen noch einmal besonders darauf geachtet, den Anteil an Beispielen zu erhöhen und bereits eingebundene Beispiele nochmal in dieser Funktion zu explizieren. Besonders erfreulich im Sinne der Intention der Veranstaltung, ist die durchweg sehr positive Bewertung der Umsetzung von *impliziter* und *expliziter Professionsorientierung*, die sich offenbar mit den in Abbildung 10.1 dargestellten Erwartungen der Studierenden deckt.

Ein wichtiges Veranstaltungselement bei der Umsetzung von Professionsorientierung war das begleitende *Schnittstellen-ePortfolios* (Abschnitt 8.1). Die entsprechenden Nützlichkeitseinschätzungen sind in Abbildung 10.3 dargestellt. Es zeigt sich, dass in allen drei Zyklen zusammen nur zwei Studierende das ePortfolio als „nicht hilfreich“ eingeschätzt haben. Trotzdem fällt das Ergebnis negativer aus, als die in Abbildung 10.2 dargestellte Bewertung der Umsetzung der Professionsorientierung (zu der das ePortfolio gehört). Eine These ist, dass ca. ein Drittel der Studierenden

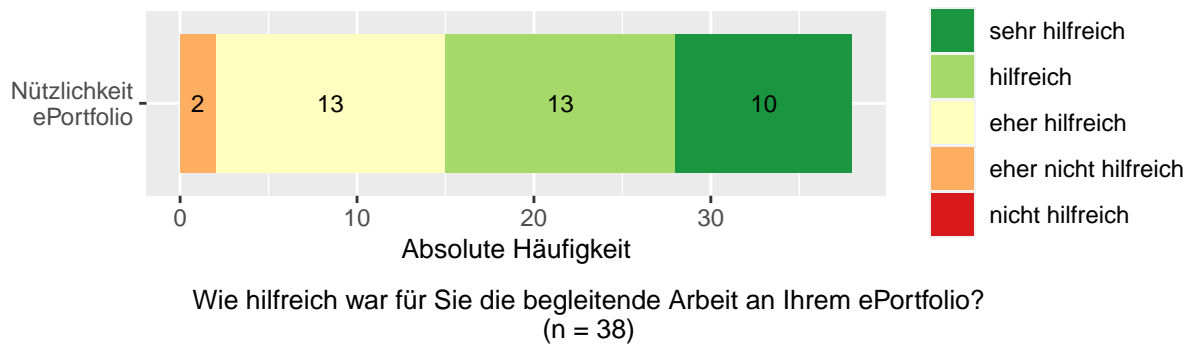


Abbildung 10.3: Darstellung der Ergebnisse zur Einschätzung der Nützlichkeit des begleitenden ePortfolio-Einsatzes durch die Studierenden aller drei Zyklen (Item ePortfolio_Nuetzlichkeit).

das ePortfolio nur als „eher hilfreich“ einschätzt, weil zum einen das Format neuartig ist und zum anderen die dort eingesetzten Aufgaben auf eine andere Art fordernd sind, als die Studierenden es von Aufgaben aus Mathematikveranstaltungen gewöhnt sind. Bezogen auf diese These können eventuell die empirischen Auswertungen zu den einzelnen Schnittstellenwochen (Abschnitte 13.3, 14.3) weitere Einsichten liefern. In eine ähnliche Richtung weist auch die Bewertung der Häufigkeit der eingesetzten Veranstaltungselemente (Abbildung 10.4). Auch hier gibt es immerhin 11 (von 38) Studierende, die angeben, dass *ePortfolio-Aktivitäten* im Rahmen der Veranstaltung zu oft eingesetzt worden sind. Der Großteil der Studierenden bewertet allerdings die Einsatzhäufigkeit

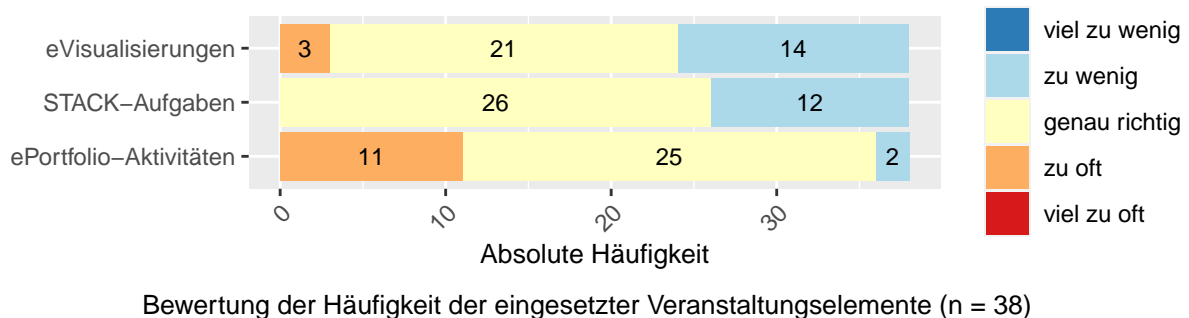


Abbildung 10.4: Darstellung der Ergebnisse zur Bewertung der Häufigkeit der eingesetzten Veranstaltungselemente durch die Studierenden aller drei Zyklen (Items Umfang_ePortfolio, Umfang_eRechenaufgaben, Umfang_Visualisierungen).

sowohl der *ePortfolio-Aktivitäten* als auch der *STACK-Aufgaben* (Abschnitt 8.3) und der *Visualisierungen* (Abschnitt 8.4) als „genau richtig“; bei den beiden letztgenannten wünschen sich jeweils mehr als 10 der Studierenden noch einen häufigeren Einsatz. Insgesamt zeigt sich, dass die in Abschnitt 8 vorgestellten innovativen Veranstaltungselemente von den Studierenden als passend eingeschätzt wurden, was die getroffenen methodischen Entscheidungen bestätigt.

10.2 Beliefs der Studierenden zur doppelten Diskontinuität

10.2.1 Vorstellung des Untersuchungsdesigns

In Abschnitt 3.1 habe ich herausgearbeitet, dass die *zweite Diskontinuität* eine *objektive* und eine *subjektive Facette* (S. 31) hat. Im Rahmen dieser Untersuchung sollen Einsichten dazu gewonnen werden, inwieweit die Veranstaltung *Geometrie für Lehramtsstudierende* aus Studierendensicht einen Beitrag zur Überwindung der *subjektiven Facette* der zweiten Diskontinuität leistet. Den methodischen Hintergrund liefert die bereits in Abschnitt 3.1 erwähnte Studie zu Studierenden-Beliefs zur doppelten Diskontinuität von Isaev und Eichler (2022). Die Autoren unterscheiden darin zwei Dimensionen von Beliefs zur doppelten Diskontinuität. Die erste Dimension (kurz: DDIV⁵⁹) bezieht sich auf Beliefs bezüglich der Kohärenz zwischen Schulmathematik und der universitären Mathematik. Die zweite Dimension (kurz: DDRB⁶⁰) umfasst Beliefs bezüglich der Nützlichkeit der gelernten universitären Mathematik bezogen auf den späteren Lehrerberuf (Isaev & Eichler, 2022, S. 324).

Die Skalen wurden adaptiert, um die Beliefs der Studierenden bezogen auf die vor der Geometrie-Veranstaltung besuchten Mathematikveranstaltungen (Pretest) mit den Beliefs bezogen auf die Geometrie-Veranstaltung (Posttest) zu vergleichen. Dabei sollen in dieser Untersuchung folgende Fragen beantwortet werden, die in ihrer Gesamtheit einen Beitrag zur Beantwortung der Forschungsfragen FF-B.1⁶¹ leisten.

1. Wie hoch schätzen die Studierenden die inhaltliche Verbundenheit zwischen Schulmathematik und akademischer Mathematik sowie die Berufsrelevanz ein, bezogen auf
 - (a) die Fachveranstaltungen, die sie vor der Veranstaltung *Geometrie für Lehramtsstudierende* besucht haben,
 - (b) die Veranstaltung *Geometrie für Lehramtsstudierende*?
2. Welche Zusammenhänge bestehen zwischen den Ergebnissen zu (a) und (b) aus Frage 1?

Der Pretest wurde direkt zu Beginn der ersten Vorlesung am Semesterbeginn durchgeführt und beinhaltete die von Isaev und Eichler (2022) wörtlich übernommenen Items zu den Skalen DDIV und DDRB. Aus Gründen der Übersichtlichkeit sind die vollständigen Item-Listen nicht hier im Fließtext, sondern im Anhang E aufgeführt (Tabellen E.1 (S. 407) und E.2 (S. 408)). Für beide Skalen wird nachfolgend je ein Beispielitem angegeben:

Item	Es gibt viele inhaltliche Verbindungen zwischen Schulmathematik und der universitären Mathematik.
------	---

Item DDIV_07, Skala DDIV, Isaev und Eichler (2022)

Item	Die universitäre Mathematik bringt mir nichts für meine spätere Tätigkeit als Lehrkraft in der Schule.
------	--

Item DDRB_06n, Skala DDRB, Isaev und Eichler (2022)

⁵⁹Doppelte Diskontinuität Inhaltliche Verbundenheit

⁶⁰Doppelte Diskontinuität Relevanz Beruf

⁶¹FF-B.1 Welche professionsbezogenen Einstellungen bringen die Studierenden mit in die Veranstaltung, und welche Veränderungen der Einstellungen können identifiziert werden?

Um die Beliefs der Studierenden bezogen auf die Geometrie-Veranstaltung zu messen (Posttest) habe ich die Skalen aus dem Pretest überarbeitet. Alle Items wurden geometrie- und veranstaltungsspezifisch umformuliert und die resultierenden Skalen (Tabellen E.3, E.4) mit GIV und GRB bezeichnet. Wieder folgen hier zwei Beispielitems; die vollständigen Item-Listen sind im Anhang E aufgeführt (Tabellen E.3 (S. 409) und E.4 (S. 410)).

Item	Es gibt viele inhaltliche Verbindungen zwischen der Schulgeometrie und der Geometrie in dieser Vorlesung.
------	---

Item GIV_7, Skala GIV, überarbeitet nach Isaev und Eichler (2022)

Item	Die Mathematik in dieser Geometrievorlesung bringt mir nichts für meine spätere Tätigkeit als Lehrkraft in der Schule.
------	--

Item GRB_6, Skala GRB, überarbeitet nach Isaev und Eichler (2022)

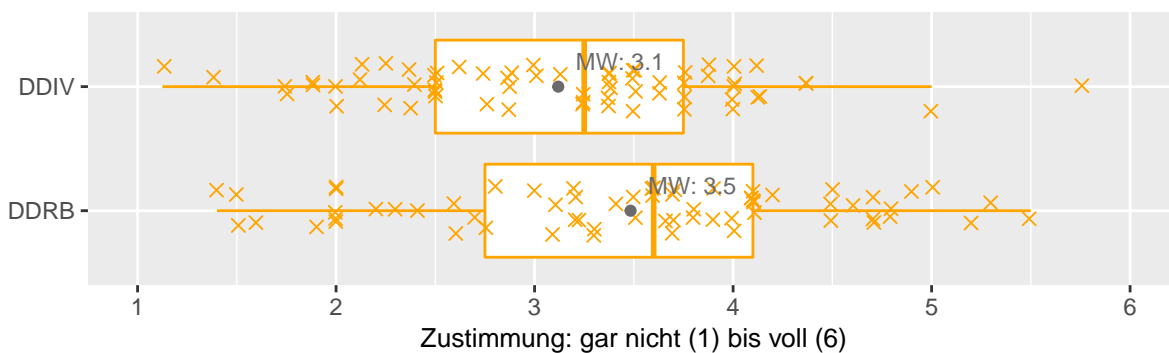
In den folgenden Abschnitten werden die mit den oben vorgestellten Items erhobenen Daten im Sinne der formulierten Fragestellungen ausgewertet. Für den Pretest stehen $n = 65$ Datensätze (Zyklus 1: $n = 24$, Zyklus 2: $n = 17$, Zyklus 3: $n = 24$) zur Verfügung; für den Posttest $n = 38$ Datensätze (Zyklus 1: $n = 17$, Zyklus 2: $n = 11$, Zyklus 3: $n = 10$). Über Pseudonymisierungs-codes können beide Datensätze miteinander verknüpft werden. Die erhobenen Daten wurden mit klassischen Methoden deskriptiver Statistik ausgewertet und visualisiert (z. B. Hedderich und Sachs (2012, S. 60 ff.)). Die komplette Auswertung wurde mit *R* durchgeführt.

10.2.2 Darstellung der Untersuchungsergebnisse

In Abbildung 10.5 sind die Auswertungen der vier Skalen dargestellt. Im Pretest (also bezogen auf die bisher besuchten Mathematikveranstaltungen) schätzen die Studierenden sowohl die Berufsrelevanz als auch die inhaltliche Verbundenheit als mittelmäßig ein; die Skalenwerte zur Berufsrelevanz sind im Schnitt etwas höher als die zur inhaltlichen Verbundenheit. Diese Ergebnisse sind konsistent mit den Ergebnissen von Isaev und Eichler (2022, S. 335), die ich bereits in Abschnitt 3.1 (S. 32) angesprochen habe. Bezogen auf die Veranstaltung *Geometrie für Lehramtsstudierende* wurden beide Dimensionen positiv bis sehr positiv bewertet. Die Studierenden schätzten sowohl die Berufsrelevanz als auch die inhaltliche Verbundenheit als hoch und durchschnittlich auch als höher als in den bisher besuchten Mathematikveranstaltungen ein.

Ein großer Unterschied zwischen den Einschätzungen zur Berufsrelevanz (GRB) und zur inhaltlichen Verbundenheit (GIV) ist nicht mehr erkennbar, tendenziell wird letztere sogar etwas besser eingeschätzt. Eine plausible Erklärung dafür ist, dass eine Veranstaltung zur Elementargeometrie automatisch als näher an den Inhalten des Mathematikunterrichts eingeschätzt wird als andere typische Fachveranstaltungen.

Auffällig ist der große Unterschied in der Heterogenität der Daten an den beiden Messzeitpunkten. Die Antworten im Pretest (Beliefs bezogen auf die bisher besuchten Fachveranstaltungen) verteilen sich über nahezu den kompletten Skalenbereich. Insbesondere gibt es auch Studierende (insbesondere die Person, die zum ganz rechten Datenpunkt der Skala DDIIV gehört), die bereits die anderen Fachveranstaltungen als inhaltlich stark mit der Schulmathematik verbunden und als sehr relevant für die eigene Professionalisierung wahrnehmen. Im Posttest (Beliefs bezogen auf die Veranstaltung



Beliefs zur doppelten Diskontinuität bezogen auf die bisherigen Fachveranstaltungen (n = 65)
 DDRb: Berufsrelevanz
 DDIV: Inhaltliche Verbundenheit zur Schulmathematik



Beliefs zur doppelten Diskontinuität bezogen auf die Geometrieveranstaltung (n = 38)
 GRb: Berufsrelevanz
 GIV: Inhaltliche Verbundenheit zur Schulmathematik

Abbildung 10.5: Darstellung der Ergebnisse zu den Beliefs der Studierenden aller drei Zyklen zur Berufsrelevanz und inhaltlichen Verbundenheit bezogen auf die bisher besuchten Mathematikveranstaltungen (oben) und bezogen auf die Veranstaltung *Geometrie für Lehramtsstudierende* (unten) (Skalen DDRb, DDIV, GRb, GIV).

Geometrie für Lehramtsstudierende) ist die Heterogenität hingegen deutlich geringer und umfasst nur die halbe Skala.

Die Verwendung von Pseudonymisierungs-codes ermöglicht es, die Werte der jeweils zusammengehörigen Skalen aus Pre- und Posttest auf Ebene der einzelnen Studierenden miteinander zu verknüpfen. Das Ergebnis ist in Abbildung 10.6 dargestellt. Es wird deutlich, dass bis auf in wenigen Ausnahmen sowohl die berufliche Relevanz als auch die inhaltliche Verbundenheit zur Schulmathematik bezogen auf die Geometrievorlesung (teils deutlich) besser eingeschätzt wird, als bezogen auf die bisherigen Mathematikveranstaltungen im Studium. Der bei der Beschreibung von Abbildung 10.5 vermutete Trend bestätigt sich damit auf Einzelfallebene. Auffällig ist, dass die Anstiege unterschiedlich stark sind. Es gibt Studierende, bei denen sich die Beliefs zwischen Pre- und Posttest nur moderat unterscheiden, aber auch solche, bei denen die Einschätzungen bezogen auf die bisherigen Veranstaltungen geringere Werte hatten als der Durchschnitt, bezogen auf die Geometrievorlesung aber deutlich über dem Durchschnitt liegen. Es handelt sich also um Studierende, die das bisherige Fachstudium weder als inhaltlich verknüpft zur Schulmathematik noch als relevant für den zukünft-

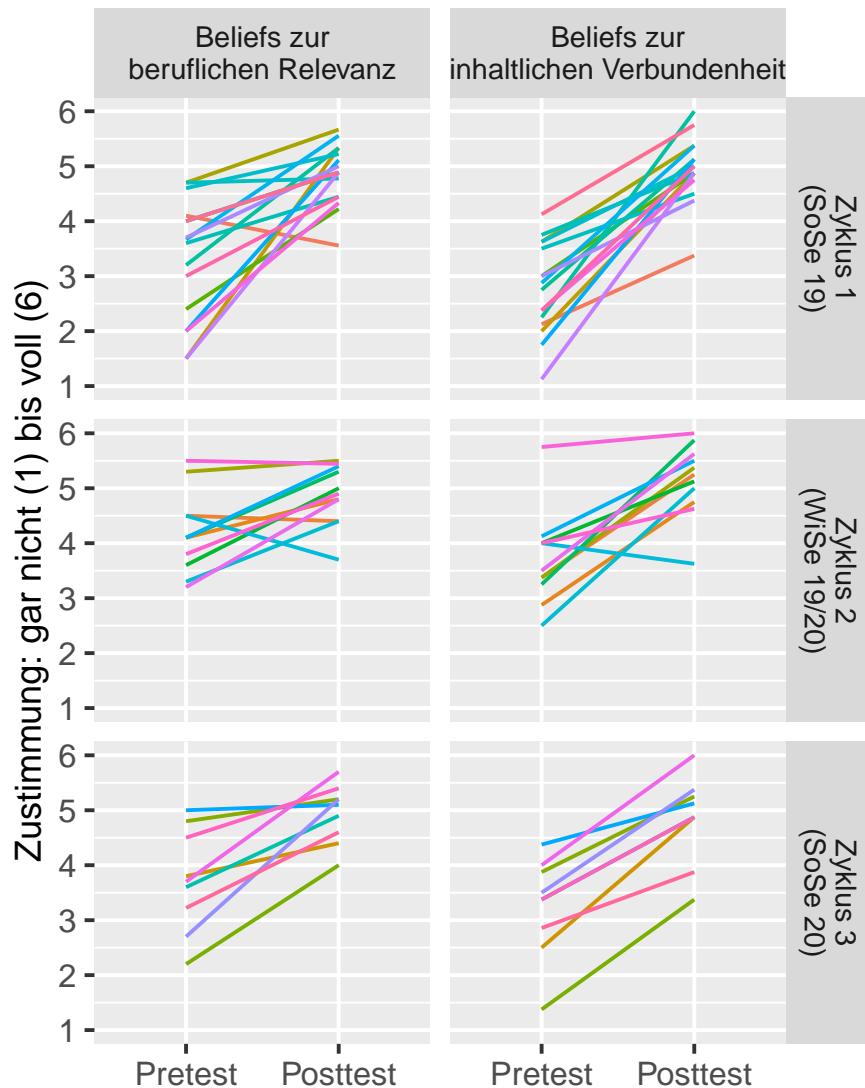


Abbildung 10.6: Pre-Post-Vergleich der Beliefskalen auf Einzelfallebene. Jede Linie steht für einen der Studierenden aus den drei Zyklen.

tigen Beruf sehen. Ganz im Gegensatz dazu wird die Geometrieveranstaltung extrem gut in beiden Dimensionen bewertet. Gerade bei dieser Gruppe ist allerdings nicht klar, ob diese – im Sinne der Überwindung der subjektiven Facette der zweiten Diskontinuität wünschenswerten – Beliefs auch mit guten Leistungen und einem hohen objektivem Kompetenzzuwachs einher gehen. Die Praxiserfahrung mit Studierenden, die in Gesprächen solche Beliefmuster äußern, spricht eher dagegen, was natürlich nichts beweist, aber einen potenziellen Ausgangspunkt für weitere Forschung darstellt.

10.3 Zusammenfassung und Beurteilung der Ergebnisse

In diesem Kapitel habe ich zwei Fragebogenstudien vorgestellt die sich auf Einschätzungen der Studierenden zur Gesamtveranstaltung beziehen. Die in Abschnitt 10.1 dargestellten Ergebnisse liefern Einsichten über die Beurteilung von Relevanz und Umsetzung der a-priori-Entwurfsprinzipien

(vgl. Abschnitt 3.3 f.) sowie über die Beurteilung der eingesetzten Veranstaltungselemente (Kapitel 8). Anschließend habe ich in Abschnitt 10.2 eine Pre-Post-Studie zu Beliefs der Studierenden bezogen auf die doppelte Diskontinuität erhoben.

Bei der Interpretation der Ergebnisse sind verschiedene Limitationen zu berücksichtigen. Zunächst beziehen sich die Ergebnisse retrospektiv auf die beforschten Veranstaltungszyklen und können aufgrund der geringen Stichprobengröße nicht verallgemeinert werden. Hinzu kommt, dass der Einfluss von Faktoren, die nicht unmittelbar mit der Veranstaltungskonzeption zusammenhängen (z. B. die Wirkung des lehrenden Dozenten auf die Studierenden), nicht kontrolliert werden kann. Ein weiterer wichtiger Punkt bei der Bewertung positiver Effekte ist die Tatsache, dass die Studierenden, die an der Fragebogenstudie am letzten Veranstaltungstermin teilgenommen haben, also insbesondere dort auch anwesend sind, eine Positivauswahl der Studierenden darstellen, die ursprünglich für die Veranstaltung angemeldet waren. Über die Einschätzungen von Studierenden, die abgebrochen, oder sich die Veranstaltungsinhalte im Selbststudium erarbeitet haben, können im Rahmen des verwendeten Untersuchungsdesigns keine Aussagen getroffen werden.

Trotz dieser Einschränkungen lassen die Ergebnisse den Schluss zu, dass die Umsetzung von adre-satengerechter Professionsorientierung aus Sicht der Studierenden, die die Veranstaltung bis zum Ende besucht haben, insgesamt gelungen ist. Als Beitrag zur Beantwortung der Forschungsfrage FF-B.3⁶² kann festgehalten werden, dass die Studierenden sowohl die der Konzeption zugrunde liegenden Entwurfsprinzipien als auch deren Umsetzung positiv und insbesondere die Umsetzung der *impliziten* und *expliziten Professionsorientierung* sehr positiv bewerten. Der Einsatz von STACK-Aufgaben (Abschnitt 8.3) und Visualisierungen mit GeoGebra (Abschnitt 8.4) wurde von fast allen Studierenden als passend oder „zu wenig“ bewertet. Dies spricht für die Nutzung dieser Elemente auch in zukünftigen Fachveranstaltungen. Das *Schnittstellen-ePortfolio* wurde zwar immer noch positiv aber insgesamt am kritischsten evaluiert. Eine Vermutung ist, dass dies auf die neuen Anforderungen entsprechender Aktivitäten zurückgeführt werden kann. An dieser Stelle sind weitere Untersuchungen zur Klärung notwendig; ergänzende Einsichten können ggf. im Rahmen der Auswertungen zu den einzelnen Schnittstellenwochen in den Abschnitten 13.3 und 14.3 gewonnen werden.

Im Bezug auf die Beantwortung der Forschungsfrage FF-B.1⁶³ konnten eindeutig positive Effekte bei fast allen Studierenden bezogen sowohl auf die Beliefs zur Berufsrelevanz und zur inhaltlichen Verbundenheit festgestellt werden. In der Wahrnehmung der Studierenden gelingt es damit einen Beitrag zur Überwindung der zweiten Diskontinuität zu leisten, der sich von dem anderer besuchter Fachveranstaltungen unterscheidet. Dabei muss berücksichtigt werden, dass dieses Ergebnis – wie bereits erwähnt – eine Aussage über die *subjektive Facette* der zweiten Diskontinuität macht und nicht darüber, ob es *objektiv* gelungen ist, einen nachhaltigen Beitrag zur geometriebezogenen fachdidaktischen Urteilskompetenz (Abschnitt 3.3 (S. 36)) zu leisten.

⁶²FF-B.3 Wie evaluieren (insbesondere auch in Bezug auf die eigene Professionalisierung) die Studierenden die Gesamtveranstaltung und die speziellen professionsorientierten Lerngelegenheiten?

⁶³FF-B.1 Welche professionsbezogenen Einstellungen zu fachmathematischen Veranstaltungen bringen die Studierenden mit in die Veranstaltung, und wie unterscheiden sich diese von entsprechenden Einstellungen bezogen speziell auf die Veranstaltung *Geometrie für Lehramtsstudierende*?

Teil IV

Entwicklung und Beforschung von Schnittstellenlerngelegenheiten

Kapitel 11

Thematische Schwerpunkte der Schnittstellenaktivitäten

In den in der Veranstaltung *Geometrie für Lehramtsstudierende* eingesetzten Schnittstellenaufgaben, beschäftigen sich die Studierenden aus fachlicher Perspektive vor allem mit den Themen *Kongruenz*, *Symmetrie* und *Isometrie*. Während sich das Thema *Isometrie* als Querschnittsthema durch die gesamte Veranstaltung zieht (vgl. Abschnitt 9.7), werden *Kongruenz* und *Symmetrie* explizit als Schwerpunktthemen zweier Schnittstellenwochen (Abschnitt 8.2) aus professionsorientierter Perspektive behandelt. Diese Auswahl möchte ich im Abschnitt 11.1 erläutern und dabei die Bedeutsamkeit der drei Begriffe für den gymnasialen Geometrieunterricht herausstellen. Im Anschluss werde ich weitere Möglichkeiten für die thematische Rahmung von Schnittstellenaktivitäten vorstellen (Abschnitt 11.2), die aus Zeitgründen in der Veranstaltung nicht umgesetzt werden konnten.

11.1 Kongruenz, Isometrie und Symmetrie als wesentliche Grundbegriffe der ebenen Geometrie

Aus fachlicher Perspektive bilden (auch in historischer Rückschau) *Kongruenz* und *Isometrie* (bzw. euklidische Bewegung) die beiden zentralen Möglichkeiten zum axiomatischen Aufbau der neutralen ebenen Geometrie (ohne Parallelenaxiom) und darauf aufbauend der euklidischen Geometrie. Beide Konzepte stellen unabhängig voneinander wichtige Werkzeuge zum geometrischen Schließen dar (Kongruenzmethode/beweis bzw. Abbildungsmethode/-beweis). Dies gilt gleichermaßen für das fachwissenschaftliche Geometrie-Treiben (vgl. Abschnitt 9.7) und für den Geometrie-Unterricht in der Sekundarstufe 1 (z. B. Weigand et al., 2014, S. 43). Der Kongruenzbegriff ist darüber hinaus eng verbunden mit dem für die Mittelstufenmathematik wichtigen Konstruktionsbegriff (Weigand et al., 2014, S. 75).

Sowohl mit Kongruenzargumenten als auch Methoden der Abbildungsgeometrie kann aus der bereits bekannten Gleichheit geometrischer Größen (Längen, Winkel, ...) oder dem Vorhandensein geometrischer Relationen (Schnittpunkt, orthogonal, parallel, ...), die Gleichheit anderer geometrischer Größen oder die Gültigkeit anderer geometrischer Relationen gefolgert werden (Holland, 2007, S. 128). Auch wenn Abbildungsbeweise im aktuellen Mathematikunterricht im Vergleich

zu Kongruenzbeweisen nur eine geringe Rolle spielen (Weigand et al., 2014, S. 44), werden einige Isometrien (wie Spiegelungen, Punktspiegelungen, Drehungen) zum Beispiel im Kontext von Symmetriebetrachtungen im Mathematikunterricht behandelt und dort auch (zumindest inhaltlich-anschaulich) zur Argumentation benutzt. Darüber hinaus stehen durch die immer stärkere Nutzung dynamischer Geometrie-Systeme Werkzeuge zum abbildungsgeometrischen Experimentieren (Weiss-Pidstrygach, 2014, S. 52) in niederschwelliger Weise zu Verfügung.⁶⁴

Der Symmetriebegriff stellt den dritten inhaltlichen Schwerpunkt für Schnittstellenaktivitäten in der Veranstaltung *Geometrie für Lehramtsstudierende* dar. Dies begründet sich durch die zentrale Bedeutung, die der Symmetriebegriff für die Mathematik quer durch alle Schulstufen (MSW NRW (2008, S. 58), MSW NRW (2019, S. 20, 25), MSW NRW (2014, S 21)) bis zur Fachwissenschaft hat (siehe z. B. Felix Kleins Erlanger Programm (F. Klein, 1872)). Dabei wird Symmetrie sowohl als Inhalt von Geometrie als auch als übergreifendes heuristisches Prinzip zum Problemlösen betrachtet. Winter (1976, S. 15) spricht bei Symmetrie sogar von einer *fundamentalen Idee* der Mathematik. Für die fachliche Klärung des Symmetriebegriffs stellen geometrische Abbildungen den zentralen Zugang dar. Der Nachweis von Symmetrieeigenschaften über Kongruenzsätze ist meist nicht möglich (Holland, 2007, S. 130).

Die Konzepte Kongruenz, Isometrie und Symmetrie sind also für den Mathematikunterricht und damit auch für die Mathematiklehrmatsausbildung bedeutsam. Der abbildungsgeometrische Zugang der Vorlesung ermöglicht eine Einführung sowohl des Kongruenz- als auch des Symmetriebegriffs auf der Grundlage von Isometrien (vgl. Abschnitt 9.7). Das ermöglicht einen fachmathematisch fundierten Blick auf alle drei Konzepte und deren Abhängigkeiten. Durch Schnittstellenaktivitäten zu diesen Themen können diese fachlichen Hintergründe (und insbesondere auch die Abhängigkeiten) genutzt werden, um die Studierenden dabei zu unterstützen, professionsrelevante Dispositionen und damit einen intellektuell aufrichtigen fachlichen Rahmen für den späteren Geometrieunterricht aufzubauen.

11.2 Alternative Inhaltsbereiche für Schnittstellenaktivitäten

Mit der im vorigen Abschnitt geschilderten thematischen Schwerpunktsetzung habe ich mich für eine hohe Synergie zwischen den Schnittstellenthemen entschieden. Es wäre auch möglich gewesen, stattdessen möglichst unterschiedliche Themenbereiche zu betrachten. Nachfolgend möchte ich exemplarisch zwei weitere inhaltvolle inhaltliche Anknüpfungspunkte für Schnittstellenaktivitäten im Kontext der Veranstaltung *Geometrie für Lehramtsstudierende* vorstellen: *Orthogonalität und Parametrisierung*.

Das Konzept der *Orthogonalität* ist, ähnlich dem Symmetriebegriff, ein Querschnittsthema durch alle Bereiche der institutionalisierten Mathematikausbildung bis hinein in die aktuelle Forschung. Beschrieben wird eine besondere Relation zwischen zwei Geraden bzw. zwei Strecken, die sich in natürlicher Weise zu Geraden verlängern lassen (z. B. Seiten eines Rechtecks). Das Orthogonalitätskonzept ist dabei sehr aspektreich, sowohl bezogen auf die Möglichkeiten der Definition als auch bezogen auf die Einsatzbereiche. Im Mathematikunterricht der Grundschule wird *senkrecht* zur Beschreibung von Eigenschaften ebener Figuren verwendet und SuS sollen senkrechte Gera-

⁶⁴Für die didaktische Diskussion über Vor- und Nachteile eines abbildungsgeometrisch orientierten Geometrieunterrichts (z. B. Bender, 1982), bietet der breite Einsatz dynamischer Geometriesoftware im Mathematikunterricht eine neue Perspektive.

denstücke mit geeigneten Konstruktionswerkzeugen erstellen (MSW NRW, 2008, S. 64,66). In der Sekundarstufe I werden entsprechende Betrachtungen fortgesetzt. Orthogonalität wird dabei zur Prämisse und zur Konklusion zentraler geometrischer Überlegungen (Mittelsenkrechten, Satzgruppe des Pythagoras, Satz des Thales, Trigonometrie, MSW NRW (2019, S. 25 f., 30 f., 34 f.)). Auf diesen Erkenntnissen wird in der analytischen Geometrie der Oberstufe weiter aufgebaut und das Skalarprodukt (ggf. Kreuzprodukt) als neues Werkzeug zum Nachweis eingeführt. Im Kontext der Betrachtung von Lagebeziehungen und Abständen ist hier die enge Verwandtschaft zur orthogonalen Projektion (die auch in Ansätzen schon in der Trigonometrie der Mittelstufe behandelt wird) relevant. Darüberhinaus wird bereits die Idee der Unabhängigkeit von zueinander orthogonalen Größen (z. B. insb. in physikalischen Kontexten) behandelt (MSW NRW, 2014, S. 29, 32). Auch in der fachwissenschaftlichen Mathematik ist Orthogonalität ein wichtiges Konzept. Es ermöglicht unter anderem die Zerlegung mathematischer Objekte in besser handhabbare Bestandteile.

Auch wenn *orthogonal* und *rechtwinklig* oft gleich gesetzt werden, kann Orthogonalität definiert werden, ohne dass ein Winkelbegriff dafür erforderlich ist. In der Elementargeometrie ist eine Einführung rein unter der Nutzung von Spiegelungen möglich, in der vektoriellen Geometrie nutzt man dafür das Skalarprodukt. Ist dann ein Winkelbegriff eingeführt, ergeben sich die bekannten Äquivalenzen. Diese Vielfalt der möglichen Zugänge und die oben geschilderte, jahrgangsübergreifende Reichhaltigkeit machen *Orthogonalität* zu einem geeigneten Kandidaten für Schnittstellenaktivitäten.

Das zweite Thema, *Parametrisierungen* (zur Charakterisierung und/oder Untersuchung räumlicher oder ebener Gebilde), taucht in der Veranstaltung an zwei Stellen auf, um einen bei der wichtigen Definition metrischer Geraden (Definition A.2.1 auf Seite 334) und zum anderen bei der Formalisierung stetiger Wege (Definition A.2.11 auf Seite 337). In der Schulmathematik treten Parametrisierungen prominent bei der vektoriellen Beschreibung von Geraden und Ebenen auf (MSW NRW, 2014, S. 32 f.). Bei der Behandlung linearer und quadratischer Funktionen in der Mittelstufe spielen Parameter auf zwei Arten eine Rolle: Gerade in Anwendungskontexten (Definitionsbereich steht für z. B. eine Menge oder eine Zeit) sind Funktionen der Bauart $D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ erste Beispiele für einfache Parametrisierungen; außerdem werden Parameter benutzt, um die einzelnen Bestandteile von Funktionstermen ($mx + b$ bzw. $a(x - d)^2 + e$) zu untersuchen und insbesondere systematisch zu verändern (MSW NRW, 2019, S. 16, 33).

Neben der Anknüpfbarkeit an Veranstaltung und Mathematikunterricht ist das Thema Parametrisierungen vor allem auch deswegen als Kontext für Schnittstellenaktivitäten geeignet, weil es über die Parametrisierung linearer Strukturen (Geraden, Ebenen) hinaus ein wichtiges und mächtiges mathematisches Werkzeug zur Untersuchung komplexerer Gegenstände darstellt. Die Anwendungskontexte sind nicht auf die Mathematik begrenzt; Beispiele findet man unter anderem auch in der Physik oder der Computergraphik.

Kapitel 12

Theoretische und methodische Grundlagen zur Entwicklung und Beforschung von Schnittstellenlerngelegenheiten

Die Implementation von sogenannten *Schnittstellenwochen* (Abschnitt 8.2) zu den, wie in Abschnitt 11.1 beschrieben, ausgewählten Themenschwerpunkten *Kongruenz* und *Symmetrie* sowie die Umsetzung des veranstaltungsbegleitenden *Schnittstellen-ePortfolios* (Abschnitt 8.1) sind die beiden wesentlichen Innovationen, die in der Veranstaltung *Geometrie für Lehramtsstudierende* im Sinne der *expliziten Professionsorientierung* (Abschnitt 3.3 (S. 35)) umgesetzt wurden. Die Konzeption dieser Schnittstellenlerngelegenheiten erfolgt – wie auch das Gesamtprojekt (Abschnitt 6.2) – dem Vorgehen der *Entwicklungsforschung*. In diesem Kapitel möchte ich zunächst kurz das *Dortmunder Modell zur fachdidaktischen Entwicklungsforschung* vorstellen (Abschnitt 12.1). Es liefert einen prototypischen und etablierten Rahmen für Entwicklungsforschungsprojekte, in denen fachlich-didaktische Analysen einen wesentlichen Baustein darstellen. Dieses Modell werde ich anschließend (Abschnitt 12.2) für den speziellen hochschuldidaktischen Lerngegenstand *Schnittstellenlerngelegenheiten* adaptieren und damit die methodische Grundlage für den Teil des Projektes *SiMpLe-Geo* legen, der sich speziell mit der Umsetzung der *expliziten Professionsorientierung* beschäftigt. Abschließend stelle ich in Abschnitt 12.3 dann den Bezug zu den Forschungsfragen dieser Arbeit (siehe Abschnitt 6.1) her. In den folgenden Kapiteln werden dann Projektergebnisse zu den Schnittstellen *Kongruenz* (Kapitel 13) und *Symmetrie* (Kapitel 14) vor diesem methodischen Hintergrund vorgestellt.

12.1 Entwicklungsforschung im Dortmunder Modell

An der TU Dortmund wurde im Rahmen des *Forschungs- und Nachwuchskollegs Fachdidaktische Entwicklungsforschung zu diagnosegeleiteten Lehr-Lernprozessen* (FUNKEN) ein eigenes Modell zur gegenstandsorientierten fachdidaktischen Entwicklungsforschung entwickelt (bspw. Prediger et al. (2012), Hußmann, Thiele, Hinz, Prediger und Ralle (2013)). Als Zielvorstellung der in FUNKEN angesiedel-

ten Projekte nennen Prediger et al. (2012, S. 453) „die Entwicklung von Lehr-Lernarrangements auf der Basis einer stofflich-epistemologischen Analyse des jeweiligen in den Blick genommenen Lerngegenstands und die Erforschung der durch die Lehr-Lernarrangements initiierten Lernprozesse im Zyklus von *iterativen*, eng miteinander *vernetzten* Schritten“ (Hervorhebungen i.O.).

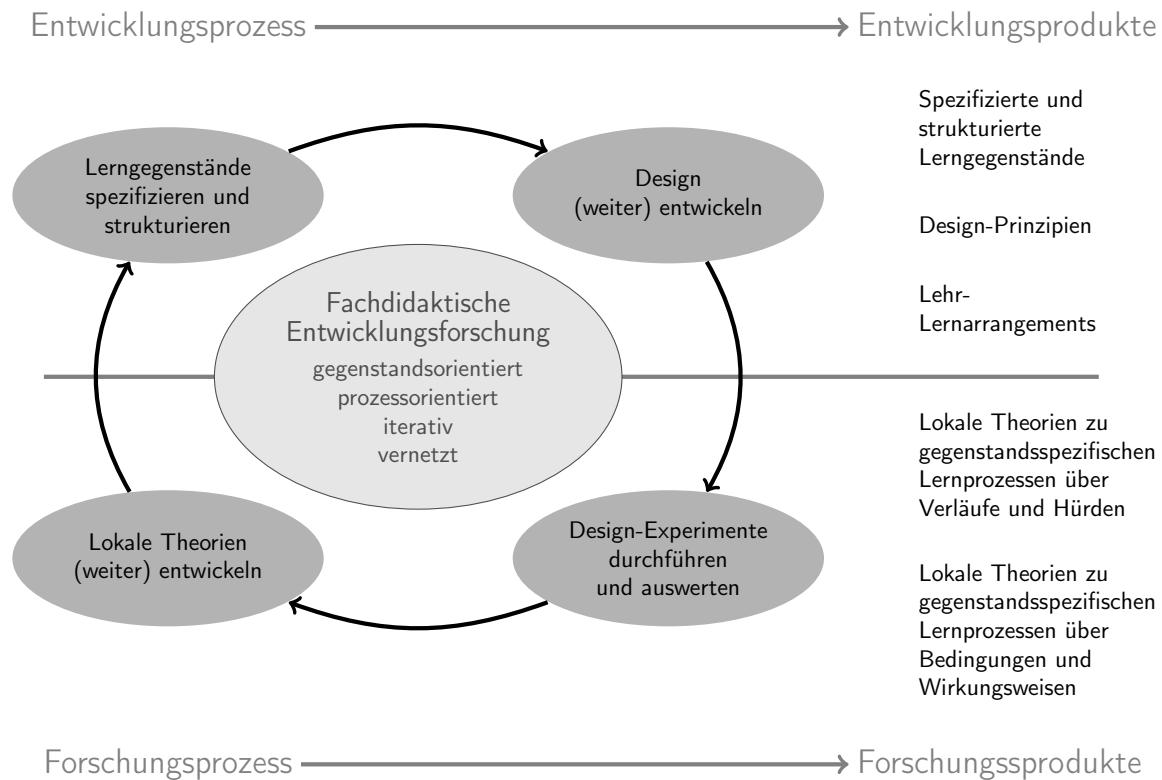


Abbildung 12.1: Zyklus der Fachdidaktischen Entwicklungsforschung im Dortmunder Modell (Abgezeichnet nach Hußmann, Thiele, Hinz, Prediger und Ralle (2013))

Der Kern des Dortmunder Modells ist der in Abbildung 12.1 dargestellte Zyklus. Dieser ist eingeteilt in vier Arbeitsbereiche, die im Sinne der oben genannten Zielsetzung zyklisch durchlaufen werden. Beim zyklischen Durchlaufen des Modells wechseln sich Entwicklung und Forschung ab und liefern nach mehrfachem Durchlaufen des Zyklus jeweils eigene Produkte. Eine detaillierte Beschreibung der einzelnen Bestandteile des Zyklus liefern Prediger et al. (2012). Insbesondere erfüllt das Forschungsprogramm die in Abschnitt 6.2 (S. 56) beschriebenen Anforderungen an fachdidaktische Entwicklungsforschung (Hußmann et al., 2013, S. 29 ff.). Prediger et al. (2012, S. 453) betonen die Verbindung von Prozess- und Gegenstandsorientierung: Die Erforschung von Lernprozessen wird gepaart mit einer lernerorientierten Strukturierung der Fachinhalte.

12.2 Zyklische Entwicklung und Beforschung von Schnittstellenlerngelegenheiten im Rahmen von *SiMpLe-Geo*

Das oben vorgestellte Dortmunder Modell zur fachdidaktischen Entwicklungsforschung soll als Grundlage zur Konzeption eines Modells für die Entwicklung und Beforschung von Schnittstellenlerngelegenheiten im Projekt *SiMpLe-Geo* verwendet werden. Hierfür sind verschiedene Anpassungen

sungen und Änderungen notwendig; Zunächst wird der Praxiskontext vom Mathematikunterricht in der Schule auf Mathematikveranstaltungen an der Hochschule abgeändert. Darüber hinaus sind die im Mittelpunkt stehenden Lerngegenstände nicht mehr rein mathematisch, sondern beinhalten als Schnittstellenlerngelegenheiten auch professionsbezogene Facetten und deren Reflexion.

Zur Orientierung ist in Abbildung 12.2 (S. 150) das Gesamtmodell (in Anlehnung an den FUNKEN-Zyklus) abgebildet. Im Folgenden werden nun die einzelnen Bestandteile im Detail vorgestellt und gezeigt, wie sie sich aus Anpassungen und Spezialisierungen des Dortmunder Modells ergeben.

12.2.1 Schnittstellen spezifizieren und strukturieren

Prediger et al. (2012, S. 454) nennen drei Grundlagen für die *Spezifizierung* von Lerngegenständen: *gegenstandsübergreifende Bildungsziele*, *gegenstandsspezifische Lernziele* und *Erkenntnisse über die Lernendenperspektive*. Für Entwicklungsforschung im Kontext von Schnittstellenlerngelegenheiten ergeben sich Anpassungen. Zunächst muss berücksichtigt werden, dass Schnittstellenlerngelegenheiten, als Teil der Professionalisierung von Mathematiklehrkräften nicht in einem allgemeinbildenden Lehr-Lern-Kontext verortet sind. Das wesentliche (und leitende) gegenstandsübergreifende Ziel ist die Überwindung der zweiten Diskontinuität in ihrer objektiven und subjektiven Facette (Kapitel 3). Die gegenstandsspezifischen Lernziele ergeben sich aus den Rollen fachmathematischen Wissens und Könnens für professionelles Lehrerhandeln (Abschnitt 2.1). Dafür bedarf es insbesondere eines fundierten Verständnisses der zugrunde liegenden Mathematik. Wie in Abschnitt 3.4 beschrieben, soll der Aufbau professioneller Handlungskompetenz im Kontext der Fachveranstaltung mittelbar durch die Förderung gegenstandsspezifischer (bezogen auf die spezielle Schnittstelle) fachdidaktischer Urteilskompetenz unterstützt werden.

Nützliche Erkenntnisse über die Lernendenperspektive sind im Kontext von Schnittstellenlerngelegenheiten von unterschiedlicher Gestalt. Sie umfassen unter anderem die subjektiv eingeschätzte Bedeutung der Schnittstelle für die Bewältigung von antizipierten, zukünftigen Handlungssituationen, die schulischen und universitären Vorerfahrungen zu dem Themenbereich sowie generelle Einstellungen und Orientierungen zur eigenen Professionalisierung. Dabei gilt es zu berücksichtigen, dass fachspezifische Entwicklungsforschungsprojekte im Kontext der zweiten Diskontinuität (gerade bezogen auf Elementargeometrie) ein sehr junges mathematikdidaktisches Betätigungsfeld sind. Entsprechende empirische Ergebnisse sind dementsprechend rar und müssen ggf. im Rahmen des Projektes erst generiert werden.

Die lehr-lern-bezogene Strukturierung einer Schnittstelle zielt (vgl. Prediger et al. (2012, S. 454)) unter anderem auf die „Identifikation relevanter Kontexte und Lernanlässe“ und die „geeignete Sequenzierung der Inhalte unter Berücksichtigung der Lernendenperspektive“. Dafür müssen insbesondere professionsorientierte reale und/oder fiktive Situationen identifiziert werden, in denen professionelle Handlungsanforderungen (bezogen auf die spezielle Schnittstelle) situiert werden können. Als Ausgangspunkt beziehe ich mich dabei auf die Übersicht professioneller Handlungsanforderungen von Prediger (2013, S. 156) (vgl. S. 9). Im Kontext einer fachinhaltlichen Veranstaltung sind allerdings nicht alle der genannten Anforderungen gleich geeignet, da viele nur durch ein Zusammenspiel mit anderen Bereichen professioneller Lehrerkompetenz (insb. fachdidaktischen Kompetenzen) erfolgreich bewältigt werden können. Für den hier vorliegenden Kontext sind diejenigen Handlungsforderungen hilfreich, bei denen eine präzise fachinhaltliche Klärung bereits einen wichtigen Beitrag zur Bewältigung liefert, unabhängig davon, wie weit die zur vollständigen Bewäl-

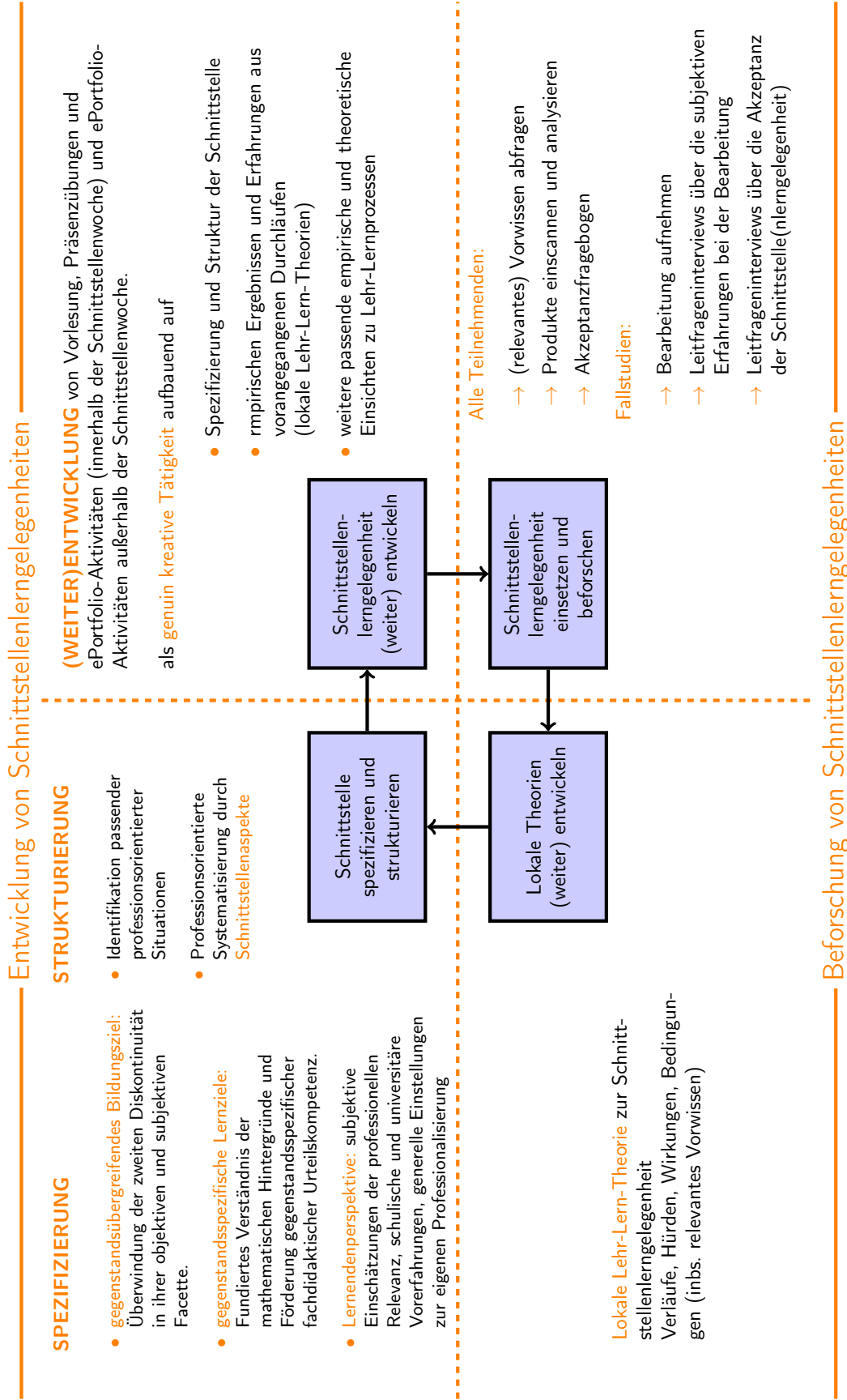


Abbildung 12.2: Zyklusmodell zur Entwicklung und Beforschung von Schnittstellenlerngelegenheiten.

tigung notwendigen fachdidaktischen Kompetenzen ausgebildet sind. Dieses Kriterium erfüllen unter anderem die folgenden der formulierten Handlungsanforderungen:

- (1) Anforderungen an Schülerinnen und Schüler (aus Schulbüchern, Tafelbildern oder Tests) selbst bewältigen und auf verschiedenen Niveaus bearbeiten können;
- (3) Zugänge (in Schulbüchern, Tafelbildern o. Ä.) analysieren und bewerten;
- (7) Äußerungen von Lernenden analysieren, bewerten und darauf lernförderlich reagieren;
- (8) Fehler von Lernenden analysieren und darauf lernförderlich reagieren;

Zusätzlich ist es nötig, die Studierenden dabei zu unterstützen, das erworbene fachmathematische Wissen und Können nicht ausschließlich als (prüfungsrelevanten) Inhalt der Mathematikveranstaltung sehen, sondern stattdessen als professionsrelevante Disposition für professionelles Handeln. Für die Veranstaltung *Geometrie für Lehramtsstudierende* habe ich dazu das Konzept sogenannter *Schnittstellenaspekte* entwickelt und solche Schnittstellenaspekte zu den behandelten Schnittstellen formuliert. Nachfolgend werde ich auf die Grundidee dieses Konzepts eingehen und damit einen begrifflichen Rahmen für die in den Kapiteln 13 und 14 explizit vorgestellten Schnittstellenaspekte zu den Themen *Kongruenz* und *Symmetrie* schaffen. Zur theoretischen Einbettung bedarf es eines kurzen Exkurses zu den Grundlagen des wissenschaftlichen mathematischen Arbeitens:

Mathematische Theorien setzen Axiome voraus, aus denen dann mithilfe vereinbarter logischer Schlussregeln weitere Aussagen gefolgert werden. Diese Aussagen beschreiben Eigenschaften von und/oder Zusammenhänge zwischen definierten Begriffen. Solche Definitionen sind keine zwingenden Resultate logischer Folgerungen, sondern frei gewählt im Kontext der Axiome, anderer bereits definierter Begriffe und bewiesener Aussagen. Insbesondere können Definitionen nicht richtig oder falsch sein, sondern lediglich nützlich oder nicht nützlich im Sinne einer bestimmten Zielsetzung. Formal ist eine Definition eindeutig durch die in ihrer Formulierung verwendeten mathematischen Theoriebausteine und deren Abhängigkeiten bestimmt. Als Beispiel dient die in der mathematischen Bemerkung 12.2.1 beschriebene *generische Definition* einer Mittelsenkrechten. Der dort in deutscher Sprache formulierte Satz liefert eine sinnvolle Definition für Mittelsenkrechten in der Saccheri-Ebene, in der Hilbert-Axiomatik und im euklidischen Raum \mathbb{R}^2 .

Mathematische Bemerkung 12.2.1 (Generische Definition einer Mittelsenkrechten)

Seien $A, B \in \text{Geom}$ verschieden. Eine **Gerade**, die durch den **Mittelpunkt** von A und B geht und **senkrecht** zur **Geraden** durch A und B ist, bezeichnen wir als **Mittelsenkrechte** von A und B .

Hinweis: Die so formatierten Begriffe hängen von der in **Geom** gewählten Axiomatisierung ab.

Allerdings nutzt die Definition Fachbegriffe (Gerade, Mittelpunkt, senkrecht, ...), die in Abhängigkeit der gewählten Axiomatik unterschiedlich definiert sind. Wie ich in Abschnitt 9.2 am Beispiel von *Geraden* erläutert habe, sind die durch die Definitionen beschriebenen Objekte nicht zwingend isomorph. Beispielsweise kann nicht jede metrische Gerade auch als Vektorraumgerade aufgefasst werden (mathematische Bemerkung 9.2.10 auf Seite 87). Trotzdem wird versucht, im Rahmen der jeweiligen Axiomatik ein mathematisches Modell für dieselbe Intuition umzusetzen. In der mathematischen Bemerkung 12.2.1 wird deutlich, dass manche solcher Modelle (hier das einer Mittelsenkrechten) in unterschiedlichen Axiomensystemen vollkommen parallel aufgebaut werden kön-

nen: Hat man mathematische Präzisierungen für die Konzepte Gerade, Mittelpunkt und senkrecht, so kann man daraus die Intuition einer Mittelsenkrechten in der angegebenen Weise umsetzen.⁶⁵

Aus diesen Beobachtungen ergeben sich zusammen mit den in Abschnitt 3.3 ausgearbeiteten Entwurfsprinzipien für eine Fachveranstaltung, die zur Überwindung der zweiten Diskontinuität beitragen soll, Konsequenzen für die *lehr-lernbezogene Strukturierung*: Die *Orientierung an der Fachsystematik* impliziert einen rigorosen axiomatischen Aufbau der Veranstaltungsinhalte⁶⁶. Die Wahl eines speziellen Aufbaus ist allerdings immer auch eine (begründete) Entscheidung gegen andere Möglichkeiten der Axiomatisierung derselben Zieltheorie (z. B. der euklidischen Geometrie)⁶⁷. Für die Umsetzung der *expliziten Professionsorientierung* ist aber wichtig, den gewählten speziellen axiomatischen Aufbau nicht überzubewerten, da für viele Inhalte der Schulmathematik die durch unterschiedliche Axiomatisierungen bedingten Begriffswelten in gewisser Weise konvergieren: So ist es für die Nutzung von Kongruenzsätzen zur Bearbeitung von Problemen der Dreiecksgeometrie nicht relevant, ob die Beweise dieser Sätze im Rahmen der Hilbert-Axiomatik oder im Rahmen der Saccheri-Ebene geführt wurden.

Zusammengefasst: Lehramtsstudierende sollten Inhalte des Mathematikunterrichts einerseits als Teile fachmathematischer Theorie-Gebäude verstehen, andererseits aber auch wesentliche (generische) Charakteristika dieser Inhalte Axiomensystem-unabhängig im Sinne einer intellektuellen Ökonomie und einer didaktischen Reduktion kennen. Diese Anforderung möchte ich mit den *Schnittstellenaspekten* erfüllen. Diese sind das Ergebnis induktiver fachwissenschaftlich-didaktischer Analysen von Zugängen (im Sinne von Definitionsmöglichkeiten) zu und Eigenschaften (im Sinne zentralen mathematischen Aussagen) von einem mathematischen Konzept unter besonderer Berücksichtigung der Rolle, die das Konzept im Mathematikunterricht spielt. In dieser Weise stellen Schnittstellenaspekte eine aus professionsorientierter Sicht reflektierte Systematisierung einer mathematischen Theorie dar, die fachliche Charakterisierungen und wichtige Eigenschaften von einem speziellen Axiomensystem löst.⁶⁸ Beispiele für Schnittstellenaspekte folgen, wie bereits erwähnt, in den Abschnitten 13.1.2 (für den Kongruenzbegriff) und 14.1.2 (für den Symmetriebegriff). In Kapitel 15 werde ich die hier dargestellten allgemeinen Erklärungen noch einmal vor dem Hintergrund dieser Beispiele aufgreifen.

12.2.2 Schnittstellenlerngelegenheiten (weiter) entwickeln

Bei der (Weiter-)Entwicklung von Schnittstellenlerngelegenheiten geht es um die Gestaltung der in Kapitel 8 vorgestellten Veranstaltungselemente *Schnittstellen-ePortfolio* (Abschnitt 8.1) und *Schnitt-*

⁶⁵In meinem Argument schreibe ich den Intuitionen, die ein Begriff wie *Gerade* über eine präzise Definition hinaus hervorruft, eine Bedeutung zu, die ganz offensichtlich angreifbar für das „Bierseidel“-Argument ist: Hilbert soll einmal im Gespräch in etwa gesagt haben: „Man muss statt ‚Punkten, Geraden und Ebenen‘ jederzeit auch ‚Tische, Stühle und Bierseidel‘ sagen können“ (Scriba & Schreiber, 2010, S. 500). Damit zielt er darauf ab, dass mathematische Begriffe ausschließlich durch Relationen zur mathematischen Theorie, in der sie auftauchen, definiert sind und niemals durch Intuitionen, die mit der verwendeten Bezeichnung verbunden sind. Damit wäre mein obiges Argument aus rein wissenschaftstheoretischer Sicht unzulässig. Allerdings findet man in fast allen Geometrie-Skripten dann doch die üblichen, mit Intuitionen „vorbelasteten“, Bezeichnungen. Damit ist die Frage in der Realität also weniger, ob das definierte mathematische Objekt überhaupt irgend-etwas mit den durch die Bezeichnung suggerierten Intuitionen zu tun hat, sondern vor allem: Welche Intuitionen ruft die Bezeichnung bei mir hervor, die in der mathematischen Theorie tatsächlich zutreffen, auf keinen Fall zutreffen und/oder vielleicht zutreffen?

⁶⁶Für die Veranstaltung *Geometrie für Lehramtsstudierende* wurde dieser Aufbau in Kapitel 7 bzw. Anhang A vorgestellt.

⁶⁷Siehe die umfangreichen Analysen und Vergleiche in Kapitel 9

⁶⁸Ich nutze den Begriff *-aspekt* hier im allgemeinsprachlichen Sinne, bin mir der begrifflichen Nähe zu *Aspekten* im Sinne von Greefrath et al. (2016, S. 16 ff.) aber bewusst. Eine Klärung von Parallelen und Unterschieden der beiden Konzepte steht noch aus, ist aber nicht Teil dieser Arbeit. Insbesondere stellt sich die Frage, ob *Schnittstellenaspekte* dadurch, dass sie eine Systematisierung darstellen, die für professionelles Lehrerhandeln funktional sein soll, nicht näher an *Grundvorstellungen* als an *Aspekten* liegen.

stellenwochen (Abschnitt 8.2), wobei es hier bezogen auf die ePortfolio-Aktivitäten innerhalb der Schnittstellenwochen natürlich Überschneidungen gibt. Es ergeben sich folgende designbezogene Entwicklungsfelder:

- Vorlesungen innerhalb der Schnittstellenwochen
- Präsenzübungen innerhalb der Schnittstellenwochen
- ePortfolio-Aktivitäten innerhalb der Schnittstellenwochen
- ePortfolio-Aktivitäten *zeitlich* außerhalb der Schnittstellenwochen, aber mit *inhaltlichem* Bezug (vor- oder nachbereitend) zur Schnittstellenwoche

Im ersten Durchlauf des Entwicklungsforschungs-Zyklus werden – basierend auf der initialen Spezifizierung und Strukturierung der Schnittstelle – Schnittstellenlerngelegenheiten entwickelt und in den darauf folgenden Zyklen – basierend auf den in der Praxis gemachten Erfahrungen und empirischen Erkenntnissen – überarbeitet.

Analog zu Prediger et al. (2012, S. 454) ist die Entwicklung von Schnittstellenlerngelegenheiten „eine kreative Tätigkeit [. . .], zu der die fachdidaktische Theoriebildung den Rahmen liefert“. Neben den Schnittstellen-spezifischen Einsichten, die durch die Strukturierung und im Rahmen der lokalen Theorien gewonnen wurden, müssen auch übergreifende Wissensbestände zu Lehrmitteln und ihren Einsatzbedingungen sowie generell zum Lernen und zur Gestaltung von Lerngelegenheiten berücksichtigt werden. Unzureichend vorhandene Kenntnisse in diesen Bereichen können im Rahmen des zyklischen Vorgehens sukzessive erweitert werden (Prediger et al., 2012, S. 454).

12.2.3 Schnittstellenlerngelegenheit einsetzen und beforschen

Dieser Arbeitsbereich setzt die für Entwicklungsforschung typischen Design-Experimente um. Diese dienen zur „exemplarischen Erprobung des Lehr-Lernarrangements mit Lernenden, um zu untersuchen, welche Lernprozesse tatsächlich durch sie initiiert werden, und inwieweit diese mit den zuvor angenommenen Lernpfaden übereinstimmen“ (Prediger et al., 2012, S. 455). Hierzu werden passende Forschungsmethoden und -methodologien sowie weitere Hintergrundtheorien hinzugezogen. Bei der ersten Beforschung geht es zunächst darum, ob die Lerngelegenheit grundsätzlich im angestrebten Sinne funktioniert. Je mehr Zyklen durchlaufen werden, desto spezifischer können anschließend die Lerngelegenheit betreffende Phänomene beforscht werden. Auf diese Art und Weise können auch die oben erwähnten, potenziell vorhandenen Lücken (beispielsweise in den Erkenntnissen zur Lernendenperspektive) geschlossen werden.

Die Beforschung findet sowohl auf Ebene der gesamten Lerngruppe, als auch in Form von Fallstudien statt. Auf der Ebene der gesamten Lerngruppe habe ich im Projekt die folgende Daten erhoben:

- *ePortfolio-Bearbeitungen*: Von allen Studierenden werden die im Kontext der Lerngelegenheit entstandenen Arbeitsprodukte eingesammelt. Diese können dann qualitativ ausgewertet werden, um dadurch auf der Ebene der gesamten Lerngruppe die stattfindenden Lernprozesse zu erforschen. Dazu sind einige Lerngelegenheiten in einer Art Pre-Post-Design angelegt: Es wird eine ähnliche Aufgabenstellung vor und nach der entsprechenden Schnittstellenwoche bearbeitet und bei der zweiten Bearbeitung der Lernzuwachs reflektiert.

- *Fragebogen zur Schnittstellenwoche*: Im Anschluss an die Schnittstellenwochen wird ein Akzeptanzfragebogen eingesetzt, in dem die Studierenden die Schnittstellenwoche und deren Einfluss auf ihre Professionalisierung evaluieren und einschätzen.

Dem Konzept von Prediger et al. (2012, S. 455) folgend, führe ich einen Teil der Forschung im Rahmen von Fallstudien durch. Dies bietet den Vorteil, dass sich in diesem Rahmen Lernprozesse besser dokumentieren und auswerten lassen. Dabei erhebe ich folgende Daten:

- *Bearbeitung aufnehmen*: Einzelne Kleingruppen werden bei der Bearbeitung der Schnittstellenlerngelegenheiten in den Präsenzübungen gefilmt. Dies bietet die Möglichkeit, Lernprozesse unverzerrt zu dokumentieren.
- *Leitfrageninterviews über die subjektiven Erfahrungen bei der Bearbeitung*: Retrospektiv werden einzelne Studierende zu ihren Erfahrungen bei der Bearbeitung einzelner ePortfolio-Aktivitäten befragt. Hierdurch können beispielsweise typische Hürden aufgedeckt werden.
- *Leitfrageninterviews über die Akzeptanz der Schnittstelle(nlerngelegenheit)*: Retrospektiv werden einzelne Studierende daraufhin befragt, wie sie die Schnittstelle und die darauf aufbauende Lerngelegenheit wahrgenommen haben. So kann beispielsweise festgestellt werden, inwieweit die Studierenden die gewählte Schnittstelle und den professionsbezogenen Kontext aus ihrer persönlichen Erfahrung heraus als relevant ansehen.

12.2.4 Lokale Theorien (weiter) entwickeln

Basierend auf den Ergebnissen der erhobenen Daten (Abschnitt 12.2.3) können lokale Lehr-Lern-Theorien (weiter) entwickelt werden. Prediger et al. (2012, S. 455) folgend, beinhaltet eine lokale Lehr-Lern-Theorie zur Schnittstellenlerngelegenheit empirisch gestützte Einsichten zu „möglichen Verläufen, eventuellen oder hypothetischen Hürden sowie Bedingungen und Wirkungen“ der Lerngelegenheit. Darüber hinaus sind im Kontext von Schnittstellenaufgaben auch Erkenntnisse über wirksame Arten des Aufgabendesigns und Einschätzungen der Studierenden zur professionalisierungs-bezogenen Nützlichkeit von Interesse. Die genauen Fragestellungen, die im Kontext der beiden Schnittstellenwochen und im Rahmen dieser Arbeit untersucht werden, werden in den jeweiligen Abschnitten präzisiert.

12.3 Schwerpunktsetzungen für die Entwicklungsforschung im Rahmen dieser Arbeit

In vorigen Abschnitt 12.2 habe ich ausgehend vom *Dortmunder Modell zur fachdidaktischen Entwicklungsforschung* (Hußmann et al., 2013) ein zyklisches Vorgehen für die Durchführung von Entwicklungsforschung im Kontext der Implementation professionsorientierter Lerngelegenheiten in mathematischen Fachveranstaltungen entwickelt. Es bildet die Grundlage für die Entwicklung und Erforschung von Schnittstellenlerngelegenheiten im Projekt *SiMpLe-Geo*. Das Gesamtprojekt verfolgt einen Lehrpaxis-nahen und holistischen Ansatz, der sich darin zeigt, dass nicht eine ausgewählte Einzellerngelegenheit im Fokus steht, sondern stets die gesamte Veranstaltung mit ihrem inhaltlichen und methodischen Aufbau im Zusammenspiel mit den Schnittstellenaktivitäten betrachtet

wird. Dieses Vorgehen bietet den Vorteil, dass alle entwickelten und implementierten Innovationen von vorne herein auch unter der Perspektive der praktischen Umsetzbarkeit in der Hochschullehre betrachtet und geprüft werden. Der resultierende Umfang der projektbezogenen Aktivitäten führt aber auch dazu, dass es im Rahmen dieser Arbeit nicht realistisch ist, den Entwicklungsforschungs-Zyklus für die Schnittstellenwochen komplett zu durchlaufen. Umso wichtiger ist es, in dieser Arbeit belastbare Grundlagen zu schaffen, auf denen dann in anschließenden Teilprojekten aufgebaut werden kann; in der Terminologie der Entwicklungsforschung bedeutet das, eine umfassende *Spezifizierung* und *Strukturierung* der Schnittstellen (Schritt 1 des Zyklenmodells, Abschnitt 12.2.1). Dies beinhaltet jeweils die Darstellung des entsprechenden *fachmathematischen Hintergrundes*, die Identifikation von *Schnittstellenaspekten*, eine *fachlich-didaktische Analyse des Schulbezugs*, *Darstellung der Lernendenperspektive* (soweit bekannt) und auf all dem aufbauend eine *Auswahl und Sequenzierung der Inhalte*. Diese Aktivitäten auf der Entwicklungsebene (Abbildung 12.2 auf Seite 150) bilden den Schwerpunkt dieses Teils der Arbeit. Anschließend folgt eine Vorstellung der entwickelten Lerngelegenheiten, unterteilt in *Vorlesung*, *Präsenzübungen* und *ePortfolio-Aktivitäten* (Schritt 2 des Zyklenmodells, Abschnitt 12.2.2).

Alle beim Einsatz der Lerngelegenheiten geplanten Datenerhebungen (Schritt 3 des Zyklenmodells, Abschnitt 12.2.3) wurden durchgeführt und stehen als Grundlage für das (Weiter)Entwickeln lokaler Lehr-Lerntheorien (Schritt 4 des Zyklenmodells, Abschnitt 12.2.4) zur Verfügung. Im Rahmen dieser Arbeit werden zum einen die Fragebögen ausgewertet, die im Anschluss an die Schnittstellenwochen eingesetzt wurden. Dadurch können generelle Einsichten zur Akzeptanz und Bewertung der Schnittstellenwoche sowie zum subjektiv wahrgenommenen Beitrag zur Professionalisierung gewonnen werden. Zum anderen werden die Bearbeitungen ausgewählter ePortfolio-Aktivitäten ausgewertet, die Erkenntnisse über die mathematischen Vorkenntnisse zu den Schnittstellenwochen und damit eine Ausschärfung der *Lernendenperspektive* ermöglichen. In Kapitel 15 werde ich beschreiben, wie darauf aufbauend weitere der zur Verfügung stehenden Daten (z. B. Videos der Präsenzübungen und Leitfrageninterviews; siehe auch Abschnitt 12.2.3) ausgewertet werden können.

Thematisch beschäftigen sich die folgenden beiden Kapitel mit Entwicklungsforschung zu den in Abschnitt 11.1 als geeignet identifizierten Schnittstellenthemen *Kongruenz* (Kapitel 13 und *Symmetrie* (Kapitel 14). Die Schnittstelle *Isometrie* wird in dieser Arbeit nicht vertieft behandelt. Im Rahmen ihrer Masterarbeit hat Dellori (2020) Bearbeitungen von ePortfolio-Aktivitäten zur Schnittstelle *Isometrie* untersucht, in denen die Studierenden mit dynamischer Geometriesoftware gearbeitet haben. Ich werde in Kapitel 15 kurz auf wesentliche Ergebnisse eingehen.

Insgesamt trägt die Umsetzung der in diesem Abschnitt vorgestellten Schwerpunkte zur Beantwortung der Forschungsfragen FF-A.3⁶⁹, FF-B.2⁷⁰ und FF-B.3⁷¹ bei. Die weiteren erhobenen Daten ermöglichen eine weitere Ausschärfung lokaler Lehr-Lern-Theorien zu den Schnittstellen im Sinne von Forschungsfrage FF-B.4⁷²

⁶⁹FF-A.3: Wie können professionsorientierte Lerngelegenheiten (kurz: *Schnittstellenlerngelegenheiten*) im Kontext der Geometrieveranstaltung aussehen, die das Potenzial haben, zur Überwindung der zweiten Diskontinuität beizutragen?

⁷⁰FF-B.2: Welche Lernendenvoraussetzungen haben die Studierenden bezogen auf die geometrischen Konzepte *Kongruenz* und *Symmetrie*?

⁷¹FF-B.3: Wie evaluieren die Studierenden die Gesamtveranstaltung und die speziellen professionsorientierten Lerngelegenheiten (Schnittstellenlerngelegenheiten)?

⁷²FF-B.4: (*Ausblick*) Inwieweit initiieren die professionsorientierten Lerngelegenheiten (Schnittstellenlerngelegenheiten) die durch sie intendierten Lernprozesse? Welche typischen Bearbeitungsprozesse und Hürden können beobachtet werden? (*Die Beantwortung dieser Forschungsfrage wird konsequent mitgedacht, geschieht aber nicht mehr im Rahmen dieser Arbeit.*)

Kapitel 13

Schnittstelle Kongruenz

In Kapitel (Abschnitt 11.1) habe ich bereits ausgeführt, inwieweit ich *Kongruenz* als wesentlichen Begriff der ebenen Geometrie und damit als geeigneten Schwerpunkt für Schnittstellenaktivitäten sehe. Außerdem war *Kongruenz* bereits Bestandteil vergleichender Analysen, bezogen auf den mathematischen Gesamtaufbau der Veranstaltung (Abschnitt 9.7). Dabei habe ich herausgearbeitet, warum ich den verwendeten abbildungsgeometrischen Zugang aus fachlich-didaktischer Perspektive für geeignet halte (Abschnitt 9.9). Aufbauend auf diesen Überlegungen beschreibe ich in diesem Kapitel im Detail Elemente der Entwicklungsforschung zur Schnittstelle *Kongruenz*. Dabei folge ich der in Abschnitt 12.3 beschriebenen Struktur, um die Durchführung des in Abschnitt 12.2 dargestellten Entwicklungsforschungszyklus vorzustellen: Die *Spezifizierung und Strukturierung* der Schnittstelle *Kongruenz* (Abschnitt 13.1) bildet den Schwerpunkt des Kapitels. Darauf folgt ein Überblick über die Gestaltung der Schnittstellenwoche und der zugehörigen Lerngelegenheiten (Abschnitt 13.2). Im Anschluss stelle ich ausgewählte Ergebnisse zur Begleitforschung vor (Abschnitt 13.3) und fasse abschließend den aktuellen Stand der Entwicklungsforschung zur Schnittstelle *Kongruenz* unter besonderer Berücksichtigung des Redesigns der Lerngelegenheiten zusammen (Abschnitt 13.4).

13.1 Spezifizierung und Strukturierung der Schnittstelle

Die *Spezifizierung und Strukturierung* der Schnittstelle *Kongruenz* folgt dem in Abschnitt 12.3 beschriebenen Vorgehen: Zunächst stelle ich den fachmathematischen Hintergrund dar, wie er sich aus der Einbettung in die inhaltliche Gestaltung der Veranstaltung (Kapitel 7) ergibt (Abschnitt 13.1.1), und identifiziere darauf aufbauend *Schnittstellenaspekte* (Abschnitt 13.1.2). Im Anschluss analysiere ich aus fachlich-didaktischer Perspektive die Bedeutung des Kongruenzbegriffs für den aktuellen Mathematikunterricht (Abschnitt 13.1.3) und gehe auf die Perspektive ein, die die Studierenden zu dem Thema mitbringen (Abschnitt 13.1.4). Abschließend findet aufbauend auf den anderen Abschnitten eine erste Auswahl und Sequenzierung von Inhalten zur Schnittstelle *Kongruenz* statt, die zur Förderung fachdidaktischer Urteilskompetenz eingesetzt werden sollen (Abschnitt 13.1.5).

13.1.1 Fachmathematische Hintergründe zur Kongruenz

In diesem Abschnitt stelle ich, eingebettet in den fachmathematischen Aufbau der Veranstaltung *Geometrie für Lehramtsstudierende*, wesentliche fachmathematische Hintergründe zum Kongruenzbegriff vor. Alle folgenden Aussagen gelten in beliebigen Saccheri-Ebenen und damit insbesondere im euklidischen Raum \mathbb{R}^2 , dem schulmathematisch relevanten Fall⁷³. Die Ausführungen stellen eine *Hintergrundtheorie* (vgl. Abschnitt 2.2) zur schulischen Behandlung des Kongruenzbegriffs dar. Ein Teil der Definitionen und Aussagen sind in ähnlicher Weise direkter Bestandteil des Mathematikunterrichts. Hinzu kommen Ergänzungen, die für das Herstellen eines rigorosen Theoriegebäudes notwendig sind, sowie Ausblicke auf mathematische Überlegungen, die „nur einen Schritt“ von den curricular vorgeschriebenen Inhalten des Mathematikunterrichts entfernt sind.

Wie bereits in Abschnitt 9.7 beschrieben, wird Kongruenz von Figuren in der Veranstaltung *Geometrie für Lehramtsstudierende* abbildungsgeometrisch unter Verwendung von Isometrien definiert.

Mathematische Bemerkung 13.1.1 (Definition: Kongruenz)

Seien $F, G \subset X$ Teilmengen (Figuren) in einer Saccheri-Ebene. Wir nennen F **kongruent** zu G (Notation: $F \cong G$), falls es eine Isometrie $\varphi : X \rightarrow X$ mit $\varphi(F) = G$ gibt.

(vgl auch Definition A.7.2 (S. 352))

Durch den Kongruenzbegriff wird eine Relation zwischen zwei Punktmengen (Figuren) beschrieben, die sich als mögliche Formalisierung von „Deckungsgleichheit“ interpretieren lässt.⁷⁴ Dass es sich um einen mathematischen *Gleichheits*-Begriff handelt, spiegelt sich darin wieder, dass Kongruenz eine *Äquivalenzrelation* ist:

Mathematische Bemerkung 13.1.2 (Satz: Kongruenz als Äquivalenzrelation)

Auf der Menge $\mathcal{P}(X)$ aller Figuren einer Saccheri-Ebene (X, d) bildet die Kongruenz „ \cong “ eine Äquivalenzrelation.

Beweis. Da die Identität eine bijektive Isometrie ist, folgt die *Reflexivität*. Seien $F_1, F_2 \subset X$ mit $F_1 \cong F_2$. Dann gibt es nach Definition eine bijektive Isometrie $\varphi : X \rightarrow X$ mit $\varphi(F_1) = F_2$. Diese Abbildung ist umkehrbar und liefert somit die *Symmetrie*. Die *Transitivität* gilt ebenfalls, da bijektive Isometrien unter Verkettung abgeschlossen sind.

□

Mathematische Bemerkung 13.1.2 liefert insbesondere die Möglichkeit, alle Figuren einer Saccheri-Ebene in disjunkte Äquivalenzklassen (Kongruenzklassen) einzuteilen. Jede Kongruenzklasse besteht ausschließlich aus paarweise zueinander kongruenten Figuren, die wiederum zu keiner Figur aus einer anderen Kongruenzklasse kongruent sind. Für den Mathematikunterricht von Bedeutung sind vor allem die Kongruenzklassen von Dreiecken sowie deren eindeutige Festlegung durch eine echte Teilmenge an Größenangaben durch die bekannten Kongruenzsätze (mathematische Bemer-

⁷³Diese schlichte Tatsache klassifiziert den Kongruenzbegriff und den schultypischen Umgang damit als vollkommen unabhängig vom Parallelenaxiom. Die üblichen Kongruenzsätze für Dreiecke gelten in der hyperbolischen Geometrie in gleicher Weise wie in der euklidischen Geometrie. Bemerkenswert!

⁷⁴Auf Formalisierungen zum Begriff „Deckungsgleichheit“ und auf alternative elementarisierte Zugänge zum Kongruenzbegriff gehe ich in Abschnitt 13.1.3 im Detail ein.

kungen 13.1.10 bis 13.1.14). Zuvor werde ich aber in den nachfolgenden Lemmata zunächst Kongruenzklassen bezogen auf einfache geometrische Objekte wie Punkte, Geraden, Strecken und Winkel (Mathematische Bemerkungen 13.1.3 bis 13.1.6) beschreiben. Kongruenzbetrachtungen zu diesen Figuren sind zwar üblicherweise kein Inhalt im Mathematikunterricht, haben aber aus Sicht der rigorosen mathematischen Theoriebildung einen Wert zum einen als instruktive Minimalbeispiele und zum anderen als Argumentationsgrundlage für Kongruenzbetrachtungen für komplexere Figuren, die aus Punkten, Strecken und Winkeln zusammengesetzt sind.

Mathematische Bemerkung 13.1.3 (Lemma: Kongruenzklasse der Punkte)

Die einpunktigen Teilmengen in einer Saccheri-Ebene (X, d) bilden genau eine Kongruenzklasse.

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass alle einpunktigen Figuren in einer Kongruenzklasse liegen. Seien dazu $P, Q \in X$ verschieden. Wir wählen als Isometrie die Punktspiegelung ρ (Definition A.6.2 (S. 347)) am Mittelpunkt (Definition A.6.4 (S. 347)) von P und Q . Dann gilt $\rho(P) = Q$ (nach Satz A.6.7 (S. 348)) und damit auch $\rho(\{P\}) = \{Q\}$. Also ist $\{P\} \cong \{Q\}$. Das zeigt, dass alle einpunktigen Figuren in einer Kongruenzklasse liegen.

Da Isometrien in Saccheri-Ebenen bijektiv sind (Satz A.6.12 (S. 350)), müssen alle zu einer einpunktigen Figur kongruenten Figuren ebenfalls einpunktig sein. Also gibt es in der Kongruenzklasse der einpunktigen Figuren keine weiteren Figuren.

□

Mathematische Bemerkung 13.1.4 (Lemma: Kongruenzklasse der Geraden)

Alle Geraden einer Saccheri-Ebene (X, d) bilden eine gemeinsame Kongruenzklasse.

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass alle metrischen Geraden in einer Kongruenzklasse liegen. Seien dazu $g, k \subset X$ metrische Geraden. Gibt es $P \in g \cap k$ (die Geraden schneiden sich), dann wählen wir zwei verschiedene Punkte $Q_1 \in g$ und $Q_2 \in k$ mit $d(P, Q_1) = d(P, Q_2)$ (Abbildung 13.1, links). Solche Punkte existieren nach Lemma A.2.6 (S. 335), selbst wenn $g = k$ gilt. Dann liegt P auf der Mittelsenkrechten von Q_1 und Q_2 (Ortslinieneigenschaft, Proposition A.6.15 (S. 351)). Für die Spiegelung σ an dieser Mittelsenkrechten gilt dann $\sigma(P) = P$ und $\sigma(Q_1) = Q_2$ und damit $\sigma(g) = k$.

Gilt $g \cap k = \emptyset$, wähle je einen Punkt auf g und auf k und betrachte die Punktspiegelung am Mittelpunkt dieser Punkte (Abbildung 13.1, rechts). Diese führt die Situation auf den ersten Fall zurück. (Wird zusätzlich das Parallelenaxiom gefordert, dann ist die Punktspiegelung nach Korollar A.13.4 (S. 369) bereits die gesuchte Isometrie.) Somit sind alle Geraden zueinander kongruent.

Es bleibt zu zeigen, dass es außer metrischen Geraden keine weiteren Objekte in der Kongruenzklasse gibt. Das gilt, weil in einem metrischen Raum mit Inzidenzaxiom Bilder von Geraden unter Isometrien wieder Geraden sind (Satz A.4.3 (S. 341)).

□

Während alle Punkte und alle Geraden jeweils in genau einer Kongruenzklasse liegen, liefern Strecken und Winkel einfache Beispiele für Typen geometrischer Objekte, die in verschiedene Kongruenzklassen zerfallen. Wie später auch bei den Kongruenzsätzen für Dreiecke, ergibt sich auch hier die Zuordnung zu einer Kongruenzklasse durch den Vergleich geometrischer Eigenschaften: Die Gesamtheit aller Strecken zerfällt entlang des Kriteriums *Streckenlänge* in Kongruenzklassen (mathematische Bemerkung 13.1.5) und die Kongruenzklassen von Winkeln werden durch die Winkelgrößen (mathematische Bemerkung 13.1.6) in eindeutiger Weise bestimmt.

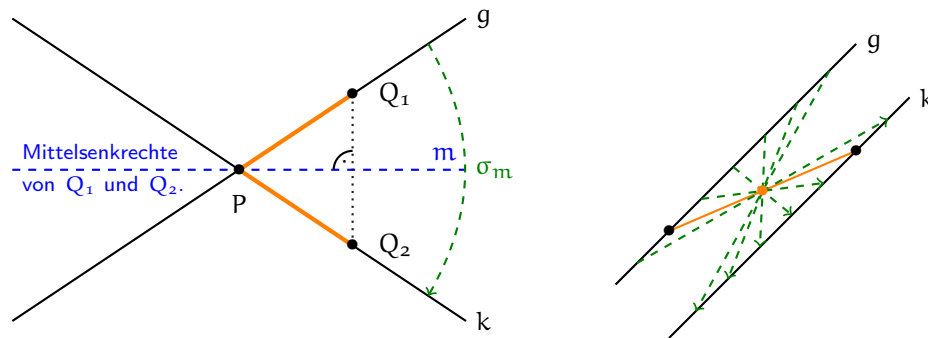


Abbildung 13.1: Beweisskizze zum Lemma über die Kongruenzklassen von Geraden (mathematische Bemerkung 13.1.4). Schneiden sich die beiden Geraden (Fall 1, linke Abbildung), erhält man die gesuchte Isometrie als Geradenspiegelung an der Mittelsenkrechten von zwei Punkten auf den beiden Geraden, die zum Schnittpunkt den gleichen Abstand haben; sind die Gerade parallel (Fall 2, rechte Abbildung), führt die konstruierte Punktspiegelung die Situation mindestens auf Fall 1 zurück. Gilt zusätzlich das Parallelenaxiom, ist die Punktspiegelung bereits eine Möglichkeit für die gesuchte Abbildung.

Mathematische Bemerkung 13.1.5 (Lemma: Kongruenzklassen der Strecken)

In einer Saccheri-Ebene (X, d) bilden Strecken gleicher Länge (Abstand zwischen den Endpunkten) Kongruenzklassen.

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass alle Strecken gleicher Länge in einer Kongruenzklasse liegen. Seien dazu $[P_1, P_2]$, $[Q_1, Q_2]$ Strecken in X mit gleicher Länge (also $d(P_1, P_2) = d(Q_1, Q_2)$). Ohne Einschränkung seien P_1 und Q_1 verschieden. Sei σ_1 die Spiegelung an der Mittelsenkrechten von P_1 und Q_1 . Dann gilt $\sigma_1(P_1) = Q_1$ (Abbildung 13.2). Gilt nun außerdem bereits $\sigma_1(P_2) = Q_2$ sind wir fertig.

Wir betrachten den Fall $\sigma_1(P_2) \neq Q_2$. Dann gilt

$$d(\sigma_1(P_2), Q_1) = d(\sigma_1(P_2), \sigma_1(P_1)) = d(P_2, P_1) = d(Q_2, Q_1).$$

Also liegt $Q_1 = \sigma_1(P_1)$ auf der Mittelsenkrechten von $\sigma_1(P_2)$ und Q_2 (Ortslinieneigenschaft, Satz A.6.15 (S. 351)) und ist damit invariant unter der Spiegelung σ_2 an dieser Mittelsenkrechten. Damit bildet die Isometrie $\sigma_2 \circ \sigma_1$ die beiden Strecken $[P_1, P_2]$ und $[Q_1, Q_2]$ aufeinander ab. Sie liegen also in der selben Kongruenzklasse.

Unterschiedlich lange Strecken liegen auf keinen Fall in der selben Äquivalenzklasse, da es keine Isometrie geben kann, die die Endpunkte der längeren der beiden Strecken auf Punkte der anderen Strecke abbilden kann.

Es bleibt zu zeigen, dass es außer Strecken keine weiteren Objekte in den Kongruenzklassen gibt. Dies gilt, weil das Bild einer Strecke unter einer Isometrie immer eine Strecke sein muss, da sich die definitionsgemäße Abstands-Additivität (Definition A.4.4) der Urbildpunkte durch die Isometrie auf das Bild überträgt.

□

Mathematische Bemerkung 13.1.6 (Lemma: Kongruenzklassen von Winkeln)

In einer Saccheri-Ebene (X, d) bilden alle Winkel mit gleicher Größe eine Kongruenzklasse.

Beweis. Nach Lemma A.8.3 sind zwei Winkel genau dann kongruent, wenn Sie gleich groß sind. Wieder bleibt zu zeigen, dass es außer Winkeln keine anderen Objekte in den Kongruenzklassen gibt. Dazu benötigen

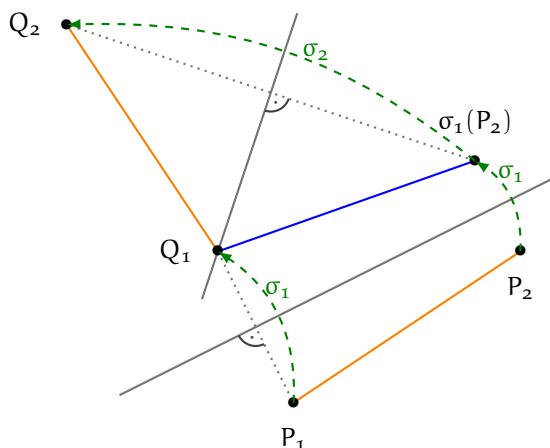


Abbildung 13.2: Beweisskizze zum Lemma über die Kongruenzklassen von Strecken (mathematische Bemerkung 13.1.5). Zunächst wird mit σ_1 an der Mittelsenkrechten von P_1 und Q_1 gespiegelt, dann mit σ_2 an der Mittelsenkrechten von $\sigma_1(P_2)$ und Q_2 . Der Punkt $\sigma_1(P_1) = Q_1$ ist invariant unter σ_2 , da er wegen der Ortslinieneigenschaft auf der Spiegelgeraden liegt.

wir nur die Definition, dass ein Winkel durch zwei Strahlen mit gleichem Ursprung definiert ist (A.8.1 (S. 354)). Dann sind analog zum Argument in der mathematischen Bemerkung 13.1.4 die Bilder ebenfalls Strahlen mit gleichem Ursprung, also ein Winkel.

□

Diese einfachen Beispiele für Kongruenzklassen geometrischer Objekte spielen im Mathematikunterricht keine wesentliche Rolle und werden, so sie denn vorkommen, als „offensichtlich“ dargestellt. Sehr relevant ist hingegen das Thema *Kongruenz* im Kontext von Dreiecken und den damit verbundenen Kongruenzsätzen. In Abschnitt 13.1.3 (speziell S. 179 ff.) analysiere ich diese Relevanz im Detail; im Folgenden kläre ich den mathematischen Hintergrund. Nach einer fachlichen Klärung des Begriffs *Dreieck* (mathematische Bemerkung 13.1.7) werde ich zunächst nachweisen, dass Kongruenzklassen von Dreiecken stets ausschließlich Dreiecke mit gleichen Kantenlängen und gleichen Winkelgrößen enthalten (Mathematische Bemerkung 13.1.10). Während bei den bisherigen Beispielen für Kongruenzklassen geometrischer Objekte die Kenntnis über die Gleichheit *einer* bestimmten Größe (z. B. der Abstand zwischen den Endpunkten einer Strecke) notwendig und hinreichend für das Vorliegen von Kongruenz war, gibt es für Dreiecke verschiedene Konstellationen gegebener Größen, die Kongruenzklassen bereits in eindeutiger Weise beschreiben. Das ist der Inhalt der bekannten Kongruenzsätze (Mathematische Bemerkungen 13.1.11 bis 13.1.14).

In der Veranstaltung *Geometrie für Lehramtsstudierende* wurde ein *Dreieck* einfach als eine Menge von drei nicht kollinearen Punkten definiert (mathematische Bemerkung 13.1.7, vgl. auch Definition A.7.1 (S. 352)).

Mathematische Bemerkung 13.1.7 (Definition: Dreieck)

Seien (X, d) eine Saccheri-Ebene und $A, B, C \in X$ drei Punkte. Liegen die drei Punkte nicht auf einer Geraden, so bilden sie ein **Dreieck** $\triangle ABC$.

Die Punkte A , B und C heißen die **Ecken** des Dreiecks; die Strecken $[A, B]$, $[B, C]$ und $[C, A]$ heißen die **Seiten** des Dreiecks.

Damit wird ein Dreieck mit seinen Eckpunkten identifiziert. Im Mathematikunterricht wird unter einem Vieleck im Allgemeinen und einem Dreieck im Speziellen allerdings in der Regel eine „flächige Figur“ mit Ecken, Kanten und einem Flächeninhalt verstanden. In der mathematischen Bemerkung 13.1.8 gebe ich eine mögliche mathematische Präzisierung dieser Sichtweise an und begründe im Anschluss didaktische Nachteile dieses scheinbar anschaulicheren Zugangs.

Mathematische Bemerkung 13.1.8 (Definition: Flächiges Dreieck)

Sei (X, d) eine Saccheri-Ebene. Eine abgeschlossene Teilmenge $D \subset X$ heißt **Dreieck**, wenn sie konvex (\star) ist und genau drei Extrempunkte $(\star\star)$ besitzt. Die Extrempunkte nennen wir die **Eckpunkte** (kurz: **Ecken**) von D und die Strecken, die die Eckpunkte miteinander verbinden, nennen wir die **Kanten** von D . Das **Innere** von D bezeichnet die Menge D ohne die Ecken und Kanten.

Hat ein Dreieck $D \subset X$ die Eckpunkte $A, B, C \in X$, dann nennen wir die Winkel (vgl. Definition A.8.1 (S. 354) $\angle ABC$, $\angle BCA$ und $\angle CAB$ die **Innenwinkel** von D .

(\star) $M \subset X$ heißt **konvex** genau dann, wenn für alle paarweise verschiedenen $A, B \in M$ auch $[A, B] \subset M$ ist.

$(\star\star)$ Ein **Extrempunkt** einer konvexen Menge $M \subset X$ ist ein Punkt $E \in M$ mit der Eigenschaft: $\forall A, B \in M : E \notin]A, B[$.

Die Forderung von *Abgeschlossenheit* in der mathematischen Bemerkung 13.1.8 ist sehr wichtig, da ansonsten die Menge D keinesfalls durch die drei Extrempunkte bestimmt ist (Abbildung 13.3).

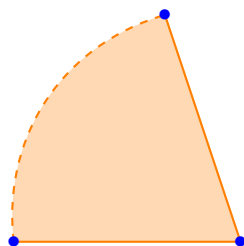


Abbildung 13.3: Verzichtet man in der mathematischen Bemerkung 13.1.8 auf die Forderung von *Abgeschlossenheit* wäre auch diese Menge (der gestrichelte Rand gehört nicht zur Menge) ein Dreieck im Sinne der Definition. Sie ist konvex und hat genau drei Extrempunkte.

Für den weiteren mathematischen Umgang mit dem Objekt *Dreieck* ist die Definition aus der mathematischen Bemerkung 13.1.8 eher umständlich. Abhilfe schafft die (im anderen Zugang definitorisch angelegte) Identifizierung des Dreiecks mit seinen Eckpunkten. Dabei ist die eine Argumentationsrichtung einfach: In der mathematischen Bemerkung 13.1.9 wird gezeigt, dass die Eckpunkte eines Dreiecks im Sinne der mathematischen Bemerkung 13.1.8 niemals kollinear sind.

Mathematische Bemerkung 13.1.9 (Korollar: Nicht-Kollinearität der Eckpunkte)

Sei (X, d) eine Saccheri-Ebene und $D \subset X$ ein Dreieck im Sinne der mathematischen Bemerkung 13.1.8 mit Eckpunkten $A, B, C \in X$. Dann sind A, B, C nicht kollinear.

Beweis. Wären A, B, C kollinear, dann müsste ohne Einschränkung B zwischen A und C liegen (im Sinne der zwischen-Relation aus Definition A.2.8 (S. 336)), was aber der Extremität von B widerspricht. Widerspruch.

□

Das didaktische Problem entsteht bei der Umkehrung. Gezeigt werden muss, dass die in der mathematischen Bemerkung 13.1.8 beschriebene Menge bereits eindeutig durch die drei (nicht kollinearen) Eckpunkte bestimmt ist. Dazu muss entweder bewiesen werden, dass die Kanten des Dreiecks genau der (topologische) Rand sind, also dass jeder Punkt im Inneren des Dreiecks auf der selben Seite jeder Gerade durch zwei Eckpunkte liegt, wie der jeweils dritte Eckpunkt, oder aber ein topologisches Argument aus einer Analysis-Veranstaltung genutzt werden. Ich möchte zumindest in Frage stellen, ob es sich lohnt, diese didaktische Hürde in Kauf zu nehmen, nur damit die Definition des Dreiecks etwas schulnäher ist.

Bevor ich nun im Einzelnen beweise, durch welche Größen Kongruenzklassen von Dreiecken bereits eindeutig charakterisiert werden können, zeige ich zunächst, dass umgekehrt die Kongruenzklasse eines Dreiecks nur aus anderen Dreiecken besteht, die in allen Seitenlängen und Größen der Innenwinkel übereinstimmen.

Mathematische Bemerkung 13.1.10 (Proposition: Kongruenzklassen von Dreiecken)

Die Kongruenzklasse eines Dreiecks in einer Saccheri-Ebene (X, d) besteht ausschließlich aus Dreiecken mit gleichen Kantenlängen und gleichen Winkelgrößen.

Beweis. Seien $D \subset X$ ein Dreieck mit Eckpunkten $A, B, C \in X$ sowie φ eine beliebige Isometrie. Nach der mathematischen Bemerkung 13.1.9 liegen die drei Punkte nicht auf einer metrischen Geraden und es gilt die strikte Dreiecksungleichung (Satz A.4.2 (S. 339)). Diese gilt in gleicher Weise auch für die zugehörigen Bildpunkte bezüglich φ . Also liegen $\varphi(A), \varphi(B), \varphi(C)$ (wieder nach der strikten Dreiecksungleichung) ebenfalls nicht auf einer metrischen Gerade und bilden somit ein Dreieck. Nach der mathematischen Bemerkung 13.1.5 (Kongruenzklassen der Strecken) werden außerdem die Seiten des Urbild-Dreiecks auf die (gleichlangen!) Seiten des Bilddreiecks abgebildet. Damit sind insbesondere die durch die Seiten festgelegten Winkel kongruent und nach der mathematischen Bemerkung 13.1.6 (Kongruenzklassen der Winkel) paarweise gleich groß. □

Die mathematische Bemerkung 13.1.10 erlaubt noch keine Aussage darüber, ob umgekehrt auch aus der Größengleichheit zweier Dreiecke bereits die Kongruenz folgt. Dies trifft in der Tat zu und wie die folgenden Kongruenzsätze zeigen, reicht bereits die Kenntnis über die Gleichheit von drei Größen in bestimmten Konstellationen aus.

Mathematische Bemerkung 13.1.11 (Kongruenzsatz SSS)

In einer Saccheri-Ebene (X, d) liegen zwei Dreiecke genau dann in der selben Kongruenzklasse, wenn sie in allen drei Seitenlängen (paarweiser Abstand zwischen den Eckpunkten) übereinstimmen.

Beweis. Liegen zwei Dreiecke in der selben Kongruenzklasse, folgt die Gleichheit der Seitenlängen unmittelbar aus der mathematischen Bemerkung 13.1.10.

Seien nun $\triangle ABC$ und $\triangle RST$ zwei Dreiecke in einer Saccheri-Ebene (X, d) , für die (bis auf Umbenennung) die folgenden Gleichheiten gelten:

$$d(A, B) = d(R, S), \quad d(A, C) = d(R, T) \quad \text{und} \quad d(B, C) = d(S, T).$$

Um die Kongruenz zu zeigen, konstruieren wir eine Isometrie $\varphi : X \rightarrow X$ mit $\varphi(A) = R$, $\varphi(B) = S$ und $\varphi(C) = T$ (siehe auch Abbildung 13.4).

Schritt 1: (Falls $A \neq R$) Wir betrachten zunächst die Spiegelung $\sigma_{m_{AR}}$ an der Mittelsenkrechten von A und R . Dann gilt $\sigma_{m_{AR}}(A) = R$ und wir definieren $\sigma_{m_{AR}}(B) =: B'$ sowie $\sigma_{m_{AR}}(C) =: C'$.

Im Fall $A = R$ setzen wir $\sigma_{m_{AR}} = \text{id}$.

Auf diese Weise erhalten wir ein neues Dreieck $\triangle RB'C'$, das in (mindestens) einem Punkt mit $\triangle RST$ übereinstimmt.

Schritt 2: (Falls $B' \neq S$) Wir betrachten die Spiegelung $\sigma_{m_{B'S}}$ an der Mittelsenkrechten von B' und S . Dann gilt $\sigma_{m_{B'S}}(B') = S$ und wir definieren $\sigma_{m_{B'S}}(C') =: C''$. Außerdem gilt $\sigma_{m_{B'S}}(R) = R$, denn

$$d(R, B') = d(\sigma_{m_{AR}}(A), \sigma_{m_{AR}}(B)) = d(A, B) = d(R, S) \Rightarrow R \in m_{B'S}.$$

Im Fall $B' = S$ setzen wir $\sigma_{m_{B'S}} = \text{id}$.

Auf diese Weise erhalten wir ein neues Dreieck $\triangle RSC''$, das in (mindestens) zwei Punkten mit $\triangle RST$ übereinstimmt.

Schritt 3: (Falls $C'' \neq T$) Wir betrachten die Spiegelung $\sigma_{m_{C''T}}$ an der Mittelsenkrechten von C'' und T . Dann gilt $\sigma_{m_{C''T}}(C'') = T$. Außerdem gelten $\sigma_{m_{C''T}}(R) = R$ und $\sigma_{m_{C''T}}(S) = S$, denn

$$d(R, C'') = d(\sigma_{m_{B'S}}(\sigma_{m_{AR}}(A)), \sigma_{m_{B'S}}(\sigma_{m_{AR}}(C))) = d(A, C) = d(R, C)$$

$$d(S, C'') = d(\sigma_{m_{B'S}}(\sigma_{m_{AR}}(B)), \sigma_{m_{B'S}}(\sigma_{m_{AR}}(C))) = d(B, C) = d(S, C)$$

$$\Rightarrow R, S \in m_{C''T}.$$

Im Fall $C'' = T$ setzen wir $\sigma_{m_{C''T}} = \text{id}$.

Auf diese Weise erhalten wir das Dreieck $\triangle RST$.

Insgesamt haben wir also mit $\varphi = \sigma_{m_{C''T}} \circ \sigma_{m_{B'S}} \circ \sigma_{m_{AR}}$ eine Abbildung gefunden für die $\varphi(A) = R$, $\varphi(B) = S$ und $\varphi(C) = T$ gilt. Damit ist die Kongruenz der beiden Dreiecke gezeigt. \square

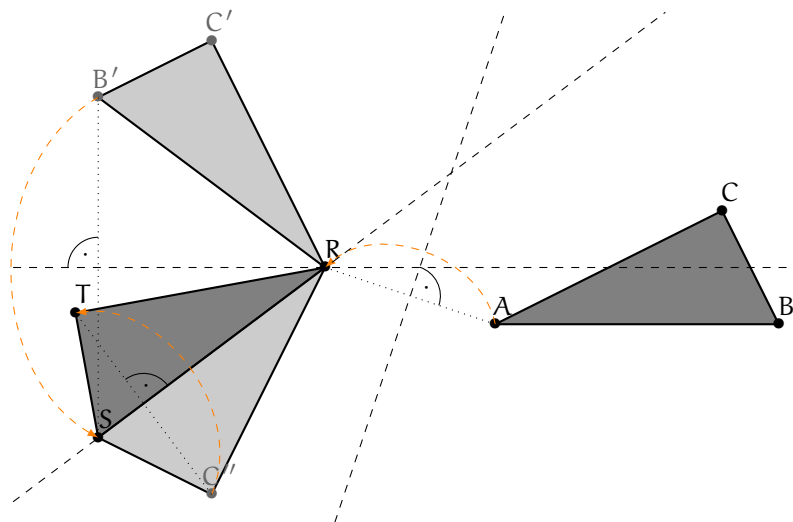


Abbildung 13.4: Beweisskizze zur mathematischen Bemerkung 13.1.11. Für den Beweis des Kongruenzsatzes SSS wird das Dreieck $\triangle ABC$ durch systematisches Spiegeln an Mittelsenkrechten in $\triangle RST$ überführt.

Mathematische Bemerkung 13.1.12 (Kongruenzsatz SWS)

In einer Saccheri-Ebene (X, d) liegen zwei Dreiecke genau dann in der selben Kongruenzklasse, wenn sie in zwei Seitenlängen und der Größe des von diesen Seiten eingeschlossenen Winkels übereinstimmen.

Beweis. Liegen zwei Dreiecke in der selben Kongruenzklasse, folgt die Gleichheit der Seitenlängen und Winkelgrößen unmittelbar aus der mathematischen Bemerkung 13.1.10.

Seien nun $\triangle ABC$ und $\triangle RST$ zwei Dreiecke in einer Saccheri-Ebene (X, d) , für die (bis auf Umbenennung) die folgenden Gleichheiten gelten:

$$d(A, B) = d(R, S), \quad \angle BAC = \angle SRT \quad \text{und} \quad d(A, C) = d(R, T).$$

Aus $\angle BAC = \angle SRT$ folgt mit der mathematischen Bemerkung 13.1.6 sofort die Kongruenz von $\angle BAC$ und $\angle SRT$. Seien b_+ und c_+ die Schenkel von $\angle BAC$, die durch B bzw. C gehen und entsprechend s_+ und t_+ die Schenkel von $\angle SRT$, die durch S bzw. T gehen. Nach Definition gibt es nun $\varphi : X \rightarrow X$ so, dass $\varphi(b_+) = s_+$ und $\varphi(c_+) = t_+$. Insbesondere gilt $\varphi(A) = R$ (siehe Abbildung 13.5).

Nun muss $\varphi(B)$ ein Punkt auf s_+ sein, der den gleichen Abstand zu R hat, wie B zu A. Es gibt aber auf einem Strahl nur genau einen solchen Punkt, nämlich S. Damit folgt $\varphi(B) = S$ und völlig analog auch $\varphi(C) = T$. Damit sind die beiden Dreiecke kongruent. \square

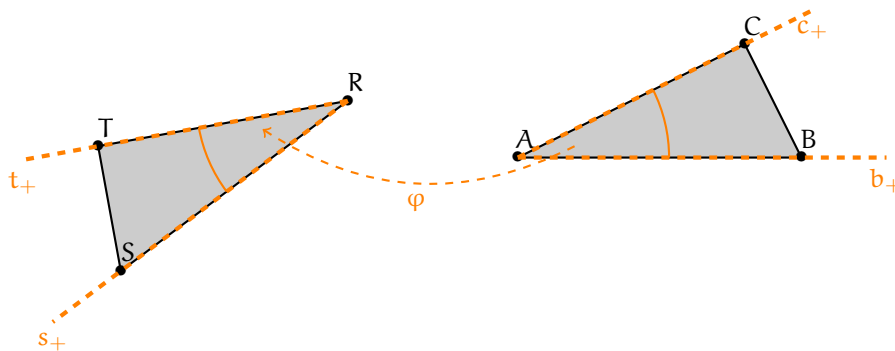


Abbildung 13.5: Beweisskizze zu den mathematischen Bemerkungen 13.1.12 und 13.1.13. Die Kongruenz der gegebenen Winkel liefert die Isometrie, die die Grundlage für die weitere Argumentation bildet.

Mathematische Bemerkung 13.1.13 (Kongruenzsatz WSW)

In einer Saccheri-Ebene (X, d) liegen zwei Dreiecke genau dann in der selben Kongruenzklasse, wenn sie in einer Seitenlänge und den Größen der an diese Seite anliegenden Winkel übereinstimmen.

Beweis. Liegen zwei Dreiecke in der selben Kongruenzklasse, folgt die Gleichheit der Seitenlängen und Winkelgrößen unmittelbar aus der mathematischen Bemerkung 13.1.10.

Seien nun $\triangle ABC$ und $\triangle RST$ zwei Dreiecke in einer Saccheri-Ebene (X, d) , für die (bis auf Umbenennung) die folgenden Gleichheiten gelten:

$$\angle BAC = \angle SRT, \quad d(A, B) = d(R, S) \quad \text{und} \quad \angle CBA = \angle TSR.$$

Aus der Gleichheit der Winkelgrößen folgt mit der mathematischen Bemerkung 13.1.6 die Kongruenz der Winkel. Insbesondere gibt es also eine Isometrie $\varphi : X \rightarrow X$, die $\angle BAC$ auf $\angle SRT$ abbildet und für die $\varphi(A) = R$ gilt (siehe wieder Abbildung 13.5).

$\varphi(B)$ ist nun ein Punkt auf dem Schenkel mit Ursprung R , der durch S geht und von R den Abstand $d(A, B) = d(R, S)$ hat. Also gilt $\varphi(B) = S$. Somit wird der Strahl von B durch A auf den Strahl von S durch R abgebildet. Der Strahl von B durch C wird auf einen Strahl auf der selben Seite von der Geraden durch R und S , wie T mit Ursprung S abgebildet, so dass der mit dem Strahl durch S und R eingeschlossene Winkel gleichgroß wie $\angle TSR$ ist. Damit muss nach Lemma A.8.4 der Strahl durch S und $\varphi(C)$ gleich dem Strahl durch S und T sein. Damit gilt $\varphi(C) = T$ als der eindeutige Schnittpunkt der Strahlen und es folgt die Kongruenz. \square

Mathematische Bemerkung 13.1.14 (Kongruenzsatz SsW)

In einer Saccheri-Ebene (X, d) liegen zwei Dreiecke genau dann in der selben Kongruenzklasse, wenn sie in zwei Seitenlängen und der Größe des Winkels, der gegenüber der längeren dieser beiden Seiten liegt, übereinstimmen.

Beweis. Liegen zwei Dreiecke in der selben Kongruenzklasse, folgt die Gleichheit der Seitenlängen und Winkelgrößen unmittelbar aus der mathematischen Bemerkung 13.1.10.

Seien nun $\triangle ABC$ und $\triangle RST$ zwei Dreiecke in einer Saccheri-Ebene (X, d) , für die (bis auf Umbenennung) die folgenden Gleichheiten gelten:

$$d(A, C) = d(R, T), \quad d(B, C) = d(S, T)$$

und

$$\begin{cases} \angle BAC = \angle SRT, & \text{falls } d(A, C) \leq d(B, C), \\ \angle CBA = \angle TSR, & \text{falls } d(A, C) > d(B, C). \end{cases}$$

Ohne Einschränkung betrachten wir den Fall $d(A, C) \leq d(B, C)$, also $\angle BAC = \angle SRT$. Aus der Gleichheit der Winkelgrößen folgt mit der mathematischen Bemerkung 13.1.6 die Kongruenz von $\angle BAC$ und $\angle SRT$. Insbesondere gibt es also eine Isometrie $\varphi : X \rightarrow X$, die die beiden Winkel mit $\varphi(A) = R$ aufeinander abbildet. Es gilt $\varphi(C) = T$, da beide Punkte durch ihren Abstand zum jeweiligen Winkelzentrum eindeutig auf dem Winkelstrahl festgelegt sind (siehe Abbildung 13.6).

Es bleibt zu zeigen, dass $\varphi(B) = S$ ist. Seien g die Gerade durch R und S und $g_+ \subset g$ der Strahl mit Ursprung R , der den Winkelschenkel bildet. Wir wissen, dass $\varphi(B) \in g_+$ und $d(\varphi(B), T) = d(B, C)$ gelten. Also liegt $\varphi(B)$ im Schnitt des Kreises $K_\alpha(T)$ um T mit Radius $\alpha := d(B, C)$ und dem Strahl g_+ .

Nach Voraussetzung und der Definition der orthogonalen Projektion (Definition A.5.4 (S. 344)) gilt

$$d(S, T) = d(B, C) \geq d(A, C) = d(R, T) > d(T, T^g).$$

Damit schneidet nach Satz A.9.9 (S. 359) der Kreis $K_\alpha(T)$ die Gerade g außer in S (wegen $d(S, T) = d(B, C) = \alpha$ nach Voraussetzung) noch in einem weiteren Punkt U . Wegen $d(R, T) = d(A, C) \leq d(B, C) = d(S, T) = d(U, T)$ folgt mit dem zweiten Teil von A.9.9 (S. 359) (Schnittintervall der Kreisscheibe mit der Gerade), dass genau einer der Punkte auf g_+ liegt. Somit bleibt $\varphi(B) = S$, was die Kongruenz beweist. \square

Die Kongruenz von Vierecken ist in gewisser Weise das sich an die Behandlung der Kongruenz von Dreiecken anschließende Thema. Im Mathematikunterricht ist es zwar nicht verpflichtend, kommt aber gelegentlich in einzelnen Aufgaben vor (bspw. S. 195). In der Tat ist das Finden von Kongruenz-

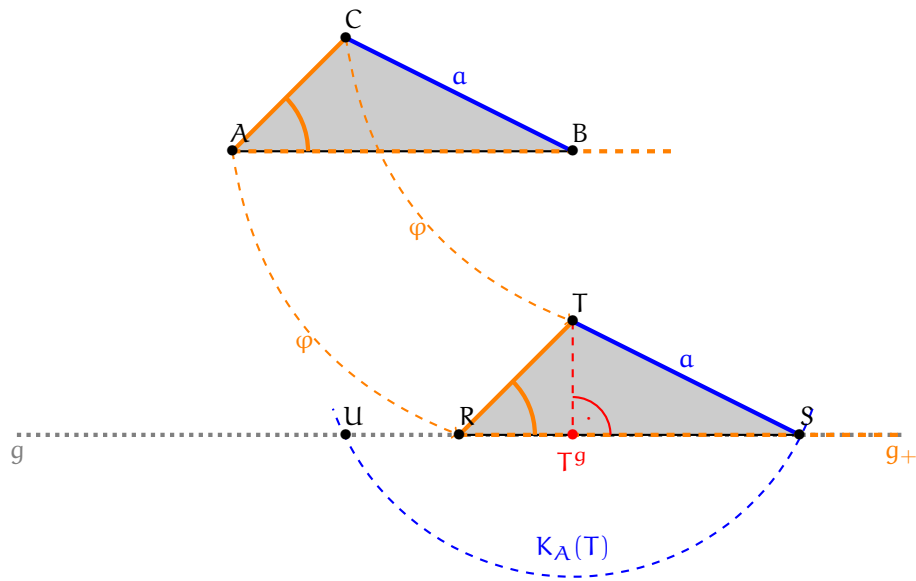


Abbildung 13.6: Beweisskizze zur mathematischen Bemerkung 13.1.14. Zentral für den Nachweis der Kongruenz ist die Lage der Schnittpunkte zwischen Gerade und Kreis.

sätzen für Vierecke um ein Vielfaches komplexer als das Finden von Kongruenzsätzen für Dreiecke. Ich werde das Thema in dieser Arbeit nicht systematisch behandeln, sondern nur einige grundlegende Überlegungen für die euklidische Ebene anstellen, aus denen die Komplexität ersichtlich wird. Weiterführende und systematische Ausführungen findet man zum Beispiel bei Vance (1982) oder Laudano und Vincenzi (2017).

Zunächst kann schnell festgestellt werden, dass es keine kanonische Erweiterung der Dreiecks-Kongruenzsätze auf Kongruenzsätze für Vierecke gibt, indem schlicht eine weitere Größenangabe hinzugefügt wird. Dies funktioniert weder für SSS(S) (Abbildung 13.7) noch für SWS(W) (Abbildung 13.8).

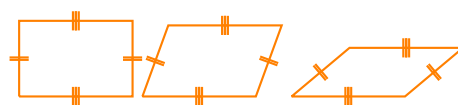


Abbildung 13.7: Gegenbeispiel für die Gültigkeit eines Kongruenzsatzes SSSS für Vierecke.

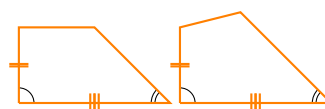


Abbildung 13.8: Gegenbeispiel für die Gültigkeit eines Kongruenzsatzes SWSW für Vierecke.

Versucht man, den Kongruenzsatz auf fünf Größen aufzubauen, erhält man unter Hinzunahme einer Diagonalenlänge einen vielversprechenden Kandidaten (SSSSD), da dann die in Abbildung 13.7 angedeutete „Bewegung“ des Vierecks und die damit einhergehende Änderung der Diagonalenlänge nicht mehr möglich ist. Allerdings gilt SSSSD nur dann, wenn zum einen die Reihenfolge bzw.

Anordnung der Seiten festgelegt wird, und zum anderen nur konvexe Vierecke betrachtet werden (Abbildung 13.9).

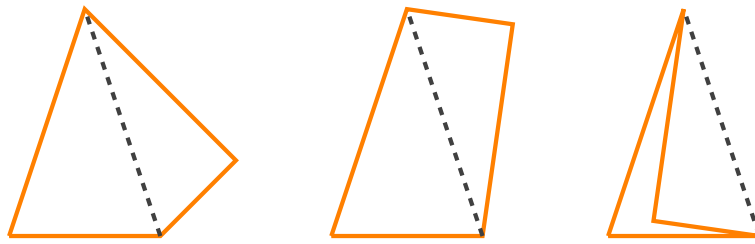


Abbildung 13.9: Verzichtet man auf eine feste Anordnung der Seiten (Mitte) und/oder die Forderung von Konvexität (rechts), folgt aus der Übereinstimmung in allen Seitenlängen und der Länge einer Diagonale noch nicht die Kongruenz.

Geht man von einer festen Reihenfolge der Seiten aus und beschränkt sich auf konvexe Vierecke, dann ist der Kongruenzsatz SSSSD in der Tat korrekt, was unmittelbar aus zweimaliger Anwendung von SSS folgt. Unter den gleichen Bedingungen treffen dann auch beispielsweise die Kongruenzsätze SWSWS und WSWSW zu. Für die Beweise kann man ebenfalls auf die Kongruenzsätze für Dreiecke und auf den Innenwinkelsummensatz für Vierecke zurückgreifen.

13.1.2 Schnittstellenaspekte zum Kongruenzbegriff

In diesem Abschnitt möchte ich den beschriebenen fachlichen Hintergrund in Form von vier Schnittstellenaspekten (vgl. Abschnitt 12.2.1) systematisieren.

Kongruente Figuren stimmen in verschiedenen geometrischen Größen überein. Dazu gehören Längen, Winkel, Flächen⁷⁵ und Teilverhältnisse. Garantiert wird dies durch die zu zwei kongruenten Figuren definitionsgemäß existierende Isometrie (Mathematische Bemerkung 13.1.1 (S. 158)). Dies gilt explizit nicht nur für den Rand der Figur und den Abstand zwischen Eckpunkten, sondern auch für die Maße weiterer, aus der Figur konstruierbarer Objekte (Diagonalen, Schnittpunkte, In- und Umkreise, ...) und ihren Entsprechungen in der kongruenten Figur. Ich bezeichne diese Sichtweise auf den Kongruenzbegriff als den *Größenaspekt* der Kongruenz.

Während der Größenaspekt den statisch-vergleichenden Charakter der Kongruenzrelation betont, stellt die Definition (mathematische Bemerkung 13.1.1 (S. 158)) zusammen mit dem Dreispiegelungssatz (Korollar A.7.5 (S. 353)) auch eine dynamische Sichtweise bereit: Ist eine Figur zu einer anderen Figur kongruent, so kann erstere stets durch eine Isometrie in die zweite überführt werden. Diese Isometrie kann durch die Verknüpfung von maximal drei Geradenspiegelungen ausgedrückt werden und ist durch drei nicht kollineare Punkte bereits eindeutig festgelegt (Korollar A.7.4 (S. 353)). Anders gesagt: Kennt man die Wirkung einer Isometrie auf die Eckpunkte eines Dreieck, so kennt man bereits die ganze Isometrie. Im euklidischen Raum \mathbb{R}^2 können kongruente Figuren immer durch genau eine Schubspiegelung (insb. Spiegelung), genau eine Rotation (insb. Identität)

⁷⁵Mir ist kein einfaches Vorgehen bekannt, um Flächeninhalte (insb. von Dreiecken) in einer neutralen Geometrie (wie der Saccheri-Ebene) zu definieren und zu untersuchen. Fordert man zusätzlich das Parallelenaxiom (euklidische Ebene) oder seine Negation (hyperbolische Ebene), lässt sich in beiden Fällen ein Flächeninhaltsbegriff für Dreiecke umsetzen, der – wie gewünscht – unter Isometrien invariante Flächenmaße liefert. In der euklidischen Ebene kann man den Flächeninhalt eines Dreiecks über die bekannte Vorschrift „Halbe Seite mal zugehörige Höhe“ ausrechnen. Es bleibt zu zeigen, dass diese Definition wohldefiniert bezogen auf die Auswahl der Seite ist. In der hyperbolischen Geometrie kann ein Flächeninhalt für Dreiecke über den *Winkeldefekt* (Differenz der Innenwinkelsumme zu π) beschrieben werden (Dellori, 2018, S. 66, Satz 5.3.7).

oder genau eine Translation ineinander überführt werden. Ich bezeichne diese Eigenschaft als *Abbildungsaspekt* der Kongruenz. Diese Sichtweise ist besonders dann wertvoll, wenn man die Kongruenz mittels Kongruenzsätzen nachgewiesen hat. Automatisch weiß man dann bereits um die Existenz einer Abbildung, die die eine Figur in die andere überführt.

Satz 13.1.2 liefert, dass diese Relation sogar eine Äquivalenzrelation ist. Damit gelten automatisch die folgenden Eigenschaften:

- Die *Reflexivität* liefert, dass jede Figur kongruent zu sich selbst ist.
- Die *Symmetrie* erlaubt, aus der Kongruenz von Figur A zu Figur B bereits die Kongruenz von Figur B zu Figur A zu schließen. Nur so ist die Formulierung „Figuren sind zueinander kongruent“ sinnvoll.
- Durch die *Transitivität* können wir für Figuren A, B, C von den Kongruenzen $A \cong B$ und $B \cong C$ direkt auf die Kongruenz $A \cong C$ schließen.

Darüber hinaus unterteilt die Kongruenzrelation die ebenen Figuren in Äquivalenzklassen, sogenannte Kongruenzklassen. Ich fasse das unter den *Relationsaspekt* der Kongruenz. Diese Perspektive fokussiert darauf, dass die *Kongruenz* eine Gleichheit im geometrischen Kontext beschreibt, indem Eigenschaften betrachtet werden (nämlich die einer Äquivalenzrelation), die man von einem Gleichheitskonzept erwarten würde.

Der *Relationsaspekt* liefert eine disjunkte Einteilung aller Teilmengen der betrachteten Saccheri-Ebene in Kongruenzklassen. Alle Figuren einer Kongruenzklasse stimmen in unterschiedlichen geometrischen Größen überein (*Größenaspekt*) und können paarweise durch Isometrien ineinander überführt werden (*Abbildungsaspekt*). Diese Zusammenführung der drei vorangegangenen Aspekte ist Kern des *Klassifikationsaspekts* der Kongruenz. Darüber hinaus fallen unter diesen Aspekt auch folgende wichtige Eigenschaften:

- Um gültige Aussagen über alle Figuren einer Kongruenzklasse zu machen, reicht es oft aus, einen Repräsentanten zu betrachten.
- Oft reicht bereits eine geringe Anzahl geometrischer Größen aus, um eine Figur eindeutig einer Kongruenzklasse zuzuordnen (siehe bspw. Kongruenzsätze bei Dreiecken).
- Kongruenzklassen sind abgeschlossen unter Anwendung jeder euklidischen Bewegung. Umgekehrt kann aus einer gegebenen Figur die gesamte Kongruenzklasse erzeugt werden, indem alle euklidischen Bewegungen auf diese Figur angewendet werden.

Im Kontext von (Zirkel-und-Lineal) Konstruktionen klärt der Klassifikationsaspekt die Bedeutung des oft verwendeten Terminus der *eindeutigen Konstruierbarkeit*: Eine Figur nennen wir aus einem gegebenen Satz von Größen eindeutig konstruierbar, wenn alle möglichen, resultierenden Objekte in derselben Kongruenzklasse liegen. Auf dieses Thema werde ich in Abschnitt 13.1.3 (S. 179) im Detail eingehen. Die in diesem Abschnitt vorgestellten *Schnittstellenaspekte* der Kongruenz sind in Abbildung 13.10 zusammengefasst.

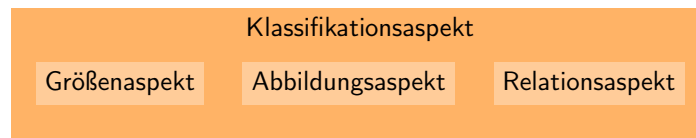


Abbildung 13.10: Schnittstellenaspekte zum Kongruenzbegriff.

13.1.3 Der Kongruenzbegriff im Mathematikunterricht

Im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I stellt *Kongruenz* einen zentralen Begriff des Geometrieunterrichts dar (Holland, 2007, S. 65) und taucht vor allem in Form der Kongruenzsätze für Dreiecke auf. Die Kongruenzsätze werden dabei zum einen als theoretischer Hintergrund für Konstruktionsprobleme verwendet und zum anderen als Mittel zum geometrischen Schließen (Weigand et al., 2014, S. 202). Ich werde mich in diesem Abschnitt beiden Themenfeldern widmen und dabei unter anderem herausarbeiten, dass bei Konstruktionen vor allem der *Klassifikationsaspekt* und der *Abbildungsaspekt* relevant sind (Unterabschnitt S. 179), während beim geometrischen Schließen, *Klassifikationsaspekt* und *Größenaspekt* auftauchen (Unterabschnitt S. 185). Zuvor werde ich noch auf unterschiedliche Zugänge zum Kongruenzbegriff in aktuellen Schulbüchern eingehen (Unterabschnitt S. 170).

Methodisch stützen sich die folgenden Analysen auf die wenige stoffdidaktische Literatur zum Kongruenzbegriff (vor allem Weigand et al. (2014, Kapitel VIII) und Holland (2007, Abschnitt 99.7)) sowie Auszügen aus aktuellen Schulbüchern aus NRW. Zusätzlich nutze ich Ergebnisse aus der Bachelorarbeit von Hüsing (2018) („Fachliche Analyse des Zugangs zur Dreiecks-Kongruenz in Schulbüchern mit Schwerpunkt auf ‚Neue Wege‘“). Die fachdidaktischen Erkenntnisse setze ich dann über die Schnittstellenaspekte (Abschnitt 13.1.2) in Beziehung zum in Abschnitt 13.1.1 beschriebenen mathematischen Hintergrund.

Zugänge zum Kongruenzbegriff

In der fachdidaktischen Literatur unterscheiden Weigand et al. (2014, S. 203 f.) zwei grundsätzliche Zugänge zum Kongruenzbegriff (in der euklidischen Ebene): Die Einführung von Kongruenz als *Grundbegriff* (ohne weitere Definition) und die Definition von Kongruenz unter Verwendung von Abbildungen (Isometrien). Ein wichtiger Punkt intellektuell ehrlichen Mathematik-Treibens im Mathematikunterricht ist das Potenzial zur konsistenten fachlichen Präzisierung (vgl. S. 12). Mathematische Definitionen stellen Prüfsteine bereit, mit denen für ein gegebenes Beispiel (z.B. zwei geometrische Figuren) zweifelsfrei entschieden werden kann, ob es in einer mathematischen Theorie eine bestimmte Funktion einnimmt oder nicht. Auch im Schulunterricht sollten Definitionen mathematischer Begriffe diese Trennungseigenschaft haben, da sie andernfalls die Umsetzung der zweiten Grunderfahrung von Winter (1995) (vgl. auch S. 11 f.) konterkarieren. Die folgenden Analysen werde ich genau vor diesem Hintergrund durchführen und dabei zunächst von einer Definition von *Kongruenz* für beliebige Figuren ausgehen. Anschließend werde ich einen Teil der dabei herausgearbeiteten Kritikpunkte vor dem Hintergrund bis zu einem gewissen Grad relativieren, dass im Kontext der Schulmathematik Kongruenz effektiv gar nicht für beliebige Figuren sondern fast ausschließlich bezogen im Kontext von Dreiecken vorkommt.

Ich möchte die beiden Zugänge zunächst fachlich charakterisieren und beginne mit dem zweitgenannten. Als Voraussetzung für diesen Weg zum Kongruenzbegriff nennen Weigand et al. (2014, S. 204 f.) die Einführung von Verschiebungen, Achsenspiegelungen, Punktspiegelungen und Drehungen als Beispiele für sogenannte Kongruenzabbildungen. Verkettungen der genannten Abbildungen stellen ebenfalls Kongruenzabbildungen dar. Als Beispiel für eine darauf aufbauende Kongruenzdefinition wird folgendes Schulbuchbeispiel angegeben:

Schulbuchauszug 1

Zwei Figuren sind kongruent oder deckungsgleich, wenn man sie durch Achsenspiegelung, Verschiebung oder eine Kombination aus beidem zur Deckung bringen kann.

(Baum und Klein, 2004, S. 126, zitiert nach Weigand et al., 2014, S. 204)

Aus fachlicher Perspektive fällt zunächst auf, dass der Begriff der Kongruenzabbildung induktiv über Beispiele für solche Abbildungen (Spiegelung, Verschiebung, Verknüpfung von beiden) definiert wird. Allerdings ist die gewählte Formulierung dahingehend problematisch, dass sie wörtlich interpretiert zwar auch Gleitspiegelungen (als Verknüpfung von Spiegelung und Verschiebung) aber nicht Drehungen beinhaltet, da „Kombination aus beidem“ streng genommen nicht die Kombination einer Achsenspiegelung mit einer anderen Achsenspiegelung bedeutet. Ändert man die Formulierung so ab, dass explizit auch das Verknüpfen zweier Spiegelungen erlaubt ist, so ist der Zugang aus fachlicher Perspektive unproblematisch, da nach dem Dreispiegelungssatz (vgl. mathematische Bemerkung 7.2.6 (S. 65)) die Gruppe der Kongruenzabbildungen vollständig durch die Spiegelungen erzeugt wird. Die Angabe weiterer Abbildungstypen (über die Spiegelung hinaus) führt jedoch zu Redundanzen. Aus mathematikdidaktischer Perspektive sind diese Redundanzen natürlich plausibel, da so eine vertiefte Untersuchung aller möglichen Verkettungen von Geraden- spiegelungen nicht notwendig ist. Warum dann allerdings bei Baum und Klein (2004) (Schulbuchauszug 1) auf die explizite Angabe der Drehung verzichtet wurde, ist unklar.

Insgesamt unterscheidet sich dieser Zugang wesentlich von der deduktiven Herangehensweise, Kongruenzabbildungen abstrakt über die Isometrie-eigenschaft zu definieren (vgl. mathematische Bemerkung 7.2.4 (S. 64)) und dann die zugehörigen Abbildungen systematisch zu charakterisieren. Ich bezeichne diesen Zugang zum Kongruenzbegriff im Folgenden als *abbildungsgeometrisch, formalisierbar durch einen induktiv definierten Isometriebegriff*. Aus Perspektive der Schnittstellenaspekte steht dabei der *Abbildungsaspekt* (S. 169) im Vordergrund.

Den anderen Zugang charakterisieren Weigand et al. (2014, S. 204) durch die Nutzung von Kongruenz als „grundlegende[m] Begriff, der auf dem Vergleich von Figuren durch – im intuitiven enaktiven Sinn – ‚Bewegen‘ einer Figur oder durch Vergleich entsprechender Größen beruht“. Kongruenz wird in Tradition von Euklid und Hilbert „als Grundbegriff ohne Rückgriff auf Abbildungen eingeführt“ (Weigand et al., 2014, S. 189). Als Beispiele für diesen Zugang geben die Autoren wieder zwei Schulbuchauszüge an:

Schulbuchauszug 2

Zwei Figuren heißen *kongruent* zueinander oder deckungsgleich, wenn man eine der Figuren so bewegen kann, dass sie mit der anderen zur Deckung kommt.

(Cukrowicz und Zimmermann, 2000, S. 107, zitiert nach Weigand et al., 2014, S. 204)

Schulbuchauszug 3

Zwei Figuren A und B sind *kongruent* (*deckungsgleich*) zueinander, wenn sie in der Form und in den Maßen übereinstimmen. Zueinander kongruente Figuren passen genau aufeinander. Man schreibt $A \cong B$.

(Griesel, Postel und Suhr, 2004, S. 76, zitiert nach Weigand et al., 2014, S. 204)

Ich werde nun aufzeigen, dass die beiden Definitionen in der Tat aus fachlicher Perspektive sehr unterschiedlich sind und darüber hinaus das Ziehen von Parallelen zum Kongruenzbegriff bei Hilbert (1977), wie es von Weigand et al. (2014, S. 189) angedeutet wird, nur teilweise gerechtfertigt ist. Ich beginne mit der Definition von Cukrowicz und Zimmermann (2000) (Schulbuchauszug 2) und versuche zunächst eine mathematische Präzisierungen mit dem Ziel, eine fachmathematische Definition zu finden, für die der zitierte Schulbuchauszug eine intellektuell ehrliche Elementarisierung darstellt. Die der Definition inhärente Vorstellung des Bewegens legt nahe, dass aus mathematischer Sicht eine Abbildung beschrieben wird. Dabei muss allerdings berücksichtigt werden, dass die Formalisierung einer realen (Bender (1982, S. 9) spricht an dieser Stelle von einer *elementarkinematischen*) Bewegung zur geometrischen Abbildung zwar bei den orientierungserhaltenen Isometrien *Drehung* und *Verschiebung* funktioniert, allerdings nicht bei der orientierungsändernden *Spiegelung* (und damit auch nicht bei der *Gleitspiegelung*): Bei der Spiegelung ($\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$) im mathematischen Sinne ist das elementarkinematische Pendant das *Umwenden*, also eine Abbildung $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Die beide Abbildungen gleichen sich zwar im Bild einer Figur, allerdings erzeugt das räumliche Umwenden keine ebene „Bewegungsspur“ aus der dann die Isometrie *Spiegelung* formalisiert werden kann. Für die Formalisierung eines handlungsorientierten Begriffs von *Deckungsgleichheit* ergeben sich dementsprechend didaktische Hürden. Bender (1982, S. 17 ff.) hält allerdings fest, dass die daraus resultierende Konsequenz nicht die ist, keine „Bewegungsgeometrie“ im Mathematikunterricht zu machen, sondern dass „Bewegungsgeometrie“ keine „geeignete Propädeutik für Abbildungsgeometrie [als Zielgeometrie des Mathematikunterrichts]“ ist (Bender, 1982, S. 18). Dies spricht dann aber nicht gegen *Deckungsgleichheit* (im Bewegungssinn) als Propädeutik für Kongruenz, solange man sich der Hürden bewusst ist. Diese sind erstens das erwähnte Problem *Umwenden vs. Spiegeln*, und zweitens die Tatsache, dass beim elementarkinematischen Bewegen im Anschluss die Urbild-Figur ihre Ausgangsposition ändert und am Ende *auf* der anderen Figur liegt. Im fachmathematisch-abbildungsgeometrisch Sinne ist Bild der einen Figur *identisch* mit der anderen Figur. Besonders deutlich wird diese Hürde bei der Frage nach der *Reflexivität* der Deckungsgleichheit.

Die Forderung nach Deckungsgleichheit liefert Eigenschaften für die formalisierende Abbildung: Erstens müssen je zwei Punkte der beiden Figuren ein-eindeutig einander zugeordnet werden. Die gesuchte Abbildung muss also bijektiv sein. Zum anderen beinhaltet die intuitive Idee der Deckungsgleichheit, dass die Zuordnung so sein soll, dass es nicht zu Verzerrungen kommt, also Punktpaare in der einen Figur denselben Abstand zueinander haben wie die korrespondierenden Punktpaare in der anderen Figur. Diese Anforderungen lassen sich genau durch die Definition von Kongruenz unter Nutzung von Isometrien erfüllen. Im Gegensatz zu oben (Schulbuchauszug 1) spielt hier in der Definition genau der Typ einer solchen Abbildung (z.B. Spiegelung) erstmal keine Rolle. Stattdessen geht es um alle Abbildungen, die eine gewisse Eigenschaft teilen. In diesem Sinne möchte ich diesen Zugang als *abbildungsgeometrisch, formalisierbar durch einen deduktiv definierten Isometriebegriff* bezeichnen. Auch hier wird der *Abbildungsaspekt* (S. 169) betont. Durch die in der Idee der Deckungsgleichheit angelegte Idee der Übereinstimmung, spielt (abhängig davon, wie stark die Isometrieeigenschaft betont wird) aber auch der *Größenaspekt* (S. 168) mit hinein.

Die Definition von Griesel et al. (2004) (Schulbuchauszug 3) beruht auf einem Vergleich von Figureneigenschaften und ist damit *relational-statischer* (im Gegensatz zu abbildungsgeometrischer) Natur. Kongruenz wird hier in erster Linie aus Perspektive des *Größenaspekts* (S. 168) betrachtet. Im vorliegenden Beispiel werden Figuren als kongruent bezeichnet, wenn sie in *Form* und *Maßen* übereinstimmen. Zwei auf Kongruenz zu prüfende Figuren müssen also entsprechend dieser Definition auf *Formgleichheit* und *Gleichheit der Maße* geprüft werden. Was allerdings unter *Formgleichheit* zu verstehen ist, ist nicht klar, da der Begriff der *Form* einer ebenen Figur in der Mathematik nicht einheitlich benutzt wird. Ich möchte zwei Interpretationsmöglichkeiten beschreiben, die ihre Rechtfertigung beide in umgangssprachlichen Anwendungskontexten haben. In beiden Fällen wird durch die Formalisierung eine übliche Intuition zu *Form* umgesetzt.

1. Ohne einen Konflikt mit dem üblichen Sprachgebrauch oder mit mathematischen Zwängen wäre folgende Definition von *formgleich* denkbar: Zwei Figuren haben dieselbe Form, wenn sie die gleiche Anzahl an Ecken haben. Formen sind dann also: Dreieck, Viereck . . . Festzuhalten ist, dass so ein Formbegriff nur für Vielecke, nicht aber für krummlinig begrenzte Figuren sinnvoll ist.

Um in diesem Fall den üblichen Kongruenz-Begriff zu definieren, reicht es nicht aus, unter *Maßen* der Vielecke lediglich deren Kantenlängen zu verstehen. Dann wären nämlich beispielsweise alle Rauten gleicher Kantenlänge als form- und maßgleiche Figuren (Vierecke) kongruent zueinander (vgl. Abbildung 13.11).

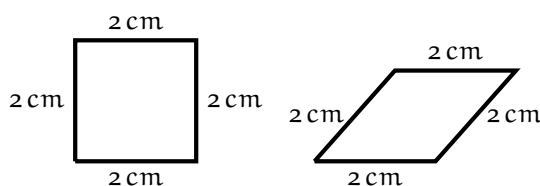


Abbildung 13.11: Definiert man *formgleich* über die Anzahl der Ecken, reicht für die *Gleichheit der Maße* ein Vergleich der Kantenlängen nicht aus, um den Kongruenz-Begriff zu definieren. Ansonsten wären diese beiden Vierecke kongruent.

Als weitere Maße sind entweder die Innenwinkel der Vielecke oder aber die Streckenlängen zwischen allen Paaren von Eckpunkten geeignet (also nicht nur die Außenkanten, sondern auch die Diagonalen). Für beide Definitionen der Gleichheit der Maße ist diese Formalisierung zum Kongruenzbegriff für beliebige Vielecke ähnlich der von Hilbert (1977, S. 26, ff) beschriebenen Definition. Er baut seinen verallgemeinerten Kongruenzbegriff auf zwei „Punktreihen“ mit gleicher Anzahl von Punkten auf. Diese können als die Eckpunkte von Vielecken interpretiert werden. Kongruenz von Vielecken⁷⁶ (mathematischen Bemerkung 13.1.15).

Mathematische Bemerkung 13.1.15 (Kongruenz von Vielecken nach Hilbert)

Irgendeine endliche Anzahl von Punkten heißt eine *Figur*; liegen alle Punkte der Figur in einer Ebene, so heißt sie eine *ebene Figur*. Zwei Figuren heißen *kongruent*, wenn ihre Punkte sich paarweise einander so zuordnen lassen, daß die auf diese Weise einander zugeordneten Strecken und Winkel sämtlich einander kongruent sind. (Hilbert, 1977, S. 27)

⁷⁶Hilbert (1977, S. 26) spricht zwar von „beliebigen Figuren“, formalisiert Kongruenz aber nur für Figuren, die durch eine endliche Anzahl an Punkten eindeutig bestimmt sind (Hilbert, 1977, S. 27).

2. Ein alternative Blickweise auf die *Form* einer geometrischen Figur nutzt das Konzept der Ähnlichkeit: Zwei Figuren sind *formgleich*, wenn sie ähnlich sind. Äquivalent könnten dann auch die folgenden Definitionen für *Formgleichheit* genutzt werden.

- ... Zwei Figuren sind formgleich, wenn Sie durch Verschieben, Drehen, Spiegeln und/oder zentrische Streckung ineinander übergehen, oder
- ... sie bis auf eine zentrische Streckung kongruent sind.

Die letzte Formulierung macht folgendes Problem deutlich: Egal, ob man es explizit erwähnt oder nicht: In dieser Interpretation der Formgleichheit sind alle Zutaten des Kongruenzbegriffs bereits enthalten. Somit ist es nicht sinnvoll, den Kongruenzbegriff über diese Sichtweise auf Formgleichheit zu definieren, da Ähnlichkeit dem Kongruenzbegriff begrifflich nachgeordnet ist.

Ein möglicher Einwand ist nun folgender: Wesentliche Figuren bei Kongruenzbetrachtungen der Schulmathematik sind Dreiecke. Deren Form kann bereits über die Größen der Innenwinkel eindeutig beschrieben werden. Dementsprechend kann man sagen, dass zwei Dreiecke formgleich sind, wenn sie in ihren Innenwinkeln übereinstimmen. Dieser winkelbasierte Formbegriff lässt sich aber schon auf Vierecke nicht mehr verallgemeinern (vgl. Abbildung 13.12) und ist somit für die Beschreibung der Form einer beliebigen Figur nicht tauglich.



Abbildung 13.12: Die beiden Vierecke stimmen in ihren Winkeln überein, sind aber nicht ähnlich.

Der Vollständigkeit halber muss noch eine weitere Möglichkeit erwähnt werden, den Ähnlichkeits- und damit den Formbegriff (zumindest im euklidischen Sinn) zu präzisieren: Figuren werden als *ähnlich* bezeichnet, falls es eine affine und Orthogonalitäts-erhaltende Abbildung gibt, die die Figuren ineinander überführt (vgl. Holland (2007, S. 102)). Dieser Weg stellt in der Tat einen Ausweg dar, bei dem der Kongruenzbegriff nicht implizit vorausgesetzt wird. Allerdings bezweifle ich, dass dieser sehr abstrakte Zugang (Überprüfung der Formgleichheit über das Finden einer Abbildung, unter der die Orthogonalitäts-Relation invariant ist.) eine passende Formalisierung der Überprüfung von *Formgleichheit* im Mathematikunterricht ist.

Mit den oben beschriebenen Argumenten folgt, dass die erste Interpretation von *Form* (als Anzahl der Ecken) eine intellektuell ehrliche Grundlage für die Definition des Kongruenzbegriffs bildet; bei der zweiten Interpretation (über Ähnlichkeit) ist die Präzisierung umständlich.

Abschließend möchte ich noch festhalten, dass bei allen geschilderten Zugängen Kongruenz implizit als symmetrische Relation angelegt wird, da stets von „kongruent zueinander“ gesprochen wird (vgl. auch die Ausführungen zum *Relationsaspekt* auf S. 169).

Aus den obigen Betrachtungen ergeben sich drei mögliche Zugänge zum Kongruenzbegriff. Diese sind in Tabelle 13.1 zusammengefasst.

Bezeichnung	Beschreibung	Schnittstellenaspekte
abbildungsgeometrisch, formalisierbar durch einen induktiv definierten Isometriebegriff	Kongruenz bedeutet, dass Figuren durch Spiegelungen, (Translationen, Drehungen) und deren Verknüpfungen ineinander überführt werden können.	Abbildungsaspekt
abbildungsgeometrisch, formalisierbar durch einen deduktiv definierten Isometriebegriff	Kongruenz bedeutet, dass Figuren deckungsgleich (durch längenerhaltende Bijektionen) aufeinander abgebildet werden können.	Abbildungsaspekt (Größenaspekt)
relational-statisch	Kongruenz bedeutet, dass Figuren (Vielecke) in Form (Anzahl der Ecken) und Maßen übereinstimmen.	Größenaspekt

Tabelle 13.1: Unterschiedliche Zugänge zum Kongruenzbegriff für ebene Figuren. Herausgearbeitet aus Weigand et al. (2014, S. 186 ff.).

Auf diesen Überlegungen aufbauend möchte ich nun den Fokus von der fachdidaktischen auf die unterrichtspraktische Literatur verschieben und Zugänge zum Kongruenzbegriff in aktuellen Schulbüchern⁷⁷ unter Verwendung der bisherigen Erkenntnisse analysieren.

Schulbuchauszug 4 (Fundamente der Mathematik 7, NRW)

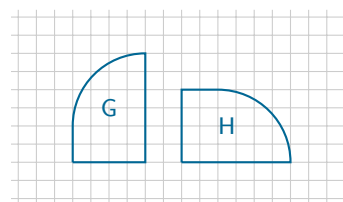
Wissen: Kongruente Figuren

Zwei geometrische Figuren G und H heißen **kongruent** (deckungsgleich), wenn sie sowohl in ihrer **Form** als auch in der **Größe** ihres Flächeninhalts übereinstimmen.

Zueinander kongruente Figuren können durch Verschieben, Drehen oder Spiegeln entstehen.

$$G \cong H.$$

Man spricht: G ist kongruent zu H.



(Text und Bild nach Pallack, 2014, S. 172)

In Schulbuchauszug 4 wird Kongruenz in *relational-statischer* Weise als Übereinstimmung in *Form* und *Größe* eingeführt, wobei *Größe* sich hier nicht auf Winkel und/oder Seitenlängen, sondern auf die Größe des Flächeninhalts bezieht. Dies löst allerdings nicht die oben erläuterten Probleme, die sich aus der Nutzung von *Formgleichheit* bei der Einführung des Kongruenzbegriffs ergeben. Insbesondere ist im Kontext der Abbildung im Schulbuchauszug nicht klar, wie die Formgleichheit krummlinig begrenzter Figuren formalisiert werden kann. Eine sinnvolle Möglichkeit zur Überprüfung von Kongruenz, die über „intuitives Hinsehen“ hinausgeht, ergibt sich aus der Definition nicht. Zusätzlich wird der Begriff *deckungsgleich* als synonym für *kongruent* genannt. Im zweiten Satz wird eine Aussage (im Sinne eines Theorems) über Kongruenz getroffen, die eine *abbildungsgeometrische* Sichtweise, *formalisierbar durch einen induktiv definierten Isometriebegriff*, einführt. Der logische Kern des Satzes ist nicht eindeutig identifizierbar. Der Satz kann sowohl als „Wenn man eine Figur verschiebt, dreht oder spiegelt, kann man eine Figur erhalten, die zur Ausgangsfigur kongruent ist.“ als auch als „Wenn zwei Figuren kongruent sind, dann kann es vorkommen, dass sie durch Verschieben, Drehen oder Spiegeln ineinander überführt werden“ lesen. Zwei Dinge sind an dieser Stelle bemerkenswert: Erstens, werden weder Verknüpfungen der genannten Abbildungen noch die

⁷⁷Die Aktualität der Beispiele bezieht sich auf den Zeitpunkt des Projektstarts im Jahr 2016. Im Rahmen der Fertigstellung dieser Arbeit, habe ich eine kurze vergleichende Analyse der jeweils aktuellen Varianten (Stand 2021) der entsprechenden Schulbuchabschnitte ergänzt.

Gleitspiegelung erwähnt. Zweitens bleiben die logischen Zusammenhänge zwischen der Existenz einer überführenden Verschiebung, Drehung oder Spiegelung und der Kongruenz zweier Figuren vage. Darüber hinaus wird die Aussage in keiner Weise begründet. Zusammenfassend muss man festhalten, dass die Einführung des Kongruenzbegriffs in Schulbuchauszug 4 nicht dazu geeignet ist, einen Werkzeugkasten bereitzustellen, der die Überprüfung von Kongruenz für ein gegebenes Beispiel ermöglicht. Alle Argumentationen über Form und Größe des Flächeninhalts bleiben im Intuitiven und können nicht formalisiert werden. In der aktuellen Version des Schulbuchs (Schulbuchauszug 5) wurde die Definition weiter ausgedünnt und auf die Einführung einer formalen Schreibweise verzichtet; Die oben geschilderten Probleme grundsätzlicher Natur blieben aber unverändert bestehen.

Schulbuchauszug 5 (Fundamente der Mathematik 7, NRW, G9)

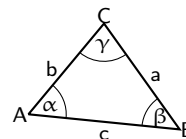
Geometrische Figuren, die in Form und Flächeninhalt übereinstimmen, heißen deckungsgleich oder **kongruent**. Kongruente Figuren können durch Verschieben, Drehen oder Spiegeln entstehen. Bei Dreiecken reicht es aus, drei geeignete Größen eines Ausgangsdreiecks zu kennen, um ein dazu kongruentes Dreieck zu zeichnen.

(Text nach Pallack, 2020, S. 118)

Im nächsten Beispiel (Schulbuchauszug 6) wird ein ähnlicher Zugang zum Kongruenzbegriff gewählt:

Schulbuchauszug 6 (Mathematik Neue Wege 7)

Figuren, die nach Größe und Form vollständig übereinstimmen, lassen sich durch Verschieben, Drehen und Spiegeln genau zur Deckung bringen. Man nennt sie deckungsgleich oder kongruent. In der Praxis stellt man kongruente Figuren z. B. mithilfe von Gussformen oder Schablonen her. In der Geometrie kann man sie mithilfe einiger gegebener Größen eindeutig konstruieren. Bei Dreiecken genügt dabei die Angabe von drei geeigneten Größen.



(Text und Bild nach Körner, Lergenmüller, Schmidt & Zacharias, 2014, S. 192)

Auch hier geschieht der Zugang zunächst über Form und Größe, mit dem Unterschied, dass nicht genau geklärt wird, worauf sich „Größe“ genau bezieht. Ebenfalls ähnlich zu Schulbuchauszug 4 wird direkt im Anschluss eine abbildungsgeometrische Sichtweise ergänzt, die sich ebenfalls auf Verschiebungen, Drehungen und Spiegelungen bezieht. Im Gegensatz zu oben, wird hier nicht mit einer *kann*-Formulierung gearbeitet. Außerdem ist die Aufzählung der drei Abbildungen mit einem „und“ und nicht mit einem „oder“ verknüpft. Das lässt sich so lesen, dass man die Deckungsgleichheit kongruenter Figuren immer durch die Anwendung von zuerst einer Verschiebung, dann einer Drehung und abschließend einer Spiegelung herstellen kann. Das stimmt aber nicht, falls die zu überprüfenden Figuren die gleiche Orientierung haben, da die Anwendung einer Spiegelung immer die Orientierung umkehrt.

Die logische Struktur der (unbegründeten) Aussage ist: Aus Kongruenz folgt die Möglichkeit des Deckens durch Verschieben, Drehen und Spiegeln. Mit der Kontraposition folgt dann aus der Nichtexistenz einer solchen Möglichkeit zwar die Nicht-Kongruenz, nicht aber die umgekehrte Implikation: Die Möglichkeit des Deckens impliziert Kongruenz. Es muss also auch hier konstatiert werden, dass die Einführung des Kongruenzbegriffs in Schulbuchauszug 6 keine Möglichkeit bereit stellt, Kongruenz für ein gegebenes Paar von Figuren zu überprüfen. In der neueren Variante des

Schulbuchs (Körner, Lergenmüller, Schmidt & Zacharias, 2020, S.144) hat sich an dem Text zur Kongruenz nichts geändert.

Lässt man die exakte logische Struktur ungeachtet und versteht den Schulbuchauszug in dem (vermutlich intendierten) Sinne, dass Kongruenz durch Verschieben, Drehen und Spiegeln überprüfbar ist, stößt man wieder auf die oben (S. 172) diskutierten Unterschiede zwischen elementarkinematischen realen Bewegungen und mathematischen Abbildungen. Hüsing (2018), der im Rahmen seiner Bachelorarbeit das einschlägige Buchkapitel von Körner et al. (2014) analysiert, schlägt dazu vor:

Des Weiteren wird ausgesagt, dass sich kongruente Figuren „durch Verschieben, Drehen und Spiegeln genau zur Deckung bringen lassen“ [...], wodurch den SuS eine konkrete Möglichkeit für den Nachweis der Kongruenz zweier Figuren gegeben wird, nämlich die Figuren deckungsgleich übereinander zu legen. Aus diesem Grund sollte auch eher der Begriff der Deckungsgleichheit als der Begriff der Kongruenz verwendet werden. Bei der oben genannten Formulierung ist jedoch der Begriff Spiegeln eher ungeeignet, da die SuS ihn nicht direkt als eine Handlung ansehen können, wie bei den Begriffen Verschieben und Drehen. Daher wäre es besser gewesen, man hätte stattdessen einen Begriff wie Umwenden oder Umklappen verwendet, welcher die reale Handlung deutlicher macht, zumal die theoretischen, formalen Abbildungen [...] auch im weiteren Verlauf des Kapitels nicht betrachtet werden.

(Hüsing, 2018, S. 29 f.)

Schulbuchauszug 7 (Lambacher Schweizer 7 (NRW))

Bei den beiden Dreiecken aus Fig. 1 stimmen alle Seitenlängen überein. Wenn man die Dreiecke ausschneiden würde, so könnte man sie so übereinander legen, dass sie sich vollständig zur Deckung bringen lassen. **Deckungsgleiche Figuren** nennt man auch **kongruent**.

Wenn bei zwei Dreiecken alle Seitenlängen übereinstimmen, sind sie kongruent.

Auch wenn zwei Dreiecken in anderen geeigneten Größen übereinstimmen, sind sie zueinander kongruent.

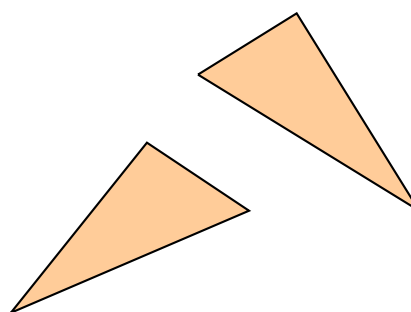


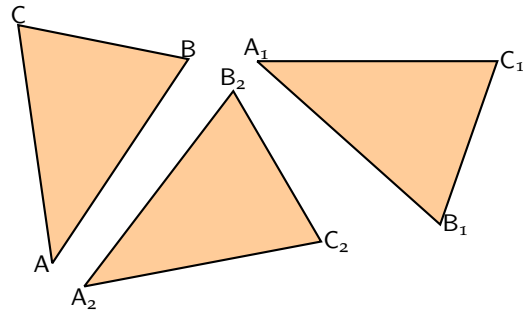
Fig. 1

(Text und Bild nach Greulich, Jörgens, Jürgensen-Engl, Riemer & Schmitt-Hartmann, 2010, S. 155)

Im Gegensatz zu den bis hier behandelten Beispielen, wird in Schulbuchauszug 7 der Kongruenzbegriff direkt über den Begriff der *Deckungsgleichheit* (abbildungsgeometrischer Zugang, formalisierbar durch einen deduktiv definierten Isometriebegriff) eingeführt und dann am Beispiel *Dreieck* konkretisiert. In der aktuellen Variante des Buches (Schulbuchauszug 8) wird dieser Text weiter ausgebaut und die anschauliche Idee des zur-Deckung-Bringens durch die Möglichkeit des Abbildens durch Drehung, Verschiebung oder Spiegelung konkretisiert. Allerdings wird hier, wie in Schulbuchauszug 4, ebenfalls nicht auf die Verknüpfung der drei Abbildungen bzw. Gleitspiegelungen eingegangen. Zusätzlich wird zumindest in Ansätzen der *Relationsaspekt* angesprochen, indem die Kongruenz-Relation in ihrer Funktion als „Gleichheitszeichen der Geometrie“ eingeordnet wird. Außerdem wird der Begriff der *eindeutigen Konstruierbarkeit* eingeführt, auf den ich im nächsten Abschnitt (S. 179 ff.) noch im Detail eingehen werde.

Schulbuchauszug 8 (Lambacher Schweizer 7, NRW, G9)

Bei den beiden Dreiecken rechts stimmen alle drei Seitenlängen überein. Wenn man die Dreiecke ausschneiden würde, so könnte man sie so übereinander legen, dass sie sich vollständig überdecken. Man nennt solche Figuren **deckungsgleich** oder **kongruent**. Zueinander kongruente Figuren können durch Drehung, Verschiebung oder Spiegelung genau zur Deckung gebracht werden



Die Kongruenz wird auch das „Gleichheitszeichen der Geometrie“ genannt, weil bei zueinander kongruenten Figuren entsprechende Winkel und Seiten gleich groß sind. Man sagt: Ein Dreieck ist eindeutig konstruierbar, wenn aus den gegebenen Angaben nur Dreiecke gezeichnet werden können, die zueinander kongruent sind.

(Text und Bild nach Braun et al., 2020, S. 180)

Die Analysen in diesem Abschnitt zeigen, dass die Definition von *Kongruenz* in aktuellen Schulkontexten ein hochgradig nichttriviales Thema ist. In der Schulbuchpraxis vermischen sich unterschiedliche fachliche Hintergründe mit unterschiedlichen Stufen der Elementarisierung und führen zu Texten mit zum Teil unklarem logischen Aufbau. Im Kontext der Abkehr von der neuen Mathematik und der damit eng verbundenen Abbildungsgeometrie (vgl. bspw. Girnat, 2017, S. 234 ff.) lässt sich erklären, warum versucht wird, Kongruenz nicht formal auf dem geometrischen Abbildungsbegriff aufzubauen. Dass trotzdem immer in irgendeiner Weise auf Abbildungen zurückgegriffen wird, stützt die Aussage von Weigand et al. (2014, S. 205), dass „die (intuitive) Vorstellung vom ‚Überdecken‘ eine zentrale Grundvorstellung des Kongruenzbegriffs [ist], die in der Mathematik ihre Ausformung in Form einer Abbildung erhält“.

Die Formulierung „Form und Größe“ nutzt zwei scheinbar gut formalisierbare geometrische Eigenschaften (Form, Größe). Allerdings zeigen die obigen Überlegungen, dass das für beliebige Figuren keineswegs der Fall ist. Man muss an dieser Stelle festhalten, dass die Definition von Kongruenz über „Form und Größe“ unkritisch ist, wenn man ausschließlich die Kongruenz von Dreiecken beschreiben möchte. In diesem Fall liefern die Innenwinkel eine tragfähige Definition für *Form*. Im Rahmen des Mathematikunterrichts entspräche die Beschränkung auf Dreiecke der unterrichtlichen Realität, es ist dann aber auch wichtig für Lehrkräfte und SuS explizit herauszustellen, dass der so eingeführte Kongruenzbegriff nicht verallgemeinerbar ist.

Eine Definition von Kongruenz unter Verwendung von „Deckungsgleichheit“ stellt einen handlungsorientierten Zugang dar, der – unter Berücksichtigung der erwähnten Hürden beim Übergang von elementarkinematischen Bewegungen zu geometrischen Abbildungen – das Potenzial einer exakten Formalisierung birgt und in der Tat auch für beliebige Figuren (und nicht nur Dreiecke) funktioniert.

Von den genannten Beispielen gelingt es nur in den Schulbuchauszügen 7 und 8 eine Definition anzugeben, mit der es möglich ist, die Kongruenz-Frage für ein gegebenes Figuren paar zu entscheiden. Eine Bereitstellung von Prüfsteinen in diesem Sinne wäre meines Erachtens aber auch in didaktisch reduzierten Kontexten die zentrale Aufgabe einer Definition (auch im Hinblick auf die zweiten Grunderfahrung von Heinrich Winter (1995), vgl. S. 11) und insbesondere Kriterium für umgesetzte intellektuelle Aufrichtigkeit.

Kongruenz als theoretischer Hintergrund für Konstruktionen

Eine wesentliche Anwendung des Kongruenzbegriffs und der Kongruenzsätze im Mathematikunterricht stellt deren Nutzung als Grundlage für geometrische Konstruktionen dar (Weigand et al., 2014, S. 202). In diesem Kontext taucht oft die Formulierung „eindeutige Konstruierbarkeit“ auf (z. B. bei Weigand et al. (2014, S. 202) oder in den Schulbuchauszügen 6 und 8). Ausgehend von diesem Begriff möchte ich im Folgenden die subtilen Zusammenhänge zwischen Kongruenz und Konstruktion erläutern.

Bevor ich mich der *eindeutigen* Konstruierbarkeit widme, möchte ich zunächst auf den Begriff der *Konstruierbarkeit* eingehen und mit der exemplarischen Frage starten, ob ein Strahl, der einen Winkel drittelt, *konstruierbar* ist. Schnell stellt man fest, dass diese Frage so nicht beantwortbar ist, da die erlaubte Konstruktionswerkzeuge nicht spezifiziert wurden. Während eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal (ZuL) im Allgemeinen nicht möglich ist, gelingt sie unter Verwendung von Papierfalten ohne größere Schwierigkeiten (Henn, 2012, S. 64 ff.). Um diese Werkzeugabhängigkeit zu betonen, möchte ich von *Werkzeug-Konstruierbarkeit* sprechen und meine dabei in Anlehnung an Weigand et al. (2014, S. 64 ff.) Folgendes: Aus einer *Ausgangskonfiguration* kann mit Hilfe festgelegter Werkzeuge (und damit verbundener erlaubter Konstruktionsregeln) in endlich vielen *Konstruktionschritten* eine vorgegebene *Zielkonfiguration* erzeugt werden. Die Konstruktionsbeschreibung muss *durchführbar* (nur erlaubte Schritte) und *korrekt* (die Zielkonfiguration wird durch die beschriebene Konstruktion in jedem Fall erreicht) sein. Beispiele für solche Konstruktionswerkzeuge sind neben ZuL: Zirkel und Geodreieck, Papierfalten, aber auch dynamische Geometriesysteme. Zu einer Realisierung einer Ausgangskonfiguration kann es keine, eine oder mehrere Realisierungen der Zielkonfigurationen geben. Unterschiedliche Realisierungen der Zielkonfigurationen können kongruent sein, müssen es aber nicht.

Beispiel. Zu drei gegebenen Winkeln, die zusammen genau 180° ergeben (Ausgangskonfiguration), können mit ZuL (Werkzeug) mehrere, nicht kongruente Dreiecke (Zielkonfiguration) konstruiert werden. Damit ist so ein Dreieck Werkzeug-konstruierbar aus den drei Winkeln.

Basierend auf diesem Verständnis von *Werkzeug-Konstruierbarkeit* kann nun der Begriff *eindeutige Konstruierbarkeit* diskutiert werden. Werkzeug-konstruierbar bedeutet: Für ein gegebenes Problem gibt es für ein bestimmtes Werkzeug (mindestens) eine Konstruktionsbeschreibung, die das Problem löst. Eine Systematisierung aller möglichen Lösungen/Konstruktionen (wie sie für die Analyse irgendeiner Art von Eindeutigkeit notwendig ist) ist hier nicht angelegt. In der Tat ist die Idee der eindeutigen Konstruierbarkeit sogar unabhängig von einer speziellen (Werkzeug-abhängigen) Konstruktion(sbeschreibung)⁷⁸: Alle Realisierungen der Zielkonfiguration (unabhängig von der Realisierung der Ausgangssituation) sind kongruent. Das spezielle Werkzeug und eine Beschreibung, wie diese Realisierung der Zielkonstruktion konstruiert werden kann, spielt hier keine Rolle. Stattdessen geht es um einen Vergleich aller möglichen Lösungen. Das folgende Beispiel verdeutlicht die unterschiedlichen Rollen der beiden Konzepte:

Beispiel. *Aufgabe:* Konstruiere aus einem gegebenen Winkel (der nicht gestreckt oder voll ist) und zwei gegebenen Längen ein Dreieck, bei dem die an den Winkel angrenzenden Seiten genau die beiden gegebenen Längen haben.

⁷⁸Ich ignoriere an dieser Stelle den theoretisch möglichen Fall, dass zwar alle Zielkonfigurationen, die mit einem Werkzeug erreicht werden können, zueinander kongruent sind, aber nicht kongruent zu Zielkonfigurationen, die mit einem anderen Werkzeug konstruiert werden können. Für die Schulpraxis ist dieser Fall meiner Einschätzung nach nicht relevant.

Ausgangskonfiguration: Winkel der Größe $\alpha \in]0, \pi[$; zwei Strecken beliebiger Längen s_1 und s_2 .

Zielkonfigurationen: Drei nicht kollineare Punkte A, B, C , sodass (bis auf Umbenennung) der Winkel $\angle BAC$ die Größe α hat und B und C zu A den Abstand s_1 bzw. s_2 haben.

Werkzeug-Konstruierbarkeit: Die Zielkonfigurationen ist aus der Ausgangskonfiguration offensichtlich Werkzeug-konstruierbar mit ZuL (Strecke mit Endpunkten A und B zeichnen, Winkel α antragen mit Scheitelpunkt A , und auf dem neu konstruierten Strahl mit dem Zirkel die Strecke s_2 an A antragen um C zu erhalten).

Eindeutige Konstruierbarkeit: Dass alle möglichen Zielkonfigurationen kongruent sind, garantiert der Kongruenzsatz SWS (mathematische Bemerkung 13.1.12).

Das Beispiel lässt sich auf andere Konstruktionsprobleme für Dreiecke übertragen. Die Werkzeug-Konstruierbarkeit mit ZuL folgt stets aus einer durchführbaren und korrekten Konstruktionsanleitung; die eindeutige Konstruierbarkeit liefert jeweils einer der vier Kongruenzsätze für Dreiecke (mathematische Bemerkungen 13.1.11, 13.1.12, 13.1.13, 13.1.14). Auch wenn auf diese Weise die verschiedenen Dreieckskonstruktionsaufgaben eng mit den Kongruenzsätzen verbunden sind, folgt nicht, dass durch die Angabe von drei entsprechenden Größenangaben (z.B. drei Längen) immer ein Werkzeug-konstruierbares Dreieck existiert. Kongruenzsätze setzen zwei existierende Dreiecke in Relation zueinander; über die *Existenz* eines Dreiecks mit gegebenen Maßangaben wird keine Aussage getroffen. So gibt es beispielsweise kein Dreieck mit den Seitenlängen 1 cm, 1 cm und 7 cm. Dieser und weitere Fälle sind in Tabelle 13.2 zusammenfassend dargestellt. Die Übersicht dient als hilfreiche Grundlage für weitere Analysen, indem sie für alle Kombinationen von drei gegebenen Größenangaben (Seitenlängen, Winkel) beschreibt, ob bzw. unter welchen Bedingungen aus diesen Größenangaben ein Dreieck konstruiert werden kann (Werkzeug-Konstruierbarkeit) und darüber hinaus, ob bzw. unter welchen Bedingungen alle daraus konstruierbaren Dreiecke kongruent sind (eindeutige Konstruierbarkeit).

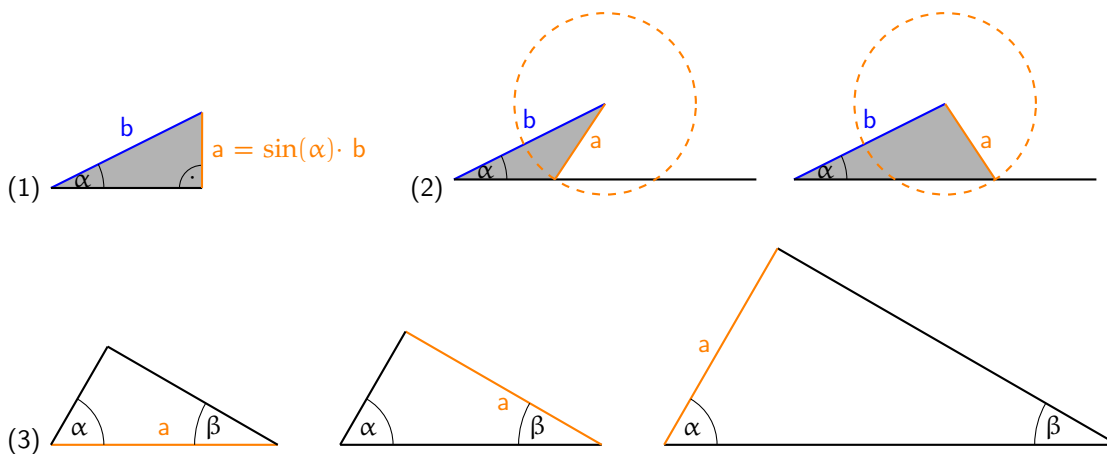


Abbildung 13.13: Unterstützende Skizzen zu ausgewählten Fällen aus Tabelle 13.2.

Ich möchte nun die Rolle, die Kongruenz und Kongruenzsätze als Hintergrund für geometrische Konstruktionen spielen, unter Verwendung der *Schnittstellenaspekte* beleuchten. Wie auf Seite 169 erwähnt, ist der *Klassifikationsaspekt* zentral für Überlegungen dazu, ab wann eine Figur (bis auf Kongruenz) eindeutig aus einem Satz von Größen konstruiert werden kann. Natürlich kann man sich der Frage der eindeutigen Konstruierbarkeit auch ohne vorherige Behandlung der Kongruenzsätze nähern. Dann muss die Kongruenz zweier beliebiger Zielkonfigurationen unter Verwendung der eingeführten Kongruenzdefinition geprüft werden.

	Vorgaben	Werkzeug-Konstruierbarkeit	Eindeutige Construierbarkeit
K1	Längen $a, b, c > 0$ (Drei Seiten)	Alle drei Varianten der strikten Dreiecksungleichung müssen erfüllt sein: $a < b + c$, $b < a + c$, $c < a + b$	Folgt aus dem Kongruenzsatz SSS.
K2.1	Längen $0 < a \leq b$; Winkel $\alpha \in]0, \pi[$ (Zwei Seiten, ein Winkel)	Fall 1: α bestimmt die Größe des Winkels, der zwischen den beiden Seiten mit den Längen a und b liegt. Dann existiert ein entsprechendes Dreieck in jedem Fall.	Folgt aus dem Kongruenzsatz SWS.
K2.2		Fall 2: α bestimmt die Größe des Winkels, der der Seite mit Länge b gegenüber liegt. Dann existiert ein entsprechendes Dreieck in jedem Fall.	Folgt aus dem Kongruenzsatz SsW.
K2.3		Fall 3: α bestimmt die Größe des Winkels, der der Seite mit Länge a gegenüber liegt. Dann existiert ein entsprechendes Dreieck nur, falls $a \geq \sin \alpha \cdot b$.	Eindeutig konstruierbar nur für $a = \sin \alpha \cdot b$. Dann ist das Dreieck rechtwinklig (vgl. Abbildung 13.13 (1)), ansonsten gibt es immer zwei nicht kongruente (und nicht ähnliche) Dreiecke (vgl. Abbildung 13.13 (2)).
K3	Länge $a > 0$; Winkel $\alpha, \beta \in]0, \pi[$ (Eine Seite, zwei Winkel)	Es muss $\alpha + \beta < \pi$ gelten.	Eindeutig konstruierbar nur, wenn die Position der Strecke mit gegebener Länge im Verhältnis zu den beiden gegebenen Winkeln festgelegt ist. Die eindeutige Construierbarkeit folgt dann aus dem Kongruenzsatz WSW (und ggf. dem Innenwinkelsummensatz). Ansonsten können Dreiecke aus drei verschiedenen Kongruenzklassen entstehen, die aber alle ähnlich zueinander sind (vgl. Abbildung 13.13 (3)).
K4	Winkel $\alpha, \beta, \gamma \in]0, \pi[$ (Drei Winkel)	Es muss $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ gelten.	Nicht eindeutig konstruierbar, aber alle möglichen Zieldreiecke sind ähnlich zueinander.

Tabelle 13.2: Übersicht über typische Dreieckskonstruktionsaufgaben (mit dem Werkzeug ZuL) und deren Randbedingungen. Entartete Dreiecke werden in dieser Übersicht ausgeschlossen.

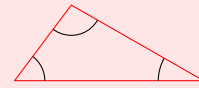
Wie schon im vorangegangenen Abschnitt über grundsätzliche Zugänge zum Kongruenzbegriff werde ich auch zum Zusammenhang zwischen Kongruenz und Konstruktion einige reale Schulbuchauszüge analysieren. Der Schwerpunkt der Analysen liegt dabei auf Beispielen für didaktisch motivierte Umformulierungen der Kongruenzsätze (die in ihrer üblichen Formulierung eine Aussage über zwei existierende Dreiecke machen) mit einer stärkeren Fokussierung auf die Lösung von Konstruktionsproblemen. Im *Lambacher Schweizer 7* (sowohl *Lambacher Schweizer QP NRW* (2015, S. 155) als auch *Braun et al., 2020, S. 180*) und in der letzten Version von *Fundamente der Mathematik 7* (Pallack, 2014, S. 175 ff.) findet so eine Umformulierung nicht statt, und die Kongruenzsätze werden in der üblichen, relationalen Form formuliert. In der aktuellen Version von *Fundamente der Mathematik* verhält es sich anders:

Schulbuchauszug 9 (Fundamente der Mathematik 7, NRW, G9)

Kongruenzsatz SSS

Wissen

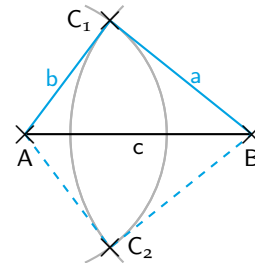
Ein Dreieck ist eindeutig konstruierbar, wenn alle drei Seitenlängen gegeben sind.



Beispiel 1: [Im Original steht hier die passende Konstruktionsanleitung.]

Man hätte die Seiten a und b aus Beispiel 1 auch „nach unten“ abtragen können. Beide Lösungsdreiecke sind deckungsgleich, also kongruent. Sie entstehen durch Spiegelung aus dem jeweils anderen Dreieck.

Die Konstruktion eines Dreiecks bei drei gegebenen Seitenlängen ist eindeutig bis auf Kongruenz.



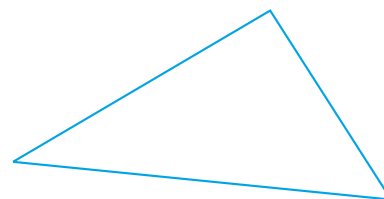
(Text und Bild nach Pallack, 2020, S. 118)

Die in Schulbuchauszug 9 genutzte Variante des Kongruenzsatzes SSS verkürzt die Aussage des eigentlichen Kongruenzsatzes (z. B. mathematische Bemerkung 13.1.11 (S. 163)) dadurch, dass nur dessen Konsequenz für die Konstruktion von Dreiecken aus drei Längenangaben formuliert wird. Die Aussage ist damit nicht relationaler Natur und bildet folglich auch keine Grundlage für geometrisches Schließen (siehe nächster Abschnitt, S. 185 f.). Darüber hinaus wird in der gewählten Formulierung eine wichtige Voraussetzung nicht expliziert: Bedingung für die eindeutige Konstruierbarkeit ist, dass überhaupt ein Dreieck mit den angegebenen Seitenlängen existiert (also alle Varianten der strikten Dreiecksungleichung erfüllt sein müssen, vgl. Tabelle 13.2, K1). Die anschließende Begründung für die Aussage bezieht die *Eindeutigkeit* darauf, dass die bei der Konstruktion entstehenden Zirkel-Kreise zwei Schnittpunkte haben, die auf zwei zueinander gespiegelten, also kongruenten Dreiecken liegen. Dies ist allerdings nur ein Spezialfall in einer speziellen Konstruktionsanleitung, aus dem die eindeutige Konstruierbarkeit nicht gefolgert werden kann, da weder Konstruktionen betrachtet werden, bei denen mit einer anderen Seite gestartet wird, noch Konstruktionen, die an einer anderen Stelle der Zeichenebene stattfinden.

Eine ähnliche Formulierung wie in Schulbuchauszug 9 findet man auch in der letzten Ausgabe von *Neue Wege 7* (Körner et al., 2014, S. 192)⁷⁹. In der aktuellen Version findet sich eine Mischform aus der üblichen relationalen Formulierung der Kongruenzsätze mit einem Verweis auf entsprechende Konstruktionen (Schulbuchauszug 10).

Schulbuchauszug 10 (Mathematik Neue Wege 7, G9)

SSS Wenn zwei Dreiecke in den entsprechenden Seitenlängen übereinstimmen, sind sie kongruent. Sie sind dann eindeutig konstruierbar.



(Text und Bild nach Körner et al., 2020, S. 144)

⁷⁹Auch hier hat Hüsing (2018, S. 29 ff.) eine umfangreiche kritische Analyse vorgenommen.

Die relationale Formulierung der eigentlichen Aussage entspricht dem Standard. Die Bedeutung des Nachsatzes ist bei genauer Betrachtung allerdings unklar. Das „Sie“ muss sich auf die beiden Dreiecke aus dem ersten Satz beziehen, über die man weiß, dass sie „in den entsprechenden Seitenlängen übereinstimmen“. Zusammen mit dem „dann“ ergibt sich die folgende Implikation: Daraus, dass zwei Dreiecke in drei Seitenlängen übereinstimmen, folgt, dass die beiden Dreiecke eindeutig konstruierbar sind. Diese Aussage ist nicht sinnvoll, da unklar ist, was es heißen soll, dass zwei Dreiecke eindeutig konstruierbar sind.

Ich habe zu Beginn dieses Abschnitts die subtilen Zusammenhänge zwischen dem Kongruenzbegriff und Konstruktionsproblemen (insbesondere von Dreiecken) herausgearbeitet. Dabei wurde besonders die Unterscheidung zwischen *Existenz* und *Eindeutigkeit* von Zielkonfigurationen deutlich (Tabelle 13.2). Im Feld der Dreieckskonstruktionen kann die Eindeutigkeit (alle möglichen Zielkonfigurationen sind kongruent) unter Verwendung der Kongruenzsätze begründet werden. Die Umkehrung funktioniert nicht: Aus einer Konstruktionsbeschreibung für ein Konstruktionswerkzeug kann nicht auf die Gültigkeit von Kongruenzsätzen geschlossen werden. Die Analyse aktueller Schulbücher zeigt eine deutliche Tendenz zur Verkürzung dieser Zusammenhänge auf, die die Gefahr birgt, dass die logischen Abhängigkeiten der einzelnen Definitionen und Aussagen im Sinne einer lokal geordneten Theorie unklar bis falsch werden.

Vorschläge zum schulischen Begründen von Kongruenzsätzen

Im letzten Abschnitt habe ich die Rolle geschildert, die die Kongruenzsätze für Dreiecke für die Begründung der Eindeutigkeit geometrischer Konstruktionen spielen. In diesem Kontext habe ich bereits zwei alternative Schulbuch-Formulierungen von SSS (Schulbuchauszüge 9, 10) besprochen. Sowohl in diesen Beispielen als auch in den anderen untersuchten Schulbüchern (in denen die Kongruenzsätze in der üblichen, relationalen Form formuliert werden) folgen auf die Nennung der Aussage keine Argumente für ihre Gültigkeit. Aus diesem Grund möchte ich in diesem Abschnitt ein mögliches Vorgehen zur didaktisch reduzierten Begründung der Kongruenzsätze beschreiben.

Eine Begründung der Kongruenzsätze im gymnasialen Mathematikunterricht – auch wenn sie in aktuellen Schulbüchern nicht vorkommt – ist – wenn sie in intellektuell ehrlicher Weise praktisch machbar ist – vor dem Hintergrund der zweiten Winterschen Grunderfahrung⁸⁰ sinnvoll und liefert ein Beispiel für eine lokal geordnete Theorie. Werden die Kongruenzsätze nicht begründet, steht die Definition von Kongruenz im ungünstigsten Fall völlig unverbunden zum unterrichtlichen Agieren im Kontext des Kongruenzbegriffs und ist damit praktisch bedeutungslos. Das Konzept „Kongruenz“ erhält seine Bedeutung in diesem Fall nur durch die Kongruenzsätze. Eine Begründung der Kongruenzsätze hängt ganz offensichtlich von der verwendeten Definition des Kongruenzbegriffs ab (vgl. S. 170 ff.). Außerdem zeigen die Überlegungen im vorigen Abschnitt (S. 179), dass eine Begründung der Kongruenzsätze nicht über geometrische Konstruktionen mit ZuL geschehen kann. Ich möchte im Folgenden einen Vorschlag zur Begründung des Kongruenzsatzes SWS vorstellen, der vom Grundgedanken her auch auf eine Begründung der anderen Kongruenzsätze übertragbar ist. Die Argumentation baut auf einem abbildungsgeometrischen Kongruenz-Zugang auf und hat das Potenzial, auf verschiedenen Darstellungs- und Elementarisierungsebenen genutzt werden zu können. Ich schildere das Argumentationsgerüst, auf dem dann, entsprechend der adressierten Lerngruppe, eine Unterrichtssequenz aufgebaut werden könnte. Die Kernidee ist, das „Ausschnei-

⁸⁰„[...] mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfung, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen und zu begreifen, [...]“ (Winter (1995, S. 37 f.), vgl. auch Seite 11)

den und zur Deckung bringen“ durch planvolles Nutzen geometrischer Abbildungen in verallgemeinerbarer Weise zu systematisieren. Das folgende Vorgehen ist zusätzlich in Abbildung 13.14 visualisiert.

o. *Vermutung*: Zwei Dreiecke, die in zwei Seitenlängen und der Größe des eingeschlossenen Winkels übereinstimmen, sind kongruent, man kann also das eine Dreieck immer auf das andere Dreieck legen („kongruent“ bedeutet „deckungsgleich“).

1. *Verschiebe* das eine Dreieck so, dass die Scheitelpunkte der beiden übereinstimmenden Winkel aufeinander liegen.

Begründung (inhaltlich-anschaulich): Das geht immer, weil man immer eine Verschiebung finden kann, die einen Punkt auf einen anderen bringt.

2. *Drehe* das verschobene Dreieck so um den Scheitelpunkt des gemeinsamen Winkels, dass die beiden Schenkel aufeinander liegen.

Begründung (inhaltlich-anschaulich): das geht immer, weil die Winkel gleich groß sind.

3. Entweder man ist jetzt fertig, oder die beiden Seiten mit bekannter Länge sind genau vertauscht. Dann wird das Dreieck so *umgewendet*, dass die beiden Schenkel des gemeinsamen Winkels vertauscht aufeinanderliegen. Nun liegen die Dreiecke genau aufeinander.

Begründung (inhaltlich-anschaulich): Das geht immer, weil die Spiegelung an der Winkelhalbierenden genau die Schenkel des Winkels vertauscht. Außerdem ändert eine Spiegelung nichts an der Deckungsgleichheit.

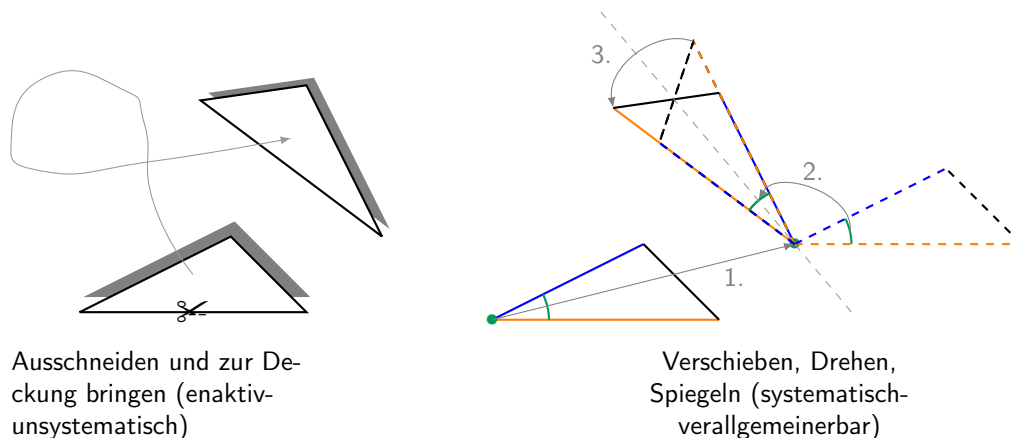


Abbildung 13.14: Planvolles Nutzen geometrischer Abbildungen beim Beweis von SWS.

Natürlich kann man für ein oder mehrere einzelne Paare von Dreiecken die Deckungsgleichheit sofort durch Ausschneiden verifizieren (Abbildung 13.14, links). Für eine Begründung des Kongruenzsatzes bedarf es aber eines Nachweises der Deckungsgleichheit von *allen* (überabzählbar vielen) Paaren von Dreiecken, die in den gewünschten Größen übereinstimmen. Das vorgeschlagene Vorgehen ist systematisch-verallgemeinerbar (Abbildung 13.14, rechts) und stellt einen generischen Beweis (Biehler & Kempen, 2016, S. 166 ff.) für den Kongruenzsatz SWS dar. Dabei fällt insbesondere die Tatsache ab, dass Spiegelungen, Drehungen und Verschiebungen als Vorrat geometrische Abbildungen für diese Kongruenzbetrachtungen ausreichen (und es z.B. nicht noch der Gleitspiegelung bedarf).

Da zwei beliebige, kongruente Dreiecke immer insbesondere in zwei Seitenlängen und der Größe des eingeschlossenen Winkels übereinstimmen, also in der beschriebenen Weise systematisch ineinander überführt werden können, liefert das vorgeschlagene Vorgehen darüber hinaus die Grundlagen für die interessante Einsicht, dass man zwei beliebige kongruente Dreiecke *immer* durch die Verknüpfung von jeweils maximal einer Verschiebung, Drehung und Spiegelung ineinander überführen kann.

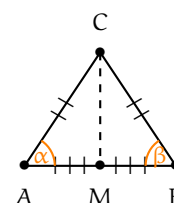
Auch für den Beweis des Kongruenzsatzes SSS (siehe mathematische Bemerkung 13.1.11) ist eine abbildungsgeometrische Elementarisierung denkbar, die aus drei Spiegelungen bzw. dreimaligem Umwenden besteht und eine anspruchsvolle Anwendung für die Ortslinieneigenschaft der Mittelsenkrechten darstellt. Dieses Argument führt dann zu einer weiteren Einsicht über das Überführen kongruenter Dreiecke: Neben der oben beschriebenen Nutzung von Verschiebung, Drehung und Spiegelung können auch immer maximal drei Geradenspiegelungen genutzt werden. Diese Erkenntnis führt dann unmittelbar zum Dreispiegelungssatz (mathematische Bemerkung 7.2.6). Dieser ist zwar kein verpflichtender Bestandteil des Mathematikunterrichts, bietet aber großes Potenzial für binnendifferenziertes mathematisches Arbeiten im Rahmen von Projekten oder Facharbeiten.

Kongruenz als Mittel zum geometrischen Schließen (Kongruenzbeweis)

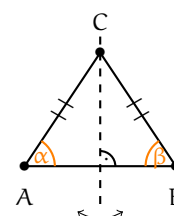
Das Begründen und Beweisen ist neben den Konstruktionen (siehe voriger Abschnitt) der zweite wichtige Anwendungsfall von Kongruenz und Kongruenzsätzen im Mathematikunterricht (Weigand et al., 2014, S. 202). Typisch für diese sogenannte *Kongruenzmethode* ist die Nutzung von Kongruenzsätzen zum Finden kongruenter Teilfiguren einer Beweisfigur. Auf diese Weise kann dann auf die Gleichheit anderer Längen und Winkel geschlossen werden (Holland, 2007, S. 128 f.). In der Literatur zum geometrischen Beweisen wird dem Kongruenzbeweis der sogenannte *Abbildungsbeweis* gegenübergestellt (Holland, 2007, S. 128 f. ; Weigand et al., 2014, S. 207 ff.), bei dem die Gleichheit von Längen und Winkeln aus Invarianzeigenschaften geometrischer Abbildungen gefolgert wird. Zur Verdeutlichung wird im folgenden Beispiel der *Basiswinkelsatz* auf beide Weisen bewiesen.

Beispiel. In einem gleichseitigen Dreieck sind die Basiswinkel gleich groß.

1. *Kongruenzbeweis:* Die beiden Teildreiecke $\triangle AMC$ und $\triangle MBC$ sind nach dem Kongruenzsatz SSS kongruent. Somit stimmen sie in allen entsprechenden Winkeln überein. Es folgt $\alpha = \beta$.



2. *Abbildungsbeweis:* C liegt wegen der Ortslinieneigenschaft auf der Mittelsenkrechten von A und B. Somit vertauscht die Spiegelung an dieser A und B und hält C fest. Damit werden die beiden Basiswinkel aufeinander abgebildet und sind damit gleich groß.



Bezogen auf den Einsatz im Mathematikunterricht, nennen Weigand et al. (2014, S. 208) Vor- und Nachteile für beide Beweismethoden:

Vorteile von Kongruenzbeweisen:

- Die Voraussetzungen der vier Kongruenzsätze sind leichter überschaubar als die Eigenschaften von Abbildungen bei der Abbildungsmethode.
- Um die Abbildungsmethode anwenden zu können, muss man erst geeignete Abbildungen finden und deren Eigenschaften jeweils sehr genau kennen.
- Das statische Vergleichen gegebener Größen (Längen, Winkelmaße) erscheint einfacher als das „dynamische“ Abbilden der Figuren.

Vorteile von Abbildungsbeweisen:

- Abbildungsbeweise lassen sich gut auf verschiedenen Darstellungsebenen realisieren. Sie können insbesondere enaktiv mittels Transparentpapier oder ikonisch mit einem DGS realisiert werden.
- Bei vorhandenen Symmetrien geometrischer Figuren liegt es nahe, die diesen Symmetrien zugrunde liegenden Abbildungen explizit zu betrachten.
- Bei der Abbildungsmethode treten die Zusammenhänge zwischen den betrachteten Figuren bzw. Eigenschaften der Figuren deutlicher hervor als bei der Kongruenzmethode.

Holland (2007, S. 130 ff.) argumentiert in ähnlicher Weise und betont bei Abbildungsbeweisen das Potenzial der differenzierten Betrachtung desselben Arguments auf unterschiedlichen Darstellungsebenen. Damit sind sie in besonderer Weise für präformale Begründungen in realen Kontexten geeignet, bei denen die exakte Formalisierung nicht im Fokus steht. Im Gegensatz dazu sieht er Kongruenzbeweise aufgrund ihres klar umgrenzten Werkzeugkastens als besonders geeignet, um das präzise Argumentieren auf der formalen Darstellungsebene zu erlernen. Didaktische Elementarisierungen der Argumentationen fallen jedoch deutlich schwerer als bei Abbildungsbeweisen.

Im vorigen Abschnitt 13.1.3 habe ich eine abbildungsgeometrische Begründung des Kongruenzsatzes SWS vorgeschlagen (und für SSS umrissen). Ich möchte anmerken, dass ein solcher ggf. inhaltlich-anschaulicher Abbildungsbeweis bei der Einführung der Kongruenzsätze die Nutzung der Kongruenzmethode nicht erschwert. Sind die Kongruenzsätze einmal eingeführt und begründet, ist das Fundament für Kongruenzbeweise gelegt.

Kongruenzbeweise nutzen Kongruenz genuin im Sinne des *Größenaspekts* (S. 168). Zusätzlich spielt der *Klassifikationsaspekt* (S. 169) eine wichtige Rolle, wenn es darum geht, basierend auf unvollständigen Informationen bereits auf Kongruenz von Teilfiguren der Beweisfigur schließen zu können.

Bis zu diesem Punkt habe ich die Nutzung von Kongruenzsätzen zum geometrischen Schließen in der Weise vorgestellt, dass durch die Kongruenzsätze nützliche Kongruenzbeziehungen in einer Beweisfigur aufgedeckt wurden. Ich bin noch nicht darauf eingegangen, inwieweit die Kongruenzsätze dazu geeignet sind, Nicht-Kongruenz zu beweisen. Dies ist Bestandteil des letzten Teils dieses Abschnitts.

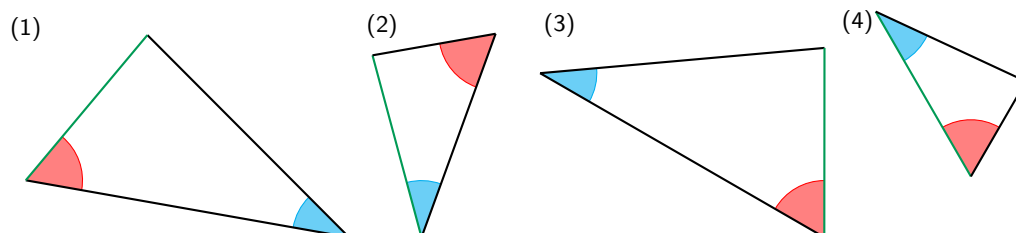
Es ist klar, dass es Kongruenzsätze ermöglichen, aus der Gleichheit gewisser bekannter Größen zweier Figuren auf die Kongruenz dieser Figuren zu schließen. Die Frage, ob bzw. wann man aus der Ungleichheit von bekannten Größen zweier Figuren auf die Nicht-Kongruenz schließen kann, ist subtil. Zwar ist evident, dass zwei Dreiecke, die nicht in allen drei Seitenlängen übereinstimmen auch nicht kongruent sind, doch in Fällen, in denen nicht alle Seitenlängen, aber dafür auch

Winkel gegeben sind wird die Sache komplexer. Diese Situation ist professionsnah und stellt sich beispielsweise im Kontext der Aufgabe in Schulbuchauszug 11.

Schulbuchauszug 11 (Mathematik Neue Wege 7)

Die Dreiecke haben alle eine Seite der Länge 2,5 cm und Winkel von 35° und 60° .

- Welche Dreiecke sind kongruent zueinander? Begründe.
- Konstruiere die Dreiecke in deinem Heft. Bei welchen Dreiecken musst du hierfür eine zusätzliche Größe bestimmen?



(Text und Bild nach Körner et al., 2014, S. 193)

Ich möchte an diesem Beispiel die Frage nach der Begründung von Nicht-Kongruenz exemplarisch diskutieren und erläutere dazu die Argumente für die Nicht-Kongruenz von (2) und (4): In beiden Dreiecken findet man den roten Winkel, den blauen Winkel und die grüne Seite. Trotzdem folgt die Kongruenz nicht aus WSW, da die entscheidende Voraussetzung, dass in beiden Dreiecken die gegebene Länge zu der Seite gehören muss, die zwischen den beiden gegebenen Winkeln liegt, nur in (4), nicht aber in (2) erfüllt ist. Daraus folgt aber nicht automatisch, dass die Dreiecke nicht kongruent sind, sondern nur, dass man in der gegebenen Situation den Kongruenzsatz nicht anwenden kann, denn wären die beiden Dreiecke gleichschenkelig, dann wären sie trotzdem kongruent (vgl. Abbildung 13.15).

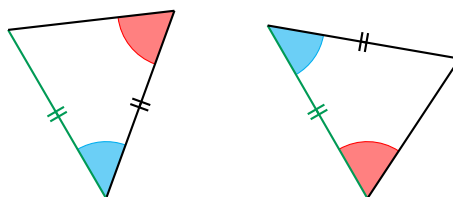


Abbildung 13.15: Wegen der Gleichschenkligkeit sind die beiden Dreiecke kongruent, auch wenn die Ausgangssituation für die Anwendung von WSW nur im rechten Dreieck gegeben ist.

Dass die Dreiecke in (2) und (4) nicht gleichschenkelig sind, folgt aus den gegebenen Winkelgrößen: Mit dem Innenwinkelsummensatz muss der dritte Winkel 85° betragen. Diesen Winkel benötigt man auch zum Nachweis der Kongruenz von (1) und (3). Auch hier ist WSW auf die gegebene Situation nicht anwendbar, allerdings liegt die Seite, deren Länge bekannt ist, in beiden Fällen zwischen dem roten und dem nicht gegebenen (aber berechenbaren) Winkel.

Das Beispiel zeigt, dass aus der *Nichtanwendbarkeit* eines Kongruenzsatzes (hier WSW) – weil die bekannten Größen nicht in der richtigen Relation zueinander stehen – nicht automatisch die Nicht-Kongruenz gefolgert werden kann. In einem solchen Fall sind zusätzliche, geometrische Überlegungen notwendig. Diese beinhalten im vorgestellten Beispiel die Erkenntnis, dass die Dreiecke

trotzdem kongruent sind, falls sie gleichschenkelig wären und weiter den Ausschluss ebendieser Möglichkeit unter Benutzung des Innenwinkelsummensatzes.

Kongruenz und Ähnlichkeit

Als letzter Bestandteil der Analysen zur Rolle von *Kongruenz* im Mathematikunterricht, möchte ich kurz auf den Zusammenhang zum verwandten Konzept *Ähnlichkeit* eingehen. Aus fachlicher Sicht sind *Kongruenz* und *Ähnlichkeit* unterschiedliche Begriffe, die in einer Teilmengenbeziehung zueinander stehen: Während zwei kongruente Figuren stets immer auch ähnlich zueinander sind, gilt die Umkehrung im Allgemeinen nicht. Auch im Mathematikunterricht werden die beiden Begriffe unterschiedlichen Jahrgangsstufen zugeordnet: *Kongruenz* wird in Klasse 7/8 im Kontext von Konstruktionen und Dreiecksbetrachtungen eingeführt (MSW NRW, 2019, S. 30); *Ähnlichkeit* ist Thema in den Jahrgangsstufen 9/10 (MSW NRW, 2019, S. 34). Nichtsdestotrotz kommt es im Mathematikunterricht zu einer Vermischung der beiden Begriffe, die von Lehrkräften zumindest kritisch reflektiert und ggf. auch mit den SuS diskutiert werden sollte: Im Kontext von Kongruenzsätzen und Dreieckskonstruktionen finden sich in üblichen Schulbüchern (z.B. *Lambacher Schweizer* (Braun et al., 2020, S. 176), *Fundamente* (Pallack, 2020, S. 124), *Neue Wege* (Körner et al., 2020, S. 148)) Aufgaben, bei denen eine Größe in einer Realsituation durch eine maßstabgetreue Dreieckskonstruktion ermittelt wird. Die Eindeutigkeit der Konstruktion und damit die Wohldefiniertheit des Ergebnisses wird dabei über die Kongruenzsätze begründet. Wegen der Maßstabsveränderung erhält man also eine Konstruktion, die eindeutig bis auf Kongruenz und Maßstab ist. Das ist dann aber genau eine Definitionsmöglichkeit für den *Ähnlichkeitsbegriff*. Fachlich ist das Vorgehen dadurch begründet, dass die Anwendung von zentrischen Streckungen und Isometrien kommutieren. Hüsing (2018, S. 13 f.) beschreibt dieses Vorgehen unter dem Begriff *Konstruktionsmethode* exemplarisch für ein Schulbuch.

Während der Zugang zum Kongruenzbegriff über den Formbegriff (und damit über den Ähnlichkeitsbegriff) aus den oben ausgeführten Gründen (vgl. 170) problematisch ist, zeigt die *Konstruktionsmethode* eine Möglichkeit auf, den Ähnlichkeitsbegriff lebensweltnah auf dem Kongruenzbegriff als „kongruent bis auf die Wahl des Maßstabs“ einzuführen. Es bietet sich dann an, kritisch zu reflektieren, welche Aussagekraft die Kongruenzsätze im Kontext ähnlicher Figuren haben.

Abschließendes zur Rolle des Kongruenzbegriffs im Mathematikunterricht

In diesem Abschnitt habe ich die Rolle, die *Kongruenz* im gymnasialen Mathematikunterricht spielt, aus verschiedenen Perspektiven beleuchtet. Dabei habe ich zunächst unterschiedliche Zugänge zum Kongruenzbegriff aus fachdidaktischer Literatur und aktuellen Schulbüchern diskutiert (S. 170 ff.) und bin dann auf die Nutzung von Kongruenz (und vor allem der Kongruenzsätze für Dreiecke) für Konstruktionen (S. 179 ff.) und zum geometrischen Schließen (S. 185 ff.) eingegangen. Zusätzlich habe ich einen konstruktiven Vorschlag zum Beweisen der Kongruenzsätze im Mathematikunterricht unter Verwendung eines generischen Beweises vorgestellt (S. 183 ff.) und bin kurz auf den Zusammenhang zwischen *Kongruenz* und *Ähnlichkeit* eingegangen (S. 188 f.). Die Analysen und ihre Ergebnisse bilden die Grundlage für die Konzeption sinnvoller professionsorientierter Lerngelegenheiten zur Förderung fachdidaktischer Urteilskompetenz und sind damit ein wesentlicher Beitrag zur Spezifizierung der Schnittstelle *Kongruenz*.

13.1.4 Lernendenperspektive zur Kongruenz aus Sicht der Studierenden

Ein weiterer Bestandteil der Spezifizierung der Schnittstelle *Kongruenz* (Abschnitt 12.2.1) ist die Analyse der Lernendenperspektive (bezogen auf die Studierenden, für die die Schnittstellenlerngelegenheiten konzipiert werden). Mir sind keine empirischen Studien dazu bekannt, welche Vorstellungen zum Kongruenzbegriff Lehramtsstudierende typischerweise aus der Schule mitbringen und welche einschlägigen Fertigkeiten und Fähigkeiten zur Verfügung stehen. Aus diesem Grund kann die erste Einschätzung der gegenstandsbezogenen Lernendenperspektive nur auf Basis begründeter Vermutungen geschehen, die auf den geltenden curricularen Vorgaben und meinen Erfahrungen in der Lehramtsausbildung beruhen. Die Begleitforschung zur Schnittstellenwoche *Kongruenz* kann dann dazu beitragen die Lernendenperspektive weiter auszuschärfen.

Fest steht, dass Kongruenz ein Thema der Mittelstufengeometrie ist, das im Mathematikunterricht der Sekundarstufe II in der Regel keine weitere Rolle spielt (vgl. Abschnitt 4.1). Auch im Mathematik-Lehramtsstudium ist der Kongruenzbegriff üblicherweise kein Thema der typischen Grundvorlesungen (vgl. Abschnitt 4.2). Die gegenstandsbezogene Lernendenperspektive ergibt sich also aus den Fertigkeiten und Fähigkeiten, die aus dem Geometrieunterricht der Mittelstufe noch verfügbar sind. Erfahrungsgemäß gehören dazu eine inhaltlich-anschauliche Vorstellung zum Kongruenzbegriff und eine grobe Erinnerungen an die Kongruenzsätze SSS, SWS und WSW in Verbindung mit Konstruktionsaufgaben. Von der Kenntnis einer präzisen Definition von *Kongruenz* ist vor dem Hintergrund der obigen Analysen (S. 170 ff.) nicht auszugehen. Meiner Einschätzung und Erfahrung nach bilden Kongruenzsätze in Verbindung mit Dreieckskonstruktionen für viele Studierende (neben dem Satz des Pythagoras) ein prototypisches Thema des Mittelstufengeometrieunterrichts, mit dem zumindest anekdotische Erinnerungen verknüpft sind.

13.1.5 Auswahl und Sequenzierung der Inhalte zur Schnittstelle *Kongruenz*

Ich möchte nun die Erkenntnisse der letzten Abschnitte nutzen, um eine lehr-lern-bezogene Strukturierung (Abschnitt 12.2.1) der Schnittstelle *Kongruenz* vorzunehmen. Die entsprechenden gegenstandsspezifischen Lernziele zu Schnittstellenlerngelegenheiten bestehen aus einem fundierten Verständnis der zugrundeliegenden Fachmathematik sowie aus Lernzielen, die zur Förderung gegenstandsspezifischer fachdidaktischer Urteilskompetenz (S. 36) beitragen und dabei die in Abschnitt 2.1 vorgestellten mathemathikhaltigen Handlungsanforderungen sowie die dort herausgearbeiteten Funktionen fachmathematischen Wissens und Könnens für professionelles Lehrerhandeln berücksichtigen.

Die Lerngelegenheiten zur Schnittstelle *Kongruenz* sollen ein Beitrag zum Erreichen der folgenden Lernziele leisten: Die Studierenden . . .

- K1. haben ein fundiertes mathematisches Verständnis des Kongruenzbegriffs im Kontext des euklidischen Raums \mathbb{R}^2 und im Kontext von Saccheri-Ebenen (vgl. Abschnitt 13.1.1),
- K2. kennen die Schnittstellenaspekte zum Kongruenzbegriff, und können sie nutzen um zu analysieren, welche fachlichen Facetten des Kongruenzbegriffs in einer professionsorientierten Handlungssituation relevant sind (vgl. Abschnitt 13.1.2),
- K3. können reale *Zugänge* zu Kongruenz und Kongruenzsätzen aus fachlicher Perspektive *analysieren und bewerten* (vgl. Abschnitt 14.1.3),

- K4. können schultypische Konstruktionsaufgaben (inkl. der Begründung von Durchführbarkeit und Korrektheit) *bewältigen und auf verschiedenen Niveaus bearbeiten* (vgl. Abschnitt 13.1.3),
- K5. können schultypische Kongruenzbeweise (auch im Vergleich zu Abbildungsbeweisen) *bewältigen und auf verschiedenen Niveaus bearbeiten* (vgl. Abschnitt 13.1.3),
- K6. können reale Aufgabenstellungen (z. B. aus Schulbüchern) zu Kongruenzsätzen, Konstruktionsaufgaben und/oder Kongruenzargumentationen *bewältigen und auf verschiedenen Niveaus bearbeiten*,
- K7. können reale oder fiktive Schülerlösungen/-äußerungen aus (schwerpunktmäßig) mathematischer Perspektive *analysieren, bewerten und darauf lernförderlich* (im Rahmen des aktuellen Ausbildungsstandes) *reagieren*.

Zunächst wird die Nutzung des fachmathematischen Wissens und Könnens zu Kongruenz vor allem in der Funktion als *Ressource* und *legitimierender Hintergrund* (Abschnitt 2.3.1) für professionelles Lehrerhandeln in den Blick genommen. Ich werde später (Kapitel 15) Überlegungen darstellen, wie auch die anderen beiden Funktionen expliziert adressiert werden können.

Die fachinhaltliche Beschäftigung mit dem Thema findet in der Veranstaltung *Geometrie für Lehramtsstudierende* verteilt über mehrere Veranstaltungswochen statt. Diese Wochen sind in Tabelle 13.3 (entnommen aus Abschnitt 7.2, Tabelle 7.1 (S.64)) farbig markiert. Im ersten Teil der Vorlesung werden Kongruenz und Kongruenzsätze zunächst im euklidischen Raum \mathbb{R}^2 eingeführt (Woche 1 und 3 in Tabelle 13.3) und damit die Schnittstellenwoche *Kongruenz* vorbereitet (Woche 5 in Tabelle 13.3). Später wird der Kongruenzbegriff dann noch einmal im Kontext der Saccheri-Ebene behandelt, und die Kongruenzsätze werden erneut und in größerer Allgemeinheit bewiesen (Woche 9 in Tabelle 13.3). Dabei können allerdings nahezu dieselben Argumentationen wie im euklidischen Fall genutzt werden (siehe Abschnitt 7.3.2 und insb. Abbildung 7.2). Im Kontext der Definition des Kongruenzbegriffs direkt in der ersten Woche werden bereits unterschiedliche definitorische Zugänge (auch mit Blick auf den Mathematikunterricht) im Sinne der obigen Analysen (S. 170 ff.) diskutiert und verglichen.

In der Schnittstellenwoche wird das Thema *Kongruenz*, aufbauend auf der bereits vollzogenen fachinhaltlichen Klärung, aus professionsorientierter Perspektive betrachtet. Dazu gehört die Vorstellung der Schnittstellenaspekte (vgl. Abschnitt 13.1.2) sowie professionsorientierte Beschäftigung mit den in Abschnitt 13.1.3 als relevant für den Mathematikunterricht identifizierten Schwerpunkten *Konstruktionen* (S. 179 ff.), *geometrisches Schließen* (S. 185 f.) und *Kongruenz und Ähnlichkeit* (S. 188) im Sinne der oben vorgestellten Lernziele.

13.2 Überblick über die Gestaltung der Schnittstellenwoche *Kongruenz*

In diesem Abschnitt stelle ich die Lehr-Lern-Aktivitäten vor, die basierend auf den Überlegungen aus Abschnitt 13.1 und unter Berücksichtigung der generellen Entwurfsprinzipien (vgl. Abschnitt 3.3, S. 35) im Kontext der Schnittstellenwoche *Kongruenz* eingesetzt wurden. Nach einem Kurzüberblick über die Ausgestaltung der zugehörigen Vorlesung (Abschnitt 13.2.1) folgt eine tabellarische Vorstellung der eingesetzten Übungsaufgaben in der Präsenzübung (Abschnitt 13.2.2) und der eingesetzten ePortfolio-Aktivitäten (Abschnitt 13.2.3). Die hier vorgestellten Materialien spiegeln den

Inhaltsübersicht	
<i>Teil 1: Geometrie mit Mitteln der linearen Algebra</i>	
1	Organisation, Geometrie und lineare Algebra, Kongruenz, euklidische Isometrien
2	Euklidische Spiegelungen, Projektionen und Rotationen
3	Mittelsenkrechten, der Kongruenzsatz SSS und der euklidische Dreispiegelungssatz
4	Systematisierung der euklidischen Abbildungsgeometrie
5	Schnittstellenwoche Kongruenz
<i>Teil 2: Geometrie in metrischen Räumen</i>	
6	Geometrische Grundbegriffe in metrischen Räumen: Kreise, Geraden, Isometrien
7	Inzidenzaxiom, Spiegelungsaxiom und Saccheri-Ebenen, Orthogonalität
8	Punktspiegelungen und Mittelsenkrechten
9	Kongruenzsätze, Dreispiegelungssatz, Winkel sowie Winkelsätze, die das Parallelenaxiom nicht benötigen
10	Symmetrie
11	Schnittstellenwoche Symmetrie
<i>Teil 3: Geometrie mit Parallelenaxiom</i>	
12	Axiomatisierung, Parallelenaxiom und obere Halbebene, inkl. mathematikhistorischer Hintergründe
13	Vektorraum der Parallelverschiebungen
14	Strahlensatz und Hauptsatz (isometrische Isomorphie zu (\mathbb{R}^2, d_2))

Tabelle 13.3: Inhaltlicher Überblick basierend auf Tabelle 7.1 (S. 64). In den markierten Wochen finden Lehr-Lernaktivitäten zur Schnittstelle *Kongruenz* statt.

Stand des Materials nach drei Veranstaltungszyklen wieder. Dabei werde ich jeweils anmerken, in welchem Zyklus Veränderungen vorgenommen wurden. Abschließend werde ich in Abschnitt 13.2.4 exemplarisch einzelne der eingesetzten Aufgaben unter besonderer Berücksichtigung ihrer Zielsetzung vorstellen. Alle eingesetzten Aufgabenstellungen findet man darüber hinaus in Anhang C.

13.2.1 Kurzüberblick über die Vorlesung

Wie bereits in Abschnitt 13.1.5 beschrieben, findet die fachinhaltliche Behandlung des Kongruenzbegriffs und der Kongruenzsätze bereits im Vorlauf der Schnittstellenwoche statt. In der Vorlesung zur Schnittstellenwoche werden dann die verschiedenen Schwerpunkte angesprochen, die ich in Abschnitt 13.1.3 als besonders relevant für den Mathematikunterricht identifiziert habe. Eine Übersicht über die Gliederung findet man in Tabelle 13.4.

13.2.2 Überblick über die Aufgabenstellungen der Präsenzübungen

In den Präsenzübungen zur Schnittstellenwoche *Kongruenz* arbeiten die Studierenden in Kleingruppen. Eine Übersicht über die eingesetzten Aufgaben liefert Tabelle 13.5. Die Referenzen beziehen sich jeweils auf den Anhang C.1. Dort sind alle im Projekt eingesetzten Präsenzaufgaben aus den Schnittstellenwochen vollständig aufgelistet.

	Thema	Beschreibung	Bemerkung
1	Kongruenz und Konstruktion	Klärung der Zusammenhänge zwischen Kongruenz und Konstruktion mit folgenden Schwerpunkten: <ul style="list-style-type: none"> • (Werkzeug)-Konstruierbarkeit (vgl. S. 179 ff.) • eindeutige Konstruierbarkeit (vgl. S. 179 ff.) • ZuL-Konstruktionen im Mathematikunterricht (vgl. Weigand et al. (2014, S. 55 ff.)) 	Erst ab dem zweiten Zyklus.
2	Kongruenzsätze	Intellektuell ehrliche Begründungen auf verschiedenen Darstellungsebenen über planvolles Verschieben, Drehen und ggf. Spiegeln (vgl. S 183 ff.) Begründung von Nicht-Kongruenz mit Hilfe der Kongruenzsätze (vgl. S. 186 f.) Kommunikation der Ausgangskonfiguration (textuell vs. geometrisch) und damit verbunden das Übertragen von Strecken und Winkeln mit ZuL (vgl. Material 3 (S. 401) und Material 2 (S. 401)). Ab dem 2. Zyklus gab es zusätzlich ein Erklärvideo zum Übertragen von Winkeln mit ZuL.	Erst ab dem zweiten Zyklus. Erst ab dem dritten Zyklus, vorher in den Präsenzübungen.
3	Schnittstellenaspekte	Vorstellung und Einordnung der Schnittstellenaspekte zum Kongruenz-Begriff (vgl. Abschnitt 13.1.2)	
4	Die Konstruktionsmethode	Fachliche Einordnung der Ermittlung unbekannter Größen mithilfe maßstabsgetreuer Dreieckskonstruktionen (vgl. S. 188)	
5	Kongruenzbeweise	Kongruenzbeweise und Abbildungsbeweise am Beispiel des Basiswinkelsatzes (vgl. S. 185)	
6	Abschluss	Abschließende Zusammenfassung der Bedeutung des Kongruenzbegriffs für den Geometrieunterricht unter Einbeziehung der Schnittstellenaspekte	Erst ab dem zweiten Zyklus.

Tabelle 13.4: Gliederung der Vorlesung zur Schnittstellenwoche *Kongruenz*. Die Tabelle stellt die Gliederung nach dem dritten Veranstaltungszyklus (Sommersemester 2020) dar. In der Bemerkungsspalte ist notiert, welche der Themen nicht schon im ersten Veranstaltungszyklus enthalten waren.

13.2.3 Überblick über die ePortfolio-Aktivitäten

Der Einsatz von Schreibaufträgen für das Schnittstellen-ePortfolio zur Schnittstelle *Kongruenz* beschränkt sich nicht ausschließlich auf die eigentliche Schnittstellenwoche. In Tabelle 13.6 wird ein Überblick über die entsprechenden Aufgaben gegeben.

Aufgabe	Beschreibung	Bemerkungen zum Einsatz der Aufgaben
Konstruktionen entlang der Kongruenzsätze (Präsenzübung 1 (S. 380))	Dreieckskonstruktionen passend zu den Kongruenzsätzen SSS, SWS und WSW; Die Studierenden erstellen Konstruktionsbeschreibungen und führen anschließend Konstruktionen nach den Beschreibungen des Sitznachbarn aus. Innerhalb der Gruppe werden abschließend die Erfahrungen reflektiert.	In Zyklus 1 und 2 zusätzlich mit Konstruktionsbeschreibungen zum Antragen von Strecken und Winkel (Material 2 (S. 401)); in Zyklus 2 und 3 zusätzlich noch ein Lernvideos zum Antragen von Strecken und Winkeln mit ZuL; in Zyklus 2 und 3 zusätzlich mit einer Übersicht über die ZuL-Grundkonstruktionen (Material 1 (S. 401))
Winkel abtragen (Präsenzübung 2 (S. 381))	Am Beispiel der Konstruktion eines reflektierenden Lichtstrahls vergleichen die Studierenden das Abtragen von Winkeln mit ZuL und das Übertragen mit Hilfe des Geodreiecks. Die Aufgabe war auch als Zusätzliche Übung zum ZuL-Abtragen von Winkeln gedacht.	Nur in Zyklus 2.
Planskizzen in Konstruktionsaufgaben (Präsenzübung 3 (S. 382))	Die Studierenden vergleichen Aufgabenstellungen zu Konstruktionen mit und ohne Planskizze und diskutieren die Einschränkungen, die sich aus einer vorgegebenen Planskizze für die korrekten Lösungen ergeben. Ein wichtiger Aspekt ist, dass vorgegebene Planskizzen bei Dreieckskonstruktionen die Gefahr bergen, den „umorientierten“ Fall systematisch zu ignorieren.	Nur in den Zyklen 2 und 3.
Kongruenz von Vierecken (Präsenzübung 4 (S. 382))	Kontext der Aufgabe ist eine reale Schulbuchaufgabe über bewegliche und unbewegliche Gelenkvierecke. Die Studierenden bearbeiten die Aufgabe und diskutieren darauf aufbauend Ideen für Kongruenzsätze für Vierecke.	
Kongruente Würfelnetze (Präsenzübung 5 (S. 383))	Die Studierenden arbeiten im Kontext des Zählens von Würfelnetzen (nach Prediger und Hefendehl-Hebeker (2016, S. 249), siehe auch S. 18 in Abschnitt 2.3.2). Sie ordnen die Situation vor dem Hintergrund ihres neu erworbenen Wissens über Kongruenz (inkl. der Schnittstellenaspekte) ein und diskutieren alternative Reaktionen auf die Schüleräußerungen.	Nur in Zyklus 1.

Tabelle 13.5: Übersicht über die eingesetzten Präsenzaufgaben zur Schnittstellenwoche *Kongruenz*.

Aufgabe	Beschreibung	Bemerkungen zum Einsatz der Aufgaben
Wissenstand: Kongruenz (ePf-Aufgabe 2 (S. 388))	Die Studierenden dokumentieren ihr Vorwissen zum Kongruenzbegriff.	Einsatz vor der fachinhaltlichen Einführung in der Veranstaltung, direkt zum Semesterbeginn. Nur in den Zyklen 2 und 3.
Zwei Winkel und eine Seite (Pre) (ePf-Aufgabe 5 (S. 391))	Die Studierenden arbeiten im Kontext der Aufgabe aus Schulbuchauszug 11 (Kongruenzuntersuchungen bei Dreiecken mit zwei übereinstimmenden Winkeln und einer übereinstimmenden Seitenlänge). Die Aufgabe wird zunächst bearbeitet und anschließend eine fiktive SuS-Frage fachlich geklärt und eine Reaktion erarbeitet.	Einsatz vor der Schnittstellenwoche Kongruenz.
Konstruktion von Dreiecken (Pre) (ePf-Aufgabe 6 (S. 392))	Die Studierenden nennen und begründen Beispiele, in denen aus drei gegebenen Größen kein Dreieck konstruiert werden kann (im Sinne von Tabelle 13.2, Spalte 3). Anschließend wird in diesem Kontext eine fiktive SuS-Äußerung zur Aussage von Kongruenzsätzen im Bezug auf die Existenz von Konstruktionen fachlich geklärt und eine Reaktion erarbeitet.	Einsatz vor der Schnittstellenwoche Kongruenz.
Zwei Winkel und eine Seite (ePf-Aufgabe 7 (S. 393))	Die Studierenden beschäftigen sich erneut mit dem Kontext von ePf-Aufgabe 5 (S. 391) und verwenden dieses Mal das neu erworbene Wissen aus der Schnittstellenwoche (insb. die Schnittstellenaspekte). Anschließend reflektieren sie ihren Kompetenzzuwachs.	Einsatz in der Schnittstellenwoche Kongruenz.
Der Kongruenzsatz SsW (ePf-Aufgabe 8 (S. 393))	Die Studierenden entwickeln und erläutern eine GeoGebra-Datei, die für den Kongruenzsatz SsW verdeutlicht, warum die Voraussetzung, dass der gegebene Winkel gegenüber der längeren der beiden gegebenen Seiten liegt, entscheidend ist (vgl. auch Tabelle 13.2, Zeile K99.3).	Einsatz in der Schnittstellenwoche Kongruenz.
Konstruktion von Dreiecken (ePf-Aufgabe 9 (S. 394))	Die Studierenden beschäftigen sich erneut mit dem Kontext von ePf-Aufgabe 6 (S. 392) und verwenden dieses Mal das neu erworbene Wissen aus der Schnittstellenwoche (insb. die Schnittstellenaspekte). Anschließend reflektieren sie ihren Kompetenzzuwachs.	Einsatz in der Schnittstellenwoche Kongruenz.
Wechselwinkelsatz (ePf-Aufgabe 10 (S. 394))	Die Studierenden beweisen den Wechselwinkelsatz im \mathbb{R}^2 mit einem Abbildungsbeweis und einem Kongruenzbeweis. Den Kongruenzbeweis analysieren sie unter Nutzung der Schnittstellenaspekte und vergleichen abschließend die beiden Beweisverfahren.	Einsatz in der Schnittstellenwoche Kongruenz.

Tabelle 13.6: Übersicht über die eingesetzten ePortfolio-Aktivitäten zur Schnittstelle *Kongruenz*.

13.2.4 Detaillierte Vorstellung einzelner Schnittstellenaufgaben

In diesem Abschnitt werde ich exemplarisch eine der im Rahmen der Schnittstelle *Kongruenz* eingesetzten Präsenzaufgaben (*Kongruenz von Vierecken*, Präsenzübung 4 (S. 382)) und zwei der eingesetzten ePortfolioaufgaben (*Zwei Winkel und eine Seite*, ePortfolioaufgabe 7 (S. 393); *Wechselwinkelsatz*, ePortfolioaufgabe 10 (S. 394)) detaillierter vorstellen. Darüber hinaus gehe ich im Rahmen der Analyse von Lernendenvoraussetzungen zum Kongruenzbegriff (Abschnitt 13.3.3) noch ausführlich auf die ePortfolioaufgaben *Wissenstand: Kongruenz* (ePortfolioaufgabe 2 (S. 388)) ein und werte zugehörige Studierendenbearbeitungen aus.

Vorstellung der Schnittstellenaufgabe *Kongruenz von Vierecken*

Die Aufgabe *Kongruenz von Vierecken* (Präsenzübung 4 (S. 382)) wurde im Rahmen der Präsenzübungen zur Schnittstellenwoche *Kongruenz* eingesetzt und sollte von den Studierenden in Kleingruppen bearbeitet werden.

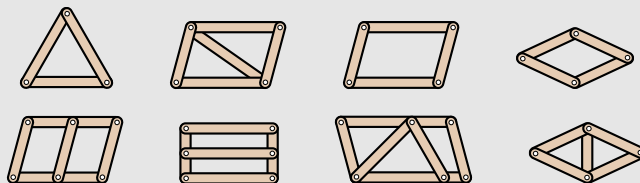
Aufgabenstellung: Kongruenz von Vierecken – Gruppenarbeit

Betrachten Sie folgende Schulbuchaufgabe aus *Neue Wege 7* (Körner et al., 2014, S. 195):

Gelenkvierecke

Stelle aus Lochstangen und Briefklammern verschiedene Vierecke und Dreiecke her. Welche dieser Figuren sind in ihrer Form festgelegt (starr), welche sind beweglich?

Erkläre deine Beobachtungen. Was hat der Kongruenzsatz SSS damit zu tun?



- Was hat diese Aufgabe mit dem Thema Kongruenz zu tun?
- Lösen Sie die Aufgabe: Überlegen Sie sich jeweils für jede der abgebildeten Figuren, ob diese beweglich ist oder nicht. Erklären Sie Ihre Beobachtungen und diskutieren Sie, welche Rolle der Kongruenzsatz SSS spielt.
- Überlegen Sie sich – basierend auf Ihren Überlegungen aus a) und b) – zwei Kongruenzsätze für Vierecke.

In der Aufgabe geht es um die Kongruenz von Vierecken. In Aufgabenteil a) müssen die Studierenden zunächst erklären, inwieweit die Beweglichkeit der „Gelenkvierecke“ etwas mit Kongruenz zu tun hat. Dies liefert einen Anlass zur Kommunikation über den in Abschnitt 13.1.3 (S. 179) vorgestellten Zusammenhang zwischen *eindeutiger Konstruierbarkeit* und *Kongruenz*: Die Gelenkfiguren sind genau dann starr, wenn alle Vierecke, die nach den gegebenen Bauplänen (also aus mathematischer Sicht aus vorgegebenen Längenangaben) konstruiert werden, kongruent zueinander sind. Umgekehrt bedeutet die Beweglichkeit, dass aus den gegebenen Größen viele, nichtkongruente Vierecke konstruiert werden können. In Aufgabenteil b) wird dann ein Bezug zum Kongruenzsatz

SSS für Dreiecke (mathematische Bemerkung 13.1.11) hergestellt und eine Diskussion über dessen Verallgemeinerbarkeit auf die Kongruenz von Vierecken angeregt. Die Studierenden können dabei entdecken, dass es zum einen keinen Kongruenzsatz SSSS für Vierecke gibt und darüber hinaus, dass Kongruenzsätze für Vierecke, die auf der Angabe von Längen beruhen, dann funktionieren, wenn das Viereck durch die angegebenen Längen in Dreiecke unterteilt wird.

Im abschließenden Aufgabenteil c) werden die Studierenden selber kreativ und entwickeln und diskutieren eigene Kongruenzsätze für Vierecke. Die Aufgabenstellung ist offen und selbstdifferenzierend angelegt, da jede Gruppe selbst entscheiden muss (ggf. auch unbewusst), ob der Kongruenzsatz nur für konvexe oder auch für konkave Vierecke gelten soll. Auf S. 166 f. habe ich bereits angemerkt, dass Kongruenzsätze für Vierecke ein Betätigungsfeld für sehr einfache aber auch für sehr komplexe Überlegungen ist. Die Person, die die Präsenzübung betreut, hat dementsprechend die Möglichkeit, die Gruppenarbeit durch entsprechende Impulse zu intensivieren.

Der professionsorientierte Kontext der Schnittstellenaufgabe ist ein realer Auszug aus einem Schulbuch, der zunächst *bewältigt* und anschließend (durch Aufgabenteil c) auf einem *höheren Niveau* bearbeitet werden soll. Damit trägt die Aufgabe insbesondere zum Erreichen der schnittstellenbezogenen Ziele K1 und K6 (Abschnitt 13.1.5 (S. 189)) bei. Darüber hinaus ermöglicht die Aufgabe den Aufbau eines vertieften Verständnisses zur Viereckskongruenz, das für den professionellen Umgang mit *Schüleräußerungen* (vgl. auch Ziel K7) zu diesem Thema essentiell ist.

Vorstellung der Schnittstellenaufgabe *Zwei Winkel und eine Seite*

Die Aufgabe *Zwei Winkel und eine Seite* (ePortfolioaufgabe 7 (S. 393)) wurde von den Studierenden im Rahmen der ePortfolioarbeit bearbeitet.

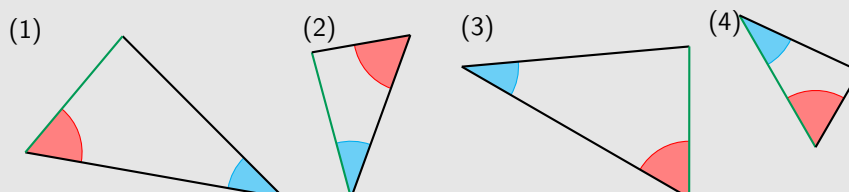
Aufgabenstellung: Zwei Winkel und eine Seite

Bearbeiten Sie einen Teil dieser Aufgabe aus der letzten Woche erneut und nutzen Sie das Wissen, das Sie in der letzten Vorlesung erworben haben.

Stellen Sie sich vor, Ihre Schülerinnen und Schüler bearbeiten im Unterricht die folgende Aufgabe aus dem Schulbuch *Neue Wege 7* (Körner et al., 2014, S. 193)

Die Dreiecke haben alle eine Seite der Länge 2,5 cm und Winkel von 35° und 60° .

- Welche Dreiecke sind kongruent zueinander? Begründe.
- Konstruiere die Dreiecke in deinem Heft. Bei welchen Dreiecken musst du hierfür eine zusätzliche Größe bestimmen?



Ihre Schülerin Emma ist verwirrt und fragt: „Wie passt das denn dazu, dass nach den Kongruenzsätzen zwei Dreiecke kongruent sind, wenn sie in zwei Winkeln und einer Seite übereinstimmen?“

- a) Klären Sie Emmas Frage aus fachmathematischer Sicht.
- b) Wie würden Sie auf Emmas Frage reagieren?
- c) Welche Schnittstellenaspekte spielen bei dieser Aufgabe eine Rolle. Begründen Sie Ihre Antwort.
- d) Reflektieren Sie, wie sich Ihre Sicht auf die Aufgabe und Ihre Bearbeitung der Aufgabe im Vergleich zur letzten Woche verändert hat.

Die Aufgabe muss im Zusammenspiel mit der vorher eingesetzten ePortfolioaufgabe 5 (S. 391) betrachtet werden. Im Rahmen dieser haben die Studierenden (vor der fachlichen Klärung des Themas im Rahmen der Veranstaltung) den identischen Schulbuchauszug zusammen mit den Aufgabenstellungen a) und b) bearbeitet.

Kontext ist ein realer Schulbuchauszug, den ich bereits im Rahmen der Analysen zum geometrischen Schließen mit Kongruenzsätzen (Abschnitt 13.1.3, Schulbuchauszug 11 (S. 187)) diskutiert habe. Die Beschäftigung mit der Aufgabe und der sich darauf beziehenden Frage von Emma verfolgt das Ziel, dass sich die Studierenden differenziert mit den im Kontext von S. 11 (S. 187) dargestellten Überlegungen zur Begründung von Kongruenz und Nicht-Kongruenz beschäftigen. Es ist davon auszugehen, dass vielen Studierenden dies vor der Schnittstellenwoche nicht vollständig gelingen wird. Eine entsprechende Reflexion über den Beitrag der Schnittstellenwoche zur Professionalisierung ist durch die Beantwortung von Aufgabenteil d) angelegt. Zusätzlich wird in c) der Schulbuchauszug noch aus der Perspektive der Schnittstellenaspekte analysiert.

Damit adressiert die Aufgabe die schnittstellenbezogenen Ziele K₂, K₅ und K₇ (Abschnitt 13.1.5 (S. 189)) und liefert darüber hinaus einen Anlass zur Selbstreflexion (vgl. die Konzeption des ePortfolios in Abschnitt 8.1).

Vorstellung der Schnittstellenaufgabe Wechselwinkelsatz

Die Aufgabe *Wechselwinkelsatz* wurde ebenfalls im Rahmen der ePortfolioarbeit eingesetzt (ePortfolioaufgabe 10 (S. 394)). Inhaltlicher Kern ist der in Abschnitt 13.1.3 (S. 185) diskutierte Vergleich zwischen Kongruenz- und Abbildungsbeweisen. Das dort vorgestellte Beispiel für den Basiswinkelsatz (S. 185) wurde im Rahmen der Schnittstellen-Vorlesung behandelt (vgl. Tabelle 13.4, Punkt 5) und soll jetzt von den Studierenden auf einen anderen relevanten Satz der Schulgeometrie übertragen werden (Aufgabenteil a)).

Es gibt verschiedene Möglichkeiten die Beweise zu führen. Der Kongruenzbeweis kann zum Beispiel darüber geführt werden, dass die Punkte A und B zusammen mit ihren jeweiligen orthogonalen Projektionen auf g_1 bzw. g_2 zwei Dreiecke bilden, die wegen SsW oder WSW kongruent sind. Für den Abbildungsbeweis nutzt man zum Beispiel die Punktspiegelung am Mittelpunkt von A und B.

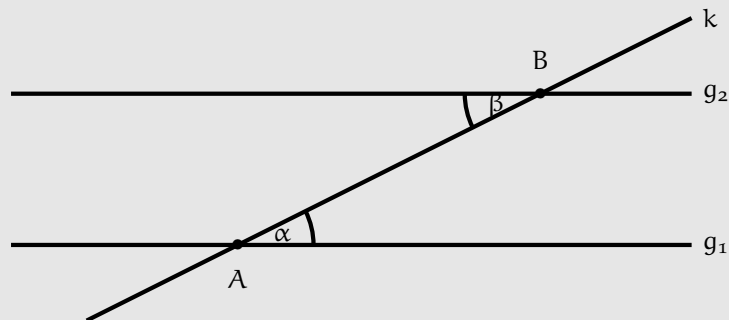
In Aufgabenteil b) sollen Kongruenzbeweise vor dem Hintergrund der Schnittstellenaspekte zur Kongruenz analysiert werden und im abschließenden Aufgabenteil c) sollen die Studierenden Vor-

und Nachteile von Kongruenz- und Abbildungsbeweisen nennen (die entsprechenden, auf S. 185 f. dargestellten Argumente wurden in der Vorlesung bewusst nicht behandelt.)

Bezogen auf die Lernziele aus Abschnitt 13.1.5 (S. 189) werden in der Schnittstellenaufgabe *Wechselwinkelsatz* die Ziele K2 und K5 adressiert und darüber hinaus durch die Diskussion von Vor- und Nachteilen der beiden Beweiszugänge ein Beitrag zum Aufbau geometriedidaktischer Kompetenzen geleistet.

Aufgabenstellung: Wechselwinkelsatz

Aus der Schule kennen Sie den Wechselwinkelsatz im \mathbb{R}^2 :



Diese besagt, dass aus der Parallelität von g_1 und g_2 bereits $\alpha = \beta$ folgt.

- a) Beweisen Sie den Satz einmal mit einem Abbildungsbeweis und einmal mit einem Kongruenzbeweis. Geben Sie ggf. an, welche weiteren schulmathematischen Theoreme Sie benutzen.

Hinweis: Es kann hilfreich sein, zusätzliche Punkte und Geraden in der Planskizze zu ergänzen.

- b) Welche Schnittstellenaspekte spielen bei Kongruenzbeweisen eine Rolle. Begründen Sie Ihre Antwort.
- c) Nennen Sie bitte Vor- und Nachteile der beiden Beweiszugänge.

13.3 Ausgewählte Ergebnisse der Begleitforschung zur Schnittstelle Kongruenz

In Abschnitt 12.3 habe ich die Schwerpunkte beschrieben, die ich bei der Auswertung der zu den Schnittstellen erhobenen Daten (Abschnitt 12.2.3) setze. Bezogen auf die Begleitforschung zur Schnittstellenwoche *Kongruenz* werde ich zunächst Ergebnisse der Studierendenbefragung zur Schnittstellenwoche auswerten (Abschnitt 13.3.1, 13.3.2) und damit Einsichten zur subjektiven Facette der zweiten Diskontinuität (bezogen auf die Schnittstelle *Kongruenz*) erhalten. Im Anschluss werde ich die Studierendenbearbeitungen der ePortfolioaufgabe 2 (*Wissensstand Kongruenz*) analysieren, um damit die *Lernendenperspektive zur Schnittstelle Kongruenz* (Abschnitt 13.1.4) auszuscharfen.

13.3.1 Fragebogenstudie zur Schnittstellenwoche Kongruenz: Design

Im Anschluss an die Schnittstellenwoche *Kongruenz* (am nächsten Veranstaltungstermin) haben die Studierenden einen Evaluations-Fragebogen ausgefüllt. Die erhobenen Daten sollen einen Beitrag zur Beantwortung der Forschungsfrage FF-B.3⁸¹ bezogen auf die professionsorientierten Lerngelegenheiten zur Schnittstelle *Kongruenz* leisten. Der Fragebogen besteht aus zwei Teilen und beinhaltet neben überwiegend geschlossenen Items zu verschiedenen thematischen Schwerpunkten zwei Freitextfelder für positive Rückmeldungen und subjektive Schwierigkeiten. Der erste Teil des Fragebogens dient zur generellen Evaluation der Schnittstellenwoche und ihrer Bestandteile durch die Studierenden, der zweite Teil fokussiert auf die Selbsteinschätzung der Studierenden zur schnittstellenbezogenen Professionalisierung. In den Tabellen 13.7 (S. 200) und 13.8 (S. 201) findet man eine Übersicht über die Items aus dem Fragebogen, die zur generellen Evaluation der Schnittstellenwoche (Teil 1 des Fragebogens) eingesetzt wurden. Im Folgenden werde ich die einzelnen Bestandteile im Detail vorstellen. Im Anschluss folgt eine Darstellung der Ergebnisse für beide Teile (S. 205 ff. und S. 209 ff.) und eine abschließende Zusammenfassung und Einordnung der Studie unter Berücksichtigung forschungsmethodischer Limitationen (S. 210 f.).

Um einen Gesamteindruck zu erheben, sollten die Studierenden zunächst angeben, wie gut ihnen die Schnittstellenwoche und deren Bestandteile gefallen haben. Diese Frage wurde bezogen auf die Vorlesung (Bewertung_{VL}), die Präsenzübung (Bewertung_{Pue}), die ePortfolioAufgaben (Bewertung_{Hue}) und die Schnittstellenwoche insgesamt (Bewertung) gestellt. Die im Rahmen der Präsenzübungen und ePortfolio-Aktivitäten eingesetzten Aufgaben wurden fast durchgehend neu entwickelt, Mit den Items *VerstaendlichkeitPue* und *VerstaendlichkeitHue* wird die Verständlichkeit der entsprechenden Aufgabenstellungen erhoben. Um zu erheben, wie fordernd die Schnittstellenwoche und ihre Bestandteile für die Studierenden waren, wurden sie gebeten, den Anspruch (wieder getrennt nach Vorlesung, Übung, ePortfolio und gesamt) zu bewerten (Items *Schwierigkeit**). Da es sich bei vielen Lerngelegenheiten nicht um typische Mathematikaufgaben handelt, wurde der fachmathematische Anspruch noch einmal getrennt erhoben (Items *Schwierigkeit*Mathe*). Stellt sich heraus, dass dieser systematisch unter dem allgemeinen Anspruch liegt, würde das bedeuten, dass die Schwierigkeit nicht nur auf der zugrundeliegenden Mathematik beruht. Um eine Einschätzung davon zu erhalten, welchen Stellenwert die Studierenden dem Thema Kongruenz zuschreiben, wurden mit den Items *Relevanz_Profession*, *Relevanz_SuS* und *Relevanz_Mathematik* noch verschiedene Relevanzeinschätzungen eingeholt.

Zusätzlich sollten die Studierenden den Motivationsgehalt der verwendeten Aufgaben einschätzen. Dafür wurde eine einschlägige Skala von Wolf (2017, S. 193 ff.) adaptiert, die er im Rahmen von Akzeptanzfragebögen zu anwendungsorientierten Mathematikaufgaben für Maschinenbaustudierende eingesetzt hat (Tabelle 13.8). Bei der Skalenbildung unter Verwendung der umformulierten Items war die berechnete interne Konsistenz (Cronbachs α , vgl. Moosbrugger und Kelava (2012, S. 130 ff.)) im zweiten Zyklus nicht zufriedenstellend (Zyklus 1: $\alpha = .85$, Zyklus 2: $\alpha = .66$). Die Analyse der Skala in R (nach Field, Miles und Field (2012, S. 800 ff.)) ergibt, dass die Eliminierung des Items *Aufgabenmotivation_2* die interne Konsistenz der Skala verbessern würde.

⁸¹FF-B.3: Wie evaluieren (insbesondere auch in Bezug auf die eigene Professionalisierung) die Studierenden die Gesamtveranstaltung und die speziellen professionsorientierten Lerngelegenheiten?

Item	Ausprägungen	Bezeichner
Wie gut haben Ihnen die Bestandteile der Schnittstellenwoche <i>Kongruenz</i> gefallen?: Vorlesung, Präsenzübung, ePortfolio-Aufgaben, Die Schnittstellenwoche <i>Kongruenz</i> insgesamt	gar nicht gut; nicht gut; eher nicht gut; eher gut; gut; sehr gut	BewertungVL, BewertungPue, BewertungHue, Bewertung
Wie verständlich fanden Sie die Aufgabenstellungen in der Schnittstellenwoche <i>Kongruenz</i> ? Die Aufgabenstellungen in den Präsenzübung, Die Aufgabenstellungen der ePortfolio-Aufgaben	unverständlich; eher unverständlich; eher verständlich; verständlich	VerstaendlichkeitPue, VerstaendlichkeitHue
Wie anspruchsvoll haben Sie allgemein die Bestandteile der Schnittstellenwoche <i>Kongruenz</i> empfunden?: Vorlesung, Präsenzübung, ePortfolio-Aufgaben, Die Schnittstellenwoche <i>Kongruenz</i> insgesamt	gar nicht anspruchsvoll; nicht anspruchsvoll; eher nicht anspruchsvoll; eher anspruchsvoll; anspruchsvoll; sehr anspruchsvoll	SchwierigkeitVL, SchwierigkeitPue, SchwierigkeitHue, Schwierigkeit
Wie haben Sie den fachmathematischen Anspruch der Schnittstellenwoche <i>Kongruenz</i> empfunden?: Vorlesung, Präsenzübung, ePortfolio-Aufgaben, Die Schnittstellenwoche <i>Kongruenz</i> insgesamt		SchwierigkeitVLMathe, SchwierigkeitPueMathe, SchwierigkeitHueMathe, SchwierigkeitMathe
Wenn ich das Thema <i>Kongruenz</i> in meinem Studium nicht behandelt hätte, würde mir für meinen späteren Beruf etwas fehlen.	stimmt überhaupt nicht; stimmt eher nicht;	Relevanz_Profession
Schüler:innen sollten sich mit dem Thema <i>Kongruenz</i> auseinandersetzen.	stimmt teils/teils; stimmt eher; stimmt völlig	Relevanz_SuS
<i>Kongruenz</i> ist ein wichtiges Thema im Mathematikunterricht.		Relevanz_Matheunterricht

Tabelle 13.7: Items aus dem *Fragebogen zur Schnittstellenwoche Kongruenz* zu verschiedenen Studierenden-Einschätzungen zur Schnittstellenwoche und ihren Lernaktivitäten.

Item	Die Aufgaben haben mir neue / interessante Verbindungen zwischen Schulmathematik und Hochschulmathematik gezeigt.
------	---

Item Aufgabenmotivation_2 aus Tabelle 13.8

Eine Betrachtung dieses Items getrennt von der Skala ist auch in inhaltlicher Sicht plausibel, da es, je nach Interpretation, ggf. mehr auf die Verbindungen zwischen Schulmathematik und Hochschulmathematik als speziell auf die Aufgaben abzielt. Die Skala Aufgabenmotivation wird dementsprechend unter Ausschluss des Items gebildet und liefert dann zufriedenstellende interne Konsistenzen: Zyklus 1: $\alpha = .84$, Zyklus 2: $\alpha = .73$, Gesamt: $\alpha = .82$. Das Item Aufgabenmotivation_2 wird als einzelnes Item ausgewertet.

Item	Ausprägungen	Bezeichner
Die Schulbezüge haben mein Interesse geweckt.		Aufgabenmotivation_1
Die Aufgaben haben mir neue / interessante Verbindungen zwischen Schulmathematik und Hochschulmathematik gezeigt.		Aufgabenmotivation_2
Die Aufgaben haben bei mir einen besonderen Eindruck hinterlassen.	stimmt überhaupt nicht; stimmt eher nicht; stimmt teils/teils; stimmt eher; stimmt völlig	Aufgabenmotivation_3
Die Bearbeitung der Aufgaben hat mir Spaß gemacht.		Aufgabenmotivation_4
Die Aufgaben haben mich gefesselt.		Aufgabenmotivation_5

Tabelle 13.8: Items aus dem *Fragebogen zur Schnittstellenwoche Kongruenz* zur aufgabenbezogenen Motivation, adaptiert von Wolf (2017, S. 173 f.).

Insgesamt wurden in diesem ersten Teil des Fragebogens verschiedene grundsätzliche Einschätzungen der Studierenden zur Schnittstellenwoche und ihrer Bestandteile erhoben.

Im zweiten Teil des Fragebogens (Selbsteinschätzung der Studierenden zur schnittstellenbezogenen Professionalisierung) wurden Items mit den Schwerpunkten *Agieren im Rahmen des fachmathematischen Hintergrundes* (zur Kongruenz), *Selbstwirksamkeitserwartungen zum professionellen Handeln* (im Themenbereich Kongruenz), *Nutzen der Schnittstellenaspekte* und *Transferpotenzial* eingesetzt. Auf diese Weise soll erhoben werden, wie die Studierenden die Schnittstellenwoche in ihrer Funktion zur Überwindung der subjektiven Facette der zweiten Diskontinuität (Abschnitt 3.1 (S. 31)) beurteilen. Da in der Literatur keine einschlägigen Skalen gefunden werden konnten, wurden entsprechende Items selbst entwickelt. Ich werde nun die einzelnen Schwerpunkte näher vorstellen.

Die fünf Items zum *Agieren im Rahmen des fachmathematischen Hintergrundes* (Tabelle 13.9) decken unterschiedliche Facetten der Nutzung universitärer Fachmathematik als Hintergrund für unterrichtliches Handeln zum Thema *Kongruenz* ab. Bei der Entwicklung der Items habe ich mich auf die in Abschnitt 2.2 beschriebenen theoretischen Hintergründe zu Mathematik in Schule und Hochschule und dabei insbesondere auf die Ausführungen von Vollrath (1979) zu Hintergrundtheorien (S. 12) bezogen. Das Item *Hintergrundtheorie_Kennen* fragt zunächst ab, ob die Studierenden überhaupt fachmathematische Hintergründe zum Thema *Kongruenz* kennen; es geht noch nicht darum, diese auch zu nutzen. Die Items *Hintergrundtheorie_Einordnen* und *Hintergrundtheorie_Perspek-*

tive beruhen direkt auf Vollrath (1979, S. 82) und beziehen sich auf die Fähigkeit, fachmathematische Perspektiven auf einzelne Begriffe, Aussagen und Zusammenhänge bewusst einzunehmen. Die letzten beiden Items, *Hintergrundtheorie_Beweisen* und *Hintergrundtheorie_Definieren*, sind noch expliziter. Durch sie wird erhoben, inwieweit sich die Studierenden in der Lage sehen, (elementarisierte) schulmathematische Argumente und Definitionen fachmathematisch zu präzisieren.

Item	Ausprägungen	Bezeichner
Ich denke, dass ich nach der Schnittstellenwoche <i>Kongruenz</i>		
die fachmathematischen Hintergründe des Themas <i>Kongruenz</i> , wie es in der Schule behandelt wird, kenne.		<i>Hintergrundtheorie_Kennen</i>
in der Lage bin, typische Aussagen und Begriffe der Schulmathematik zum Thema <i>Kongruenz</i> in eine zugrunde liegende fachmathematische Theorie einzuordnen.	stimmt überhaupt nicht; stimmt eher nicht; stimmt teils/teils; stimmt eher; stimmt völlig	<i>Hintergrundtheorie_Einordnen</i>
eine fachmathematische Sichtweise auf schulmathematische Zusammenhänge im Bereich der <i>Kongruenz</i> , einnehmen kann.		<i>Hintergrundtheorie_- Perspektive</i>
schulmathematische Aussagen zur <i>Kongruenz</i> fachmathematisch beweisen kann.		<i>Hintergrundtheorie_Beweisen</i>
schulmathematische Begriffe aus dem Bereich <i>Kongruenz</i> präzise definieren kann.		<i>Hintergrundtheorie_Definieren</i>

Tabelle 13.9: Items aus dem *Fragebogen zur Schnittstellenwoche Kongruenz* zur professionalisierungsbezogenen Selbsteinschätzungen zum Agieren im Rahmen des fachmathematischen Hintergrundes

Zunächst einmal ist unklar, inwieweit die Studierenden in der Lage sind, die in den einzelnen Items formulierten Anforderungen zu reflektieren und die eigenen Kompetenzen einzuschätzen. Die Idee der Itemkonstruktion ist, dass die Items (die unterschiedliche Facetten der Nutzung von Fachmathematik als Hintergrund zur schulischen Kongruenz erfassen) zusammengenommen einen realistischen (subjektiven) Gesamteindruck liefern. Dementsprechend wurden die Items zu einer Skala *Hintergrundtheorie* mit zufriedenstellenden internen Konsistenzen (Zyklus 1: $\alpha = .85$, Zyklus 2: $\alpha = .82$, Gesamt: $\alpha = .84$) zusammengefasst.

Bezogen auf die *Selbstwirksamkeitserwartungen zum professionellen Handeln* wurden acht Items eingesetzt, die auf der von Prediger (2013) formulierten Auflistung typischer mathematikhaltiger Handlungsanforderungen (siehe auch S. 9) beruhen (Tabelle 13.10). Dabei beziehen sich die drei Items *Selbst_Zugaenge_** auf die Handlungsanforderung (3) *Zugänge [...] analysieren und bewerten* und berücksichtigen dabei nicht nur singular einen Schulbuchauszug sondern auch dessen Bezug zu anderen Schulbuchauszügen zum Thema *Kongruenz* sowie zu anderen geometrischen Begriffen und Aussagen. Die drei Items *Selbst_Aeusserungen_** erfassen verschiedene Selbsteinschätzungen zu den Handlungsanforderungen (7,8) *Äußerungen/Fehler von Lernenden analysieren, (bewerten) und darauf lernförderlich reagieren*. Die verbleibenden drei Items beziehen sich auf Handlungsanforderung (10) *zwischen verschiedenen Sprachebenen [...] flexibel hin- und herwechseln und vermitteln für Lernende*: In *Selbst_inFachsprache* und *Selbst_inAlltagssprache* wird explizit das „Hin- und Herwechseln“ zwischen Alltags- und Fachsprache adressiert; das Item *Selbst_Rekonstruieren* fokussiert

noch einmal auf die Rekonstruktion einer Schüler-Frage und zielt damit gleichzeitig auf die Handlungsanforderungen (7) und (10) ab.

Item	Ausprägungen	Bezeichner
Ich denke, dass ich nach der Schnittstellenwoche <i>Kongruenz</i> ...		
... einen Schulbuchauszug zum Thema <i>Kongruenz</i> analysieren und bewerten kann.		Selbst_Zugaenge_Analysieren
... einordnen kann, wie unterschiedliche Bestandteile eines Schulbuchauszugs zum Thema <i>Kongruenz</i> zusammenhängen.		Selbst_Zugaenge_ZusammenhIntern
... einen Auszug aus einem Schulbuch zum Thema <i>Kongruenz</i> in Bezug zu anderen geometrischen Begriffen und Aussagen setzen kann.		Selbst_Zugaenge_ZusammenhExtern
... eine Schüler*innen-Äußerung um Thema <i>Kongruenz</i> fachlich analysieren kann.		Selbst_Aeusserung_Analysieren
... einen Fehler in einer Schüler*innen-Äußerung identifizieren und auf diesen förderlich reagieren kann.	stimmt überhaupt nicht; stimmt eher nicht; stimmt teils/teils; stimmt eher; stimmt völlig	Selbst_Aeusserung_Fehler
... Beiträge von Schüler*innen aus dem Bereich <i>Kongruenz</i> einordnen und zueinander in Beziehung setzen kann.		Selbst_Aeusserung_Einordnen
... alltagssprachlich formulierte Aussagen zum Thema <i>Kongruenz</i> in Fachsprache übersetzen kann.		Selbst_inFachsprache
... eine umgangssprachlich formulierte Schüler*innen-Frage zum Thema <i>Kongruenz</i> für mich fachlich rekonstruieren kann.		Selbst_Rekonstruieren
... eine fachmathematische Aussage zum Thema <i>Kongruenz</i> in Alltagssprache übersetzen kann.		Selbst_inAlltagssprache

Tabelle 13.10: Items aus dem *Fragebogen zur Schnittstellenwoche Kongruenz* zu professionalisierungsbezogenen Selbsteinschätzungen zur Selbstwirksamkeitserwartung zum professionellen Handeln

Auch hier wurden die Items wieder zu einer Skala *SelbstwirksamkeitProfHandeln* zusammengefasst, die erfasst, wie die Studierenden ihre Fähigkeiten zur Bewältigung der oben erwähnten mathematikhaltigen professionellen Handlungsanforderungen einschätzen. In beiden Zyklen wurden zufriedenstellende interne Konsistenzen (Zyklus 1: $\alpha = .79$, Zyklus 2: $\alpha = .81$, Gesamt: $\alpha = .80$) erreicht.

Ein weiterer Schwerpunkt des Fragebogens war die Erhebung von Studierendeneinschätzungen zur Nützlichkeit der Schnittstellenaspekte. Die zugehörigen acht Items sind in Tabelle 13.11 dargestellt.

Bei der Vorstellung des Konzepts *Schnittstellenaspekte* (Abschnitt 12.2.1) habe ich beschrieben, dass sie „eine aus professionsorientierter Sicht reflektierte Systematisierung einer mathematischen Theorie“ (S. 152) darstellen. Daraus ergeben sich in natürlicher Weise zwei Schwerpunkte für die Evaluation. Zum einen sollen die Studierenden angeben, inwieweit die Schnittstellenaspekte zur Strukturierung des fachmathematischen Hintergrundes zum Thema *Kongruenz* beigetragen haben (Items

Item	Ausprägungen	Bezeichner
Die <i>Schnittstellenaspekte zur Kongruenz</i> haben mir geholfen, den fachmathematischen Hintergrund des Themas <i>Kongruenz</i> besser zu strukturieren.		SchnittAspStrukturieren_1
Durch die <i>Schnittstellenaspekte</i> kenne ich mich im Themenfeld <i>Kongruenz</i> besser aus.		SchnittAspStrukturieren_2
Ich denke, dass ich durch die <i>Schnittstellenaspekte zur Kongruenz</i> besser mein fachmathematisches Wissen in schulischen Problemstellungen anwenden kann.		SchnittAspProfession_1
Ich halte die <i>Schnittstellenaspekte zur Kongruenz</i> für hilfreich für meinen späteren Beruf.		SchnittAspProfession_2
Die <i>Schnittstellenaspekte zur Kongruenz</i> bilden für mich im Rahmen meiner Lehramtsausbildung <i>keinen</i> Mehrwert. (<i>N</i>)	stimmt überhaupt nicht; stimmt eher nicht; stimmt teils/teils; stimmt eher; stimmt völlig	SchnittAspProfession_3
Ich habe verstanden, was mit den einzelnen <i>Schnittstellenaspekten zur Kongruenz</i> gemeint war.		SchnittAspVerstaendlichkeit_1
Die Systematisierung des fachmathematischen Hintergrundes zur <i>Kongruenz</i> durch die <i>Schnittstellenaspekte</i> war für mich nachvollziehbar.		SchnittAspVerstaendlichkeit_2
Mir ist nicht wirklich klar, was die einzelnen Schnittstellenaspekte ausmacht. (<i>N</i>)		SchnittAspVerstaendlichkeit_3

Tabelle 13.11: Items aus dem *Fragebogen zur Schnittstellenwoche Kongruenz* zu den Schnittstellenaspekten

SchnittAspStrukturieren_*) und zum anderen den Beitrag und Mehrwert für die schnittstellenbezogene Professionalisierung bewerten (Items SchnittAspProfession_*). Darüber hinaus wurde in drei weiteren Items die Verständlichkeit der entwickelten Schnittstellenaspekte sowohl bezogen auf die einzelnen Aspekte als auch bezogen auf die angelegte Systematisierung evaluiert (Items SchnittAspVerstaendlichkeit_*).

Wieder wurde aus den acht Items eine Skala (Schnittstellenaspekte) gebildet und auch hier konnten zufriedenstellende interne Konsistenzen (Zyklus 1: $\alpha = .71$, Zyklus 2: $\alpha = .75$, Gesamt: $\alpha = .75$) berechnet werden.

Eine interessante Frage im Kontext der Konzeption spezieller professionsorientierter Lerngelegenheiten ist, ob die ausführliche Explizierung (wie sie in den Schnittstellenwochen stattfindet) für alle wichtigen Themenbereiche gemacht werden sollte, oder ob grundlegende Kompetenzen zur Nutzung fachmathematischer Hintergründe für die Bewältigung professionsspezifischer Handlungsanforderungen exemplarisch an einzelnen Themenbereichen aufgebaut und dann selbstständig auf andere Themenbereiche übertragen werden können. In diesem Sinne wurden die Studierenden in den drei Items aus Tabelle 13.12 noch dazu aufgefordert, einzuschätzen, inwieweit die Schnittstellenwoche *Kongruenz* dazu beigetragen hat, dass sie sich in der Lage fühlen, Verknüpfungen zwischen Schulmathematik und Hochschulmathematik auch in anderen Themenbereichen herzustellen.

Item	Ausprägungen	Bezeichner
Die Lernaktivitäten in der Schnittstellenwoche <i>Kongruenz</i> haben mir gezeigt, wie ich auch in anderen Themen der Schulmathematik mein fachmathematisches Wissen sinnvoll als Lehrer*in einsetzen kann.		Transfer_1
Nach der Schnittstellenwoche <i>Kongruenz</i> denke ich, dass es mir leichter fallen wird, Bezüge zwischen Schul- und Hochschulmathematik auch in anderen Inhaltsbereichen herzustellen.	stimmt überhaupt nicht; stimmt eher nicht; stimmt teils/teils; stimmt eher; stimmt völlig	Transfer_2
Professionsrelevante Bezüge zwischen Schul- und Hochschulmathematik müssen für jedes Themenfeld im Studium explizit behandelt werden. Nur weil ich sie in einem Bereich herstellen kann, kann ich diese Fähigkeit nicht übertragen.		Transfer_3

Tabelle 13.12: Items aus dem *Fragebogen zur Schnittstellenwoche Kongruenz* zur Selbsteinschätzung zum Transfer auf andere Bereiche

In den folgenden Abschnitten werden die mit den oben vorgestellten Items erhobenen Daten präsentiert und eingeordnet. In Zyklus 1 (Sommersemester 2019) stehen $n = 22$ Datensätze und in Zyklus 2 (Wintersemester 2019/2020) $n = 11$ Datensätze zur Verfügung. In Zyklus 3 (Sommersemester 2020) konnte der Fragebogen wegen der schwierigen Lehr-/Lernbedingungen der COVID-19-Pandemie nicht eingesetzt werden. Die erhobenen Daten wurden mit klassischen Methoden deskriptiver Statistik ausgewertet und visualisiert (z. B. Hedderich und Sachs (2012, S. 60 ff.)). Aufgrund der geringen Stichprobengröße wurden in fast allen Auswertungen die beiden Zyklen zusammengefasst. Dies ist gerechtfertigt, da sich die Grundkonzeption der Schnittstellenwoche innerhalb der ersten beiden Zyklen nicht wesentlich geändert hat. Die komplette Auswertung wurde mit *R* durchgeführt.

13.3.2 Fragebogenstudie zur Schnittstellenwoche Kongruenz: Auswertung

Evaluation der Schnittstellenwoche *Kongruenz* durch die Studierenden

In Abbildung 13.16 sind die Bewertung der Schnittstellenwoche *Kongruenz* und ihrer Bestandteile durch die Studierenden dargestellt. Die Veranstaltungselemente *Vorlesung* und *Präsenzübung* werden, genauso wie die Schnittstellenwoche insgesamt sehr positiv bewertet, während die *ePortfolio-Aktivitäten* zwar immer noch positiv aber insgesamt schwächer beurteilt werden. Dies hängt möglicherweise damit zusammen, dass die Aktivitäten im ePortfolio unbekannte Aufgabentypen darstellen, die zwar sehr professionsorientiert, aber aufgrund des nicht „Mathematik-typischen“ Anforderungsprofils eventuell subjektiv als aufwendiger wahrgenommen werden. Diese These wird dadurch gestützt, dass manche Studierende in den Freitextfeldern bzw. der Veranstaltungsevaluation den hohen Zeitbedarf kritisiert haben.

Die Ergebnisse zur Verständlichkeit der Aufgabenstellungen sind in Abbildung 13.17, aufgeteilt in die beiden Erhebungszyklen, dargestellt. Sowohl die Aufgabenstellungen der Präsenzübungen als auch die der ePortfolio-Aktivitäten wurden von fast allen Studierenden als mindestens „eher

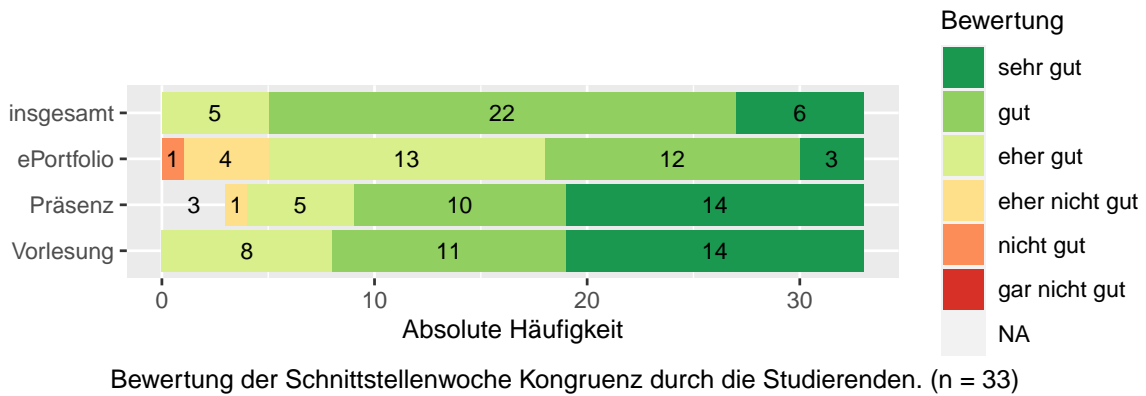


Abbildung 13.16: Darstellung der Ergebnisse zur Bewertung der Schnittstellenwoche *Kongruenz* durch die Studierenden der Zyklen 1 und 2 (Items *BewertungVL*, *BewertungPue*, *BewertungHue*, *Bewertung*).

verständlich“ bewertet (Abbildung 13.17). Den Freitextfeldern zum Zyklus 1 konnte entnommen werden, dass manche Studierende Probleme mit der Verständlichkeit der Aufgabenstellung bei Präsenzübung 1 (S. 380) hatten. Dies ist eine mögliche Erklärung für die beiden Bewertungen der Aufgabenstellungen der Präsenzaufgaben in Zyklus 1 als „eher unverständlich“. Die entsprechende Aufgabenstellung wurden daraufhin präzisiert (vgl. Tabelle 13.5 (S. 193)). Es kann festgehalten werden, dass in der Tat in Zyklus 2 nahezu alle Studierenden die Präsenzübungen als „verständlich“ eingeschätzt haben.

Als weiteres Evaluationsmerkmal wurden die Studierenden gebeten, den *Anspruch* der Schnittstellenwoche und ihrer Bestandteile sowohl allgemein als auch speziell bezogen auf die Fachmathematik zu bewerten. Die Ergebnisse sind in Abbildung 13.18 dargestellt.

Die meisten Studierenden haben die Schnittstellenwoche insgesamt als *eher anspruchsvoll* bezeichnet. Da diese Antwort zusammen mit *eher nicht anspruchsvoll* mit Abstand am meisten gegeben wurde, kann der Schwierigkeitsgrad insgesamt als angemessen bewertet werden. Als am wenigsten anspruchsvoll (insbesondere aus fachmathematischer Sicht) wurde die Präsenzübung eingeschätzt, als am anspruchsvollsten die ePortfolioaufgaben. Insgesamt fällt auf, dass die Studierenden den mathematischen Anspruch tendenziell etwas geringer eingeschätzt haben als den generellen Anspruch. Um diese Beobachtung weiter untersuchen zu können, wurde für alle Studierenden die Differenz aus den Antwortwerten ($\text{Schwierigkeit*} - \text{Schwierigkeit*Mathe}$) berechnet und in Abbildung 13.19 dargestellt.

Es zeigt sich, dass die meisten Studierenden den generellen und den fachmathematischen Anspruch in allen Bestandteilen gleich eingeschätzt haben. Bezogen auf die Vorlesung gibt es keine systematische Abweichungen. Besonders auffällig sind die Abweichungen bei den Präsenzübungen und ePortfolioaufgaben. In beiden Bereichen bewertet ein nennenswert größerer Anteil der Studierenden den fachmathematischen Anspruch geringer als den generellen Anspruch. Dies passt zum intendierten Schwerpunkt der Schnittstellenwoche, der eben gerade nicht rein auf dem Erwerb fachmathematischer Kompetenzen liegt. Dass die ePortfolioaufgaben als anspruchsvollster Bestandteil bewertet wurden, der mathematische Anspruch aber niedriger eingeschätzt wurde, ist ein weiteres Indiz für die oben aufgestellte Vermutung, dass die ePortfolioaufgaben ein nicht Mathematiktypisches Anforderungsprofil haben.

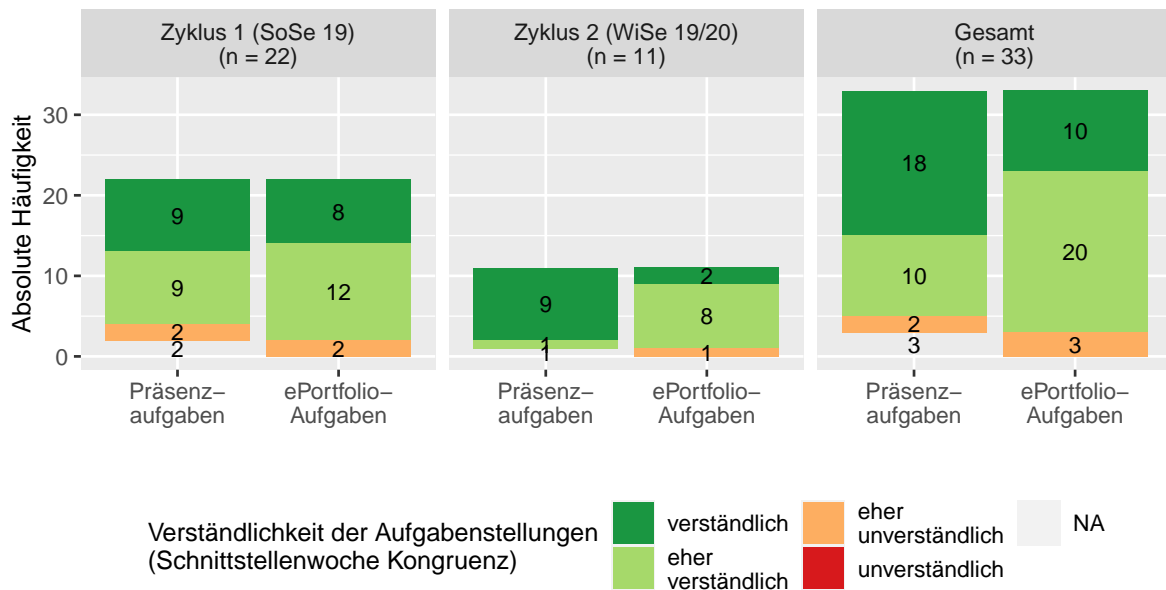
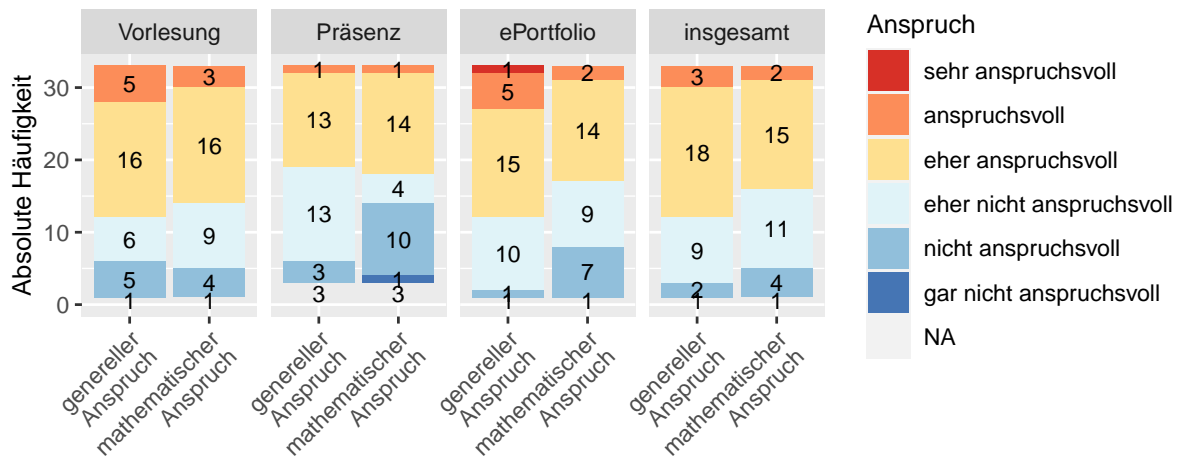
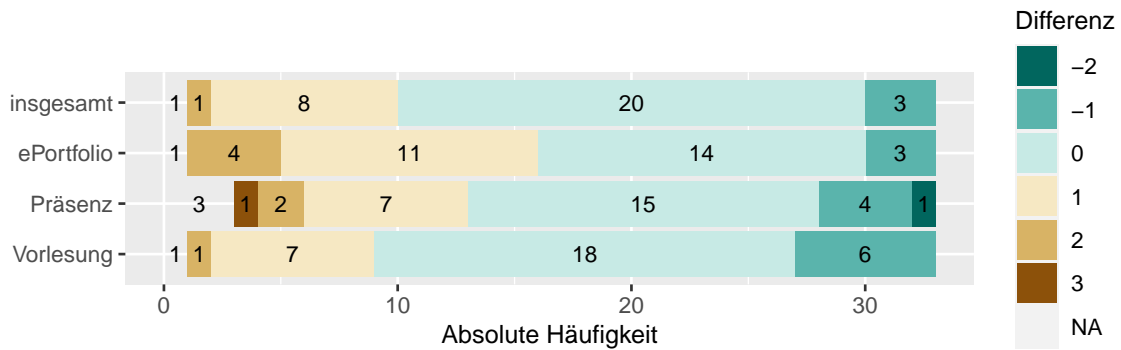


Abbildung 13.17: Darstellung der Ergebnisse zur Einschätzung der Verständlichkeit der Aufgabenstellungen durch die Studierenden (Items *VerstaendlichkeitPue*, *VerstaendlichkeitHue*).



Wahrgenommener Anspruch der Schnittstellenwoche Kongruenz (n = 33)

Abbildung 13.18: Darstellung der Ergebnisse zur Beurteilung der Studierenden der Zyklen 1 und 2 zum generellen und mathematischen Anspruch der Schnittstellenwoche *Kongruenz* (Items *SchwierigkeitVL*, *SchwierigkeitPue*, *SchwierigkeitHue*, *Schwierigkeit*, *SchwierigkeitVLMathe*, *SchwierigkeitPueMathe*, *SchwierigkeitHueMathe*, *SchwierigkeitMathe*).



Differenz: Einschätzung des allgemeinen Anspruchs – Einschätzung des fachmathematischen Anspruchs der Schnittstellenwoche Kongruenz (n = 33)

Abbildung 13.19: Darstellung der Studierenden-bezogenen Differenzen im Antwortverhalten zur Einschätzung des generellen und mathematischen Anspruchs der Schnittstellenwoche *Kongruenz*.

Mit Hilfe der von Wolf (2017) adaptierten Skala *Aufgabenmotivation* wurde erhoben, wie motivierend die Studierenden die verwendeten Aufgaben einschätzen. Die Ergebnisse sind in Abbildung 13.20 dargestellt. Die Daten haben eine große Streubreite und die Einschätzungen der Studierenden

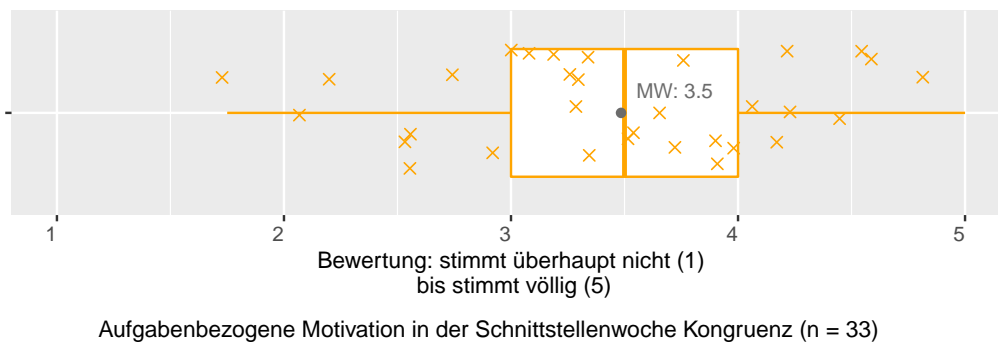
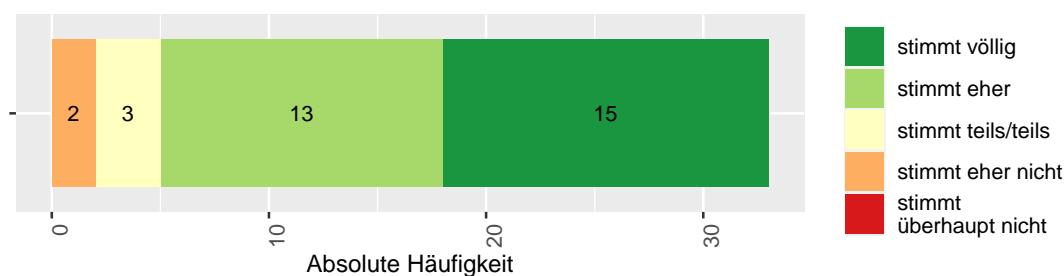


Abbildung 13.20: Auswertungen der Einschätzungen der Studierenden der Zyklen 1 und 2 zur aufgabenbezogenen Motivation in der Schnittstellenwoche *Kongruenz* (Skala *Aufgabenmotivation*)

sind dementsprechend heterogen. Etwa 75 % der Studierenden geben an, die Aufgaben mindestens teilweise als motivierend empfunden zu haben; ein Viertel der Studierenden bewertet die Aufgaben sogar als motivierend bis sehr motivierend. Im Angesicht der Tatsache, dass sich das Item auf die Gesamtheit der Aufgaben zur Schnittstellenwoche *Kongruenz* bezieht, spricht dieses deutlich für den Motivationsgehalt der eingesetzten Aufgaben. Es lässt sich durch die erhobenen Daten nicht klären, ob das Viertel der Studierenden, das die Aufgaben als weniger motivierend evaluiert haben, dies aufgrund von einigen wenigen aus ihrer Sicht nicht motivierenden Aufgaben tut, oder ob es dieses Urteil auf alle Aufgaben bezieht. Allerdings zeigt die Auswertung des Items *Aufgabenmotivation_2* (Abbildung 13.21), dass fast alle Studierenden angeben, dass die Aufgaben ihnen neue/interessante Verbindungen zwischen Schulmathematik und Hochschulmathematik gezeigt haben. Das spricht dafür, dass auch die Studierenden, die die Aufgaben insgesamt als weniger motivierend bewertet, zumindest einige der professionsorientierten Kontexte als wertvoll erachten. Der Vergleich in Abbildung 13.22 bestätigt dies. Dieses Ergebnis stützt darüber hinaus die oben beschriebene Ausgliederung des Items *Aufgabenmotivation_2* aus der Skala und ist ein Indiz für die Wirkung der



Die Aufgaben (im Rahmen der Schnittstellenwoche Kongruenz) haben mir neue/interessante Verbindungen zwischen Schulmathematik und Hochschulmathematik gezeigt. (n = 33)

Abbildung 13.21: Auswertungen der Einschätzungen der Studierenden der Zyklen 1 und 2 zum Item *Aufgabenmotivation_2*.

Aufgaben im Sinne der intendierten Professionsorientierung. Zum Abschluss betrachte ich noch die Auswertung der Relevanzeinschätzungen der Studierenden (Abbildung 13.23). Die Relevanz des Themas *Kongruenz*, sowohl als Bestandteil der eigenen Lehramtsausbildung als auch als Inhalt des Mathematikunterrichts, wird von fast allen Studierenden als hoch eingeschätzt. Es kann also davon ausgegangen werden, dass die Studierenden die Beschäftigung mit *Kongruenz* im Rahmen ihrer Professionalisierung als sinnvoll ansehen. Dies stützt insbesondere die in Abschnitt 11.1 beschriebene Entscheidung, das Thema *Kongruenz* als Inhalt für die vertiefte professionsorientierte Behandlung im Rahmen einer Schnittstellenwoche auszuwählen.

Selbsteinschätzungen zur schnittstellenbezogenen Professionalisierung

Zur Erhebung von Selbsteinschätzungen zur schnittstellenbezogenen Professionalisierung werden die drei oben vorgestellten Skalen Hintergrundtheorie (*Agieren im Rahmen des fachmathematisch Hintergrundes zur Kongruenz*), SelbstwirksamkeitProfHandeln (*Selbstwirksamkeitserwartungen zum professionellen Handeln im Themenbereich Kongruenz*) und Schnittstellenaspekte (*Nutzen der Schnittstellenaspekte*) genutzt. Die Untersuchungsergebnisse sind in Abbildung 13.24 dargestellt. Die Studierenden geben in allen drei Skalen im Mittel hohe Zustimmungen an. Nahezu alle Studierenden stimmen mindestens teilweise zu, in etwa die Hälfte sogar „eher“ oder „völlig“. Das bedeutet, dass sie sich (zumindest aus subjektiver Perspektive) in der Lage sehen, im Kontext *Kongruenz* professionstypische Handlungsanforderungen fachlich zu analysieren und zu interpretieren und darauf aufbauend professionell zu bewältigen. Weiter zeigt die Auswertung, dass sie die Schnittstellenaspekte als professionsorientierte Systematisierung nachvollziehen können und als hilfreich empfinden. Diese Ergebnisse belegen, dass die Aktivitäten im Rahmen der Schnittstellenwoche *Kongruenz* einen Beitrag zur Minderung der subjektiven Facette der zweiten Diskontinuität im intendierten Sinne leisten.

Abschließend möchte ich noch kurz auf die Ergebnisse zur Einschätzung des Transferpotenzials eingehen, die in Abbildung 13.25 dargestellt sind. Das Transferpotenzial wird von den Studierenden insgesamt unterschiedlich, aber mit leicht positiver Tendenz eingeschätzt. Auch wenn die meisten Studierenden mindestens teilweise ihren Kompetenzzuwachs so einschätzten, dass sie auch in anderen Themenbereichen bessere Verknüpfungen zwischen dem Mathematikunterricht und der Hochschulmathematik herstellen können, stimmen nur 5 von 33 Studierenden der Aussage nicht zu, dass professionsrelevante Bezüge für jedes Themenfeld explizit behandelt werden müssen. Die

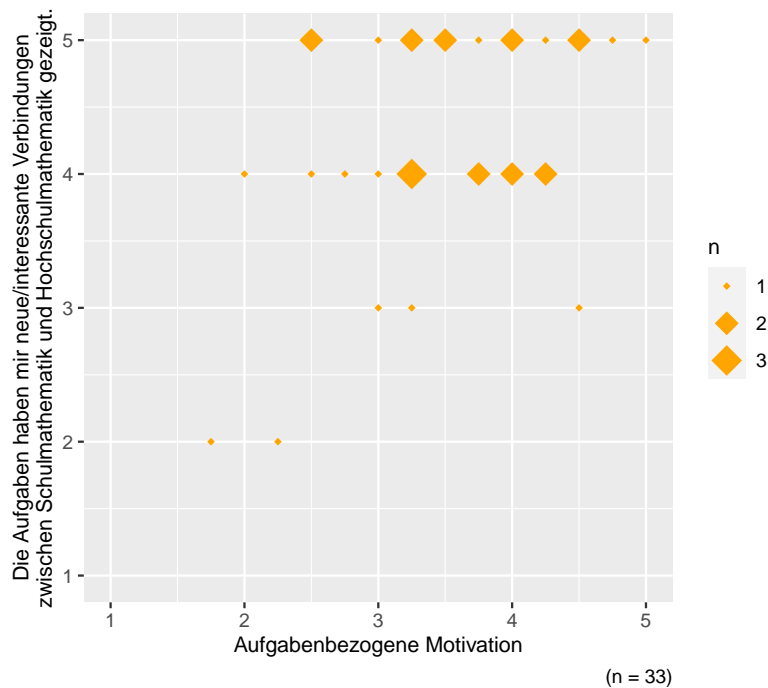


Abbildung 13.22: Vergleich des Item Aufgabenmotivation_2 mit der Skala Aufgabenmotivation.

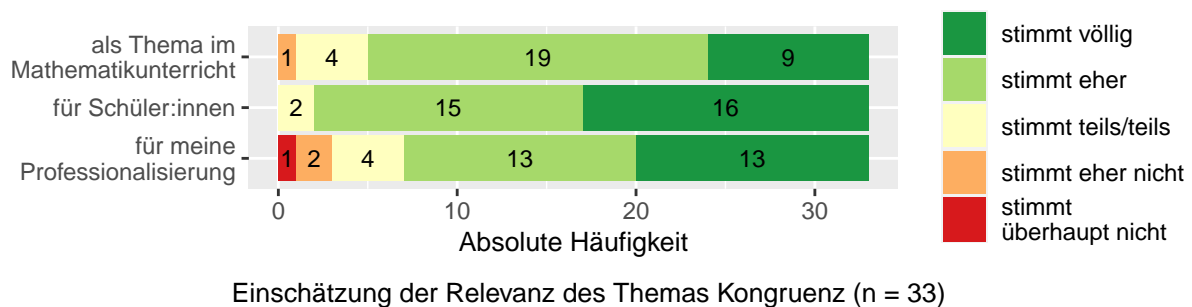


Abbildung 13.23: Darstellung der Ergebnisse zu Relevanzeinschätzungen durch die Studierenden der Zyklen 1 und 2 (Items Relevanz_Profession, Relevanz_SuS, Relevanz_Matheunterricht).

große Gruppe der Studierenden die die Kategorie „teils/teils“ angegeben haben, zeigen offenbar Unsicherheit bezogen auf die Selbsteinschätzung zu Transfermöglichkeiten.

Zusammenfassung und Beurteilung der Ergebnisse

In diesem Abschnitt habe ich Ergebnisse aus der Fragebogenstudie im Anschluss an die *Schnittstellenwoche Kongruenz* beschrieben. Im Fokus der Untersuchung stehen die Evaluation der Schnittstellenwoche durch die Studierenden (S. 205 ff.) sowie Selbsteinschätzungen der Studierenden zur schnittstellenbezogenen Professionalisierung (S. 209). Damit wird ein Beitrag zur Beantwortung der Forschungsfrage FF-B.3⁸² geleistet.

⁸²FF-B.3: Wie evaluieren (insbesondere auch in Bezug auf die eigene Professionalisierung) die Studierenden die Gesamtveranstaltung und die speziellen professionsorientierten Lerngelegenheiten?

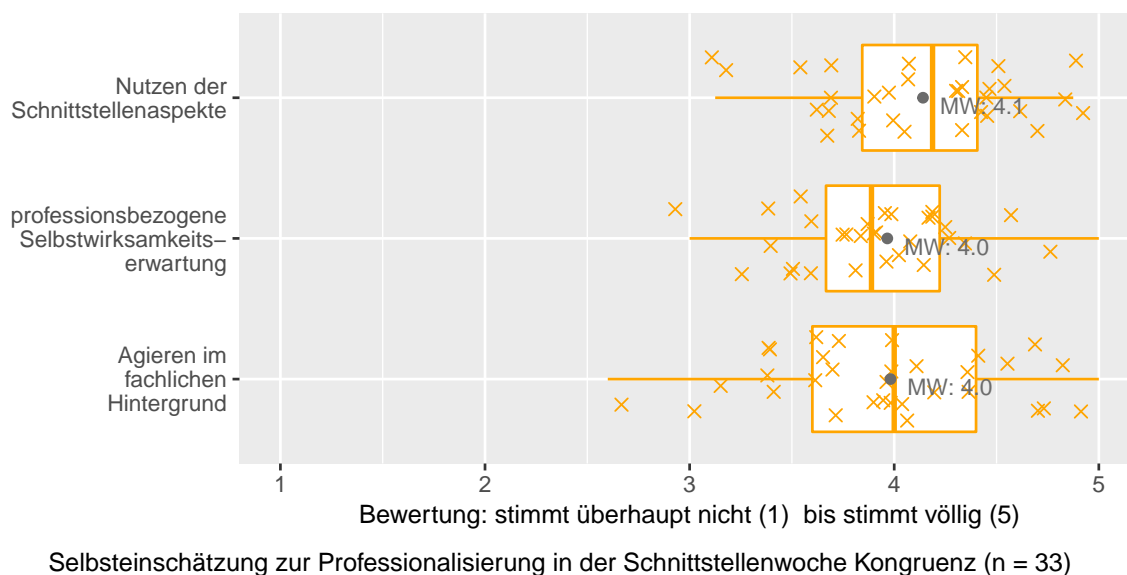
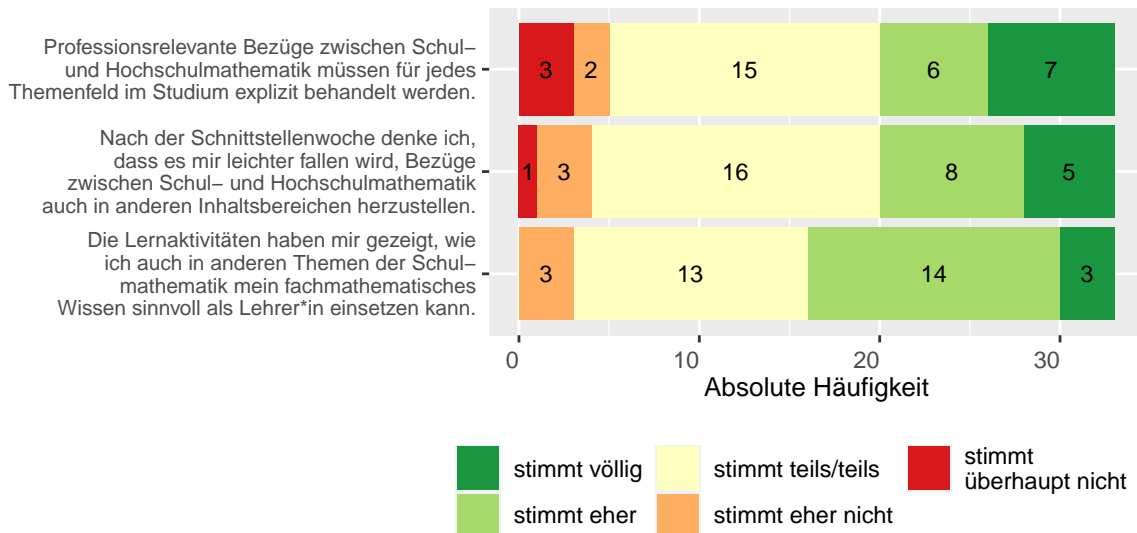


Abbildung 13.24: Auswertung der Skalen bezogen auf die Selbsteinschätzungen der Studierenden zur schnittstellenbezogenen Professionalisierung in der Schnittstellenwoche *Kongruenz* (Skalen Hintergrundtheorie, SelbstwirksamkeitProfHandeln, Schnittstellenaspekte).

Bei der Interpretation der Ergebnisse sind verschiedene methodische und inhaltliche Limitationen zu berücksichtigen. Zunächst einmal haben alle Ergebnisse nur eine retrospektive Aussagekraft für die beiden beforschten Veranstaltungszyklen. Da die Studie zwar eine Vollerhebung war, die Stichprobengröße aber mit $n = 33$ begrenzt ist, lassen die Ergebnisse keine verallgemeinernden Schlussfolgerungen zu. Die Konstruktion der eingesetzten Items und Skalen folgte einem pragmatischen Ansatz und konnte weder durch weitere quantitative Analysen (aufgrund der kleinen Stichprobengröße) noch durch begleitende qualitative Studien (aufgrund der Projektressourcen) weiter validiert werden. Auf der inhaltlichen Ebene muss auf jeden Fall die Beobachtung aus der Lehrpraxis berücksichtigt werden, dass die meisten Studierenden sehr dankbar über das Projekt waren, da es ansonsten im Studium wenige Fachveranstaltungen mit einer vergleichbaren Zielgruppenorientierung gab. Das birgt die Gefahr, dass die positiven Ergebnisse zumindest zu einem Teil auch Resultat dieser positiven Grundstimmung sind. Allerdings bleibt an dieser Stelle die offene Frage, ob dieser Effekt sich nicht ebenfalls positiv auf die subjektive Facette der zweiten Diskontinuität auswirkt. Ein weiterer wesentlicher Punkt ist, dass die erhobenen Daten eine Momentaufnahme direkt im Anschluss an die Schnittstellenwoche sind. Positive Untersuchungsergebnisse lassen noch keine Aussage über die Nachhaltigkeit eines möglichen Kompetenzzuwachses zu. Darüber hinaus sind alle Ergebnisse Selbstauskünfte und ermöglichen keine belastbaren Aussagen über tatsächliche Kompetenzen und damit auf die Wirkung bezogen auf die objektive Facette der zweiten Diskontinuität.

Trotz dieser Einschränkungen zeigen die ausgewerteten Daten und insbesondere das Fehlen von systematisch auftretenden unerwünschten Resultaten, dass die Studierenden in der Konzeption der Schnittstellenwoche keine wesentlichen und strukturellen Probleme wahrnehmen. Es wird deutlich, dass die meisten Studierenden die Schnittstellenwoche zum Thema *Kongruenz* und die zugehörigen Aktivitäten positiv bewerten und den gewählten Themenschwerpunkt als relevant wahrnehmen. Darüber hinaus geben die Studierenden an, dass die Schnittstellenwoche einen Beitrag dazu geleistet hat, fachliche Hintergründe zum Thema *Kongruenz* aus professionsorientierter Perspektive



Einschätzungen zum Transferpotenzial der Schnittstellenwoche Kongruenz (n = 33)

Abbildung 13.25: Darstellung der Ergebnisse zur Einschätzung der Studierenden der Zyklen 1 und 2 zum Transferpotenzial der Schnittstellenwoche *Kongruenz* auf andere Themenbereiche. (Items Transfer_1, Transfer_2, Transfer_3)

besser zu durchdringen und typische professionelle Handlungsanforderungen zu bewältigen. Die eingeführten Schnittstellenaspekte wurden ebenfalls positiv evaluiert. Auch wenn die Studierenden teilweise Transferpotenzial für professionelles Handeln in anderen Themenbereichen sehen, geben die meisten an, dass hier weiterhin das explizite Aufzeigen von Verknüpfungen zwischen gelernter Fachmathematik und unterrichtlichem Handeln notwendig ist.

Insgesamt sind die Ergebnisse der Studie positiv im Sinne der Intention der Schnittstellenwoche zu bewerten und zeigen, dass die Schnittstellenwoche positive Effekte auf die themenbezogene Überwindung der subjektiven Facette der zweiten Diskontinuität hat.

13.3.3 Analyse von Lernendenvoraussetzungen zum Kongruenzbegriff

Vorstellung des Untersuchungsdesigns

Im Rahmen der Spezifizierung und Strukturierung der Schnittstelle *Kongruenz* habe ich eine Forschungslücke bezogen auf die *Lernendenperspektive* identifiziert (Abschnitt 13.1.4 und beschrieben, dass es keine mir bekannten Daten dazu gibt, welche Vorkenntnisse Mathematik-Lehramtsstudierende typischerweise zum Kongruenzbegriff haben. In diesem Abschnitt möchte ich dementsprechend die Lernendenperspektive zur Schnittstellenwoche *Kongruenz* auf Basis empirischer Daten ausschärfen und damit einen Beitrag zur Beantwortung der Forschungsfrage FF-B.2⁸³ leisten.

Die Datengrundlage für diese Untersuchung sind die pseudonymisierten Studierendenbearbeitungen der ePortfolioaufgabe *Wissensstand Kongruenz* (ePortfolioaufgabe 2). Ich werde im Folgenden zunächst die Konzeption und Auswertung der Aufgabe vor dem Hintergrund des Forschungs-

⁸³FF-B.2 Welche Lernendenvoraussetzungen haben die Studierenden bezogen auf die geometrischen Konzepte *Kongruenz* und *Symmetrie*?

teresses erläutern. Anschließend führe ich eine *A-priori-Analyse* durch, in der ich basierend auf den Analysen zur Rolle von Kongruenz im Mathematikunterricht (Abschnitt 13.1.3) Hypothesen zur Bearbeitung der Aufgabe durch die Studierenden aufstelle (S. 214 f.). Die Ergebnisse der Analyse führen darüber hinaus zu ersten Kategorien für die qualitative Inhaltsanalyse der Studierendenbearbeitungen. Die qualitative Auswertung der Daten findet im Unterabschnitt auf S. 218 statt. Dieser Abschnitt schließt mit einer Zusammenfassung und Einordnung der Ergebnisse sowie der Diskussion von Limitationen der Studie (S. 225 f.).

In Abschnitt 13.1.4 habe ich erläutert, dass davon auszugehen ist, dass das Wissen, das die Studierenden der Veranstaltung *Geometrie für Lehramtsstudierende* zum Kongruenzbegriff haben, im Rahmen des eigenen Mathematikunterrichts der Mittelstufe erworben haben. Dieses ist bei einzelnen Studierenden eventuell durch Praktika oder Nachhilfeunterricht zwischenzeitlich „aufgefrischt“ worden, war aber kein verpflichtender Bestandteil anderer Veranstaltungen im Lehramtsstudium. Somit kann bei der Behandlung des Themas Kongruenz in der Vorlesung (sowohl als mathematischer Inhalt als auch als Schnittstellenthema) nicht von fundierten Vorkenntnissen, geschweige denn von einheitlichen Lernvoraussetzungen, ausgegangen werden. Genau an dieser Stelle setzt die ePortfolioaufgabe *Wissensstand Kongruenz* (ePortfolioaufgabe 2) an:

Aufgabenstellung: Wissensstand: Kongruenz

Schreiben Sie bitte auf, wie Sie folgende Definitionen ergänzen würden. Schlagen Sie bitte nicht in einem Buch oder online nach und tauschen Sie sich bitte auch nicht mit Ihren Mitstudierenden aus, sondern antworten Sie so, als ob Sie diese Fragen in einem Gespräch gestellt bekommen. Es geht insbesondere nicht zwingend um eine „formale Definition“. Schreiben Sie einfach, was Ihnen gerade durch den Kopf geht.

- Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn ...
- Zwei Vierecke sind kongruent, wenn ...
- Zwei Kreise sind kongruent, wenn ...
- Zwei beliebige Figuren der Ebene sind kongruent, wenn ...

Die Antwort wird nicht bewertet, sondern dient als erster Teil einer veranstaltungsbegleitenden Selbstreflexion Ihres Lernprozesses.

Mit dem Ziel, besser zu verstehen, welche anschlussfähigen Konzepte aber auch welche Fehlvorstellungen die Studierenden zu Veranstaltungsbeginn haben, werden sie gebeten, Kongruenzdefinitionen für verschiedene geometrische Figuren zu vervollständigen: Zunächst geht es um *Dreiecke*. Diese habe ich in Abschnitt 13.1.3 als die zentralen Objekte für Kongruenzbetrachtungen im Mathematikunterricht herausgestellt. Auf diese Weise startet der erste Teil der Aufgabe möglichst nah an den vermutlich noch am ehesten verfügbaren Erinnerungen. Als Nächstes soll Kongruenz für *Vierecke* definiert werden. Diese stellen das nächst allgemeinere geometrische Objekt nach dem Dreieck dar, sind aber aus Kongruenz-Perspektive deutlich komplexer (S. 166 f.). An dieser Stelle kann erforscht werden, wie reflektiert und durchdacht die Studierenden Kongruenzaussagen für Dreiecke auf Vierecke zu übersetzen versuchen. Als dritter Teil soll Kongruenz für *Kreise* definiert werden. Damit wird sich von der Betrachtung von n-Ecken gelöst. Am Ende der Aufgabe sollen

die Studierenden eine allgemeine Kongruenz-Definition für beliebige Figuren der Ebene angeben und damit über einen Kongruenzbegriff nachdenken, der losgelöst von speziellen geometrischen Eigenschaften einzelner Objektklassen ist.

Die Aufgabenstellung ist mit dem Ziel konzipiert, die Bearbeitung für die Studierenden möglichst niederschwellig zu gestalten. Dies spiegelt sich zum einen darin wider, dass es nicht darum geht eine perfekte, „formale Definition“ aufzuschreiben, sondern möglichst spontan zu antworten. Zum anderen werden bereits Satzanfänge vorgegeben, die es zu vervollständigen gilt um die Studierenden zu ermutigen, selbstständig auf Basis ihres Vorwissens zu antworten und nicht in Büchern oder online zu recherchieren. Auf diese Weise sollen die erhobenen Daten einen möglichst realistischen Ausschnitt der Fachkonzepte der Studierenden zur *Kongruenz* liefern. Dieses Vorgehen birgt allerdings auf der anderen Seite den Nachteil, dass die Studierenden nicht explizit angehalten werden, über die Präzision und den mathematischen Gehalt ihrer Antworten zu reflektieren. Ich werde im Kontext der Zusammenfassung und Einordnung der Studie (S.225) darauf eingehen, wie für anschließende Untersuchungen das methodische Design genau in diesem Sinne optimiert werden kann.

Die Aufgabe ist offensichtlich funktional für die Begleitforschung zur Schnittstelle *Kongruenz*, erfüllt aber auch einen Zweck für die ePortfolio-Arbeit im Sinne von Abschnitt 8.1.3: Die Verschriftlichung ihrer Vorkenntnisse liefert für die Studierenden einen Ausgangspunkt für eine spätere Reflexion des Lernfortschritts.

Die Aufgabe wurde in den Zyklen 2 und 3 eingesetzt, nachdem sich in den Praxiserfahrungen des ersten Zyklus' die Heterogenität der Vorkenntnisse zum Kongruenzbegriff sehr deutlich aufgetan hat. Zur Analyse liegen insgesamt 44 Studierendenbearbeitungen vor (Zyklus 2: $n = 12$, Zyklus 3: $n = 32$). Die entstandenen Texte habe ich mit einer inhaltlich strukturierenden Inhaltsanalyse nach Kuckartz (2018, 97 ff.) mit dem Ziel analysiert, typische Konzepte und (Fehl-)Vorstellungen zum Kongruenzbegriff zu beschreiben. Die Entwicklung eines initialen Kategoriensystems ist Bestandteil der a-priori-Analyse im folgenden Abschnitt.

A-priori-Analyse zur ePortfolio-Aktivität Wissensstand: Kongruenz

In diesem Abschnitt möchte ich theoriebasiert Hypothesen über die Bearbeitung der ePortfolioaufgabe durch die Studierenden aufstellen. Die wesentliche Grundlage dafür bilden die Analysen zur Rolle des Kongruenzbegriffs im Mathematikunterricht (Abschnitt 13.1.3). Die Struktur der folgenden Ausführungen, folgt der Struktur der Aufgabenstellung.

Kongruenz von Dreiecken In den Abschnitten 13.1.3 und 13.1.3 habe ich herausgearbeitet, dass Dreiecke die zentrale Klasse von Objekten für Kongruenzbetrachtungen im Mathematikunterricht darstellen und Kongruenz an Dreiecken schwerpunktmäßig im Kontext von (oft nicht weiter begründeten) Kongruenzsätzen behandelt wird. Die Kongruenzsätze haben im Mathematikunterricht eine weitaus größere Bedeutung als das Arbeiten mit der eigentlichen Definition von Kongruenz. Aus diesem Grund gehe ich davon aus, dass die meisten Studierenden die Kongruenz von Dreiecken über Kongruenzsätze definieren und umgekehrt fast niemand eine abbildungsgeometrische Definition (z.B. über „Drehen, Spiegeln, Verschieben“ oder über „Deckungsgleichheit“) wählt.

In der Tat ist es so, dass aus rein fachmathematischer Perspektive nichts gegen die Nutzung von einem der Kongruenzsätze als Definition für Kongruenz von Dreiecken einzuwenden ist, da alle Kongruenzsätze (mathematische Bemerkungen 13.1.11 bis 13.1.14) Äquivalenzaussagen sind. Die anderen Kongruenzsätze können dann daraus gefolgert werden. Ein Beispiel für dieses Vorgehen liefert Hilbert (1977), der den Kongruenzsatz SWS als Axiom nutzt. Im Kontext dieser Untersuchung ist es aber wichtig festzuhalten, dass aus der Nutzung eines Kongruenzsatzes bei der Bearbeitung dieser Aufgabe nicht automatisch folgt, dass die entsprechende Person eben diesen Kongruenzsatz mit dem Wissen aufgeschrieben hat, dass man daraus bereits alle anderen Kongruenzsätze folgern kann. Insbesondere wenn Studierende mehrere Kongruenzsätze gleichzeitig angeben, spricht das eher dafür, dass sie gerade kein Konzept einer präzisen Definition für Dreieckskongruenz haben.

Darüber hinaus muss natürlich auch damit gerechnet werden, dass manche Studierende den Satz zur Dreieckskongruenz in fachlich falscher Weise vervollständigen.

Kongruenz von Vierecken Die Kongruenz von Vierecken ist ein Thema, das im Mathematikunterricht höchstens als Exkurs, aber auf keinen Fall systematisch behandelt wird. Es ist also nicht davon auszugehen, dass die Studierenden hier substanzielles Vorwissen haben. Zur Vervollständigung des Satzes gibt es mindestens zwei plausible Strategien: Zum einen kann versucht werden einen Kongruenzsatz für Dreiecke zu verallgemeinern, zum anderen kann versucht werden eine allgemeine, Vierecks-unspezifische Kongruenz-Definition zu verwenden. Aufgrund der Dominanz der Kongruenzsätze im Mathematikunterricht gehe ich davon aus, dass der erstgenannte Zugang dominieren wird. Auf S. 166 f. habe ich beschrieben, dass das Finden von Kongruenzsätzen für Vierecke keineswegs trivial ist. Aus diesem Grund ist bei den aus Dreieckskongruenzsätzen verallgemeinerten Kongruenzaussagen für Vierecke, sowohl mit korrekten als auch mit nicht korrekten Formulierungen zu rechnen. Im Rahmen der Analysen auf S. 166 f. habe ich insbesondere die Rolle von Konvexität als wichtige Voraussetzung für die Gültigkeit bestimmter Kongruenzsätze herausgearbeitet. Da nicht-konvexe Vierecke im Mathematikunterricht aber keine ausgewiesene Rolle spielen, rechne ich nicht damit, dass die Studierenden diesen Fall bei der Bearbeitung der Aufgabe berücksichtigen. Dementsprechend beurteile ich die Korrektheit der getätigten Aussagen unter der Voraussetzung, dass es nur um konvexe Vierecke geht und kodiere ggf. Beiträge in denen Konvexität explizit angesprochen wird.

Kongruenz von Kreisen Die Frage nach der Kongruenz von Kreisen ist mit an Sicherheit grenzender Wahrscheinlichkeit für fast alle Studierenden neu. Wenn man wieder davon ausgeht, dass die meisten Studierenden Kongruenz mit den Kongruenzsätzen für Dreiecke in Verbindung bringen, besteht eine logische Übertragung der Idee des Angebens von Größen darin, zwei Kreise als kongruent zu bezeichnen, wenn sie z. B. denselben Radius, Durchmesser oder Umfang haben.

Kongruenz beliebiger Figuren Bei der Vervollständigung des vierten Satzes können, abhängig davon, wie Kongruenz im eigenen Schulunterricht behandelt wurde, Aspekte aus allen in Abschnitt 13.1.3 unterschiedenen Zugängen zum Kongruenzbegriff auftreten. Dazu gehört die Idee der *Deckungsgleichheit*, der Zugang *Spiegeln*, *Drehen*, *Verschieben*, die Formulierung *Form und Größe* sowie die Bezugnahme auf geometrische Konstruktionen. Darüber hinaus ist auch hier eine weitere Verallgemeinerung der Kongruenzsätze im Sinne von „Übereinstimmung in allen Winkeln und Seiten“ denkbar.

Aus den Überlegungen zu den einzelnen Aufgabenteilen ergeben sich zusammengefasst die nachfolgend dargestellten Hypothesen. Um sie zu verifizieren, starte ich die qualitative Inhaltsanalyse der Studierendenbearbeitungen mit dem in Tabelle 13.13) dargestellten initialen Kategoriensystem. Die Kategorien spiegeln jeweils die Ergebnisse der hypothesengenerierenden a-priori-Analyse wider.

- (H1) Viele Studierenden werden die Aussage zur Kongruenz von Dreiecken unter Verwendung von mindestens einem der Kongruenzsätze vervollständigen (Kategorien 1.A bis 1.D, 1.F, 1.G).
- (H2) Nur wenige der Studierenden werden eine eher abbildungsgeometrische Definition für die Kongruenz von Dreiecken angeben (Kategorie 1.E).
- (H3) Die meisten Studierenden werden für die Kongruenz von Vierecken versuchen, die Kongruenzsätze für Dreiecke weiter zu verallgemeinern (Kategorien 2.A, 2.B).
- (H4) Die meisten Studierenden werden die Kongruenz von Kreisen über die Gleichheit von Radius, Durchmesser, Umfang, ... definieren (Kategorie 3.A bis 3.C).
- (H5) Bei der Kongruenz beliebiger Figuren treten die Formulierungen auf, die typisch für die in Abschnitt 13.1.3 analysierten Zugänge zum Kongruenzbegriff sind (Kategorien 4.A bis 4.D).

Kategorienbezeichnung		Kategorienbeschreibung
1	Kongruenz von Dreiecken	<i>Kategorien zur Kongruenz von Dreiecken.</i>
1.A	Kongruenzsatz SSS	Dreieckskongruenz wird über den Kongruenzsatz SSS beschrieben.
1.B	Kongruenzsatz SWS	Dreieckskongruenz wird über den Kongruenzsatz SWS beschrieben.
1.C	Kongruenzsatz WSW	Dreieckskongruenz wird über den Kongruenzsatz WSW beschrieben.
1.D	Kongruenzsatz SsW	Dreieckskongruenz wird über den Kongruenzsatz SsW beschrieben.
1.E	Abbildungsgeometrisch	Dreieckskongruenz wird unter Nutzung von geometrischen Abbildungen oder einem durch solche Abbildungen formalisierbaren Konzept, wie „Deckungsgleichheit“ beschrieben.
1.F	Angabe genau eines Kongruenzsatzes.	Es wird in der Bearbeitung auf genau einen der Kongruenzsätze verwiesen.
1.G	Angabe mehrerer Kongruenzsätze	Es wird in der Bearbeitung auf mehr als einen Kongruenzsatz verwiesen.
1.H	Falsche Aussage zur Dreieckskongruenz	Die getroffene Aussage zur Dreieckskongruenz ist unzutreffend.
2	Kongruenz von Vierecken	<i>Kategorien zur Kongruenz von Vierecken.</i>
2.A	Falsche Aussage zur Viereckskongruenz	Es wird eine falsche Aussage zur Kongruenz von Vierecken angegeben, in der erfolglos versucht wird einen Kongruenzsatz für Dreiecke auf Vierecke zu verallgemeinern.
2.B	Korrekte Aussage zur Viereckskongruenz	Es wird eine korrekte Aussage zur Kongruenz von Vierecken angegeben, die im Sinne des <i>Größenaspekts</i> eine Verallgemeinerung der Kongruenzsätze für Dreiecke darstellt.
2.C	Abbildungsgeometrisch	Dreieckskongruenz wird unter Nutzung von geometrischen Abbildungen oder einem durch solche Abbildungen formalisierbaren Konzept, wie „Deckungsgleichheit“ beschrieben.
2.D	Nicht-konvexe Vierecke	Es wird auf den Sonderfall eingegangen, dass Vierecke auch nicht konvex sein können.
3	Kongruenz von Kreisen	<i>Kategorien zur Kongruenz von Kreisen.</i>
3.A	Gleicher Radius	Kongruenz von Kreisen wird über die Übereinstimmung der Radien beschrieben.
3.B	Gleicher Durchmesser	Kongruenz von Kreisen wird über die Übereinstimmung der Durchmesser beschrieben.
3.C	Gleicher Umfang	Kongruenz von Kreisen wird über die Übereinstimmung der Umfänge beschrieben.
3.D	Falsche Aussage zur Kreiskongruenz	Es wird eine falsche Aussage zur Kongruenz von Kreisen angegeben.
4	Zugänge zum Kongruenzbegriff	<i>Kategorien, die generelle Vorstellungen und Zugänge zum Kongruenzbegriff bei beliebigen Figuren beschreiben.</i>
4.A	Kongruenz als Deckungsgleichheit	Kongruenz wird über Deckungsgleichheit oder einen äquivalenten Begriff beschrieben.
4.B	Spiegeln, Drehen, Verschieben	Kongruenz wird durch die in Schulbüchern auftauchende Formulierung der Überführbarkeit durch „Spiegelungen, Drehungen und/oder Verschiebungen“ definiert. Dabei werden die Namen der Abbildungen explizit genannt.
4.C	Form und Größe	Kongruenz wird über die Übereinstimmung von Form und Größe beschrieben. Dabei sind verschiedene Sichtweisen auf den Größenbegriff möglich.
4.D	Bezug zu geometrischen Konstruktionen	Es wird ein Bezug zwischen Kongruenz und geometrischen Konstruktionen hergestellt.
4.E	Falsche Aussage zur Figurenkongruenz	Die Aussage zur Kongruenz von Figuren ist unzutreffend.

Tabelle 13.13: Initiales Kategoriensystem zur Analyse der Studierendenbearbeitungen der ePortfolioaufgabe *Wissensstand: Kongruenz*. Die Hauptkategorien wurden entlang der Aufgabenstellung gebildet; die Unterkategorien sind das Ergebnis der a-priori-Analyse.

Auswertung der qualitativen Inhaltsanalyse

Bei der Durchführung der qualitativen Inhaltsanalyse der Studierendenbearbeitungen zur ePortfolioaufgabe *Wissensstand Kongruenz* wurde das in Tabelle 13.13 vorgestellte initiale Kategoriensystem als Ausgangspunkt genommen und immer dann, wenn Textstellen nicht kodiert werden konnten, induktiv um weitere Kategorien erweitert. Das Ergebnis der Inhaltsanalyse ist das in den Tabellen 13.14 (S. 218), 13.15 (S. 219), 13.16 (S. 221) und 13.18 (S. 224) dargestellte Kategoriensystem. Dieses werde ich im Folgenden unter besonderer Berücksichtigung der oben aufgestellten Hypothesen im Detail vorstellen. Dabei ist zu beachten, dass verschiedene Studierende und auch verschiedene Textstellen gleichzeitig in mehrere Kategorien fallen. Ich werde darauf an den Stellen, an denen diese Mehrfachkodierungen für die Auswertung relevant ist, jeweils detaillierter eingehen. Ich beginne

	Kategorienbezeichnung	Kategorienbeschreibung	#
3	Kongruenz von Kreisen	<i>Kategorien zur Kongruenz von Kreisen.</i>	
3.1(3.A)	Gleicher Radius	Kongruenz von Kreisen wird über die Übereinstimmung der Radien beschrieben.	40
3.2(3.B)	Gleicher Durchmesser	Kongruenz von Kreisen wird über die Übereinstimmung der Durchmesser beschrieben.	11
3.3(3.C)	Gleicher Umfang	Kongruenz von Kreisen wird über die Übereinstimmung der Umfänge beschrieben.	6
3.4	Gleicher Flächeninhalt	Kongruenz von Kreisen wird über die Übereinstimmung der Flächeninhalte beschrieben.	3
3.5(3.D)	Falsche Aussage zur Kreiskongruenz	Es wird eine falsche Aussage zur Kongruenz von Kreisen angegeben.	2

Tabelle 13.14: Teil 1 des Kategoriensystems zur Analyse der Studierendenbearbeitungen der ePortfolioaufgabe *Wissensstand: Kongruenz*: Hauptkategorie 3, Kongruenz von Kreisen. (Zyklus 2: $n = 12$, Zyklus 3: $n = 32$). Die blau markierten Kategorien entstammen dem initialen Kategoriensystem aus Tabelle 13.13 (S. 217).

mit der Vorstellung der Ergebnisse zur Kongruenz von Kreisen (Hauptkategorie 3, Tabelle 13.14), da es dort keine weiter bemerkenswerten Ergebnisse über die Tatsache hinaus zu berichten gibt, dass sich Hypothese (H₄)⁸⁴ voll bestätigt hat. Nahezu allen Studierenden ist das Aufstellen einer Kongruenzaussage für Kreise erfolgreich gelungen. Dabei wurde fast ausschließlich die Gleichheit der Radien als Kriterium herangezogen (Kategorie 3.1, 40 Kodierungen). Ein typisches Beispiel ist die Bearbeitung von Josy⁸⁵:

ePF | Zwei Kreise sind kongruent, wenn sie den gleichen Radius besitzen

Josy (Zyklus 2) | Z. 3 | Kategorie(n): 3.1

Einige Studierende zählen gleich mehrere Eigenschaften auf (z. B. Radius, Durchmesser, Umfang). Diese Mehrfachnennungen habe ich bereits in der a-priori-Analyse für die Kongruenz von Dreiecken erwähnt und werde in der abschließenden Zusammenfassung und Einordnung (S. 225) darauf eingehen.

⁸⁴(H₄) Die meisten Studierenden werden die Kongruenz von Kreisen über die Gleichheit von Radius, Durchmesser, Umfang, ... definieren.

⁸⁵Alle ePortfolios wurden unter Nutzung komplett zufällig generierter Vornamen pseudonymisiert.

	Kategorienbezeichnung	Kategorienbeschreibung	#
1	Kongruenz von Dreiecken	<i>Kategorien zur Kongruenz von Dreiecken.</i>	
1.1 (1.A)	Kongruenzsatz SSS	Dreieckskongruenz wird über den Kongruenzsatz SWS beschrieben.	26
1.2 (1.G)	Angabe mehrerer Kongruenzsätze	Es wird in der Bearbeitung auf mehr als einen Kongruenzsatz verwiesen.	24
1.3 (1B)	Kongruenzsatz SWS	Dreieckskongruenz wird über den Kongruenzsatz SWS beschrieben.	22
1.4 (1.C)	Kongruenzsatz WSW	Dreieckskongruenz wird über den Kongruenzsatz WSW beschrieben.	17
1.5 (1.H)	Falsche Aussage zur Dreieckskongruenz	Die getroffene Aussage zur Dreieckskongruenz ist unzutreffend.	15
1.6 (1.D)	Kongruenzsatz SsW	Dreieckskongruenz wird über den Kongruenzsatz SsW beschrieben.	10
1.7 (1.E)	Abbildungsgeometrisch	Dreieckskongruenz wird unter Nutzung von geometrischen Abbildungen oder einem durch solche Abbildungen formalisierbaren Konzept, wie „Deckungsgleichheit“ beschrieben.	8
1.8 (1.F)	Angabe genau eines Kongruenzsatzes.	Es wird in der Bearbeitung auf genau einen der Kongruenzsätze verwiesen.	6
1.9	Alle Winkel und Seiten (Dreiecke)	Dreieckskongruenz wird über die Übereinstimmung in allen Seitenlängen und Winkeln beschrieben.	5
1.10	Allgemein Kongruenzsätze	Dreieckskongruenz über Kongruenzsätze ohne deren explizite Nennung.	1

Tabelle 13.15: Teil 2 des Kategoriensystems zur Analyse der Studierendenbearbeitungen der ePortfolioaufgabe *Wissensstand: Kongruenz*: Hauptkategorie 1, Kongruenz von Dreiecken. (Zyklus 2: $n = 12$, Zyklus 3: $n = 32$). Die blau markierten Kategorien entstammen dem initialen Kategoriensystem aus Tabelle 13.13 (S. 217).

Ich komme als Nächstes zur Beschreibung der Analyseergebnisse zur *Kongruenz von Dreiecken* (Hauptkategorie 1, Tabelle 13.15). Wie erwartet nutzen die meisten Studierenden einen oder mehrere der Kongruenzsätze zur Beschreibung von Dreieckskongruenz (Kategorien 1.1 (SSS, 26 Kodierungen), 1.3 (SWS, 22 Kodierungen), 1.4 (WSW, 17 Kodierungen), 1.6 (SsW, 10 Kodierungen)). Die meisten der Studierenden, die einen Kongruenzsatz erwähnen, verweisen direkt auf mehrere Kongruenzsätze (Kategorie 1.2, 24 Kodierungen). Dabei findet man sowohl Studierendenbearbeitungen, in denen die Namen der Kongruenzsätze aufgelistet sind (siehe Anne) als auch solche, in denen die einzelnen Kongruenzsätze ausformuliert werden (siehe Henry, nächste Seite).

ePF | Bei dem ersten Stichpunkt fallen mir zunächst einmal die Kongruenzsätze SSS, SWS, WSW und SsW ein. Also zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie nach den Merkmalen einem der Kongruenzsätze nach übereinstimmen. [...]

Anne (Zyklus 3) | Z. 1 | Kategorie(n): 1.1, 1.2, 1.3, 1.5, 1.6

ePF	<p>Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn</p> <ul style="list-style-type: none"> • zwei Seitenlängen und der Winkel zwischen diesen Seiten bei beiden Dreiecken übereinstimmen. • alle Seitenlängen bei beiden Dreiecken übereinstimmen.
-----	--

Henry (Zyklus 3) | Z. 1-3 | *Kategorie(n)*: 1.1, 1.2, 1.3

Es gibt sechs Studierende, die genau einen Kongruenzsatz angeben (Kategorie 1.8). Entsprechend der Überlegungen in der a-priori-Analyse kann bei diesen Studierenden zumindest nicht ausgeschlossen werden, dass sie wirklich den erwähnten Kongruenzsatz als Definition sehen, aus der dann die anderen Kongruenzsätze abgeleitet werden können. Darüber hinaus definieren fünf Studierende Kongruenz von Dreiecken korrekterweise über die Übereinstimmung aller Seitenlängen und Winkel (Kategorie 1.9). Diese Variante der Definition ist für Dreiecke korrekt und die Kongruenzsätze beantworten dann die Frage danach, ob es wirklich einen Vergleich all dieser sechs Größen bedarf um Kongruenz nachzuweisen. Diese Ergebnisse bestätigen sowohl Hypothese (H₁)⁸⁶ als auch die anderen in der a-priori-Analyse dargestellten Vorüberlegungen.

Immerhin 15 Studierende geben falsche Aussagen zur Dreieckskongruenz an (Kategorie 1.5). Dabei zeigt sich insbesondere, dass vielen Studierenden zwar die Kongruenzsätze grundsätzlich bekannt sind, allerdings nicht deren genaue Voraussetzungen. Dies führt zur Formulierung falscher Kongruenzsätze für Dreiecke. Die folgenden Zitate von Romy und Jason sind exemplarisch für die beiden häufigsten Fehlermuster, die in dieser Kategorie auftreten

ePF	<p>Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn eine der folgenden Eigenschaften erfüllt ist: [...] eine Seite und zwei Winkel sind gleich groß.</p>
-----	--

Romy (Zyklus 2) | Z. 1-4 | *Kategorie(n)*: 1.5

Romy zielt offenbar auf den Kongruenzsatz WSW ab, geht aber nicht darauf ein, dass die beiden Winkel und die Seite jeweils in der selben Lage zueinander stehen müssen; ohne diese Voraussetzung ist die Aussage falsch (siehe bspw. Konstruktion K₄ in Tabelle 13.2 (S. 181)). Ein Beispiel für einen anders gelagerten Fehler liefert der ePortfolio-Beitrag von Jason, der einen Kongruenzsatz WWW formuliert.

ePF	<p>Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn [...] alle drei Winkel gleich sind.</p>
-----	---

Jason (Zyklus 3) | Z. 1-3 | *Kategorie(n)*: 1.5

Wie bereits in Tabelle 13.2 (S. 181) (Konstruktion K₅) beschrieben, garantiert die Gleichheit aller Winkel allerdings nur Ähnlichkeit und nicht Kongruenz.

Darüber hinaus kann festgehalten werden, dass 8 Studierende Dreieckskongruenz über Deckungsgleichheit und/oder unter Verwendung geometrischer Abbildungen definiert haben (Kategorie 1.7). Damit bestätigen die Daten die Hypothese (H₂)⁸⁷ nur teilweise. Allerdings muss berücksichtigt werden, dass aufgrund der Anonymisierung nicht ausgeschlossen werden kann, dass es sich bei einem Teil dieser Studierenden um Wiederholer handelt.

⁸⁶(H₁) Viele Studierenden werden die Aussage zur Kongruenz von Dreiecken unter Verwendung von mindestens einem der Kongruenzsätze vervollständigen.

⁸⁷(H₂) Nur wenige der Studierenden werden eine eher abbildungsgeometrische Definition für die Kongruenz von Dreiecken angeben.

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass ein Großteil der Studierendenantworten durch eine Bezugnahme auf die Kongruenzsätze geprägt ist. Vielen Studierenden gelingt es, korrekte Aussagen zur Dreieckskongruenz zu treffen, allerdings wird oft nicht zwischen einem Kongruenzsatz und einer Kongruenzdefinition für Dreiecke unterschieden; teilweise lässt sich dies mit den zur Verfügung stehenden Daten nicht entscheiden.

	Kategorienbezeichnung	Kategorienbeschreibung	#
2	Kongruenz von Vierecken	<i>Kategorien zur Kongruenz von Vierecken.</i>	
2.1 (2.A)	Falsche Aussage zur Viereckskongruenz	Es wird eine falsche Aussage zur Kongruenz von Vierecken angegeben, in der erfolglos versucht wird einen Kongruenzsatz für Dreiecke auf Vierecke zu verallgemeinern.	19
2.2	Alle Winkel und Seiten (Vierecke)	Viereckskongruenz wird über die Übereinstimmung in allen Seitenlängen und Winkeln beschrieben.	11
2.3	SWSWS	Es wird der korrekte Kongruenzsatz SWSWS angegeben: Zwei Vierecke sind kongruent, wenn sie in drei Seitenlängen und den eingeschlossenen Winkeln übereinstimmen.	7
2.4 (2.C)	Abbildungsgeometrisch	Dreieckskongruenz wird unter Nutzung von geometrischen Abbildungen oder einem durch solche Abbildungen formalisierbaren Konzept, wie „Deckungsgleichheit“ beschrieben.	6
2.5	WSWSW	Es wird der korrekte Kongruenzsatz WSWSW angegeben: Zwei Vierecke sind kongruent, wenn sie in zwei benachbarten Seitenlängen und drei Winkeln übereinstimmen.	4
2.6	Nur spezielle Vierecke	Die Aussage über Viereckskongruenz ist nicht auf allgemeine Vierecke anwendbar.	2
2.7	SSSSD	Es wird der korrekte Kongruenzsatz SSSSD angegeben: Zwei Vierecke sind kongruent, wenn sie in den Längen entsprechender Seiten und der Länge einer entsprechenden Diagonale übereinstimmen.	1
2.8 (2.D)	Nicht-konvexe Vierecke	Es wird auf den Sonderfall eingegangen, dass Vierecke auch nicht konvex sein können.	0

Tabelle 13.16: Teil 3 des Kategoriensystems zur Analyse der Studierendenbearbeitungen der ePortfolioaufgabe *Wissensstand: Kongruenz*: Hauptkategorie 2, Kongruenz von Vierecken. (Zyklus 2: $n = 12$, Zyklus 3: $n = 32$). Die blau markierten Kategorien entstammen dem initialen Kategoriensystem aus Tabelle 13.13 (S. 217).

In Tabelle 13.16 ist das Kategoriensystem für die Kongruenz von Vierecken dargestellt (Hauptkategorie 2). Zunächst kann festgehalten werden, dass die Konvexität, wie erwartet, von keinem der Studierenden erwähnt worden ist (Kategorie 2.8, 0 Kodierungen). Insgesamt zeigt sich ein deutlich heterogeneres Bild als bei der Dreieckskongruenz. Dies ist dahingehend konsistent zur a-priori-Analyse, als dass die Heterogenität eine Folge davon sein kann, dass die Studierenden hier nicht auf Vorwissen zurückgreifen können, sondern eigenständige mathematische Überlegungen anstellen müssen.

Wie in Hypothese (H₃)⁸⁸ vermutet, stellen viele Studierende Kongruenzaussagen für Vierecke analog zu den Kongruenzsätzen für Dreiecke auf. Da fast alle dieser Aussagen mehrfach auftreten, habe ich die initial aufgestellte Kategorie 2.B aufgeteilt in die Unterkategorien 2.3, 2.5 und 2.7. In allen drei Kategorien wird jeweils ein (unter Annahme von Anordnung und Konvexität, vgl. S. 166) korrekter Kongruenzsatz für Vierecke beschrieben. Der von den Studierenden am häufigsten genannte Kongruenzsatz für Vierecke ist SWSWS (Kategorie 2.3, 7 Kodierungen). Ein Beispiel für diese Kategorie liefert das ePortfolio von Michael, der mit WSWSW (Kategorie 2.5, 4 Kodierungen) noch einen weiteren Kongruenzsatz für Vierecke nennt.

ePF	Zwei Vierecke sind kongruent, wenn drei Seiten und die beiden eingeschlossenen Winkel übereinstimmen. Zwei Vierecke sind kongruent, wenn zwei Seiten, der eingeschlossene Winkel und die beiden anliegenden Winkel übereinstimmen
-----	---

Michael (Zyklus 3) | Z. 1 | Kategorie(n): 2.3, 2.5

Jason gibt mit SSSSD einen weiteren korrekten Kongruenzsatz für Vierecke an (geht allerdings in seiner Formulierung nicht explizit auf die Anordnung der Seiten ein):

ePF	Zwei Vierecke sind kongruent, wenn [...] alle 4 Seiten und eine Diagonale übereinstimmen.
-----	---

Jason (Zyklus 3) | Z. 5-7 | Kategorie(n): 2.7

Die am häufigsten kodierte korrekte Kategorie für die Kongruenz von Vierecken ist allerdings die Kategorie 2.2 (Alle Winkel und Seiten, 11 Kodierungen). Sie gleicht den beschriebenen Kongruenzsätzen insofern, dass auch hier Kongruenz über die Angabe übereinstimmender Größen definiert wird. Der Unterschied besteht darin, dass nicht (wie für einen Kongruenzsatz üblich) versucht wird, Kongruenz durch möglichst wenige übereinstimmende Größen zu beschreiben, was im Sinne einer Definition sinnvoll ist. Immerhin sechs Studierende wählen eine (auf andere Figuren übertragbare) abbildungsgeometrische Formulierung (Kategorie 2.4).

Am häufigsten wurden allerdings falsche Kongruenzaussagen für Vierecke kodiert (Kategorie 2.1, 19 Kodierungen). Die Fehlermuster sind vielfältiger als bei den Aussagen zur Dreieckskongruenz. Mehrfach tritt die unzulässige Verallgemeinerung des Kongruenzsatzes SSS zu SSSS auf. Die anderen falschen Aussagen zur Viereckskongruenz lassen sich nicht unter einer gemeinsamen Beschreibung zusammenfassen. Da sie aber, zum Beispiel in Hinblick auf die Konzeption weiterer Übungsaufgaben zum Kongruenzbegriff, hilfreich sind, liste ich sie in Tabelle 13.17 (S. 223) einzeln auf. Ich nehme dabei ggf. leichte sprachliche Optimierungen vor und verzichte aus Gründen der Übersichtlichkeit jeweils auf das Originalzitat. Die Originalzitate können in Abschnitt D.1 nachgelesen werden und sind jeweils referenziert.

Insgesamt bestätigen die Ergebnisse der Analyse, dass die meisten Studierenden zur Kongruenz von Vierecken kein systematisches Vorwissen hat und zur Beantwortung der Aufgabe eigene Überlegungen anstellt. Dazu versuchen viele Studierende ihr Wissen über Kongruenzsätze zu Dreiecken zu verallgemeinern, was nur einem Teil der Studierenden gelingt. Keiner der Studierenden hat den Sonderfall nicht-konvexer Vierecke erwähnt.

Im letzten Teil der ePortfolioaufgabe sollten die Studierenden eine Kongruenzaussage bzw. Kongruenzdefinition für zwei beliebige ebene Figuren angeben (Hauptkategorie 4, Tabelle 13.18). Auch

⁸⁸(H₃) Die meisten Studierenden werden für die Kongruenz von Vierecken versuchen, die Kongruenzsätze für Dreiecke weiter zu verallgemeinern.

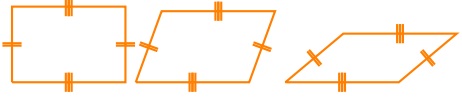
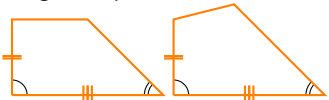
Fehlerhafte Aussage	Begründung des Fehlers	Referenz
Zwei Vierecke sind kongruent, wenn ...		
... sie in allen vier entsprechenden Seitenlängen übereinstimmen	Gegenbeispiel: 	Ferdinand (Zitat D.1.1 (S. 405))
... sie in zwei gegenüberliegenden Winkeln und der verbindenden Diagonale übereinstimmen.	Die beiden Winkel sind in ihrem Scheitel drehbar, ohne dass sich die Länge der verbindenden Diagonale ändert. Dabei entstehen nicht kongruente Vierecke.	Mattis Zitat D.1.2 (S. 405)
... sie in zwei aneinander liegenden Seiten und zwei aneinander liegenden Winkeln übereinstimmen.	Gegenbeispiel: 	Elisabeth (Zitat D.1.3 (S. 405))
... die entsprechenden Diagonalen gleich lang sind und sich im gleichen Winkel schneiden.	Da nicht festgelegt ist, in welchem Verhältnis sich die Diagonalen jeweils schneiden, erfüllen auch nicht kongruente Vierecke die Voraussetzung.	Ali (Zitat D.1.4 (S. 405))
... wenn die Länge einer Seite und ihre Winkel gleich sind.	Dies ist nur korrekt, wenn in beiden Vierecken die Winkel gleich geordnet sind und sich die Seite mit der gegebenen Länge in der gleichen Position relativ zu den Winkeln befindet.	Sam (Zitat D.1.4 (S. 405))

Tabelle 13.17: Übersicht über fehlerhafte Studierendenformulierungen zur Kongruenz von Vierecken.

die hierzu aufgestellte Hypothese (H₅)⁸⁹ kann bestätigt werden: In den kodierten Textstellen finden sich genau die Zugänge wieder, die ich in Abschnitt 13.1.3 herausgearbeitet habe: Kongruenz als Deckungsgleichheit (Kategorie 4.1, 17 Kodierungen), Kongruenz als Übertragbarkeit durch Spiegelung, Drehung und/oder Verschiebung (Kategorie 4.3, 10 Kodierungen) und Kongruenz als Übereinstimmung in Form und Größe (Kategorie 4.4, 9 Kodierungen)⁹⁰. In den Formulierungen zur Übereinstimmung in Form und Größe bestätigen sich die bereits auf S. 170 ff. herausgearbeiteten Probleme bei der Präzisierung dieser Begriffe; „Form und Größe“ wird als feststehende Formulierung genutzt, ohne das erklärt wird, welche genauen geometrischen Eigenschaften mit den beiden Begriffen gemeint sind.

Eine immerhin elf Mal kodierte Kategorie zur Kongruenz von Figuren, die im Rahmen der Analyse induktiv entwickelt wurde, ist die Übereinstimmung in allen Seitenlängen und Winkelgrößen (Kategorie 4.2, 11 Kodierungen). Ein passendes Ankerbeispiel liefert der folgende Auszug aus dem ePortfolio von Ferdinand:

ePF | Zwei beliebige Figuren der Ebene sind kongruent, wenn sie in ihren Seitenlängen und Winkeln übereinstimmen.

Ferdinand (Zyklus 2) | Z. 4 | Kategorie(n): 4.2

⁸⁹(H₅) Bei der Kongruenz beliebiger Figuren treten die Formulierungen auf, die typisch für die in Abschnitt 13.1.3 analysierten Zugänge zum Kongruenzbegriff sind.

⁹⁰Ankerbeispiele zu diesen Kategorien sind nicht weiter instruktiv, da sie im phrasenhaften verbleiben. Man findet sie im Anhang D.1 unter D.1.6 (S. 406) (Mirko, Kategorie 4.1), D.1.7 (S. 406) (Mattis, Kategorie 4.3) und D.1.8 (S. 406) (Sam, Kategorie 4.4).

	Kategorienbezeichnung	Kategorienbeschreibung	#
4	Zugänge zum Kongruenzbegriff	Kategorien, die generelle Vorstellungen und Zugänge zum Kongruenzbegriff bei beliebigen Figuren beschreiben.	
4.1 (4.A)	Kongruenz als Deckungsgleichheit	Kongruenz wird über Deckungsgleichheit oder einen äquivalenten Begriff beschrieben.	17
4.2	Alle Winkel und Seiten	Kongruenz wird über die Übereinstimmung in allen Seitenlängen und Winkeln beschrieben.	11
4.3 (4.B)	Spiegeln, Drehen, Verschieben	Kongruenz wird durch die in Schulbüchern auftauchende Formulierung der Überführbarkeit durch „Spiegelungen, Drehungen und/oder Verschiebungen“ definiert. Dabei werden die Namen der Abbildungen explizit genannt.	10
4.4 (4.C)	Form und Größe	Kongruenz wird über die Übereinstimmung von Form und Größe beschrieben. Dabei sind verschiedene Sichtweisen auf den Größenbegriff möglich.	9
4.5 (4.E)	Falsche Aussage zur Figurenkongruenz	Die Aussage zur Kongruenz von Figuren ist unzutreffend.	6
4.6	Kongruenzabbildung	Überführbar durch eine Kongruenzabbildung/Isometrie ohne weitere Spezifizierung.	6
4.7	Unzureichender Oberbegriff für Abbildungen	Die Abbildungen zum Übertragen einer Figur auf eine kongruente andere Figur werden mit einem nicht zutreffenden Oberbegriff beschrieben.	3
4.8	Redundante Formulierung	Die gewählte Formulierung ist inhaltlich redundant.	2
4.9 (4.D)	Bezug zu geometrischen Konstruktionen	Es wird ein Bezug zwischen Kongruenz und geometrischen Konstruktionen hergestellt.	1

Tabelle 13.18: Teil 4 des Kategoriensystems zur Analyse der Studierendenbearbeitungen der ePortfolioaufgabe *Wissensstand: Kongruenz*: Hauptkategorie 4, Kongruenz beliebiger Figuren. (Zyklus 2: $n = 12$, Zyklus 3: $n = 32$). Die blau markierten Kategorien entstammen dem initialen Kategoriensystem aus Tabelle 13.13 (S. 217).

Die Studierenden, deren Ausführungen in dieser Kategorie kodiert wurden, verstehen unter ebenen Figuren offenbar ausschließlich n -Ecke, da dieser Zugang für krummlinig begrenzte Figuren nicht funktioniert. Die Übereinstimmung in allen Seitenlängen und Winkelgrößen findet man auch speziell bezogen auf Dreiecke (Kategorie 1.9, 5 Kodierungen) und Vierecke (Kategorie 2.2, 11 Kodierungen). Interessant ist die Bearbeitung von Liam.

ePF

- Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn alle Seiten und Winkel gleich sind.
- Zwei Vierecke sind kongruent, wenn alle Seiten und Winkel gleich sind.
- Zwei Kreise sind kongruent, wenn beide Radien gleich sind.
- Zwei beliebige Figuren der Ebene sind kongruent, wenn alle Seiten und Winkel gleich sind.

Er definiert Kongruenz bei Dreiecken und Vierecken jeweils über die Übereinstimmung aller Seiten(längen) und Winkel(größen). Da dieser Zugang beim Kreis offensichtlich nicht funktioniert, nutzt er dort die Übereinstimmung der Radien. Obwohl er damit ein Beispiel (für eine Figur) hat, in dem die Definition von Kongruenz über alle Seiten und Winkel nicht funktioniert, definiert er Kongruenz für allgemeine Figuren trotzdem in dieser Weise. Es ist unklar, ob Liam dieser Widerspruch nicht auffällt, oder ob er unter geometrischen Figuren der Ebene nur Dreiecke fasst und der Kreis ein Sonderfall ist. Es kann allerdings festgehalten werden, dass Liam konsistent Kongruenz im Sinne des *Größenaspekts* definiert.

Manche Studierenden, wie Ali, wählten einen sehr fachmathematischen Zugang zur Figurenkongruenz und verweisen auf die Existenz einer überführenden Kongruenzabbildung bzw. Isometrie. Der Beitrag ist prototypisch für die ebenfalls induktiv entwickelte Kategorie 4.6 (6 Kodierungen).

ePF | Zwei beliebige Figuren der Ebene sind kongruent, [...] wenn wenn sie durch eine Kongruenzabbildung aufeinander abbildbar sind.

Ali (Zyklus 3) | Z. 7-9 | *Kategorie(n)*: 4.6

Der in dieser Kategorie zusammengefasste explizite abbildungsgeometrische Bezug unter Verwendung von Fachbegriffen wie Kongruenzabbildung/Isometrie ist vor dem Hintergrund der in Abschnitt 13.1.3 durchgeführten Analysen auffällig. Zwei mögliche Erklärungen sind, dass die Studierenden die Veranstaltung zum zweiten Mal besuchen oder die Begriffe im Rahmen eines Wahlpflicht-Seminars gelernt haben.

Nicht allen Studierenden, die relativ abstrakt auf die Existenz einer bestimmten Abbildung rekurren, gelingt allerdings die korrekte Spezifizierung der notwendigen Eigenschaften dieser Abbildung (Kategorie 4.7, 3 Kodierungen). Statt der Isometrieeigenschaft wird nur Affin-Linearität, Bijektivität oder Verhältnismöglichkeit gefordert.

Zum Abschluss möchte ich noch ein Ergebnis der Analyse vorstellen, das zwar in der Konzeption der Studie nicht angelegt wurde, bei der Analyse der Studierendenbeiträge allerdings so auffällig war, dass es hier kurz beschrieben wird. Auch wenn in der Aufgabenstellung explizit nicht gefordert war, eine „formale Definition“ aufzuschreiben, ist der Mangel an sprachlicher Präzision in den Aussagen vieler Studierender doch erwähnenswert. Oft ist dem einschlägig vorgebildeten Leser zwar klar, was gemeint sein muss, für eine belastbare Aussage, z.B. einem Schüler gegenüber, erweisen sich viele Formulierungen aber als problematisch, weil sie unnötige Redundanzen aufweisen, doppeldeutig sind und/oder Voraussetzungen fehlen. Diese Fälle sind in den Kategorien mit *Falsche Aussagen* (1.5, 2.1, 3.5, 4.5) bzw. *redundanten Formulierungen* (Kategorie 4.6) zusammengefasst. In Tabelle 13.19 sind vier einschlägige Beispiele aufgelistet.

Zusammenfassung und Beurteilung der Ergebnisse

Die in diesem Abschnitt vorgestellte qualitative Studie zielt darauf ab, die Lernendenvoraussetzungen zur Schnittstellenwoche Kongruenz (Abschnitt 13.1.4) weiter auszuscharfen und damit einen Beitrag zur Beantwortung der Forschungsfrage FF-B.2⁹¹ zu leisten. Dazu wurden Studierendenbearbeitungen zur ePortfolioaufgabe 2 (S. 388) (Wissensstand: Kongruenz) analysiert.

⁹¹FF-B.2 Welche Lernendenvoraussetzungen haben die Studierenden bezogen auf die geometrischen Konzepte *Kongruenz* und *Symmetrie*?

Formulierung	Problem
ePF Zwei beliebige Figuren der Ebene sind kongruent, wenn sie die gleiche Form (Winkel und Seiten) und den gleichen Flächeninhalt haben. Maxim (Zyklus 2), Z. 4	Es ist unklar, was die Klammer „Winkel und Seiten“ zur Definition von „Form“ beiträgt. Ist damit gemeint, dass die Form einer Figur durch alle Winkel und die Länge aller Seiten eindeutig festgelegt ist (als Figuren werden also nur n -Ecke aufgefasst, siehe oben), dann ist die zusätzliche Forderung nach Flächengleichheit redundant.
ePF Zwei beliebige Figuren der Ebene sind kongruent, wenn sie in der Form übereinstimmen und flächendeckend sind. Franziska (Zyklus 2), Z. 4	Die Kongruenz ist bereits durch „flächendeckend“ als Synonym für „deckungsgleich“ beschrieben. Die Forderung nach Formgleichheit ist redundant.
ePF Zwei Vierecke sind kongruent, wenn sie das gleiche Verhältnis von Höhe zu Breite haben. Josy (Zyklus 2), Z. 2	<i>Höhe</i> und <i>Breite</i> eines allgemeinen Vierecks sind keine wohldefinierten geometrischen Eigenschaften. Darüberhinaus führt die Forderung von Verhältniseinheit in der Regel maximal auf Ähnlichkeit, niemals auf Kongruenz.
ePF Zwei Vierecke sind kongruent, wenn sie die gleichen Winkelgrößen (mindestens dreimal 90°) übereinstimmen und ihre Seiten im gleichen Verhältnis zueinander stehen. Simon (Zyklus 2), Z. 2	Diese Formulierung ist weder grammatikalisch noch inhaltlich nachvollziehbar.

Tabelle 13.19: Ungenaue und inhaltlich problematische Studierendenformulierungen zur Kongruenz.

Die nachfolgend vorgestellten Ergebnisse müssen unter Berücksichtigung forschungsmethodischer Limitationen interpretiert werden. Zunächst einmal sind die Ergebnisse offensichtlich nicht verallgemeinerbar sondern zeigen ein Spektrum möglicher Studierendenperspektiven. Die Studie ist eine Vollerhebung für die Studierenden in der Veranstaltung *Geometrie für Lehramtsstudierende* und erfasst Vorkenntnisse zum Kongruenzbegriff genau für diese Gruppe. Das bedeutet noch nicht, dass die daraus abgeleitete Ausschärfung der Lernendenperspektive auf andere Lerngruppen unmittelbar übertragbar ist. Darüber hinaus ist die Aufgabenstellung so angelegt, dass die Studierenden dazu aufgefordert werden, möglichst spontan zu antworten. Auf diese Weise soll vor allem der Austausch mit anderen Studierenden als auch das Nachschlagen in Schulbüchern oder dem Internet verhindert werden. Dieses Vorgehen birgt den Nachteil, dass nicht erhoben werden kann, ob die Studierenden ihre eigenen Aussagen, in Ruhe betrachtet, nicht eventuell noch korrigieren würden, auch ohne äußeren Input. Insbesondere ergibt sich durch die beobachtete Nennung verschiedener Kongruenzaussagen für eine Figur die Frage, ob die Studierenden (unabhängig davon, ob es in der Aufgabenstellung stand) tatsächlich aus der Idee heraus geantwortet haben eine *Definition* und nicht nur ein *Theorem* über die Kongruenz der jeweiligen Figuren aufzuschreiben. Hier würde es sich anbieten, in einem nächsten Veranstaltungszyklus ein etwas aufwändigeres Design zu versuchen und den Studierenden, z. B. über eine Aktivität im eLearning-System, ihre eigenen Aussagen

nach einer kurzen Zeit mit der Bitte zukommen zu lassen, diese noch einmal anzuschauen, bezogen auf ihre Funktion als Definition zu reflektieren, und ggf. begründet zu überarbeiten.

Ein wesentliches Ergebnis der Auswertung ist die Bestätigung der im Rahmen einer a-priori-Analyse aufgestellten Hypothesen (S. 216): Die Untersuchungsergebnisse bestätigen die starke Anbindung des Kongruenzbegriffs an die Kongruenzsätze für Dreiecke. Das führt dazu, dass Kongruenzaussagen immer mit dem Ziel verknüpft werden, einen möglichst geringen Satz an geometrischen Größen anzugeben, aus dem bereits die Kongruenz gefolgert werden kann. In Sinne der *Schnittstellenaspekte* (Abschnitt 13.1.2) wird Kongruenz also vor allem im Sinne des *Größenaspekts* benutzt, während der *Abbildungsaspekt* in den Studierendenbearbeitungen kaum eine Rolle spielt.

Der vom *Größenaspekt* geprägte Kongruenzbegriff zeigt sich auch in den Formulierungen der Studierenden zu Vierecken und Kreisen und in Ansätzen sogar auch bei allgemeinen Figuren. Über die Kongruenzsätze hinausgehende, allgemeinere Vorkenntnisse sind zumeist inhaltlich anschaulicher Natur.

Besonders interessant waren die Ergebnisse zu den Studierendenformulierungen zur Viereckskongruenz. Hier zeigte sich die große gegenstandsbezogene Heterogenität darin, dass einige Studierende sehr differenziert korrekte Kongruenzsätze für Vierecke angeben, andere einfach die allgemeine Definition von Figuren-Kongruenz übertragen (in etwa: Zwei Vierecke sind kongruent, wenn sie deckungsgleich sind) und wieder andere fehlerhafte Kongruenzaussagen produzieren, die aber reichhaltige Diskussionsanlässe zur Vertieften Beschäftigung mit Viereckskongruenz darstellen. Es entsteht der Eindruck, dass Viereckskongruenz in besonderem Maße dazu geeignet ist, die schulischen Vorerfahrungen zur Kongruenz zu reflektieren und eine produktive Auseinandersetzung mit dem Thema zu initiieren. In diesem Sinne ist die Präsenzaufgabe 4 (S. 382) zur Kongruenz von Vierecken eine passend gewählte Lerngelegenheit.

Festgehalten werden muss aber auch, dass Formulieren präziser mathematischer Textstücke „in deutscher Sprache“ (als Gegenstück zur rein symbolisch formulierten Texten) vielen Studierenden gerade dann Schwierigkeiten bereitet, wenn es über, z. B. aus dem eigenen Mathematikunterricht bekannte, Phrasen hinausgeht (die teilweise selbst unpräzise sind, vgl. Abschnitt 13.1.3). Im Sinne der professionellen Handlungsanforderungen (vgl. S. 2.1) ist das exakte Formulieren aber essentiell.

Im Kontext der Entwicklungsforschung zur Schnittstelle *Kongruenz* liefert diese Studie Ergebnisse auf mehreren Ebenen: Zunächst einmal konnte die Lernendenperspektive dahingehend geschärft werden, dass sich die theoretisch fundierten Hypothesen bestätigt haben, nach denen die meisten Studierenden kein präzises Fachkonzept zum Kongruenzbegriff mitbringen und bei weiterführenden Überlegungen auf den Kongruenzsätzen für Dreiecke aufbauen und versuchen, diese im Sinne des *Größenaspekts* auf andere Kontexte zu verallgemeinern.

Darüber hinaus liefern die Studierendenformulierungen in den Tabellen 13.17 (S. 223) und 13.19 (S. 226) reichhaltige Anlässe für die Konstruktion weiterer Lerngelegenheiten zum Kongruenzbegriff, indem sie zum Beispiel als Grundlage für eine Gruppendiskussion oder eine vergleichende schriftliche Analyse genutzt werden.

13.4 Synthese und Redesign

13.4.1 Zusammenfassung des Kapitels

In diesem Kapitel habe ich die initiale Umsetzung des in Abschnitt 12.2 beschriebenen Modells zur Schnittstellen-bezogenen Entwicklungsforschung im Kontext der Schnittstelle *Kongruenz* beschrieben. Entsprechend der Ausführungen in Abschnitt 12.3 lag der Schwerpunkt auf der *Spezifizierung und Strukturierung*. Dazu habe ich zunächst die fachmathematischen Hintergründe zum Kongruenzbegriff im Kontext des in der Veranstaltung genutzten Axiomensystems der Saccheri-Ebene dargestellt (Abschnitt 13.1.1). Darauf aufbauend habe ich, entsprechend der in Abschnitt 12.2.1 (S. 152) vorgestellten Überlegungen, vier *Schnittstellenaspekte* zum Kongruenzbegriff herausgearbeitet (Abbildung 13.26).

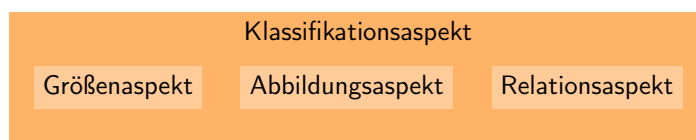


Abbildung 13.26: Schnittstellenaspekte zum Kongruenzbegriff (vgl. Abschnitt 13.1.2)

Einen großen Teil des Kapitels nehmen die fachlich-didaktischen Analysen zur Rolle des Kongruenzbegriffs im Mathematikunterricht ein (Abschnitt 13.1.3). Wesentliche Ergebnisse der Analyse sind die fachlich fundierte Unterscheidung zwischen verschiedenen Zugängen zum Kongruenzbegriff (S. 170 ff. und insb. Tabelle 13.1 (S. 175)), die genaue Klärung der Zusammenhänge zwischen geometrischen Konstruktionen und Kongruenzsätzen (S. 179 ff.) sowie darauf aufbauend die Entwicklung eines generischen Vorgehens zum schulischen Begründen der Kongruenzsätze (S. 183). Die erzielten Ergebnisse sind schon für sich genommen neu und tragen zur Präzisierung der stoffdidaktischen Behandlung des Themas *Kongruenz* bei. Im Kontext der Entwicklungsforschung zur Schnittstelle bilden sie eine wichtige theoretische Grundlage für sowohl die Entwicklung von Lerngelegenheiten (Abschnitte 13.1.5, 13.2) als auch für weiterführende empirische Untersuchungen (Abschnitt 13.3).

Im Rahmen der Begleitforschung zur Schnittstelle *Kongruenz* wurden zwei Studien durchgeführt. In Abschnitt 13.3.1 wird die Auswertung eines Fragebogens beschrieben, der im Anschluss an die Schnittstellenwoche eingesetzt wurde. Das Forschungsinteresse bestand in der Evaluation der Schnittstellenwoche und ihrer Bestandteile sowie in subjektiven Einschätzungen der Studierenden zur Nützlichkeit der Schnittstellenwoche für ihre Professionalisierung. Die zentralen Ergebnisse sind auf S. 210 zusammengefasst. In der zweiten Studie (Abschnitt 13.3.3) wurden Studierendenbearbeitungen der ePortfolioaufgabe *Wissenstand: Kongruenz* mit dem Ziel ausgewertet, die *Lernendenperspektive* zur Schnittstelle *Kongruenz* (Abschnitt 13.1.4) empirisch auszuschärfen.

13.4.2 Redesign der Aktivitäten zur Schnittstelle *Kongruenz*

Auf der Ebene des Redesigns der verschiedenen Veranstaltungselemente sind zunächst keine größeren Änderungen notwendig. Diese ergeben sich später, im Anschluss an die genauen Analysen der einzelnen Aufgaben. Aus der Lehrpraxis heraus haben sich jedoch verschiedentlich Notwendigkei-

ten für kleinere Änderungen ergeben, die ich bereits in den Tabellen in Abschnitt 13.2 vermerkt habe und auf die ich nachfolgend kurz eingehen möchte.

Aspekte des Redesigns der Vorlesung zur Schnittstellenwoche *Kongruenz* In Tabelle 13.4 (S. 192) habe ich die Vorlesung zur Schnittstellenwoche *Kongruenz* in der Variante dargestellt, wie sie im dritten Veranstaltungszyklus (Sommersemester 2020) stattgefunden hat. Im Vergleich zur ersten Durchführung der Veranstaltung (Sommersemester 2019) gab es kleine Veränderungen, die im Folgenden aufgelistet sind

1. Nachdem sich im Zyklus 1 im Rahmen der Übungen herausgestellt hat, dass viele Studierende Schwierigkeiten mit ZuL-Konstruktionen und deren Zusammenhang zum Kongruenzbegriff hatten, wurde in der Vorlesung ein entsprechender Abschnitt (basierend auf den Ausführungen auf S. 179 ff.) ergänzt (Abschnitt 1 in Tabelle 13.4 (S. 192)).

Darüber hinaus wurde im dritten Zyklus (auf Wunsch der Studierenden aus dem zweiten Zyklus) noch einmal explizit in der Vorlesung auf die Kommunikation der Ausgangskonfiguration (textuell vs. geometrisch) und damit verbunden auf das Übertragen von Strecken und Winkeln mit ZuL (vgl. Material 3 (S. 401) und Material 2 (S. 401)) eingegangen (Abschnitt 2 in Tabelle 13.4 (S. 192)).

2. Im ersten Zyklus hatten einige Studierende große Schwierigkeiten bei der präzisen fachlichen Klärung des Schulbuchauszugs in Aufgabe *Zwei Winkel und eine Seite* (ePortfolioAufgabe 7 (S. 393)). Aus diesem Grund wurde in der Vorlesung die Begründung von Nicht-Kongruenz mit Hilfe der Kongruenzsätze (vgl. S. 186 f.) explizit thematisiert (Abschnitt 2 in Tabelle 13.4 (S. 192)).
3. Ab dem zweiten Zyklus wurde zum Abschluss der Vorlesung (Abschnitt 6 in Tabelle 13.4 (S. 192)) noch einmal die Bedeutung des Kongruenzbegriffs für den Geometrieunterricht (im Sinne der Analyseergebnisse aus Abschnitt 13.1.3) zusammengefasst und dabei explizit auf die *Schnittstellenaspekte* zurückgegriffen. Auf diese Weise wurde an einem weiteren Beispiel modellhaft die Nutzung der Aspekte in einem fachdidaktischen Zusammenhang vorgeführt.

Aspekte des Redesigns der Präsenzaufgaben zur Schnittstellenwoche *Kongruenz* In Tabelle 13.5 (S. 193) habe ich die Präsenzaufgaben zur Schnittstellenwoche *Kongruenz* in der Variante dargestellt, wie sie im dritten Veranstaltungszyklus (Sommersemester 2020) eingesetzt wurden. Im Vergleich zur ersten Durchführung der Veranstaltung (Sommersemester 2019) gab es kleine Veränderungen, die im Folgenden aufgelistet sind

1. Wie bereits bezogen auf das Redesign der Vorlesung erwähnt, hatten einige Studierende Schwierigkeiten im Kontext von ZuL-Konstruktionen. In der Präsenzübung zeigte sich das vor allem in der Aufgabe *Konstruktionen entlang der Kongruenzsätze* (Präsenzaufgabe 1 (S. 380)). Die wurde in den darauffolgenden Zyklen durch weitere Informationsmaterialien zum Antragen von Strecken und Winkeln mit ZuL ergänzt: Materialien 2 (S. 401) und 1 (S. 401); in Zyklus 2 und 3 zusätzlich noch ein Lernvideos zum Antragen von Strecken und Winkeln mit ZuL.

Zusätzlich wurden im Kontext von Konstruktionen in Zyklus 2 die Aufgaben *Winkel abtragen* (Präsenzaufgabe 2 (S. 381)) und *Planskizzen in Konstruktionsaufgaben* (Präsenzaufgabe 3 (S. 382)) eingeführt. Die Aufgabe *Winkel abtragen* konnte in Zyklus 3, aufgrund der durch

die COVID-19-Pandemie bedingten besonderen Herausforderungen, aus Zeitgründen nicht eingesetzt werden.

2. Nach Zyklus 1 stellte sich heraus, dass die Zeit der Präsenzübungen nicht ausreichte um auch die Aufgabe *Kongruente Würfelnetze* (Präsenzaufgabe 5 (S. 383)) zu bearbeiten. Sie wurde in den folgenden Zyklen nicht erneut eingesetzt.

Aspekte des Redesigns der ePortfolioaufgabe zur Schnittstelle *Kongruenz* In Tabelle 13.6 (S. 194) habe ich die ePortfolioaufgaben zur Schnittstelle *Kongruenz* in der Variante dargestellt, wie sie im dritten Veranstaltungszyklus (Sommersemester 2020) eingesetzt wurden. Im Vergleich zur ersten Durchführung der Veranstaltung (Sommersemester 2019) gab es eine Veränderung, die im Folgenden dargestellt wird.

1. Nachdem sich in der Lehrpraxis die Vorkenntnisse der Studierenden zum Kongruenzbegriff als sehr heterogen dargestellt haben, wurde ab dem zweiten Zyklus zusätzlich die Aufgabe *Wissensstand: Kongruenz* (ePortfolioaufgabe 2 (S. 388)) eingesetzt (vgl. auch die Studie in Abschnitt 13.3.3).

13.4.3 Aktueller Stand und nächste Schritte der Entwicklungsforschung zur Schnittstelle *Kongruenz*

Zum Zeitpunkt der Finalisierung dieser Arbeit existiert durch die umfangreichen fachlich-didaktischen Analysen und die ergänzende empirische Ausschärfung der Lernendenperspektive eine umfangreiche Spezifizierung und Strukturierung der Schnittstelle *Kongruenz*. Darüber hinaus wurde ein vollständiger Satz an Vorlesungsmaterialien und Übungsaufgaben (für Präsenzübung und ePortfolio) entwickelt (Abschnitt 13.2) und in der Praxis erprobt. Die Ergebnisse der Fragebogenstudie bestätigen den in der Lehrpraxis wahrgenommenen Eindruck, dass die Lerngelegenheiten bei den Studierenden gut ankommen und wertgeschätzt werden. Darüber hinaus belegen die Ergebnisse der Fragebogenstudie auch einen positiven Einfluss auf die subjektiven Facette der zweiten Diskontinuität. Im Kontext dieser Arbeit liefert dieses Kapitel damit Beiträge zur Beantwortung der Forschungsfragen FF-A.3⁹², FF-B.2⁹³ und FF-B.3⁹⁴.

Die nächsten Schritte der Entwicklungsforschung müssen sich nun auf die Analyse einzelner Lerngelegenheiten fokussieren und darauf aufbauend auf die Entwicklung lokaler Lehr-Lerntheorien beziehen. Die dazu notwendigen Daten (vgl. Abschnitt 12.2.3) wurden bereits erhoben, sodass weitere Forschung auch ohne einen erneuten Veranstaltungszyklus möglich ist. Dabei sollte ein Forschungsziel sein, den Beitrag der Lerngelegenheiten im Kontext der Schnittstelle *Kongruenz* in ihrer Wirkung zur Überwindung der *objektiven* Facette der zweiten Diskontinuität zu erforschen. Aus theoretisch-konzeptueller Perspektive ist eine weitere Ausschärfung des Konzeptes der *Schnittstellenaspekte* lohnend. Interessant dabei wäre zum Beispiel die Frage, welche Konsequenzen die Schnittstellenaspekte für die Beschreibung zentraler Grundvorstellungen zum Kongruenzbegriff haben.

⁹²FF-A.3 Wie können professionsorientierte Lerngelegenheiten (kurz: *Schnittstellenlerngelegenheiten*) im Kontext der Geometrieveranstaltung aussehen, die das Potenzial haben, zur Überwindung der zweiten Diskontinuität beizutragen?

⁹³FF-B.2 Welche Lernendenvoraussetzungen haben die Studierenden bezogen auf die geometrischen Konzepte *Kongruenz* und *Symmetrie*?

⁹⁴FF-B.3 Wie evaluieren (insbesondere auch in Bezug auf die eigene Professionalisierung) die Studierenden die Gesamtveranstaltung und die speziellen professionsorientierten Lerngelegenheiten?

Kapitel 14

Schnittstelle Symmetrie

Nach dem Thema *Kongruenz* (Kapitel 13) ist *Symmetrie* das zweite Thema, auf das in der Veranstaltung *Geometrie für Lehramtsstudierende* im Rahmen einer Schnittstellenwoche als Schwerpunktthema für die Umsetzung expliziter Professionsorientierung fokussiert wird. Die Gründe für diese Auswahl habe ich bereits in Abschnitt 11.1 erläutert. In diesem Abschnitt werde ich nun die Details zur Entwicklungsforschung zur Schnittstellenwoche *Symmetrie* ausführen und dabei analog zu den Ausführungen zur Schnittstelle *Kongruenz* der in Abschnitt 12.3 vorgestellten Struktur folgen: Den Schwerpunkt des Kapitels bildet die *Spezifizierung* und *Strukturierung* der Schnittstelle *Symmetrie* (Abschnitt 14.1). Darauf folgt ein Überblick über die Gestaltung der Schnittstellenwoche und der zugehörigen Lerngelegenheiten (Abschnitt 14.2.1). Im Anschluss stelle ich ausgewählte Ergebnisse zur Begleitforschung vor (Abschnitt 14.3) und fasse anschließend den aktuellen Stand der Entwicklungsforschung zur Schnittstelle *Symmetrie* unter besonderer Berücksichtigung des Redesign der Lerngelegenheiten zusammen (Abschnitt 14.4).

14.1 Spezifizierung und Strukturierung der Schnittstelle

Die *Spezifizierung* und *Strukturierung* der Schnittstelle *Symmetrie* folgt dem in Abschnitt 12.3 beschriebenen Vorgehen: Zunächst stelle ich den fachmathematischen Hintergrund dar, wie er sich aus der Einbettung in die inhaltliche Gestaltung der Veranstaltung (Kapitel 7) ergibt (Abschnitt 14.1.1) und identifiziere darauf aufbauend *Schnittstellenaspekte* (Abschnitt 14.1.2). Im Anschluss analysiere ich aus fachlich-didaktischer Perspektive die Bedeutung des Symmetriebegriffs für den aktuellen Mathematikunterricht (Abschnitt 14.1.3) und gehe auf die Perspektive ein, die die Studierenden zu dem Thema mitbringen (Abschnitt 14.1.4). Abschließend findet aufbauend auf den anderen Abschnitten eine erste Auswahl und Sequenzierung von Inhalten zur Schnittstelle *Symmetrie* statt, die zur Förderung fachdidaktischer Urteilskompetenz eingesetzt werden sollen (Abschnitt 14.1.5).

14.1.1 Fachmathematischer Hintergrund des Symmetriebegriffs

In diesem Abschnitt stelle ich, eingebettet in den fachmathematischen Aufbau der Veranstaltung *Geometrie für Lehramtsstudierende*, wesentliche fachmathematische Hintergründe zur Symmetrie vor. Ich formalisiere den Symmetriebegriff im Kontext einer beliebigen Saccheri-Ebene (X, d) . Damit

gelten alle Aussagen insbesondere auch für den schulmathematisch relevanten Fall des euklidischen Raumes $X = \mathbb{R}^2$. Die Ausführungen stellen eine *Hintergrundtheorie* (vgl. Abschnitt 2.2) zur schulischen Behandlung des Symmetriebegriffs dar. Ein Teil der Definitionen und Aussagen sind in ähnlicher Weise direkter Bestandteil des Mathematikunterrichts. Hinzu kommen Ergänzungen, die für das Herstellen eines rigorosen Theoriegebäudes notwendig sind, sowie Ausblicke mathematische Überlegungen, die „nur einen Schritt“ von den curricular vorgeschriebenen Inhalten des Mathematikunterrichts entfernt sind. Alle Beweise (so nicht anders zitiert) wurden im Rahmen des Projektes passgenau zum Vorgehen in der Vorlesung von mir entwickelt. Natürlich ist aber bei einem so traditionellen Thema wie *Symmetrie* nicht ausgeschlossen, dass manche der Argumente bereits an anderer Stelle aufgeschrieben worden sind.

Zunächst werde ich eine mathematische Formalisierung für Symmetrien einer Figur (unter Figuren verstehe ich im Folgenden Teilmengen von X) angeben. Motiviert durch den Gedanken, dass durch Symmetrien Möglichkeiten beschrieben werden, eine Figur unverzerrt auf sich selbst abzubilden, wird die Gesamtheit der Symmetrien einer Figur $F \subset X$ üblicherweise mit der Menge aller bijektiven Selbstabbildungen von F identifiziert, die zusätzlich Längen (und damit auch Winkel) erhalten. Dies ist gerade genau die Gruppe $\text{Isom}(F)$. Die offensichtliche Frage ist nun die, nach dem Vorrat von Isometrien, aus denen $\text{Isom}(F)$ gebildet werden kann. In vielen Standardlehrwerken zur Elementargeometrie werden direkt Einschränkungen der Isometriegruppe der umgebenden Ebene (hier $\text{Isom}(X)$) genutzt.

Dazu ist aus der Theorie der Saccheri-Ebenen bekannt, dass $\text{Isom}(X)$ durch die Menge der Geradenpiegelungen erzeugt wird (Dreispiegelungssatz 7.2.12) und neben den Spiegelungen auf jeden Fall noch die Identität, die Rotationen um einen Punkt (Definition A.6.1 (S. 347)) und die Translationen (Definition A.9.1 (S. 357)) entlang einer Geraden enthält. Ob diese Liste vollständig ist, wurde für die Saccheri-Ebene im Rahmen der Veranstaltung noch nicht allgemein erklärt.⁹⁵ Für das Modell (\mathbb{R}^2, d_2) wurde aber in der Veranstaltung gezeigt, dass die Schubspiegelungen die Liste der Isometrien abschließen (Tabelle 7.1 (S. 64), Veranstaltungswoche 4). Die gesamte Saccheri-Ebene X ist also beispielsweise spiegelsymmetrisch zu jeder Geraden und rotationssymmetrisch zu jedem Punkt.

Ob allerdings $\text{Isom}(X)$ als Vorrat von Abbildungen zur Beschreibung der Symmetrien der oben genannten Figur $F \subsetneq X$ ausreicht, ist a priori unklar. Es gibt zunächst einmal keinen Grund auszuschließen, dass es auf der kleineren Menge F neue Symmetrien (also bijektive Isometrien $F \rightarrow F$) gibt, die nicht fortsetzbar zu bijektiven Isometrien $X \rightarrow X$ sind. Das dies nicht der Fall ist, ist der Inhalt der mathematischen Bemerkung 14.1.1. Das Argument wurde von mir in Zusammenarbeit mit Joachim Hilgert speziell für den Kontext der Saccheri-Ebene entwickelt.

Mathematische Bemerkung 14.1.1 (Satz: Fortsetzbarkeit von Isometrien)

Seien (X, d) eine Saccheri-Ebene und $F \subsetneq X$ eine Figur. Dann ist jede Isometrie auf $F \rightarrow F$ fortsetzbar zur einer Isometrie $X \rightarrow X$.

Beweis. Zum Beweis betrachten wir drei Fälle für $F \subset X$:

1. Es existieren $P_1, P_2, P_3 \in F$, die nicht auf einer gemeinsamen metrischen Geraden in X liegen.

Wir halten zunächst fest, dass dann die strikte Dreiecksungleichung A.4.2 (S. 339) für alle Kombinationen von P_1, P_2 und P_3 gilt. Sei $\varphi \in \text{Isom}(F)$. Dann gilt die strikte Dreiecksungleichung auch für die Punkte

⁹⁵In der Tat fehlen noch die Schubspiegelung (Verknüpfung von drei Spiegelungen an drei Geraden mit zwei oder drei Schnittpunkten) sowie die Grenzdrehungen/Horolationen (Verknüpfung von zwei Spiegelungen an Geraden, die keine gemeinsame Senkrechte haben, vgl. S. 108).

$Q_i := \varphi(P_i)$ ($i \in \{1, 2, 3\}$). Wegen Satz A.2.10 (S. 336) liegen die Q_i dann ebenfalls nicht auf einer Geraden. Da Isometrien in einer Saccheri-Ebene bereits durch drei nicht kollineare Punkte eindeutig festgelegt sind (Satz A.7.3 (S. 352) liefert die Existenz, Korollar A.7.4 (S. 353) die Eindeutigkeit), gibt es genau ein $\tilde{\varphi} \in \text{Isom}(X)$ mit $\tilde{\varphi}(P_i) = Q_i$.

Wir zeigen nun, dass $\tilde{\varphi}|_F$ dann bereits φ ist, φ also zu einer Isometrie auf ganz X fortgesetzt werden kann. Dazu sei $P \in F$ ein beliebiger weiterer Punkt sowie $Q := \varphi(P)$ und $\tilde{Q} = \tilde{\varphi}(P)$. Dann gilt

$$\begin{cases} d(Q, Q_1) = d(\tilde{Q}, Q_1), \\ d(Q, Q_2) = d(\tilde{Q}, Q_2), \\ d(Q, Q_3) = d(\tilde{Q}, Q_3), \end{cases}$$

da sowohl φ also auch $\tilde{\varphi}$ Isometrien sind. Wäre nun $Q \neq \tilde{Q}$, dann lägen die Q_i nach der Ortslinieneigenschaft (Proposition A.6.15 (S. 351)) alle auf der eindeutig bestimmten Mittelsenkrechten von Q und \tilde{Q} , wären im Widerspruch zur Voraussetzung also kollinear. Es folgt $Q = \tilde{Q}$ und damit die Aussage.

2. Seien $g \subset X$ eine Gerade, $F \subset g$ und $P_1, P_2 \in F$ zwei verschiedene Punkte.

Seien $\varphi \in \text{Isom} F$ und $Q_1 := \varphi(P_1)$ sowie $Q_2 := \varphi(P_2)$. Da g isometrisch isomorph zu \mathbb{R} ist (Definition A.2.1 (S. 334) der metrischen Gerade), gibt es eine eindeutige Isometrie $\tilde{\varphi} \in \text{Isom}(\mathbb{R})$ mit $Q_1 = \tilde{\varphi}(P_1)$ und $Q_2 = \tilde{\varphi}(P_2)$.

Wieder zeigen wir, dass $\tilde{\varphi}|_F$ dann bereits φ ist, φ also zu einer Isometrie auf ganz g und damit auch zu einer Isometrie auf ganz X fortgesetzt werden kann. Dazu sei $P \in F$ ein beliebiger weiterer Punkt mit $Q := \varphi(P)$ und $\tilde{Q} = \tilde{\varphi}(P)$. Dann gilt

$$\begin{cases} d(Q, Q_1) = d(\tilde{Q}, Q_1), \\ d(Q, Q_2) = d(\tilde{Q}, Q_2), \end{cases}$$

da φ und $\tilde{\varphi}$ Isometrien sind. Wäre nun $Q \neq \tilde{Q}$, dann wären sowohl Q_1 als auch Q_2 der eindeutig bestimmte Mittelpunkt von Q und \tilde{Q} , was wegen $Q_1 \neq Q_2$ unmöglich ist. $\tilde{\varphi}$ ist eine Isometrie auf g . Nach Beispiel A.3.3 (S. 338) kann es sich nur um die Einschränkung einer Translation entlang g (Korollar A.9.7 (S. 359)) oder um die Einschränkung einer Punktspiegelung an einem Punkt auf g handeln. Also kann ϕ über φ zu einer Isometrie auf ganz X fortgesetzt werden.

3. Seien $P \in X$ und $F := \{P\}$.

Hier ist die Identität die einzige Selbstabbildung und insbesondere auch die einzige Isometrie. Da die Identität in kanonischer Weise auf ganz X fortsetzbar ist, brauchen wir hier nichts weiter zu zeigen.

□

Damit ist die – auch für die Schulmathematik relevante – Frage, ob es für Figuren in einer Saccheri-Ebene Symmetrien geben kann, die nicht durch Abbildungen aus $\text{Isom}(X)$ beschrieben werden können, geklärt. Für den euklidischen Raum \mathbb{R}^2 bedeutet diese Erkenntnis, dass Figuren dort keine weiteren Symmetrien neben *Spiegelsymmetrie*, *Drehsymmetrie*, *Verschiebesymmetrie* oder *Schubspiegelungssymmetrie* haben können.

Bezogen auf die Saccheri-Ebene liefert mathematische Bemerkung 14.1.1, dass alle Symmetrien von beliebigen Figuren in Saccheri-Ebenen durch Isometrien von X beschrieben werden können. Damit ist die Definition in der mathematischen Bemerkung 14.1.2 sinnvoll.

Mathematische Bemerkung 14.1.2 (Definition: Symmetriegruppe)

Sei (X, d) eine Saccheri-Ebene und $F \subset X$ eine beliebige Figur (Teilmenge). Dann definieren wir die

Symmetriegruppe von F als

$$\text{Sym}(F) := \{\varphi \in \text{Isom}(X) \mid \varphi(F) = F\}$$

Die Bezeichnung *Symmetriegruppe* ist passend, da es sich bei der in der mathematischen Bemerkung 14.1.2 definierten Menge in der Tat um eine Gruppe bezüglich der üblichen Verknüpfung von Abbildungen handelt (mathematische Bemerkung 14.1.3).

Mathematische Bemerkung 14.1.3 (Proposition: Gruppeneigenschaft der Symmetriegruppe)

Sei (X, d) eine Saccheri-Ebene und $F \subset X$ eine beliebige Figur (Teilmenge). Dann ist $(\text{Sym}(F), \circ)$ eine Gruppe.

Beweis. Man rechnet schnell mit dem Untergruppenkriterium nach, dass $(\text{Sym}(F), \circ)$ eine Untergruppe von $(\text{Isom}(X), \circ)$ ist: Sind nämlich $\varphi, \psi \in \text{Sym}(F)$, so sind wegen $\varphi(\psi(F)) = \varphi(F) = F$ und der Bijektivität von φ auch $\varphi \circ \psi$ und φ^{-1} Elemente von $\text{Sym}(F)$. \square

Die Gruppenstruktur ermöglicht es, weitere Aussagen über Symmetrien zu machen, die in den folgenden mathematischen Bemerkungen im üblichen Sinne benannt werden.

Mathematische Bemerkung 14.1.4 (Definition: Spiegel- bzw. Achsensymmetrie)

Seien k eine Gerade in einer Saccheri-Ebene (X, d) und $F \subset X$ eine beliebige Figur. Wir bezeichnen F als **spiegel-** bzw. **achsensymmetrisch** zu k , wenn $\sigma_k \in \text{Sym}(F)$ ist.

Mathematische Bemerkung 14.1.5 (Definition: Punktsymmetrie)

Seien P ein Punkt in einer Saccheri-Ebene (X, d) und $F \subset X$ eine beliebige Figur. Wir bezeichnen F als **punktsymmetrisch** zu P , wenn für die Punktspiegelung $\rho_P : X \rightarrow X$ an P gilt: $\rho_P \in \text{Sym}(F)$.

Mathematische Bemerkung 14.1.6 (Definition: Drehsymmetrie)

Seien P ein Punkt in einer Saccheri-Ebenen (X, d) , $\alpha \in [0, 2\pi[$ und $F \subset X$ eine beliebige Figur. Wir bezeichnen F als **α -drehsymmetrisch** zu P , wenn für die Drehung $\rho_{P,\alpha}$ um P mit Winkel α gilt: $\rho_{P,\alpha} \in \text{Sym}(F)$.

(Insbesondere sind π -Drehsymmetrie und Punktsymmetrie äquivalente Bezeichnungen.)

Damit sind alle Symmetrien in X erfasst, deren zugrunde liegende Isometrie mindestens einen Fixpunkt (in X) hat. Es fehlen noch Fixpunkt-freie Symmetrien, wie die *Verschiebesymmetrie*. Auf diese gehe ich an dieser Stelle nicht weiter ein, da die damit verbundene Charakterisierung der Fries- und Kristallgruppen bereits an anderen Stellen ausführlich aufgeschrieben wurde und eine Thematisierung an dieser Stelle keinen Mehrwert bringt. Eine sehr schöne und vollständige Darstellung der Thematik findet man zum Beispiel bei Behrends (2019, S. 27 ff.). Die Beweise, die dort verwendet werden, können auf der in diesem Kapitel geschaffenen Argumentationsgrundlage nachvollzogen werden.

Für den Rest dieses Abschnitts beschränke ich mich auf den euklidischen Raum $X = \mathbb{R}^2$ und damit auf die in der Schule üblichen Symmetriebetrachtungen. Damit umgehe ich die Behandlung der

zwar interessanten, aber für den Mathematikunterricht nicht vorrangig relevanten Fixpunkt-freien Symmetrie, die auf der oben erwähnten *Horolation* beruht.

Im Mathematikunterricht spielen Friese (Bandornamente) und Parkettierungen eine untergeordnete Rolle. Im Vordergrund stehen Symmetrieuntersuchungen von endlichen (im Sinne von beschränkten) Figuren. Aus den schon gewonnenen Erkenntnissen über $\text{Isom}(\mathbb{R}^2)$ kann man ableiten, dass die oben definierten Symmetrien tatsächlich ausreichen, um sämtliche Symmetrieeigenschaften beschränkter Figuren in (\mathbb{R}^2, d_2) zu beschreiben (mathematische Bemerkung 14.1.7).

Mathematische Bemerkung 14.1.7 (Satz: Symmetrien beschränkter Figuren)

Sei $F \subset \mathbb{R}^2$ eine beliebige beschränkte Figur. Dann haben alle Abbildungen $\varphi \in \text{Sym } F$ einen Fixpunkt in \mathbb{R}^2 .

Beweis. Angenommen es gäbe $\varphi \in \text{Sym}(F)$ ohne Fixpunkt. Dann müsste es sich um eine Translation oder eine Gleitspiegelung handeln. Sei nun $P \in F$ beliebig und $l \in \mathbb{R}_{>0}$ die Länge der Translation bzw. des Translationsteils der Gleitspiegelung. Bei der Translation direkt und bei der Gleitspiegelung nach Anwendung der Dreiecksungleichung folgt für $n \in \mathbb{N}$

$$\|P - \varphi^n(P)\| \geq n \cdot l.$$

Da $\text{Sym}(F)$ eine Gruppe ist, ist auch $\varphi^n \in \text{Sym}(F)$ und $\varphi^n(P)$ ein Punkt in F . Für jeden vorgegebenen Abstand finden wir also ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $\varphi^n(P)$ weiter von P entfernt ist. Dies steht im Widerspruch zur Beschränktheit der Figur F . \square

Mathematische Bemerkung 14.1.8 (Korollar)

Die mathematische Bemerkung 14.1.7 liefert insbesondere, dass beschränkte Figuren des euklidischen Raums \mathbb{R}^2 nur spiegel-, punkt-, und/oder drehsymmetrisch sein können. Andere Symmetrien sind nicht möglich.

Die Existenz der Gruppenstruktur auf $\text{Sym}(F)$ (mathematische Bemerkung 14.1.3) führt dazu, dass Symmetrien weitere Symmetrien automatisch zur Folge haben. Auch wenn entsprechende Aussagen in der Regel nicht systematisch im Mathematikunterricht behandelt werden, so liegen sie doch als fachlicher Hintergrund immer dann zugrunde, wenn inhaltlich anschaulich im Sinne von „Weil die Figur zwei Spiegelachsen hat, ist sie auch drehsymmetrisch“ oder „Weil die Figur 10° -drehsymmetrisch ist, ist sie auch 20° -drehsymmetrisch“ argumentiert wird. Einige wesentliche dieser Abhängigkeiten sind Bestandteil der folgenden Lemmata (mathematische Bemerkungen 14.1.10 und 14.1.11). Für die Beweise benötigt man einige Standard-Aussagen über euklidische Drehungen (mathematische Bemerkung 14.1.9)

Mathematische Bemerkung 14.1.9 (Eigenschaften euklidischer Drehungen)

Für $\alpha \in [0, \pi]$ und $Z \in \mathbb{R}^2$ bezeichnet $\rho_{Z, \alpha} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ die euklidische Drehung mit Zentrum Z und Drehwinkel α . Die folgenden Standard-Aussagen über euklidische Drehungen nutzen wir im Folgenden ohne Beweis.

- (i) Seien $\alpha, \beta \in [-\pi, \pi]$ und $Z \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt $\rho_{Z, \beta} \circ \rho_{Z, \alpha} = \rho_{Z, \alpha + \beta}$.
- (ii) Seien $\alpha, \beta \in [-\pi, \pi]$ und $Z_1, Z_2 \in \mathbb{R}^2$. Ist $\alpha + \beta \pmod{2\pi} \neq 0$, so gibt es $Z \in \mathbb{R}^2$ mit $\rho_{Z_2, \beta} \circ \rho_{Z_1, \alpha} = \rho_{Z, \alpha + \beta}$. Für $\alpha + \beta \pmod{2\pi} = 0$ ist die Verknüpfung eine Translation.

- (iii) Die beiden Drehungen in (ii) kommutieren nicht.
- (iv) Die Verknüpfung von zwei Spiegelungen an sich schneidenden Geraden ist eine Drehung um den Schnittpunkt mit dem doppelten Schnittwinkel als Drehwinkel.

Mathematische Bemerkung 14.1.10 (Eigenschaften von Drehsymmetrien)

Sei $F \subset \mathbb{R}^2$ eine beliebige Figur. Dann gelten folgende Aussagen:

- (i) Seien $\alpha, \beta \in [0, 2\pi[$ und $Z \in \mathbb{R}^2$. Ist die Figur F α - und β -drehsymmetrisch zu Z , so ist sie auch $(\alpha + \beta \bmod 2\pi)$ -drehsymmetrisch zu Z .
- (ii) Sei $\alpha \in [0, 2\pi[$ und $Z \in \mathbb{R}^2$. Ist die Figur F α -drehsymmetrisch zu Z , so ist sie auch $(k \cdot \alpha \bmod 2\pi)$ -drehsymmetrisch zu Z für alle $k \in \mathbb{N}$.
- (iii) Falls es einen kleinsten Winkel $\alpha_{\min} > 0$ gibt, so dass F α_{\min} -drehsymmetrisch ist, so ist $\alpha_{\min} = \frac{2\pi}{k}$ mit $k \in \mathbb{N}$.
- (iv) Es besteht die Möglichkeit, dass es so einen kleinsten Winkel wie in (iii) nicht gibt.
- (v) Beschränkte Figuren können nur maximal ein Drehzentrum haben.

Beweis.

- (i) Da $\text{Sym}(F)$ als Gruppe unter Verknüpfung abgeschlossen ist, ist die Verknüpfung der Drehungen mit den Winkeln α und β ebenfalls Element von $\text{Sym}(F)$. Da die Verknüpfung von zwei Drehungen mit gleichem Zentrum wieder eine Drehung um dieses Zentrum und Drehwinkel $\alpha + \beta$ ist (mathematische Bemerkung 14.1.9 (i)), folgt die gewünschte Symmetrieeigenschaft.
- (ii) Die Aussage folgt mit $\alpha = \beta$ und vollständiger Induktion direkt aus (i).
- (iii) Angenommen α_{\min} wäre nicht von der entsprechenden Form. Dann gäbe es nach Teilen mit Rest $\beta \in]0, \alpha_{\min}[$ und $k \in \mathbb{N}$ mit $k \cdot \alpha_{\min} = 2\pi + \beta$ im Widerspruch zur Minimaleigenschaft von α_{\min} .
- (iv) Seien M ein Punkt in (\mathbb{R}^2, d) und $r \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann ist $K_r(M)$ α -drehsymmetrisch zu M für alle $\alpha \in [0, 2\pi[$.
- (v) Angenommen $\text{Sym}(F)$ enthält zwei nicht triviale Rotationen $\rho_1, \rho_2 : X \rightarrow X$ mit unterschiedlichen Zentren $Z_1, Z_2 \in X$ und Rotationswinkeln $\alpha_1, \alpha_2 \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\}$.

Wir stellen zunächst fest, dass nach der mathematischen Bemerkung 14.1.9 (iii) ρ_1 und ρ_2 nicht kommutieren.

Gilt nun $\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \bmod 2\pi$, ist $\rho_2 \circ \rho_1 \in \text{Sym}(F)$ nach der mathematischen Bemerkung 14.1.9 (ii) eine nichttriviale Translation um $Z_2 - Z_1$. Dann ist für $n \in \mathbb{N}$ auch die Translation um $n \cdot (Z_2 - Z_1)$ in $\text{Sym}(F)$ und es folgt die Unbeschränktheit von F .

Ist $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0 \bmod 2\pi$, so ist $\rho_3 := \rho_2 \circ \rho_1 \circ \rho_2^{-1} \in \text{Sym}(F)$ nach der mathematischen Bemerkung 14.1.9 (ii) eine Rotation mit Rotationswinkel α_1 . Wegen $\rho_3(\rho_2(Z_1)) = \rho_2(Z_1)$ hat ρ_3 das Zentrum $\rho_2(Z_1)$. Dann ist auch ρ_3^{-1} (Rotationszentrum $\rho_2(Z_1)$), Rotationswinkel $-\alpha_1$) Element von $\text{Sym}(F)$, also auch $\rho_3^{-1} \circ \rho_1$. Da die Rotationswinkel von ρ_3^{-1} und ρ_1 invers sind, folgt wieder mit der mathematischen Bemerkung 14.1.9 (ii), dass die Symmetriegruppe von F mit $\rho_3^{-1} \circ \rho_1$ eine nichttriviale Translation enthält. Damit folgt, wie im vorigen Abschnitt sofort die Unbeschränktheit von F .

□

Mathematische Bemerkung 14.1.11 (Abhängigkeiten zwischen Spiegel- und Drehsymmetrien)

Sei $F \subset \mathbb{R}^2$ eine beliebige Figur, die spiegelsymmetrisch zu zwei Geraden $g, h \subset \mathbb{R}^2$ ist. Dann gelten folgende Aussagen:

- (i) Gilt $g \perp h$, so ist F punktsymmetrisch zum Schnittpunkt der Geraden.
- (ii) Gilt $g \cap h = \{P\}$ mit $P \in \mathbb{R}^2$, so ist F $\pm 2\alpha$ -drehsymmetrisch, wobei $\alpha \in]0, \pi]$ der Winkel zwischen g und h ist.
- (iii) Gilt $g \cap h = \emptyset$, so ist F unbeschränkt.

Beweis. Die Aussagen (i) und (ii) folgen direkt aus 14.1.9 (iv). Punkt (iii) folgt, weil die Verknüpfung der Spiegelung an zwei parallelen Geraden eine Translation ist (Definition A.9.1 (S. 357)). \square

Im nächsten Teil des mathematischen Hintergrundes wird die schulrelevante Idee formalisiert, dass das „Aussehen“ einer symmetrischen Figur bereits vollständig durch eine geeignete Teilfigur und die Symmetrien bestimmt ist. Zur präzisen Beschreibung dieses Phänomens wird zunächst das Konzept des *Orbits* eingeführt (mathematische Bemerkung 14.1.12). Die Idee ist, für einen beliebigen Punkt einer Figur alle Bilder bezogen auf die Elemente der Symmetriegruppe zusammenzufassen.

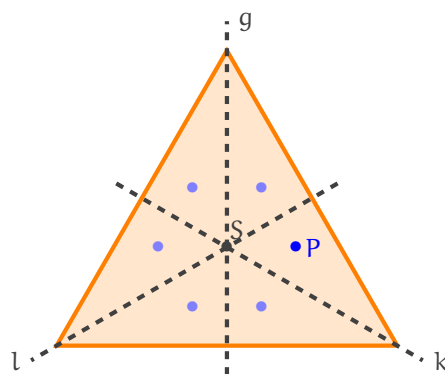
Mathematische Bemerkung 14.1.12 (Definition: Orbit)

Sei $F \subset \mathbb{R}^2$ eine Figur. Dann definieren wir für $P \in F$ durch

$$\text{Sym}(F) \cdot P := \{\varphi(P) \mid \varphi \in \text{Sym}(F)\}$$

den **Orbit** von P .

In Abbildung 14.1 ist ein Beispiel für einen solchen Orbit dargestellt.



$$\text{Sym } F = \left\{ \text{id}, \sigma_g, \sigma_k, \sigma_h, \rho_S, \frac{2\pi}{3}, \rho_S, \frac{4\pi}{3} \right\}$$

Abbildung 14.1: Der Orbit eines Punktes P .

Um eine Figur eindeutig festzulegen, reicht es aus, eine Teilmenge zu kennen, die aus dem Orbit jedes Punktes der Figur genau einen Punkt enthält. Der Rest der Figur ergibt sich dann durch

Anwenden der Symmetrieabbildungen auf diese Teilmenge. Teilmengen dieser Art, die minimal sind, werden üblicherweise als *Fundamentbereiche* bezeichnet (mathematische Bemerkung 14.1.13).

Mathematische Bemerkung 14.1.13 (Definition und Satz: Fundamentalbereich)

Sei $F \subset \mathbb{R}^2$ eine Figur. Dann nennen wir eine Menge $B \subset F$ einen **Fundamentbereich** von F , falls für jedes $P \in F$ die Menge

$$(\text{Sym}(F) \cdot P) \cap B$$

genau einen Punkt enthält.

Aus jedem Fundamentbereich B einer Figur F lässt sich wegen

$$F = \{\varphi(P) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi \in \text{Sym}(F) \text{ und } P \in B\} = \bigcup_{P \in B} \text{Sym}(F) \cdot P$$

die Figur wieder zusammensetzen.

Die Definition des *Fundamentbereichs* ist relational und nicht konstruktiv. Sie liefert eine Möglichkeit zur Überprüfung, ob ein Fundamentbereich gefunden wurde, aber kein Vorgehen, wie ein Fundamentbereich gefunden werden kann. In der Tat sind Fundamentbereiche nicht eindeutig bestimmt, sondern es gibt für viele Figuren eine unendliche Anzahl an Fundamentbereichen. Für die Figur aus Abbildung 14.1 sind in 14.2 drei verschiedene Fundamentbereiche skizziert. In jedem Fall lässt sich das komplette Dreieck durch Anwendung aller Abbildungen der Symmetriegruppe aus den blauen Teilflächen rekonstruieren. Das Beispiel illustriert insbesondere, dass es beliebig viele unterschiedliche Fundamentbereiche für eine Figur geben kann, da das Aufteilen des linken Fundamentbereichs auf die verschiedenen Teildreiecke beliebig weit fortgesetzt werden kann.

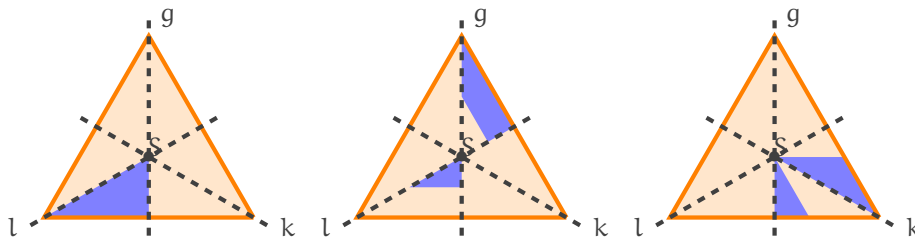


Abbildung 14.2: Darstellung verschiedener Fundamentbereiche der Figur F aus Abbildung 14.1 mit

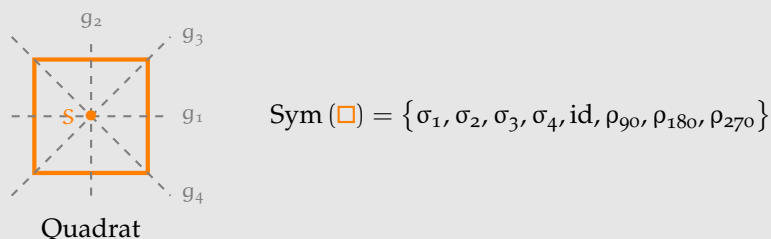
$$\text{Sym}(F) = \left\{ \text{id}, \sigma_g, \sigma_k, \sigma_l, \rho_S, \frac{2\pi}{3}, \rho_S, \frac{4\pi}{3} \right\}.$$

Abschließend gehe ich noch auf die Frage danach ein, ob wir zu einem gegebenen geometrischen Objekt alle Symmetrien gefunden haben. Im Mathematikunterricht und auch darüber hinaus wird oft von *den* Symmetrien einer Figur gesprochen. Natürlich ist klar, dass jede Figur eine eindeutige Symmetriegruppen (im Zweifelsfall die triviale Symmetriegruppen $\{\text{id}\}$) besitzt. Daraus ergibt sich aber kein offensichtliches Verfahren, um *alle* Symmetrien einer Figur zu finden bzw. zu entscheiden, ob es noch eine weitere Symmetrie gibt, die noch nicht gefunden wurde. Das Problem des Nachweises der Komplettheit von Symmetriegruppen ist (gerade für Figuren mit unendlichen Symmetriegruppen) komplex und für die meisten Mengen nicht oder nur sehr schwer lösbar. In der mathematischen Bemerkung 14.1.14 erläutere ich eine mögliche Argumentationslinie zur Begründung der Komplettheit der Symmetriegruppe des Quadrats, die auch für die Behandlung im Mathematikunterricht elementarisierbar ist. Es zeigt sich, dass bereits für so eine relativ minder-

komplexe Figur, die Argumentation viele Quadrat-spezifische geometrische Eigenschaften nutzt und nicht einfach auf andere Figuren verallgemeinerbar ist.

Mathematische Bemerkung 14.1.14 (Komplettheit von Symmetriegruppen)

Wir zeigen, dass die in der Abbildung angegebenen Isometrien tatsächlich alle Elemente von $\text{Sym}(\square)$ sind und wir damit alle Symmetrien gefunden.



Eckpunkte müssen auf Eckpunkte abgebildet werden (Abstand zum Mittelpunkt des Quadrates muss unter Isometrie erhalten bleiben). Das Quadrat hat vier Eckpunkte. Es gibt also maximal $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ Möglichkeiten.

1. Es kann nicht sein, dass genau eine Ecke fest bleibt. Dann würde eine benachbarte Ecke zu einer gegenüberliegenden Ecke werden, was aber mit einer Isometrie nicht zu erreichen ist. Damit fallen für jeden Eckpunkt 2 Möglichkeiten (Anzahl der Möglichkeiten drei Zahlen ohne Fixpunkt zu permutieren) weg, also insgesamt 8 Möglichkeiten. Es bleiben maximal 16 Möglichkeiten.
2. Eine Isometrie kann nicht zwei benachbarte Ecken fest lassen, die beiden anderen Ecken aber vertauschen. Damit fallen weitere 4 Möglichkeiten (Anzahl der Nachbarpaare) weg. Es bleiben maximal 12 Möglichkeiten.
3. Eine Isometrie kann nicht zwei benachbarte Ecken um zwei Positionen verschieben und für die anderen beiden Ecken ihre Reihenfolge ändern. Damit fallen weitere 4 Möglichkeiten (Anzahl der Nachbarpaare) weg. Es bleiben genau 8 Möglichkeiten. Da

$$\text{Sym}(\square) = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \text{id}, \rho_{90}, \rho_{180}, \rho_{270}\}$$

genau 8 Elemente enthält, haben wir alle Symmetrien des Quadrats gefunden.

(Insgesamt haben wir somit alle Möglichkeiten, bei denen gegenüberliegende Punkte zu Nachbarn werden, ausgeschlossen.)

14.1.2 Schnittstellenaspekte des Symmetriebegriffs

Wie schon beim Kongruenzbegriff (Abschnitt 13.1.2) systematisiere ich entsprechend der methodischen Vorüberlegungen (Abschnitt 12.2.1) den oben beschriebenen fachlichen Hintergrund in Form von Schnittstellenaspekten.

In der zentralen Definition der Symmetriegruppe (mathematische Bemerkung 14.1.2) werden Symmetrien als die Möglichkeiten aufgefasst, eine Figur bijektiv (durch Isometrien) auf sich selbst abzubilden. Unter diesen Isometrien ist die Figur *invariant*. Diese Perspektive bezeichne ich als *Invarianzaspekt*.

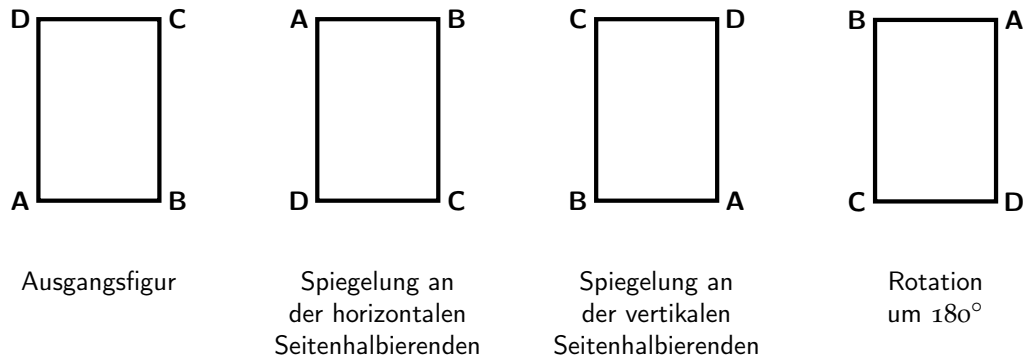


Abbildung 14.3: Alle Abbildungen halten das Rechteck invariant. Ohne die Beschriftung der Ecken würde man die Anwendung der Abbildung nicht erkennen.

In diesem Zugang kann man Symmetrie wie folgt begründen:

- Das Rechteck in Abbildung 14.3 ist spiegelsymmetrisch zur horizontalen Seitenhalbierenden, weil es durch die Spiegelung an dieser Geraden invariant gehalten wird.
- Das Rechteck in Abbildung 14.3 ist 180° -drehsymmetrisch zum Schnittpunkt der Seitenhalbierenden, weil es durch eine halbe Drehung um diesen Punkt invariant gehalten wird.

Der in Definition 14.1.13 beschriebene Begriff des *Fundamentalbereichs* begründet den Ansatz, Symmetrien einer Figur über die Möglichkeiten zu beschreiben, diese aus einer Teilmenge von sich selbst unter Verwendung der Symmetrien zu rekonstruieren. Eine Figur ist symmetrisch, wenn Sie aus mehreren „gleichen Teilen“ zusammengesetzt ist, die durch die Abbildungen der Symmetriegruppe ineinander überführt werden können. Kandidaten für eine solche Teilmenge, die bezogen auf ihren Informationsgehalt minimal ist, beschreibt der Begriff *Fundamentalbereich*. Zu beachten ist, dass dieser selbst keine Informationen darüber enthält, wie die Rekonstruktion durchgeführt wird. Somit kann eine Menge ein Fundamentalbereich für verschiedene Figuren mit unterschiedlichen Symmetrien sein. (vgl. Abbildung 14.4).

Die Symmetrien der Figuren werden festgelegt über die Isometrien, die notwendig sind, um die Figur zu rekonstruieren. Hat die Symmetriegruppe endlich viele Elemente, kann ein Konstruktionsverfahren angegeben werden: Die Elemente der Symmetriegruppe werden zunächst auf den Fundamentalbereich angewandt und die Vereinigung der Bilder mit dem Fundamentalbereich ergeben eine neue Figur, auf die dann erneut die Operationen angewandt werden. Dies geschieht so lange, bis ein erneutes Anwenden bei keiner der Operationen zu neuen Punkten führt (vgl. Abbildung 14.5).

Eingeschränkt auf die so konstruierte Figur sind die zur Konstruktion verwendeten Isometrien Selbstabbildungen der Figur und beschreiben mindestens einen Teil der Symmetrien. Die Begründung von Symmetrien kann wie in Abbildung 14.5 geschehen.

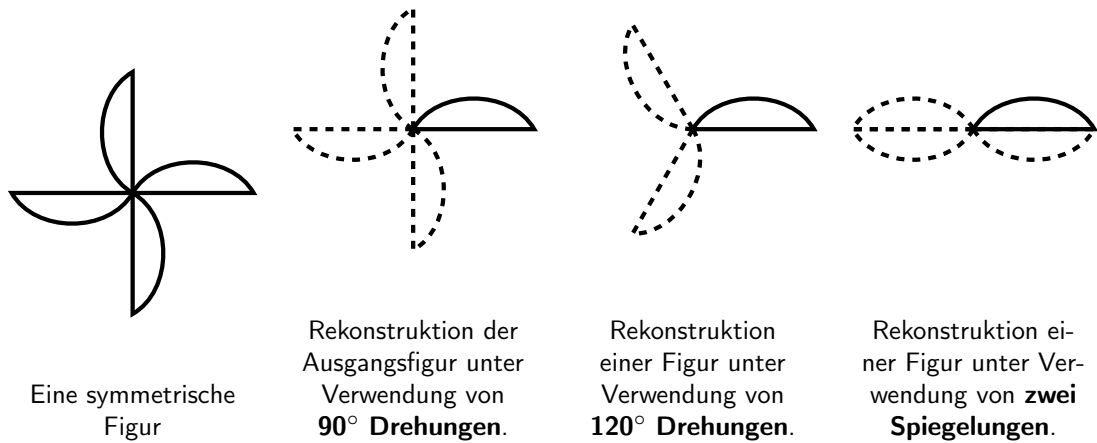


Abbildung 14.4: Rekonstruktion symmetrischer Figuren

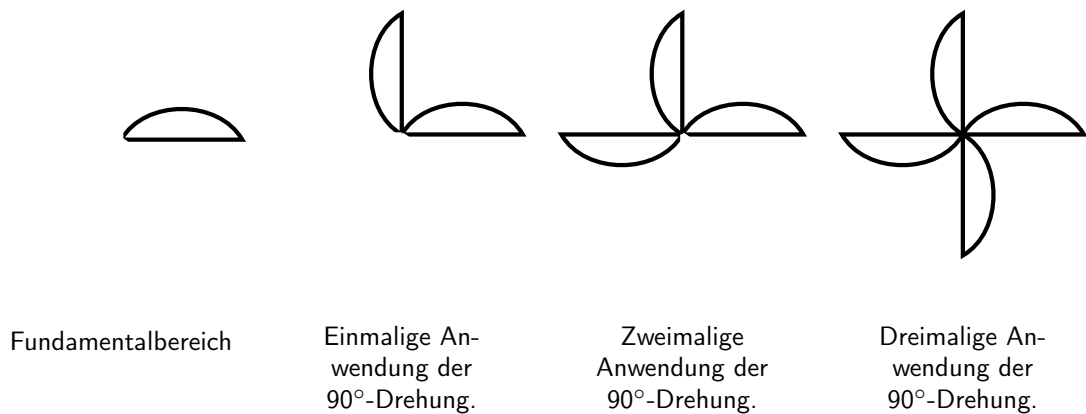


Abbildung 14.5: Rekonstruktion einer 90°-drehsymmetrischen Figur aus einem Fundamentalebereich. Jede weitere Anwendung der 90°-Drehung lässt die Figur invariant. Die Ausgangsfigur ist 90°-drehsymmetrisch, weil wir eine Teilmenge der Figur angeben können, aus der durch die Vereinigung der Bilder endlich vieler iterierte 90°-Drehungen genau die Figur erzeugt werden kann.

Dreht man die beschriebene Sichtweise um, so stellt man fest, dass mit der Möglichkeit der Rekonstruktion umgekehrt auch das Potenzial zur Reduktion einhergeht. Die Komplexität der Gesamtfigur kann auf einen Fundamentalebereich zusammen mit den Symmetrieabbildungen reduziert werden. Diese Perspektive auf Symmetrie bezeichne ich als den *Rekonstruktions- und Reduktionsaspekt*.

Hinter dem oben beschriebenen Verfahren zur *Rekonstruktion* verbirgt sich darüber hinaus auch die Möglichkeit zur zielgerichteten *Konstruktion* von Figuren mit bestimmten Symmetrien in folgender Weise: Aus einer Ausgangsfigur kann man eine Figur mit gewünschten Symmetrien *konstruieren*, indem man die zu den intendierten Symmetrien zugehörigen geometrischen Abbildungen mehrfach anwendet und die dabei entstehenden Bilder vereinigt.

In der mathematischen Bemerkung 14.1.3 habe ich gezeigt, dass die Abbildungen, die die Symmetrie einer Figur beschreiben, zusammen mit der üblichen Verknüpfung, eine Gruppe bilden. Unter Verwendung der Gruppenstruktur kann aus der Gültigkeit bestimmter Symmetrien auf die Gültigkeit weiterer Symmetrien geschlossen werden. Ich ordne diese wichtige Eigenschaft in den *Gruppenaspekt* ein. Dieser liefert eine Abhängigkeit unterschiedlicher Symmetrien voneinander und

versieht die Symmetrien einer Figur mit einer algebraischen Struktur. Diese bildet das wesentliche Instrument bei der systematischen Untersuchung von Symmetrien und liefert Aussagen über sowohl die Notwendigkeit als auch die Unmöglichkeit bestimmter Konstellationen:

Beispiel. Es muss jede 100° -drehsymmetrische Figur auch 200° -drehsymmetrisch sein. Andererseits kann eine 100° -drehsymmetrische Figur gar nicht existieren, wenn sie nicht auch 40° -drehsymmetrisch ist, da $4 \cdot 100^\circ = 400^\circ = 40^\circ \pmod{360^\circ}$ ist.

Beispiel. Jede Figur mit zwei Spiegelsymmetrien an sich schneidenden Geraden ist automatisch auch drehsymmetrisch. Die Umkehrung gilt allerdings nicht, wie zum Beispiel die rechte Figur in Abbildung 14.5 zeigt.

Fragen dieser Art können auch Bestandteil des Mathematikunterrichts sein (siehe Abschnitt 14.1.3), auch wenn der Begriff *Gruppe* dort in aller Regel nicht explizit genannt wird.

Darüber hinaus bildet die gruppentheoretische Sichtweise auf Symmetrie für den Fall endlicher Symmetriegruppen auch die Grundlage dafür, eine Teilmenge der Symmetriegruppe anzugeben, durch die alle anderen Symmetrien erzeugt werden.

Insgesamt ergeben sich also die drei in Abbildung 14.6 dargestellten Schnittstellenaspekte zum Symmetriebegriff.

Invarianzaspekt

Rekonstruktions- und
Reduktionsaspekt

Gruppenaspekt

Abbildung 14.6: Schnittstellenaspekte zum Symmetriebegriff.

Auch Winter (1976, S. 16) beschreibt den Aspektreichtum des Symmetriebegriffs und nennt am Beispiel der Achsensymmetrie *Formaspekt*, *algebraischer Aspekt*, *ästhetischer Aspekt*, *ökonomisch-technischer Aspekt* und *arithmetischer Aspekt*. Winter gebraucht dabei den Begriff *Aspekt* in allgemeinerer Weise als ich ihn im Rahmen der Schnittstellenaspekte (Abschnitt 12.2.1) nutze. Dabei stützt Winter sich nicht ausschließlich auf die Mathematik, sondern beschreibt darüber hinaus Symmetrie als Erfahrung in Umwelt und Technik. Die Schnittstellenaspekte zum Symmetriebegriff (Abbildung 14.6) sind aber konsistent zu einer Teilmenge von Winters Aspekten: Sein *Formaspekt* beschreibt spiegelsymmetrische Figuren als bestehend aus zwei sich wiederholenden Hälften und stößt damit in dieselbe Richtung wie der *Rekonstruktions- und Reduktionsaspekt*; der *algebraische Aspekt* ist quasi identisch zum *Gruppenaspekt*.

14.1.3 Der Symmetriebegriff im Mathematikunterricht

Im Gegensatz zum Kongruenzbegriff, der klar im Geometrieunterricht der Mittelstufe verortet werden kann, stellte Symmetrie ein schulmathematisches Querschnittsthema dar. Vergleicht man die Bildungsstandards für den mittleren Schulabschluss (KMK, 2004) und die Bildungsstandards für die allgemeine Hochschulreife (KMK, 2012), so stellt man fest, dass der Begriff *Symmetrie* dort in unterschiedlichen Kontexten genannt wird. In der Sekundarstufe I wird er als Teil der Leitidee (L_3) *Raum und Form* im Kontext typischer zu untersuchender Eigenschaften geometrischer Objekte

erwähnt (KMK, 2004, S. 11). Für die allgemeine Hochschulreife wird das Verwenden von Symmetrien explizit als heuristisches Prinzip im Rahmen der Kompetenz (K2) *Probleme mathematisch lösen* aufgezählt (KMK, 2012, S. 15). Dieses ist auch im Sekundarstufen II - Kernlehrplan NRW direkt übernommen worden (MSW NRW, 2014, S. 21). Im Kernlehrplan NRW der Sekundarstufe I wird Symmetrie sowohl als „grundlegende Eigenschaft“ ebener Figuren und geometrischer Körper, die von den SuS erfasst und beschrieben werden soll (MSW NRW, 2007, S. 15) als auch als Mittel zur Begründung von Eigenschaften von Figuren (MSW NRW, 2007, S. 16) genannt.

Daraus ergeben sich drei Schwerpunkte, die ich in diesem Abschnitt unter Rückgriff auf die vorgestellten mathematischen Hintergründe (Abschnitt 14.1.1) und unter Nutzung der eingeführten Schnittstellenaspekte (Abschnitt 14.1.2) behandeln möchte. Zunächst gehe ich aus fachinhaltlicher Sicht auf *Zugänge* zum Symmetriebegriff ein, die ich aus fachdidaktischer Literatur und Schulbüchern herausarbeite (S. 243 ff.). Der nächste Teil beschäftigt sich mit *Symmetrien ebener Figuren* (S. 248 ff.). Abschließend werde ich mich dem Thema *Begründen mit Symmetrie* widmen (S. 252 ff.).

Zugänge zum Symmetriebegriff

In diesem Abschnitt analysiere ich schulische Zugänge zum Symmetriebegriff aus fachlicher Perspektive. Ich werde zunächst fachdidaktische Beiträge vorstellen und darauf aufbauend unter Verwendung der Schnittstellenaspekte Zugänge in aktuellen Schulbüchern analysieren.

Präformale Zugänge zum Symmetriebegriff finden bereits in der Grundschule statt:

Definitionen zum Symmetrie- und Kongruenzbegriff stehen im Mathematikunterricht nicht am Anfang der Begriffsentwicklung, sondern entwickeln sich aus intuitiven und inhaltlichen Begriffsvorstellungen [...]. So lässt sich das Phänomen der Symmetrie in vielen Bereichen der Umwelt und der Natur erkennen, z. B. in Blumen, Blättern, Kristallen und Lebewesen. Symmetrie spielt von je her eine wichtige Rolle im Alltag des Menschen, sowohl in der historischen als auch in der individuellen Entwicklung [...]

(Weigand et al., 2014, S. 189 f.)

Die Begriffsentwicklung von alltagsbezogenen Symmetrienerfahrungen in Kontexten wie Kunst, Architektur und Technik zur fachmathematischen Beschäftigung mit Symmetriegruppen (vgl. Abschnitt 14.1.1) wird in der einschlägigen Literatur durch folgende Lern-Stufen beschrieben:

1. *Intuitive Kenntnis des Begriffs*

In der Grundschule und zu Beginn der Sekundarstufe I lernen Schülerinnen und Schüler

- Beispiele und Gegenbeispiele symmetrischer Figuren und Körper aus der Umwelt, Kunst und Technik kennen;
- symmetrische Figuren durch Spiegeln, Ausschneiden und Falten selbst herzustellen;

2. *Inhaltliche Kenntnis des Begriffs*

Hier geht es um das Erkennen und Entdecken von Eigenschaften des Begriffs. Schülerinnen und Schüler lernen

- spiegel-, dreh- und verschiebungssymmetrische Figuren mit ihren jeweils gemeinsamen (Längen-, und Winkeltreue) bzw. unterschiedlichen Eigenschaften (Orientierung) kennen;

- Verfahren zur Erzeugung symmetrischer Figuren bzw. zum Überprüfen vorhandener symmetrischer Figuren kennen: Arbeiten mit Transparenzpapier, Falten, Konstruktionen mit Zirkel und Lineal bzw. Geodreieck;
- Symmetrien in Ebene und Raum zu unterscheiden

3. Integrierte Kenntnis des Begriffs

Hier geht es um die Kenntnis von Beziehungen zwischen Eigenschaften des Begriffs und von Beziehungen des Begriffs zu anderen Begriffen. Die Schülerinnen und Schüler

- lernen Figuren und Körper nach verschiedenen Arten von Symmetrien zu klassifizieren
- erkennen Beziehungen zwischen Kongruenz und Symmetrie
- erkennen die Bedeutung von bzw. den Zusammenhang zwischen Symmetrien und Begriffen wie Mittelsenkrechte und Winkelhalbierende
- kennen die Beziehungen zwischen Symmetrie, Kongruenz und Ähnlichkeit bzw. zwischen Kongruenzabbildungen und Ähnlichkeitsabbildungen

4. Formale Kenntnis des Begriffs

Hier geht es um die Einordnung des Begriffs in das deduktive System der Mathematik. Schülerinnen und Schüler

- kennen Definitionen von Symmetrie und Kongruenz,
- erkennen die Bedeutung von Kongruenzabbildungen und deren Beziehungen zum Symmetriebegriff
- erkennen die Bedeutung von Symmetrien zum Führen von Beweisen

5. Strukturelle Kenntnis des Begriffs

Hier geht es um die Sichtweise des Begriffs im Rahmen mathematischer Strukturen. Schülerinnen und Schüler

- kennen die Gruppe der Kongruenzabbildungen und die Untergruppe der Drehungen und Verschiebungen
- kennen Gruppen von Deckabbildungen verschiedener Figuren.

Diese fünfte Stufe geht sicherlich über das hinaus, was üblicherweise im Mathematikunterricht behandelt wird.

(Weigand et al., 2014, S. 191 ff.)

Die universitäre Behandlung des Symmetriebegriffs, wie sie in Abschnitt 14.1.1 vorgestellt wurde ist auf der Stufe 5. *Strukturelle Kenntnis des Begriffs* einzuordnen und liefert einen einheitlichen Symmetriebegriff, aus dem sich die unterschiedlichen Symmetriearten (Spiegelsymmetrie, Punktsymmetrie, ...) als Folge der Klassifikation aller möglichen Isometrien einer bestimmten Geometrie ableiten lassen. Im Mathematikunterricht wird ein induktiver Zugang gewählt, bei dem einzelne Symmetriearten für sich betrachtet eingeführt werden und es im Allgemeinen offen bleibt, warum scheinbar verschiedene Eigenschaften geometrischer Figuren unter dem Oberbegriff *Symmetrie* zusammengefasst werden.

Die erste Symmetrie, die im Mathematikunterricht betrachtet wird, ist die Spiegelsymmetrie (oder Achsensymmetrie). Dies hängt unter anderem mit der Vielzahl an möglichen Konstruktions- und Überprüfungsaktivitäten auf verschiedenen Darstellungsebenen zusammen. Dazu gehören insbesondere das Falten (eine Hälfte einer ausgeschnittenen Figur lässt sich genau auf die andere Hälfte falten) und das Spiegeln mit einem realen Spiegel (wird der Spiegel an einer bestimmten Stelle der Figur angesetzt ergibt der noch sichtbare Teil der Figur zusammen mit dem Spiegelbild wieder die Ausgangsfigur). Als formale Definition (im Sinne einer Hintergrundtheorie) der Spiegelsymmetrie findet man bei Weigand et al. (2014) die folgende.

Eine ebene Figur F heißt *achsensymmetrisch*, wenn es eine Achsenspiegelung gibt mit der Eigenschaft $S_g(F) = F$, d. h. die Figur wird als Ganzes auf sich abgebildet.

(Weigand et al., 2014, S. 188)

Diese Definition ist konsistent mit der Definition der Symmetriegruppen (mathematische Bemerkung 14.1.2) und liefert einen Zugang zur Spiegelsymmetrie im Sinne des *Invarianzaspekts* (S. 239). Allerdings ist dieser Zugang nicht die Präzisierung der oben genannten realen Handlungen (Falten, Spiegeln mit einem Spiegel). Dabei wird eben gerade nicht veranschaulicht, dass die Figur als *Ganzes* invariant unter einer Spiegelung ist. Stattdessen geht es darum, dass man, wenn man eine Teilfigur geeignet spiegelt, die Gesamtfigur erhält. Es findet also eine *Konstruktion* einer symmetrischen Figur im Sinne des *Rekonstruktions- und Reduktionsaspekt* (S. 240) statt. Dazu passend ist auch die Einführung in den folgenden beiden prototypischen Schulbuchbeispielen.

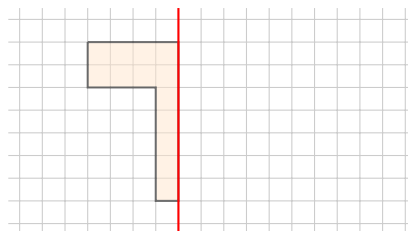
Schulbuchauszug 12 (Fundamente der Mathematik 5, NRW)

Wissen: Achsensymmetrie

Kann man eine Figur entlang einer Gerade so falten, dass die beiden Teildreiecke deckungsgleich sind, so heißt diese Figur **achsensymmetrisch**. Die Gerade heißt **Symmetrieachse**.

Beispiel 1: Achsensymmetrische Figuren zeichnen

Achsensymmetrische Figuren kannst du auch auf Papier erstellen. Spiegle dazu die Figur an der roten Geraden.

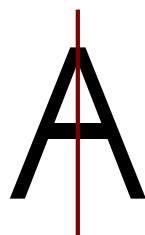


(Text und Bild nach Pallack, 2013a, S. 62)

Schulbuchauszug 13 (Mathematik Neue Wege 6)

Achsensymmetrische Figuren

(Hier ist im Original das Foto von einem symmetrischen Drachen.)



Symmetrieachse

Bei manchen Figuren ist die eine Hälfte das genaue Spiegelbild der anderen. Diese Figuren nennt man **achsensymmetrisch**.

(Text und Bild nach Körner, Lergenmüller, Schmidt & Zacharias, 2013, S. 146)

In beiden Schulbuchauszügen (12, 13) wird deutlich der *Rekonstruktions- und Reduktionsaspekt* angesprochen, indem auf die Zusammengesetztheit aus zwei „Hälften“ fokussiert wird. Eine unsystematische Recherche in Schulbüchern der letzten 20 Jahre legt die Vermutung nahe, dass bei der Definition der Spiegelsymmetrie in Schulbüchern in nahezu allen Fällen einzig der *Rekonstruktions- und Reduktionsaspekt* verwendet wird. Eine mögliche Erklärung liefert ein Blick auf die bereits erwähnten Überprüfungshandlungen: Die Verwendung eines Spiegels oder einer Faltung zur Über-

prüfung von Spiegelsymmetrien legt den Schwerpunkt gerade genau auf die (R)ekonstruktion aus einer „Hälfte“.

Um in enaktiver Weise den *Invarianzaspekt* von Spiegelsymmetrien anzusprechen, müsste die Handlung die Orientierung vertauschen, die Figur also umgewandt werden und zwar so, dass ein bestimmtes Geradenstück (die Spiegelachse) invariant bleibt. Zur Erfassung des zweidimensionalen Problems wäre somit eine komplexe dreidimensionale Handlung erforderlich. Hier wird das von Bender (1982) beschriebene und in Abschnitt 13.1.3 diskutierte didaktische Problem der Formalisierung der elementarkinematischen Bewegung des *Umwendens* hin zur mathematischen *Spiegelung* noch einmal besonders deutlich.

Anders stellt sich die Situation bei der Drehsymmetrie dar. Weigand et al. (2014, S. 188) schlagen als fachlichen Hintergrund wieder eine Invarianz-basierte formale Definition vor. Im Gegensatz zur Invarianz unter Spiegelung, ist die Invarianz einer Figur unter Drehungen einfach als zweidimensionale Handlung, beispielsweise unter Verwendung von Transparenzpapier, überprüfbar. Dementsprechend findet man auch in Schulbüchern Zugänge zur Drehsymmetrie, die auf dem *Invarianzaspekt* der Symmetrie aufbauen (Schulbuchauszüge 14, 15, 16). Der Kern in allen Zugängen liegt im „unveränderten Aussehen“ nach Anwendung einer Drehung.

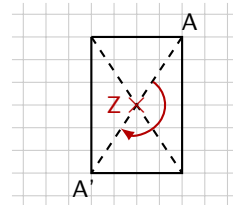
Schulbuchauszug 14 (Fundamente der Mathematik 6, NRW)

Wissen: Punktsymmetrische Figur

Eine Figur heißt **punktsymmetrisch** bezüglich eines Punktes Z, wenn sie bei einer Drehung um 180° um Z mit der Ausgangsfigur zur Deckung kommt, das heißt genauso aussieht wie zuvor.

Der Punkt Z heißt **Symmetriezentrum**.

Zwei punktsymmetrische Punkte A und A' liegen auf einer Geraden durch Z und sind von Z gleich weit entfernt. $\overline{AZ} = \overline{A'Z}$



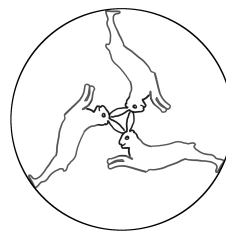
(Text und Bild nach Pallack, 2013b, S. 85)

Schulbuchauszug 15 (Fundamente der Mathematik 6, NRW)

Nutze die abgebildete Skizze des Fensters, um eine weitere Besonderheit zu erkunden.

Drehe dazu dein Buch gegen den Uhrzeigersinn um den Mittelpunkt des Kreises und finde heraus, wie oft bei einer vollen Umdrehung das Bild unverändert erscheint.

Ermittle den Winkel, um den du das Bild jedes Mal drehen musst?



Eine Figur, die um einen festen Punkt (Drehzentrum) gedreht wird, heißt **drehsymmetrisch**, wenn sie bei einer Drehung um weniger als 360° mindestens einmal genauso aussieht, wie die ursprüngliche Figur.

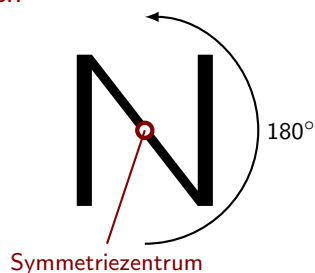
Solche Figuren und Bilder kannst du auch selbst erzeugen. Dazu musst du alle Punkte einer Grundfigur (hier: ein Hase) um einen Punkt und mit einem festen Winkel drehen.

(Text und Bild nach Pallack, 2013b, S. 90)

Schulbuchauszug 16 (Mathematik Neue Wege 6)

Punktsymmetrische Figuren

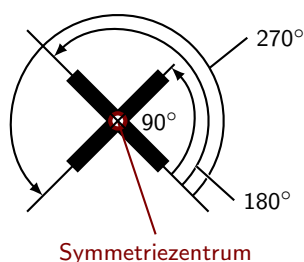
(Hier ist im Original das Foto von einem in den Sand gezeichneten Yin-Yang-Symbol)



Dreht man eine ebene Figur um 180° und sieht keine Veränderung, so nennt man sie **punktsymmetrisch**.

Drehsymmetrie

(Hier ist im Original das Foto eines sechszackigen Zimtsternes.)



Manche Figuren kann man um einen Winkel (kleiner als 360°) drehen, und es sieht so aus, als wäre nichts geschehen. Diese Figuren nennt man **drehsymmetrisch**.

(Text und Bild nach Körner et al., 2013, S. 146)

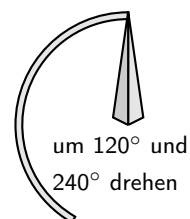
Auch wenn der Zugang zur Drehsymmetrie in vielen Schulbüchern auf dem *Invarianzaspekt* aufbaut, findet man Aufgaben, die explizit den *Rekonstruktions- und Reduktionsaspekt* adressieren. Ein Beispiel zeigt Schulbuchauszug 17. Die Aufgabenstellung dort spielt direkt auf das Finden von Fundamentalbereichen sowie auf die Rekonstruktion der Figur aus diesen Bereichen an.

Schulbuchauszug 17 (Mathematik Neue Wege 6)

Drehsymmetrische Figuren

Drehsymmetrische Figuren lassen sich aus einem Grundbaustein erzeugen, der immer wieder gedreht wird. Finde zu jeder Figur den Grundbaustein. Wie oft und um welche Winkel musst du ihn drehen, damit die Figur entsteht? Zeichne den entsprechenden Grundbaustein so gut du kannst in dein Heft und konstruiere die Figur.

(Hier ist im Original das Foto eines Mercedes-Sterns.)



(Hier sind im Original drei verschiedene geometrische Muster, die jeweils 120° -drehsymmetrisch sind.)

(Text und Bild nach Körner et al., 2013, S. 159)

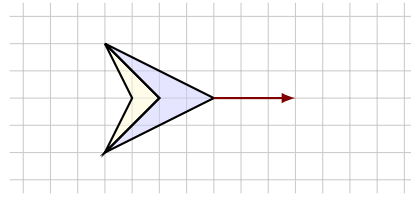
Bisher nicht erwähnt wurden Symmetrien, die zusätzlich Verschiebungen beinhalten. Im Mathematikunterricht spielen sie eine untergeordnete Rolle. Die entsprechenden Figuren sind immer unbeschränkt (mathematische Bemerkung 14.1.8) in eine (Bandornamente) oder in zwei (Parkettierungen) Richtungen. Damit fällt streng genommen die Möglichkeit des enaktiven Zugangs zur Invarianz weg. Beschränkt man sich jedoch auf einen genügend großen Bildausschnitt, der repräsentativ für die Parkettierung der gesamten Ebene steht, so kann man mit Transparenzpapier dennoch einen Zugang zum *Invarianzaspekt* finden. Mit Fokus auf dem *Rekonstruktions- und Reduktionsaspekt*,

ist die zu beantwortende Frage wieder die nach möglichst kleinen Baustein, aus dem die Figur zusammengesetzt ist (vergleiche Schulbuchauszug 18).

Schulbuchauszug 18 (Mathematik Neue Wege 6)

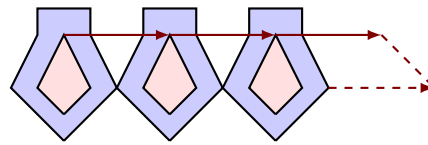
Bandornamente 1

Zeichne ein Bandornament aus der Grundfigur in dein Heft. Nutze die ganze Heftbreite. Erfinde selbst eine Grundfigur, gib einen Verschiebungspfeil vor und lasse deine Nachbarin oder deinen Nachbarn daraus ein Bandornament zeichnen.



Tipp

Mithilfe der Verschiebung kann man Bandornamente zeichnen. Hat man eine Grundfigur einmal verschoben, so verschiebt man die Bildfigur mit dem gleichen Verschiebungspfeil usw.



(Text und Bild nach Körner et al., 2013, S. 159)

Die beschriebenen Zugänge zeigen, dass im Mathematikunterricht Grundvorstellungen zum Symmetriebegriff sowohl im Sinne des *Invarianzaspekts* als auch im Sinne des *Rekonstruktions- und Reduktionsaspekts* aufgebaut werden. Eine irgendwie geartete explizite Systematisierung eines allgemeinen Symmetriebegriffs findet allerdings nicht statt. Die obigen Analysen zeigen, dass ein möglicher Grund darin besteht, dass die Zugänge zu den beiden wesentlichen Symmetrien (Achsen-, und Dreh-) aus unterschiedlicher fachlicher Perspektive stattfinden, was sich in den unterschiedlichen Schnittstellenaspekten zum Symmetriebegriff widerspiegelt, die in den Zugängen zugrunde liegen. Da ein Zugang zur Spiegelsymmetrie über den Invarianzaspekt – wie oben beschrieben – aus didaktischer Sicht problematisch ist, kann eine explizitere Systematisierung vermutlich nur darin bestehen, auch die Punkt- und Drehsymmetrie konsequent aus Perspektive der Reduktion und Rekonstruktion einzuführen. Weitere schuldidaktische Untersuchungen und Überlegungen zu diesem Thema sind zwar nicht Bestandteil dieser Arbeit aber auf jeden Fall lohnenswert.

Eine weitere Beobachtung ist, dass im Mathematikunterricht nicht darauf eingegangen wird, dass die möglichen Symmetriearten genau mit möglichen geometrischen Abbildungen, die das „Aussehen“ einer Figur nicht ändern (Isometrien), übereinstimmen. Dies erklärt sich durch die generell geringe Bedeutung, die ein systematischer Aufbau der Theorie geometrischer Abbildungen im aktuellen Mathematikunterricht besitzt.

Symmetrien ebener Figuren

Die Untersuchung von Symmetrien ebener Figuren (meist Polygone unterschiedlicher Komplexität oder alltagsnahe Figuren wie Verkehrsschilder) und umgekehrt die Erzeugung ebener Figuren mit gewissen Symmetrien sind zentrale Unterrichtsaktivitäten im Themenfeld Symmetrie. Ein typisches Beispiel ist das Hierarchisieren von Vierecken im *Haus der Vierecke* (Franke und Reinhold (2016, S. 128), Weigand et al. (2014, S. 199 f)) (vgl. Abbildung 14.7).⁹⁶ Das Untersuchen und Analysieren von Symmetrien der unterschiedlichen Vierecke liefert im Mathematikunterricht einen Anlass zum

⁹⁶Die Hierarchisierung von Vierecken entlang der Symmetrieeigenschaft ist natürlich nur eine von mehreren Möglichkeiten. Oft wird im Unterricht zunächst nach Seitenlängen, Parallelität und/oder Winkelgrößen sortiert.

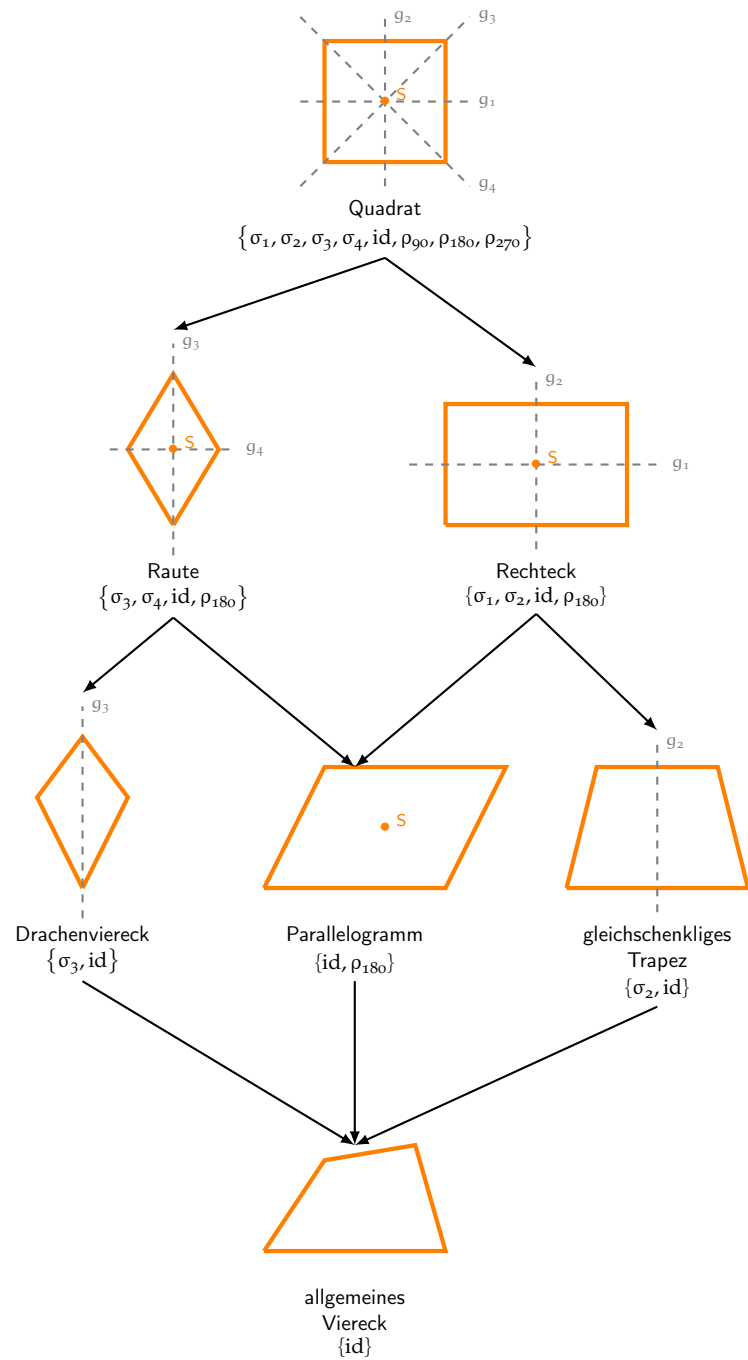


Abbildung 14.7: Das *Haus der Vierecke* aus Symmetrie-Perspektive. Zu jedem Viereck sind die Symmetrien in der fachmathematischen Mengenschreibweise über die Symmetriegruppe angegeben.

lokalen Ordnen nach Anzahl und Art der Symmetrien. Aus hochschuldidaktischer Perspektive können exemplarisch an einem schulnahen Beispiel Untergruppen-Beziehungen studiert werden (z. B. Leuders, 2016, S. 17 ff.). Sowohl bei der unterrichtlichen Behandlung des *Haus der Vierecke* als auch generell beim Finden von Symmetrien ebener Figuren stößt man automatisch auf die Frage, ob eine gefundene Auflistung von Symmetrien komplett ist. In der mathematischen Bemerkung 14.1.14 habe ich am Beispiel des Quadrats erläutert, wie eine entsprechende Begründung aussehen kann. Für das Aufstellen so einer Liste liefert der *Gruppenaspekt* des Symmetriebegriffs (S. 241) eine hilfreiche fachliche Hintergrundperspektive für die Lehrkraft: Vor dem Hintergrund der mathematischen Bemerkung 14.1.11 folgen im Kontext des *Haus der Vierecke* aus den Spiegelsymmetrien von Raute, Rechteck und Quadrat bereits notwendigerweise die jeweiligen Drehsymmetrien.

Schulbuchauszug 19 (Mathematik Neue Wege 6)

Spiegelkabinett

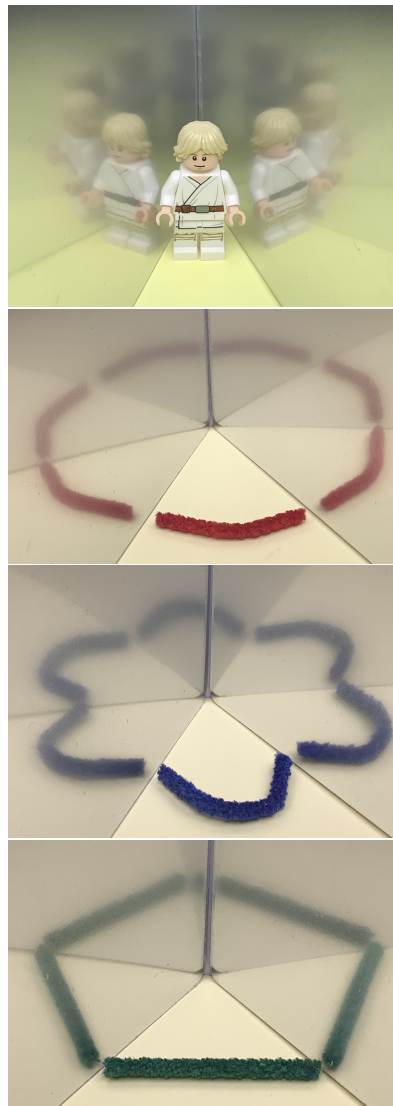
Ein Spiegelbuch kannst du selbst bauen. Lege verschiedene Gegenstände zwischen die Spiegel. So lässt sich eine Menge entdecken. Hier einige Anregungen :

A Wie verändert sich die Anzahl der Spiegelbilder bei Vergrößerung (Verkleinerung) des Winkels? Ändert sich die Anzahl der Spiegelbilder, wenn du die Gegenstände austauschst? Was geschieht, wenn du Worte spiegelst?

B Welche Muster kannst du mithilfe eines Drahtes (z. B. Pfeifenputzer) erzeugen? Schaffst du einen Kreis?

C Mithilfe eines Strohhalmsstücks kannst du ein Fünfeck erzeugen. In welchem Winkel musst du dazu die Spiegel aufstellen? Wie musst du die Spiegel stellen, um ein Dreieck (Viereck, Sechseck, Siebeneck usw.) zu erhalten?

D Zwischen dem Winkel, in dem man ein Spiegelbuch aufstellt, und der Anzahl der Spiegelbilder besteht ein Zusammenhang. überprüfe das mit den Winkeln 45° , 60° , 72° , 90° , 120° und 180° . Am besten zeichnest du die Winkel dazu auf ein weißes Blatt Papier. Lege jeweils einen Gegenstand dazwischen und zähle die Anzahl der Spiegelbilder. Lege eine Tabelle an. Erkennst du eine Regel?



(Text und Bild nach Körner et al., 2013, S. 160)

Insgesamt tritt der Begriff der *Gruppe* gar nicht, aber auch explizite Argumentationen im Sinne des *Gruppenaspekts* in Schulbüchern nur vereinzelt auf. Dies hängt vermutlich, wie bereits oben erwähnt, mit der untergeordneten Rolle zusammen, die die Abbildungsgeometrie und insbesondere die Verknüpfung von (geometrischen) Abbildungen in der Schulmathematik momentan spielt. Aufgaben,

in denen Schülerinnen und Schüler zum Nachdenken über Verknüpfung von Symmetrien angeregt werden, findet man in Exkursbereichen der Schulbücher. Zwei entsprechende Beispiele liefern die Schulbuchauszüge 19 und 20.

Die Aufgabe *Spiegelkabinett* aus Schulbuchauszug 19 motiviert Überlegungen zur Verknüpfung von zwei Achsensymmetrien. Aufgabenteil D stellt dann direkt die Verbindung zu den entstehenden Drehsymmetrien her. In dieser Aufgabe werden systematisch Abhängigkeiten zwischen Symmetrien untersucht, und somit wird neben dem *Rekonstruktions- und Reduktionsaspekt* in der Tat auch der *Gruppenaspekt* angesprochen.

Schulbuchauszug 20 (Fundamente der Mathematik 6, NRW)

Das Achteck in Aufgabe 2 ist drehsymmetrisch (zum Mittelpunkt). Es gibt sicher weitere drehsymmetrische Figuren.

- a) Kai ist der Meinung, ein Dreieck sei drehsymmetrisch. Hat er immer, nie oder manchmal Recht? Begründe deine Antwort.
- b) Untersuche, ob jedes, kein oder manches Rechteck drehsymmetrisch ist. Welche besondere Rolle spielt das Quadrat?
- c) Bestimme zu den drehsymmetrischen Figuren aus a) und b) die Drehzentren und Drehwinkel und beschreibe, wie oft die Figuren bei einer vollen Umdrehung unverändert erscheinen, also deckungsgleich sind. Dokumentiere deine Überlegungen im Heft.

(Text nach Pallack, 2013b, S. 91)

Auch in Schulbuchauszug 20 spielt der *Gruppenaspekt* eine Rolle: Die in Aufgabenteil c) zu erstellende Tabelle kann eine Grundlage für eine systematische Untersuchung der Möglichkeit und Notwendigkeit vorkommender Drehsymmetriewinkel sein. Dabei wird Symmetrie zusätzlich im Sinne des *Invarianzaspekts* benutzt.

Auch wenn in den Aufgabenstellungen nur angedeutet, haben beide Schulbuchauszüge (19 und 20) das Potenzial zur Initiierung tiefergehender Schülerinnen und Schüler-Äußerungen und fachlicher Diskussionen (und stellen damit professionstypische Handlungsanforderungen, vgl. S. 9 dar), die sich im Kern um den *Gruppenaspekt* des Symmetriebegriffs drehen. Mögliche vertiefende Leitfragen für unterrichtliches Handeln im Sinne des *Gruppenaspekts* und damit zur vertiefenden Begriffsentwicklung im Sinne einer Vernetzung unterschiedlicher Symmetriearten stellen die folgenden Leitfragen dar:

- Ist jede Figur, die achsensymmetrisch zu zwei Achsen ist, auch drehsymmetrisch?
- Ist jede drehsymmetrische Figur auch achsensymmetrisch?
- Können als Winkel bei Drehsymmetrien nur Teiler von 360° vorkommen?
- Wenn eine Figur drehsymmetrisch zu einem bestimmten Winkel ist, dann ist sie auch drehsymmetrisch zu allen Vielfachen!

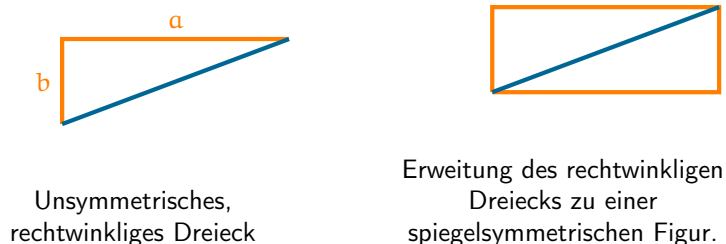
Insgesamt zeigen die Ausführungen in diesem Absatz, dass das Erkunden von Symmetrien ebener Figuren ein Betätigungsfeld ist, das Nutzung und Begriffsentwicklung von Symmetrie im Sinne aller drei Schnittstellenaspekte ermöglicht. Eine stärkere Fokussierung auf Lerngelegenheiten im Sin-

ne des *Gruppenaspekts* haben das Potenzial, die Herausarbeitung eines übergreifenden Symmetrie-Konzepts zu fördern. Im Angesicht der hohen Bedeutung, die der Symmetrie aus fachdidaktischer Perspektive als zentraler Begriff und heuristisches Prinzip zuteil wird, wäre dies ein sinnvolles Feld für weitere schuldidaktische Untersuchungen.

Heuristisches Begründen mit Symmetrie

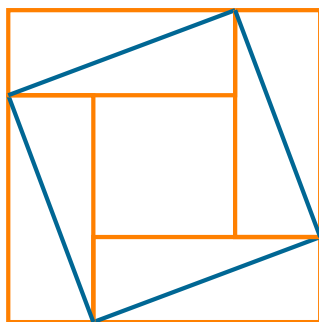
Wie in den obigen curricularen Betrachtungen erwähnt, sollen die Schülerinnen und Schüler Symmetrie auch als heuristisches Prinzip zum Bearbeiten von Aufgaben und Lösen von Problemen verwenden. Die Stärke der Symmetrie liegt hier vor allem im *Rekonstruktions- und Reduktionsaspekt*: Hat das in einer Problemstellung zu betrachtende Objekt symmetrische Eigenschaften, können diese genutzt werden, um die Komplexität des Objektes zu *reduzieren* und Aussagen, die in einem Teil gelten, zu verallgemeinern. Andersherum kann auch aus einem unsymmetrischen Objekt ein symmetrisches (*re*)konstruiert werden, dessen Betrachtung die gewünschten Ergebnisse liefert. Die folgenden fünf Beispiele verdeutlichen beide Strategien:

1. Die Spiegelsymmetrie des gleichschenkligen Dreiecks liefert die Kongruenz der beiden Basiswinkel. Im gleichseitigen Dreieck erhält man sowohl durch die Nutzung mehrerer Spiegelsymmetrien als auch durch die Nutzung der Drehsymmetrie die Kongruenz aller Winkel.
2. Der Satz von Pythagoras kann mittels Konstruktion einer symmetrischen Figur begründet werden (Abbildung 14.8).



Unsymmetrisches,
rechtwinkliges Dreieck

Erweiterung des rechtwinkligen
Dreiecks zu einer
spiegelsymmetrischen Figur.



Fertige Beweisfigur: Für den Flächeninhalt des Hypotenusenquadrats ergibt sich

$$c^2 = 4 \cdot \frac{ab}{2} + (a-b)^2 = a^2 + b^2$$

Abbildung 14.8: Beweis des Satzes von Pythagoras mit einer symmetrischen Erweiterung

3. Von der Gültigkeit der Sätze vom Scheitelwinkel und von Wechselwinkeln an geschnittenen Parallelen kann man sich mittels eines Punktsymmetrie-Arguments schnell überzeugen.
4. Die Lösungen von quadratischen Gleichungen sind symmetrisch zur Scheitelstelle (dem $-\frac{p}{2}$ in der PQ-Formel⁹⁷) der zugrunde liegenden Parabel.
5. Das Wissen um die Symmetrien einer zu untersuchenden Funktion erlaubt eine deutliche Arbeitserleichterung: Bei bspw. Funktionen mit punkt- oder achsensymmetrischen Funktionsgraphen muss nur die Hälfte der Funktion untersucht werden. Die Verschiebungssymmetrie der Sinus-Funktion erlaubt das Schließen vom Intervall $[0, 2\pi]$ auf den gesamten Definitionsbereich \mathbb{R} .
6. Die Betrachtung komplexer rotationssymmetrischer Körper (dreidimensional) kann reduziert werden auf die Untersuchung eines zweidimensionalen Fundamentaltbereichs⁹⁸ mit den Standardmethoden der Schulanalysis.

Abschließendes zur Rolle des Symmetriebegriffs im Mathematikunterricht

In diesem Abschnitt habe ich die Rolle, die *Symmetrie* im gymnasialen Mathematikunterricht spielt, aus verschiedenen Perspektiven beleuchtet. Dabei habe ich zunächst unterrichtliche Zugänge zum Symmetriebegriff unter Nutzung der Schnittstellenaspekte (Abschnitt 14) analysiert (S. 243 ff.). Im Anschluss bin ich auf das Untersuchen ebener Figuren aus Symmetrieperspektive (S. 248 ff.) und das heuristische Begründen mit Symmetrie (S. 252) eingegangen. Die Analysen und ihre Ergebnisse bilden die Grundlage für die Konzeption sinnvoller professionsorientierter Lerngelegenheiten zur Förderung fachdidaktischer Urteilskompetenz und sind damit ein wesentlicher Beitrag zur Spezifizierung der Schnittstelle *Symmetrie*.

14.1.4 Lernendenperspektive zur Symmetrie aus Sicht der Studierenden

Wie schon beim Kongruenzbegriff sind mir keine empirischen Studien dazu bekannt, welche Vorstellungen zum Symmetriebegriff Lehramtsstudierende typischerweise aus der Schule mitbringen und welche einschlägigen Fertigkeiten und Fähigkeiten zur Verfügung stehen. Aus diesem Grund kann die erste Einschätzung der gegenstandsbezogenen Lernendenperspektive nur auf Basis begründeter Vermutungen geschehen, die auf den geltenden curricularen Vorgaben und meinen Erfahrungen in der Lehramtsausbildung beruhen. Die Begleitforschung zur Schnittstellenwoche *Symmetrie* kann dann dazu beitragen, die Lernendenperspektive weiter auszuscharfen.

Als theoretische Grundlage zur Einschätzung der Lernendenperspektive können die Lern-Stufen zum Symmetriebegriff (S. 243 f.) dienen. Sowohl die bereits diagnostizierte untergeordnete Rolle der Abbildungsgeometrie im aktuellen Mathematikunterricht als auch die näher betrachteten Schulbuchbeispiele sprechen dafür, dass sich die meisten Lehramtsstudierenden maximal auf der Stufe der *integrierten Begriffskennntnis* befinden. Somit ist ein sinnvolles Ziel für die Veranstaltung *Geometrie für Lehramtsstudierenden*, die Studierenden auf dieser inhaltlich-anschaulichen Ebene abzuholen

⁹⁷Die Lösung(en) der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ sind – so sie existieren – gegeben durch

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

⁹⁸Dieser Bereich unterscheidet sich im Vergleich zu den anderen bisher gesehenen dadurch, dass er niedrigerdimensional ist als die daraus erzeugte Menge und die zugehörige Transformationsgruppe nicht diskret ist.

und sie dabei zu unterstützen, mit dem Symmetriebegriff auf der *formalen* und *strukturellen* Stufe umgehen zu können.

14.1.5 Auswahl und Sequenzierung der Inhalte zur Schnittstelle *Symmetrie*

Analog zum Vorgehen im Rahmen der Entwicklungsforschung zur Schnittstelle *Kongruenz* (Abschnitt 13.1.5), werde ich nun eine lehr-lern-bezogene Strukturierung (Abschnitt 12.2.1) der Schnittstelle *Symmetrie* vornehmen. Die entsprechenden gegenstandsspezifischen Lernziele zu Schnittstellenlerngelegenheiten bestehen aus einem fundierten Verständnis der zugrundeliegenden Fachmathematik sowie aus Lernzielen, die zur Förderung gegenstandsspezifischer fachdidaktischer Urteilskompetenz (S. 36) beitragen und dabei die in Abschnitt 2.1 vorgestellten mathemathikhaltigen Handlungsanforderungen sowie die dort herausgearbeiteten Funktionen fachmathematischen Wissens und Könnens für professionelles Lehrerhandeln berücksichtigen.

Die Lerngelegenheiten zur Schnittstelle *Kongruenz* sollen ein Beitrag zum Erreichen der folgenden Lernziele leisten: Die Studierenden ...

- S1. haben ein fundiertes mathematisches Verständnis eines allgemeinen Symmetriebegriffs im Kontext des euklidischen Raums \mathbb{R}^2 (vgl. Abschnitt 14.1.1),
- S2. kennen die Schnittstellenaspekte zum Symmetriebegriff, und können sie nutzen um zu analysieren, welche fachlichen Facetten von Symmetrie in einer professionsorientierten Handlungssituation relevant sind (vgl. Abschnitt 14.1.2),
- S3. können reale *Zugänge* zu den unterschiedlichen Symmetriearten aus fachlicher Perspektive *analysieren und bewerten* (vgl. Abschnitt 14.1.3),
- S4. können reale Aufgabenstellungen (z. B. aus Schulbüchern) zum Identifizieren von Symmetrien ebener Figuren und zum Erzeugen ebener Figuren mit bestimmten Symmetrien *bewältigen und auf verschiedenen Niveaus bearbeiten* (vgl. Abschnitt 14.1.3),
- S5. können schultypische Argumentationsanlässe, in denen die Symmetrie eine Rolle spielt, *bewältigen und auf verschiedenen Niveaus bearbeiten* (vgl. Abschnitt 14.1.3)
- S6. können reale oder fiktive Schülerlösungen/-äußerungen aus (schwerpunktmäßig) mathematischer Perspektive *analysieren, bewerten und darauf lernförderlich* (im Rahmen des aktuellen Ausbildungsstandes) *reagieren*.

Wie schon beim Thema *Kongruenz* wird auch hier in der ersten Version der Lernziele die Nutzung des fachmathematischen Wissens und Könnens zur Symmetrie vor allem in der Funktion als *Ressource* und *legitimierender Hintergrund* (Abschnitt 2.3.1) für professionelles Lehrerhandeln in den Blick genommen. Ich werde später (Kapitel 15) Überlegungen darstellen, wie auch die anderen beiden Funktionen expliziert adressiert werden können.

Die Beschäftigung mit dem Thema *Symmetrie* findet in der Veranstaltung *Geometrie für Lehramtsstudierende* verteilt auf zwei Veranstaltungswochen statt (vgl. Tabelle 14.1). Die fachinhaltliche Klärung der Schnittstelle (Woche 10 in Tabelle 14.1) verläuft entlang der Ausführungen in Abschnitt 14.1.1: Zunächst wird gezeigt, dass zur Beschreibung von Symmetrien einer Figur F in einer Saccheri-Ebene X die Isometrien von X einen ausreichenden Vorrat bilden (mathematische Bemerkung 14.1.1); durch

Inhaltsübersicht	
<i>Teil 1: Geometrie mit Mitteln der linearen Algebra</i>	
1	Organisation, Geometrie und lineare Algebra, Kongruenz, euklidische Isometrien
2	Euklidische Spiegelungen, Projektionen und Rotationen
3	Mittelsenkrechten, der Kongruenzsatz SSS und der euklidische Dreispiegelungssatz
4	Systematisierung der euklidischen Abbildungsgeometrie
5	Schnittstellenwoche Kongruenz
<i>Teil 2: Geometrie in metrischen Räumen</i>	
6	Geometrische Grundbegriffe in metrischen Räumen: Kreise, Geraden, Isometrien
7	Inzidenzaxiom, Spiegelungsaxiom und Saccheri-Ebenen, Orthogonalität
8	Punktspiegelungen und Mittelsenkrechten
9	Kongruenzsätze, Dreispiegelungssatz, Winkel sowie Winkelsätze, die das Parallelenaxiom nicht benötigen
10	Symmetrie
11	Schnittstellenwoche Symmetrie
<i>Teil 3: Geometrie mit Parallelenaxiom</i>	
12	Axiomatisierung, Parallelenaxiom und obere Halbebene, inkl. mathematikhistorischer Hintergründe
13	Vektorraum der Parallelverschiebungen
14	Strahlensatz und Hauptsatz (isometrische Isomorphie zu (\mathbb{R}^2, d_2))

Tabelle 14.1: Inhaltlicher Überblick basierend auf Tabelle 7.1 auf Seite 64. In den markierten Wochen finden Lehr-Lernaktivitäten zur Schnittstelle *Symmetrie* statt.

die Einschränkung auf F kommen keine neuen hinzu. Dies ist die Grundlage für die Definition der *Symmetriegruppe* (mathematische Bemerkung 14.1.2) einer Figur. Die Bezeichnung *Symmetriegruppe* ist gerechtfertigt, weil es sich bei diesen Objekten in der Tat um eine Gruppe im algebraischen Sinn handelt (mathematische Bemerkung 14.1.3). Im Anschluss an Definition und Studium einzelner Symmetrien (mathematische Bemerkungen 14.1.4 bis 14.1.11) werden noch Fundamentaltbereiche als solche Teilstücke einer Figur definiert, aus denen die Figur durch Kongruenzabbildungen zusammengesetzt werden kann.

In der Schnittstellenwoche (Woche 11 in Tabelle 14.1) schließt sich an die fachinhaltliche Klärung eine Behandlung des Themas *Symmetrie* aus professionsorientierter Perspektive an. Neben der Vorstellung der Schnittstellenaspekte (Abschnitt 14.1.2), werden verschiedene Lehr-Lern-Aktivitäten bezogen auf die in Abschnitt 14.1.3 identifizierten unterrichtsbezogenen Schwerpunkte eingesetzt. Dazu gehören insbesondere die Bereiche *Zugänge zum Symmetriebegriff* (S. 243 ff.), *Symmetrien ebener Figuren* (S. 248) und *Begründen mit Symmetrie* (S. 252). Die Einordnung unter Verwendung der Schnittstellenaspekte bildet dabei ein Querschnittsthema, das sich durch alle Bereiche hindurch zieht. Dabei erweisen sich der *Invarianzaspekt* und der *Rekonstruktions- und Reduktionsaspekt* als zentral. Der *Gruppenaspekt* steht zwar nicht im Fokus des Mathematikunterrichts, bildet aber für viele tiefgehende Symmetrie-Betrachtungen eine wertvolle Perspektive zur Elementarisierung der fachinhaltlichen Hintergründe.

14.2 Überblick über die Gestaltung der Schnittstellenwoche *Symmetrie*

In diesem Abschnitt stelle ich im Detail Lehr-Lern-Aktivitäten vor, die basierend auf den Überlegungen aus Abschnitt 14.1 und unter Berücksichtigung der generellen Entwurfsprinzipien (vgl. Abschnitt 3.3, S 35) im Kontext der Schnittstellenwoche *Symmetrie* eingesetzt wurden. Nach einem Kurzüberblick über die Ausgestaltung der zugehörigen Vorlesung (Abschnitt 14.2.1) folgt eine tabellarische Vorstellung der eingesetzten Übungsaufgaben in der Präsenzübung (Abschnitt 14.2.2) und der eingesetzten ePortfolio-Aktivitäten (Abschnitt 14.2.3). Die hier vorgestellten Materialien spiegeln den Stand des Materials nach drei Veranstaltungszyklen wieder. Dabei werde ich jeweils anmerken, in welchem Zyklus Veränderungen vorgenommen wurden. Abschließend werde ich in Abschnitt 14.2.4 exemplarisch einzelne der eingesetzten Aufgaben unter besonderer Berücksichtigung ihrer Zielsetzung vorstellen. Alle eingesetzten Aufgabenstellungen findet man darüber hinaus in Anhang C.

14.2.1 Kurzüberblick über die Vorlesung

Wie bereits in Abschnitt 14.1.5 beschrieben, findet die fachinhaltliche Behandlung des Symmetrie-Begriffs bereits im Vorlauf der Schnittstellenwoche statt. In der Vorlesung zur Schnittstellenwoche werden dann die verschiedenen Schwerpunkte angesprochen, die ich in Abschnitt 14.1.3 als besonders relevant für den Mathematikunterricht identifiziert habe. Eine Übersicht über die Gliederung findet man in Tabelle 14.2.

14.2.2 Überblick über die Aufgabenstellungen der Präsenzübungen

In den Präsenzübungen zur Schnittstellenwoche *Symmetrie* arbeiten die Studierenden in Kleingruppen. Eine Übersicht über die eingesetzten Aufgaben liefert Tabelle 14.3. Die Referenzen beziehen sich jeweils auf den Anhang C.1. Dort sind alle im Projekt eingesetzten Präsenzaufgaben aus den Schnittstellenwochen vollständig aufgelistet.

14.2.3 Überblick über die ePortfolio-Aktivitäten

Der Einsatz von Schreibaufträgen für das Schnittstellen-ePortfolio zur Schnittstelle *Symmetrie* beschränkt sich nicht ausschließlich auf die eigentliche Schnittstellenwoche. In Tabelle 14.4 wird ein Überblick über die entsprechenden Aufgaben gegeben.

Thema	Beschreibung	Bemerkung
1 Symmetrie als Urerfahrung	Beispiele zur Symmetrie als Realisierung von Gleichmaß und Wiederholung in Natur, Architektur, Kunst und Musik (vgl. Weigand et al. (2014, S. 189 f.), Winter (1976, S. 14, ff.)).	
2 Schnittstellenaspekte	Vorstellung und Einordnung der Schnittstellenaspekte zum Symmetrie-Begriff (vgl. Abschnitt 14.1.2).	
3 Zerlegen vs. Rekonstruieren	Explizierung der Gefahr der Verwechslung zwischen der Flächenzerlegung (Einzelteile können in beliebiger Weise wieder zusammen gelegt werden.) und der Reduktion und Rekonstruktion symmetrischer Figuren (Art des Zusammenlegens ist durch die Symmetriegruppe bereits eindeutig vorbestimmt.) (vgl. Material 4 (S. 402)).	Erst ab dem zweiten Zyklus.
4 Bandornamente und Parkettierungen	Kursorische Behandlung von Figuren mit Verschiebesymmetrien: Insbesondere systematische Klassifikation von Bandornamenten in die sieben Friesgruppen und Vorstellung der 17 Kristallgruppen (vgl. Behrends (2019, S. 27 ff.)).	
5 Stufenschema zum Lernen des Symmetriebegriffs	Vorstellung der einzelnen Stufen im Zusammenspiel mit den Inhalten der Vorlesung (vgl. S. 14.1.3).	
6 Begründen mit Symmetrie	Vorstellung verschiedener schulerelevanter Beispiele in denen Symmetrie zur Begründung eingesetzt wird, und Interpretation von Symmetrieargumenten als spezielle Form von Abbildungsbeweisen (vgl. S. 14.1.3 ff.).	
7 Symmetrien in Physik und Chemie	Exemplarische Bedeutung von Symmetrien in Physik und Chemie an den Beispielen: Kristalle, spezielle Relativitätstheorie (Lorentzgruppe als Symmetriegruppe) und dem Noether-Theorem.	

Tabelle 14.2: Gliederung der Vorlesung zur Schnittstellenwoche *Symmetrie*. Die Tabelle stellt die Gliederung nach dem dritten Veranstaltungszyklus (Sommersemester 2020) dar. In der Bemerkungsspalte ist notiert, welche der Themen nicht schon im ersten Veranstaltungszyklus enthalten waren.

Aufgabe	Beschreibung	Bemerkungen zum Einsatz der Aufgaben
Zugänge zur Symmetrie in Schulbüchern (Präsenzübung 6 (S. 384))	Die Studierenden analysieren und vergleichen Zugänge zur Symmetrie in realen Schulbuchbeispielen unter Verwendung der Schnittstellenaspekte. Anschließend diskutieren sie allgemein über die Eignung der Aspekte zur Einführung der einzelnen Symmetriarten.	
Spiegeln mit dem Spiegelbuch (Präsenzübung 7 (S. 385))	Die Studierenden bearbeiten Aufgaben aus dem Arbeitsheft <i>Spiegeln mit dem Spiegelbuch</i> (Wittmann & Müller, 1997) und reflektieren Lösungsstrategien auf Basis der fachlichen Hintergründe zum Symmetriebegriff. Anschließend diskutieren sie die Aufgabe aus Perspektive der Schnittstellenaspekte.	
Symmetrie von Funktionen (Präsenzübung 8 (S. 385))	Die Studierenden betrachten das Thema <i>Symmetrie von Funktionen</i> aus elementargeometrischer Perspektive und unter Verwendung der Schnittstellenaspekte.	
Platonische Parkettierungen (Präsenzübung 9 (S. 385))	Die Studierenden entdecken materialgestützt, welche regelmäßigen n -Ecke für (platonische) Parkettierungen geeignet sind, und begründen ihre Vermutungen.	Zusatzaufgaben, im Zyklus 3 aufgrund der Distanzsituation nicht eingesetzt.

Tabelle 14.3: Übersicht über die eingesetzten Präsenzaufgaben zur Schnittstellenwoche *Symmetrie*.

Aufgabe	Beschreibung	Bemerkungen zum Einsatz der Aufgaben
Vorbereitende Reflexion zum Themenblock <i>Symmetrie</i> SuS-Äußerungen zur Symmetrie (Pre) (ePf-Aufgabe 13 (S. 396))	Die Studierenden dokumentieren ihr Vorwissen zum Symmetriebegriff. Anschließend formulieren sie Reaktionen auf die fiktiven SuS-Äußerungen zu drehsymmetrischen Figuren aus ePortfolioaufgabe 17 (S. 398)	Einsatz vor der fachinhaltlichen Einführung in der Veranstaltung. Die zweite SuS-Äußerung erst ab Zyklus 2.
Das Haus der Vierecke (ePf-Aufgabe 15 (S. 396))	Die SuS ordnen Vierecke nach ihren Symmetriegruppen im Kontext des <i>Haus der Vierecke</i> (vgl. Abbildung 14.7 (S. 249))	Einsatz nach der fachinhaltlichen Einführung und vor der Schnittstellenwoche.
Symmetrie-Aspekte in Schulbüchern (ePf-Aufgabe 16 (S. 397))	Die Studierenden recherchieren in Schulbüchern Aufgabenstellungen, in denen die einzelnen Schnittstellenaspekte adressiert werden.	Einsatz <i>in</i> der Schnittstellenwoche Symmetrie.
SuS-Äußerungen zur Symmetrie (ePf-Aufgabe 17 (S. 398))	Die Studierenden beschäftigen sich erneut mit den Schüleräußerungen aus ePortfolioaufgabe 13 (S. 396)) und verwenden dieses Mal das neu erworbene Wissen aus der Schnittstellenwoche (insb. die Schnittstellenaspekte). Anschließend reflektieren sie Ihren Kompetenzzuwachs.	Einsatz <i>in</i> der Schnittstellenwoche Symmetrie.
Symmetrie als Argumentationsstrategie (ePf-Aufgabe 18 (S. 398))	Die Studierenden recherchieren und erläutern Beispiele für schulmathematische Begründungszusammenhänge, in denen Symmetrieargumente verwendet werden.	Einsatz <i>in</i> der Schnittstellenwoche Symmetrie.

Tabelle 14.4: Übersicht über die eingesetzten ePortfolio-Aktivitäten zur Schnittstelle *Symmetrie*.

14.2.4 Detaillierte Vorstellung einzelner Schnittstellenaufgaben

In diesem Abschnitt werde ich exemplarisch eine der im Rahmen der Schnittstelle *Symmetrie* eingesetzten Präsenzaufgaben (*Spiegeln mit dem Spiegelbuch*, Präsenzübung 7 (S. 385)) und zwei der eingesetzten ePortfolioaufgaben (*Das Haus der Vierecke*, ePortfolioaufgabe 15 (S. 396); *Symmetrie-Aspekte in Schulbüchern*, ePortfolioaufgabe 16 (S. 397)) detaillierter vorstellen. Darüber hinaus gehe ich im Rahmen der Analyse von Lernendenvoraussetzungen zum Symmetriebegriff (Abschnitt 14.3.3) noch ausführlich auf die ePortfolioaufgaben *Vorbereitende Reflexion zum Themenblock Symmetrie* (ePortfolioaufgaben 13 (S. 396)) (und damit implizit auch auf *SuS-Äußerungen zur Symmetrie*, ePortfolioaufgabe 17 (S. 398)) ein und werte zugehörige Studierendenbearbeitungen aus.

Vorstellung der Schnittstellenaufgabe *Spiegeln mit dem Spiegelbuch*

Die Aufgabe *Spiegeln mit dem Spiegelbuch* (Präsenzübung 7 (S. 385)) wird im Rahmen der Präsenzübung in Kleingruppen bearbeitet und nutzt das gleichnamige Arbeitsheft für den Mathematikunterricht von Wittmann und Müller (1997). Aus urheberrechtlichen Gründen füge ich hier keine Kopie aus dem Buch ein, aber die grundlegende Idee ist auch so gut nachvollziehbar: Auf jeder Buchdoppelseite gibt es eine Ausgangsfigur und verschiedene Zielfiguren. Aufgabe (für die SuS) ist es nun, die Zielfiguren aus der Ausgangsfigur zu erzeugen, indem ein faltbarer Doppelspiegel richtig auf der Ausgangsfigur positioniert wird. Auf jeder Doppelseite gibt es eine Zielfigur, die nicht aus der Ausgangsfigur erzeugt werden kann.

Aufgabenstellung: Spiegeln mit dem Doppelspiegel

- a) Lösen Sie die erste der Seiten aus dem Buch „Spiegeln mit dem Spiegelbuch“.
- b) Diskutieren Sie in Ihrer Gruppe, welche Schwierigkeiten Sie bei den Aufgaben hatten.
- c) Lösen Sie nun die zweite Aufgabenseite aus dem Buch „Spiegeln mit dem Spiegelbuch“ und gehen dabei immer nach folgendem Schema vor:
 1. Finden Sie einen Fundamentalbereich der Figur sowie das Symmetriezentrum der Drehsymmetrie und das zugehörige α_{\min} .
 2. Nutzen Sie diese Informationen um sich zu überlegen, wie der Doppelspiegel zu platzieren ist, und überprüfen Sie dann Ihre Vermutung, indem Sie den Doppelspiegel tatsächlich anlegen.
- d) Formulieren Sie eine strategische Hilfe für Schüler*innen der Unterstufe zur Lösung solcher Doppelspiegel-Probleme
- e) Diskutieren Sie die Rolle, die die drei Aspekte des Symmetriebegriffs bei dieser Aufgabe spielen.
- f) Kann man jede drehsymmetrische Figur mit dem Doppelspiegel erzeugen? Geben Sie ein Argument an oder finden Sie ein Gegenbeispiel.

Fachlicher Hintergrund der Aufgabe ist das Rekonstruieren drehsymmetrischer Figuren aus einer Teilfigur unter Verwendung von zwei Spiegelungen. Damit zielt die Aufgabe auf die Verknüpfung

des *Rekonstruktions- und Reduktionsaspekts* mit dem *Gruppenaspekt*, wie ich sie in der Analyse zu Schulbuchauszug 19 (S. 250) dargestellt habe. In den Aufgabenteilen a) und b) sollen die Studierenden die Aufgaben zunächst ohne weitere Vorgaben lösen. Praxiserfahrungen zum Einsatz dieser Aufgabe zeigen, dass auch Studierende zunächst mit wenig Strategie und viel Ausprobieren beginnen und ihnen das Finden den richtigen Spiegelpositionen – dafür, dass es eine Schulaufgabe ist – nicht unbedingt einfach fällt.

In Aufgabenteil c) wird den Studierenden dann ein Schema vorgeschlagen, dass die in der Veranstaltung eingeführten Fachkonzepte *Fundamentalebene* (mathematische Bemerkung 14.1.13 (S. 238)) und *minimaler Drehsymmetriewinkel* (mathematische Bemerkung 14.1.10 (S. 236)) aufgreift. Damit wird die Aufgabe von einem höheren Standpunkt betrachtet. Die Studierenden nutzen die Fachkonzepte zum planvollen Positionieren des Doppelspiegels und entwickeln dann im Kontext von d) eine didaktisch reduzierte strategische Hilfe für SuS. Anschließend findet eine Analyse der Aktivität vor dem Hintergrund der Schnittstellenaspekte statt (Teil e)). Die Aufgabe endet mit einer vertieften mathematischen Reflexion des Zusammenhangs zwischen Spiegel- und Drehsymmetrien.

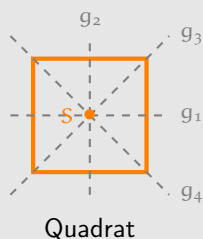
Damit werden durch die Aufgabe schwerpunktmäßig die schnittstellenbezogenen Lernziele S2 und S5 (vgl. Abschnitt 14.1.5 (S. 254)) adressiert.

Vorstellung der Schnittstellenaufgabe *Das Haus der Vierecke*

Die ePortfolio-Aktivität *Haus der Vierecke* wird im Anschluss an die fachinhaltliche Klärung des Themas Symmetrie und vor der eigentlichen Schnittstellenvorlesung eingesetzt (nach Veranstaltungswoche 11, vgl. Tabelle 14.1).

Aufgabenstellung: Das Haus der Vierecke

Ordnen Sie Vierecke in der euklidischen Ebene nach ihren Symmetrieeigenschaften. Stellen Sie die Zusammenhänge strukturiert dar und geben Sie jeweils die Symmetriegruppe an.



$$\text{Sym}(\square) = \left\{ \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right\}$$

[...]



allgemeines Viereck

$$\text{Sym}(\text{allg. Viereck}) = \{\text{id}_{\mathbb{R}^2}\}$$

Das *Haus der Vierecke* (ePortfolioaufgabe 15 (S. 396)) stellt einen Standardkontext im Geometrieunterricht zum lokalen Ordnen dar. Die Hintergründe (inkl. einer Lösung für die Aufgabe) habe ich bereits auf S. 248 f. dargestellt. Als Schnittstellenaufgabe übernimmt *Das Haus der Vierecke* die Funktion einer Übungsgelegenheit zum neu gelernten Fachkonzept der *Symmetriegruppe* (mathematische Bemerkung 14.1.2) in einem professionsorientierten Kontext und trägt auf diese Weise zum Erreichen von S1 und S4 der schnittstellenbezogenen Lernziele (Abschnitt 14.1.5 (S. 254)) bei.

Darüber hinaus kann das im Rahmen der Aufgabe entwickelte Lernprodukt Ausgangspunkt für weitere fachliche Diskussionen z. B. im Rahmen der mündlichen Abschlussprüfung (Abschnitt 8.5) sein.

Vorstellung der Schnittstellenaufgabe *Symmetrie-Aspekte in Schulbüchern*

Als erste ePortfolioaktivität im Anschluss an die Schnittstellenvorlesung zur Symmetrie bearbeiten die Studierenden die Aufgabe *Symmetrie-Aspekte in Schulbüchern* (ePortfolioaufgabe 16 (S. 397)). In dieser Aufgabe sollen die Studierenden die in der Veranstaltung behandelten Schnittstellenaspekte nutzen, um *Zugänge* zu den unterschiedlichen Symmetriearten aus fachlicher Perspektive zu *analysieren*. Damit werden die schnittstellenbezogenen Lernziele S2 und S3 (Abschnitt 14.1.5 (S. 254)) adressiert. Mögliche Lösungen der Aufgabe habe ich im Kontext der Analysen zu Zugängen zum Symmetriebegriff in Abschnitt 14.1.3 (S. 243) dargestellt. Aus diagnostischer Sicht ist die Aufgabe in besonderem Maße geeignet, durch die Auswertung der ePortfolio-Bearbeitungen einen Eindruck davon zu bekommen, ob die Schnittstellenaspekte von den Studierenden verstanden wurden und im intendierten Sinn genutzt werden.

Aufgabenstellung: *Symmetrie-Aspekte in Schulbüchern*

In der Vorlesung haben Sie drei Aspekte des Symmetriebegriffs kennen gelernt.

- a) Finden Sie je zwei Aufgaben aus Mathematikschulbüchern, in denen der Invarianzspekt bzw. der Rekonstruktions- und Reduktionsaspekt des Symmetriebegriffs fokussiert wird.

Erklären Sie präzise, warum der jeweilige Aspekt in Ihren Beispielen relevant ist.

- b) Geben Sie ein weiteres Beispiel aus einem Schulbuch an, in dem der Gruppenaspekt eine Rolle spielt und begründen Sie auch hier Ihre Wahl. Spielt in dem von Ihnen gewählten Beispiel auch noch einer der anderen Aspekte eine Rolle?

Hinweis: Falls Sie aktuell keinen Zugriff auf Schulbücher haben, können Sie auch Aufgaben im Internet recherchieren und dann unter Angabe der Quelle nutzen.

14.3 Ausgewählte Ergebnisse der Begleitforschung zur Schnittstelle *Symmetrie*

In Abschnitt 12.3 habe ich die Schwerpunkte beschrieben, die ich bei Auswertung der zu den Schnittstellen erhobenen Daten (Abschnitt 12.2.3) setze. Bezogen auf die Begleitforschung zur Schnitt-

stellenwoche *Symmetrie* werde ich parallel zur Schnittstelle *Kongruenz* (Abschnitt 13.3) vorgehen und zunächst die Ergebnisse der Studierendenbefragung zur Schnittstellenwoche auswerten (Abschnitt 14.3.1) und damit insbesondere Einsichten zur subjektiven Facette der zweiten Diskontinuität (bezogen auf die Schnittstelle *Symmetrie*) erhalten. Im Anschluss werde ich die Studierendenbearbeitungen der ePortfolioaufgabe 13 (*Vorbereitende Reflexion zum Themenblock Symmetrie*) analysieren, um damit die *Lernendenperspektive zur Schnittstelle Symmetrie* (Abschnitt 14.1.4) auszuscharfen.

14.3.1 Fragebogenstudie zur Schnittstellenwoche *Symmetrie*: Design

Das Untersuchungsdesign ist identisch mit dem Untersuchungsdesign der Fragebogenstudie zur Schnittstellenwoche *Kongruenz* (Abschnitt 13.3.1. Wieder haben die Studierenden im Anschluss an die Schnittstellenwoche (am nächsten Veranstaltungstermin) einen Evaluations-Fragebogen ausgefüllt, dessen Auswertung einen Beitrag zur Beantwortung der Forschungsfrage FF-B.3⁹⁹ bezogen auf die professionsorientierten Lerngelegenheiten zur Schnittstelle *Symmetrie* leisten soll. Der eingesetzte Fragebogen ist identisch mit dem Fragebogen zur Schnittstelle *Kongruenz* und wird deswegen hier nicht erneut vorgestellt; stattdessen verweise ich für die Details auf die ausführliche Vorstellung in Abschnitt 13.3.1.

In Zyklus 1 (Sommersemester 2019) stehen $n = 14$ Datensätze und in Zyklus 2 (Wintersemester 2019/2020) $n = 11$ Datensätze zur Verfügung. In Zyklus 3 (Sommersemester 2020) konnte der Fragebogen – wie auch schon der Fragebogen zur *Kongruenz* – wegen der schwierigen Lehr-/Lernbedingungen der COVID-19 Pandemie nicht eingesetzt werden. Die erhobenen Daten wurden mit klassischen Methoden deskriptiver Statistik ausgewertet und visualisiert (z. B. Hedderich und Sachs (2012, S. 60 ff.)). Aufgrund der geringen Stichprobengröße wurden in fast allen Auswertungen die beiden Zyklen zusammengefasst. Dies ist gerechtfertigt, da sich die Grundkonzeption der Schnittstellenwoche innerhalb der ersten beiden Zyklen nicht wesentlich geändert hat. Die komplette Auswertung wurde mit *R* durchgeführt.

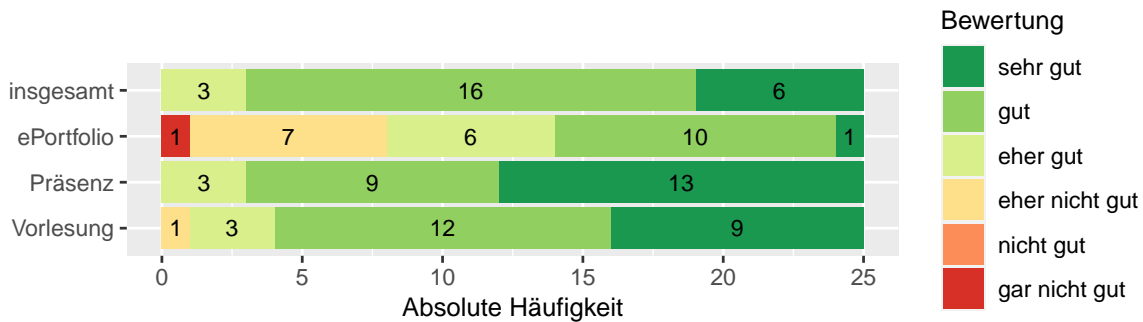
14.3.2 Fragebogenstudie zur Schnittstellenwoche *Symmetrie*: Auswertung

Evaluation der Schnittstellenwoche *Symmetrie* durch die Studierenden

Zunächst kann festgehalten werden, dass die Ergebnisse sehr ähnlich zu den Fragebogenergebnissen zur Schnittstellenwoche *Kongruenz* (S. 205 ff.) sind, was dazu führt, dass der Großteil der Auswertung sehr parallel verläuft.

In Abbildung 14.9 sind die Bewertung der Schnittstellenwoche *Symmetrie* und ihrer Bestandteile durch die Studierenden dargestellt. Die Veranstaltungselemente *Vorlesung* und *Präsenzübung* werden, genauso wie die Schnittstellenwoche insgesamt, sehr positiv bewertet, während die *ePortfolio-Aktivitäten* zwar immer noch positiv aber insgesamt schwächer und auch schwächer als die *ePortfolio-Aktivitäten* zur *Kongruenz* (Abbildung 13.16 (S. 206)) eingestuft werden. Wieder besteht ein Erklärungsansatz darin, dass die Aktivitäten im ePortfolio unbekannte Aufgabentypen darstellen, die zwar sehr professionsorientiert, aber aufgrund des nicht „Mathematik-typischen“ Anforderungsprofils eventuell subjektiv als aufwendiger wahrgenommen werden. Diese Vermutung wird (deut-

⁹⁹FF-B.3: Wie evaluieren (insbesondere auch in Bezug auf die eigene Professionalisierung) die Studierenden die Gesamtveranstaltung und die speziellen professionsorientierten Lerngelegenheiten?



Bewertung der Schnittstellenwoche Symmetrie durch die Studierenden. (n = 25)

Abbildung 14.9: Darstellung der Ergebnisse zur Bewertung der Schnittstellenwoche *Symmetrie* durch die Studierenden der Zyklen 1 und 2 (Items *BewertungVL*, *BewertungPue*, *BewertungHue*, *Bewertung*).

licher als bei der Schnittstelle *Kongruenz*) durch Freitextrückmeldungen gestützt, in denen einzelne Studierende über den Bearbeitungsaufwand der ePortfolioaufgaben zur Symmetrie im Allgemeinen und besonders bezogen auf die Schulbuchrecherche im Rahmen der Aktivität 16 (S. 397) berichten.

Die Ergebnisse zur Verständlichkeit der Aufgabenstellungen sind in Abbildung 14.10, aufgeteilt in die beiden Erhebungszyklen, dargestellt. Sowohl die Aufgabenstellungen der Präsenzübungen

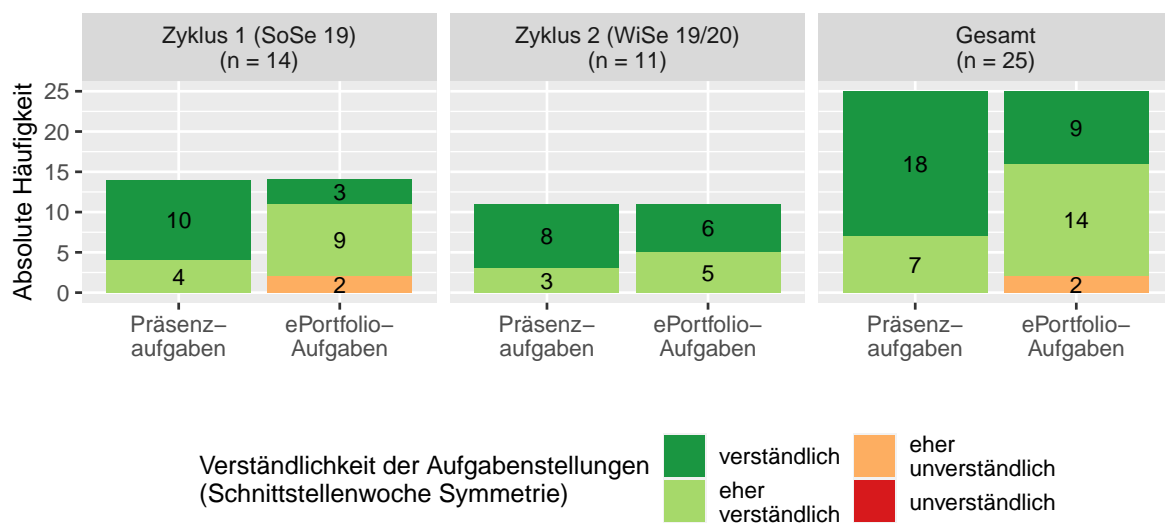
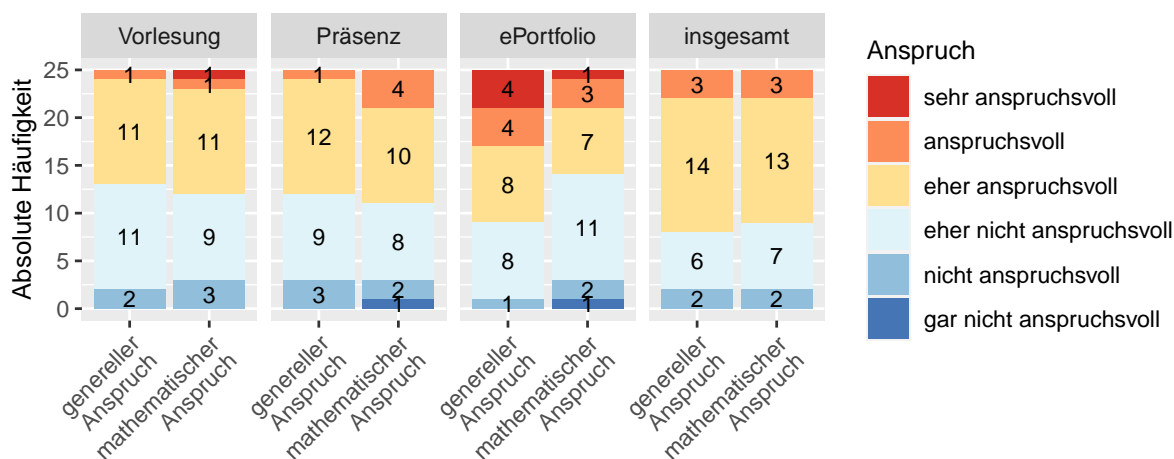


Abbildung 14.10: Darstellung der Ergebnisse zur Einschätzung der Verständlichkeit der Aufgabenstellungen durch die Studierenden (Items *VerstaendlichkeitPue*, *VerstaendlichkeitHue*).

als auch die der ePortfolio-Aktivitäten wurden von fast allen Studierenden als mindestens „eher verständlich“ bewertet (Abbildung 14.10). In den Freitextfeldern gab es keine diesbezüglichen, negativen Kommentare.

Die Einschätzungen der Studierenden zum *Anspruch* der Schnittstellenwoche und ihrer Bestandteile sowohl allgemein als auch speziell bezogen auf die Fachmathematik sind in Abbildung 14.11 dargestellt.

Die meisten Studierenden haben die Schnittstellenwoche (genauso wie die Schnittstellenwoche *Kongruenz* (Abbildung 13.18 (S. 207))) insgesamt als *eher anspruchsvoll* bezeichnet. Da diese Antwort zu-



Wahrgenommener Anspruch der Schnittstellenwoche Symmetrie (n = 25)

Abbildung 14.11: Darstellung der Ergebnisse zur Beurteilung der Studierenden der Zyklen 1 und 2 zum generellen und mathematischen Anspruchs der Schnittstellenwoche *Symmetrie* (Items SchwierigkeitVL, SchwierigkeitPue, SchwierigkeitHue, Schwierigkeit, SchwierigkeitVLMathe, SchwierigkeitPueMathe, SchwierigkeitHueMathe, SchwierigkeitMathe).

sammen mit *eher nicht anspruchsvoll* mit Abstand am meisten gegeben wurde, kann der Schwierigkeitsgrad insgesamt als angemessen bewertet werden. Der Anspruch der Vorlesung wurde im Vergleich zur Schnittstelle *Kongruenz* etwas geringer eingeschätzt, die anderen Ergebnisse sind vergleichbar.

Eine systematische geringere Einschätzung des mathematischen Anspruchs im Vergleich zum generellen Anspruch ist nur bezogen auf die ePortfolio-Aktivitäten erkennbar und zeigt sich auch deutlich in der Auswertung der Differenzen aus den Antwortwerten (Schwierigkeit* - Schwierigkeit*Mathe), die in Abbildung 14.12 dargestellt wird. Dies ist konsistent zu dem bereits oben erwähnten Punkt, dass einige Studierende die Schulbuchrecherchen als besondere Anforderung wahrgenommen haben, die aber nicht fachmathematischer Natur ist.

In in Abbildung 14.13 ist die Auswertung der Skala *Aufgabenmotivation* dargestellt. Mehr als drei Viertel der Studierenden geben an, die Aufgaben mindestens teilweise als motivierend empfunden zu haben; knapp die Hälfte der Studierenden bewertet die Aufgaben sogar als eher motivierend bis motivierend. Im Angesicht der Tatsache, dass sich das Item auf die Gesamtheit der Aufgaben zur Schnittstellenwoche *Symmetrie* bezieht, spricht dieses Resultat deutlich für den Motivationsgehalt der eingesetzten Aufgaben. Diese Einschätzung konnte auch auf die Aufgaben zur Schnittstellenwoche *Kongruenz* (Abbildung 13.20 (S. 208)) getroffen werden. Darüber hinaus zeigt die Auswertung des Items *Aufgabenmotivation_2* (Abbildung 14.14), dass der Großteil der Studierenden auch für *Symmetrie* angibt, dass die Aufgaben ihnen neue/interessante Verbindungen zwischen Schulmathematik und Hochschulmathematik gezeigt haben.

Zum Abschluss betrachte ich noch die Auswertung der Relevanzeinschätzungen der Studierenden (Abbildung 14.15). Die Relevanz des Themas *Symmetrie*, sowohl als Bestandteil der eigenen Lehramtsausbildung als auch als Inhalt des Mathematikunterrichts, wird von fast allen Studierenden als hoch eingeschätzt. Es kann also davon ausgegangen werden, dass die Studierenden die Beschäfti-

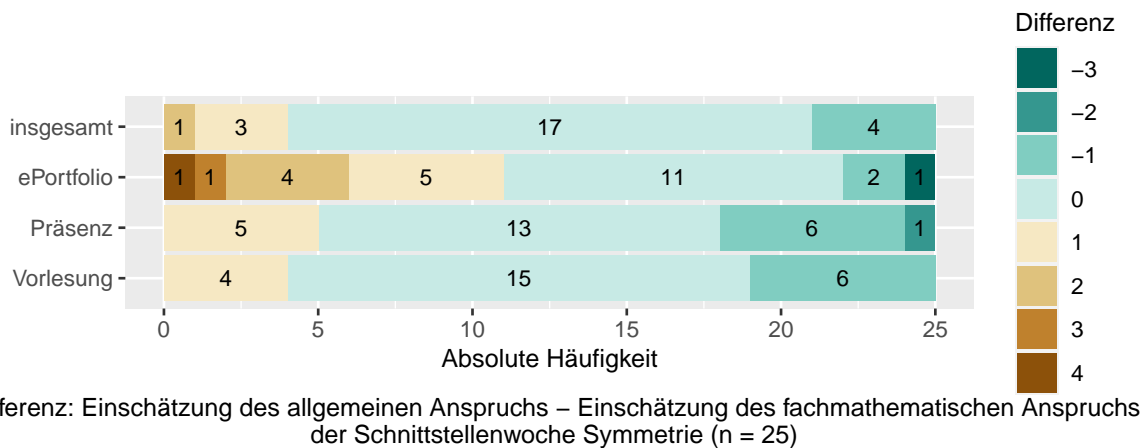


Abbildung 14.12: Darstellung der Studierenden-bezogenen Differenzen im Antwortverhalten zur Einschätzung des generellen und mathematischen Anspruchs der Schnittstellenwoche *Symmetrie*.

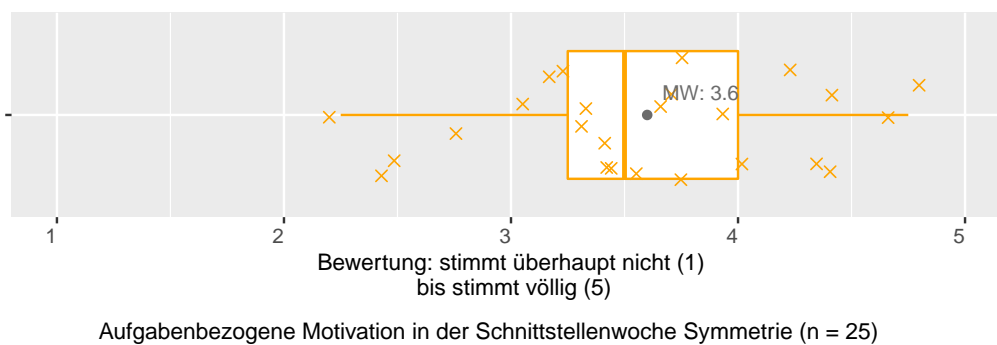
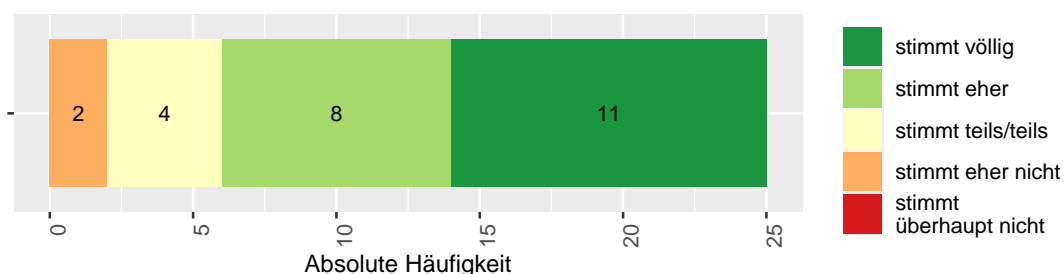


Abbildung 14.13: Auswertungen der Einschätzungen der Studierenden der Zyklen 1 und 2 zur aufgabenbezogenen Motivation in der Schnittstellenwoche *Symmetrie* (Skala Aufgabenmotivation)

gung mit *Symmetrie* (genauso wie mit *Kongruenz*, *Abbildung*, 13.23 (S. 210)) im Rahmen ihrer Professionalisierung als sinnvoll ansehen. Dies stützt insbesondere die in Abschnitt 11.1 beschriebene Entscheidung, das Thema *Symmetrie* als Inhalt für die vertiefte professionsorientierte Behandlung im Rahmen einer Schnittstellenwoche auszuwählen.

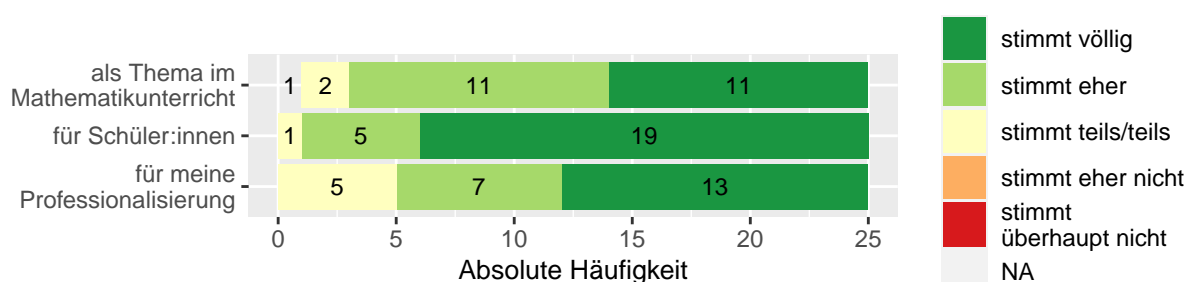
Selbsteinschätzungen zur schnittstellenbezogenen Professionalisierung

Die Ergebnisse zu Selbsteinschätzungen zur schnittstellenbezogenen Professionalisierung (Skalen Hintergrundtheorie (*Agieren im Rahmen des fachmathematisch Hintergrundes zur Symmetrie*), SelbstwirksamkeitProfHandeln (*Selbstwirksamkeitserwartungen zum professionellen Handeln im Themenbereich Symmetrie*) und Schnittstellenaspekte (*Nutzen der Schnittstellenaspekte*)) werden in 14.16 dargestellt. Wieder unterscheiden sich die Ergebnisse kaum von denen aus der Schnittstellenwoche *Kongruenz* (Abbildung 13.24): Die Studierenden geben in allen drei Skalen hohe Zustimmungswerte bei geringer Streuung an. Das bedeutet, dass sie sich (zumindest aus subjektiver Perspektive) in der Lage sehen, auch im Kontext *Symmetrie* professionstypische Handlungsanforderungen fachlich zu analysieren und zu interpretieren und darauf aufbauend professionell zu bewältigen. Weiter



Die Aufgaben (im Rahmen der Schnittstellenwoche Symmetrie) haben mir neue/interessante Verbindungen zwischen Schulmathematik und Hochschulmathematik gezeigt. (n = 25)

Abbildung 14.14: Auswertungen der Einschätzungen der Studierenden der Zyklen 1 und 2 zum Item *Aufgabenmotivati_2*.



Einschätzung der Relevanz des Themas Symmetrie (n = 25)

Abbildung 14.15: Darstellung der Ergebnisse zu Relevanzeinschätzungen durch die Studierenden der Zyklen 1 und 2 (Items *Relevanz_Profession*, *Relevanz_SuS*, *Relevanz_Matheunterricht*).

zeigt die Auswertung, dass sie die Schnittstellenaspekte als professionsorientierte Systematisierung nachvollziehen können und als hilfreich empfinden. Diese Ergebnisse belegen, dass die Aktivitäten im Rahmen der Schnittstellenwoche *Symmetrie* einen Beitrag zur Minderung der subjektiven Facette der zweiten Diskontinuität im intendierten Sinne leisten.

Abschließend sind in Abbildung 14.17 noch die Ergebnisse zur Einschätzung des Transferpotenzials dargestellt. Der Hauptunterschied zu den Ergebnissen nach der Schnittstellenwoche *Kongruenz* (Abbildung 13.25) liegt im Item *Transfer_3*¹⁰⁰.

Hier hat sich sowohl der relative als auch der absolute Anteil (bei kleinerer Strichprobengröße) derjenigen Studierenden, die der Aussage, dass professionsrelevante Bezüge für jedes Themenfeld explizit behandelt werden müssen, nicht zustimmen, erhöht. Auch wenn es im Sinne der Projektziele ein positives Ergebnis wäre, wenn die Studierenden sich tatsächlich in der Lage sehen, besser selbstständig Bezüge in anderen Themenfeldern herzustellen, reicht die verfügbare Datenbasis nicht aus um dazu eine seriöse Einschätzung zu treffen.

¹⁰⁰Professionsrelevante Bezüge zwischen Schul- und Hochschulmathematik müssen für jedes Themenfeld im Studium explizit behandelt werden. Nur weil ich sie in einem Bereich herstellen kann, kann ich diese Fähigkeit nicht übertragen.

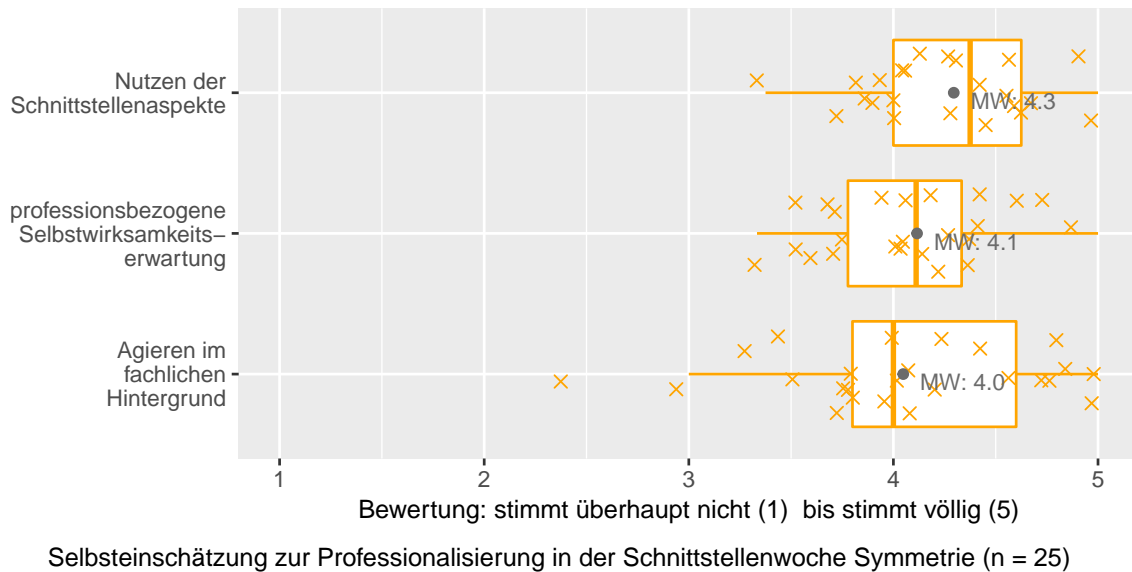


Abbildung 14.16: Auswertung der Skalen bezogen auf die Selbsteinschätzungen der Studierenden zur schnittstellenbezogenen Professionalisierung in der Schnittstellenwoche *Symmetrie* (Skalen Hintergrundtheorie, SelbstwirksamkeitProfHandeln, Schnittstellenaspekte).

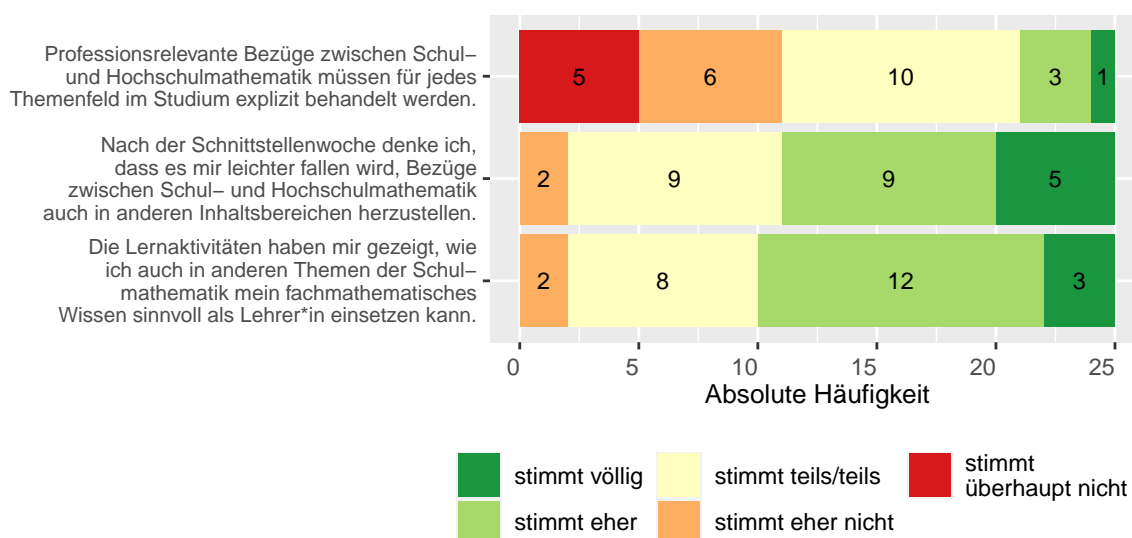
Zusammenfassung und Beurteilung der Ergebnisse

In diesem Abschnitt habe ich Ergebnisse aus der Fragebogenstudie im Anschluss an die *Schnittstellenwoche Symmetrie* beschrieben. Im Fokus der Untersuchung stehen die Evaluation der Schnittstellenwoche durch die Studierenden (S. 263 ff.) sowie Selbsteinschätzungen der Studierenden zur schnittstellenbezogenen Professionalisierung (S. 266). Damit wird ein Beitrag zur Beantwortung der Forschungsfrage FF-B.3¹⁰¹ geleistet.

Die methodischen und inhaltlichen Limitationen der Studie entsprechen, bedingt durch das gleiche Design, dem, was ich bereits in Abschnitt 13.3.2 vorgestellt habe, und beziehen sich aus methodischer Perspektive auf die retrospektive Aussagekraft, die begrenzte Stichprobengröße $n = 25$) und dem pragmatischen Ansatz zur Itemkonstruktion. Auf der inhaltlichen Ebene muss weiterhin die Möglichkeit berücksichtigt werden, dass die positiven Ergebnisse zumindest zu einem Teil auch Resultat einer positiven Grundstimmung der Studierenden gegenüber dem Projekt sind und das darüber hinaus noch keine Aussage über die Nachhaltigkeit eines möglichen Kompetenzzuwachses getroffen werden können.

Trotz der Einschränkungen bestätigen die ausgewerteten Daten das Ergebnis zur Schnittstelle *Kongruenz*: Auch für die Schnittstellenwoche *Symmetrie* melden die Studierenden keine wesentlichen und strukturellen Probleme zurück. Die Schnittstellenwoche zum Thema *Symmetrie* und die zugehörigen Aktivitäten werden positiv bewertet und der gewählte Themenschwerpunkt wird als relevant wahrgenommen. Darüber hinaus geben die Studierenden an, dass die Schnittstellenwoche einen Beitrag dazu geleistet hat, fachliche Hintergründe zum Thema *Symmetrie* aus professionsorientierter Perspektive besser zu durchdringen und typische professionelle Handlungsanforderungen zu bewältigen. Die eingeführten Schnittstellenaspekte werden ebenfalls sehr positiv evaluiert. Insgesamt sind die Ergebnisse positiv im Sinne der Intention der Schnittstellenwoche zu bewerten und

¹⁰¹FF-B.3: Wie evaluieren (insbesondere auch in Bezug auf die eigene Professionalisierung) die Studierenden die Gesamtveranstaltung und die speziellen professionsorientierten Lerngelegenheiten?



Einschätzungen zum Transferpotenzial der Schnittstellenwoche *Symmetrie* (n = 25)

Abbildung 14.17: Darstellung der Ergebnisse zur Einschätzung der Studierenden der Zyklen 1 und 2 zum Transferpotenzial der Schnittstellenwoche *Symmetrie* auf andere Themenbereiche. (Items *Transfer_1*, *Transfer_2*, *Transfer_3*)

zeigen, dass die Schnittstellenwoche positive Effekte auf die subjektive Facette der themenbezogenen zweiten Diskontinuität hat.

Ein interessanter Punkt ist die starke Ähnlichkeit der Ergebnisse zu den beiden Schnittstellenwochen. Hier sind unter anderem zwei mögliche Erklärungsansätze denkbar, die es wert sind, weiter erforscht zu werden. Zum einen könnte die Ähnlichkeit der Evaluationsergebnisse an den strukturell ähnlich aufgebauten Schnittstellenwochen liegen. Dies spräche für das entwickelte Konzept und dessen Potenzial, auch in anderen mathematischen Themenbereichen zu funktionieren. Zum anderen könnte es aber auch so sein, dass die Studierenden bezogen auf Schnittstellenlerngelegenheiten eine relativ stabile Einstellung besitzen, also professionsorientierte Lerngelegenheiten (unabhängig von der speziellen methodischen Ausgestaltung) grundsätzlich positiv, negativ oder neutral bewerten, auch unabhängig davon, was der tatsächliche Beitrag zu ihrer Professionalisierung ist.

14.3.3 Analyse der Lernendenvoraussetzungen zum Symmetriebegriff

Vorstellung des Untersuchungsdesigns

Im Rahmen der Spezifizierung und Strukturierung der Schnittstelle *Symmetrie* habe ich eine Forschungslücke bezogen auf die *Lernendenperspektive* identifiziert (Abschnitt 14.1.4) und beschrieben, dass es keine mir bekannten Daten dazu gibt, mit welchen Vorkenntnissen zum Symmetriebegriff Studierende typischerweise an der Veranstaltung teilnehmen. In diesem Abschnitt möchte ich dementsprechend die Lernendenperspektive zur Schnittstellenwoche *Symmetrie* auf Basis empirischer Daten ausschärfen und damit einen Beitrag zur Beantwortung der Forschungsfrage FF-B.2¹⁰²

¹⁰²FF-B.2 Welche Lernendenvoraussetzungen haben die Studierenden bezogen auf die geometrischen Konzepte *Kongruenz* und *Symmetrie*?

leisten. Dabei gehe ich parallel zur entsprechenden Untersuchung im Rahmen der Begleitforschung zur Kongruenz (Abschnitt 13.3.3) vor.

Die Datengrundlage für diese Untersuchung sind pseudonymisierte Studierendenbearbeitungen der ePortfolioaufgabe *Vorbereitende Reflexion zum Themenblock Symmetrie* (ePortfolioaufgabe 13). Ich werde im Folgenden zunächst die Konzeption und Auswertung der Aufgabe vor dem Hintergrund des Forschungsinteresses erläutern. Anschließend führe ich eine *A-priori-Analyse* durch, in der ich basierend auf den Analysen zur Rolle von Symmetrie im Mathematikunterricht (Abschnitt 14.1.3) Hypothesen zur Bearbeitung der Aufgabe durch die Studierenden aufstelle (S. 272 f.). Die Ergebnisse der Analyse führen darüber hinaus zu ersten Kategorien für die qualitative Inhaltsanalyse der Studierendenbearbeitungen. Die qualitative Auswertung der Daten findet im Unterabschnitt auf S. 273 statt. Dieser Abschnitt schließt mit einer Zusammenfassung und Einordnung der Ergebnisse sowie der Diskussion von Limitationen der Studie (S. 285 f.).

In Abschnitt 14.1.4 habe ich erläutert, dass davon auszugehen ist, dass das Wissen, das die Studierenden der Veranstaltung *Geometrie für Lehramtsstudierende* zum Begriff Symmetrie haben, im Rahmen des eigenen Mathematikunterrichts (vorwiegend in der Mittelstufe) erworben wurde und sich voraussichtlich auf der Ebene der *integrierten Begriffskennntnis* (Weigand et al., 2014, S. 191 ff.) befindet. Einen Einfluss könnte haben, dass das Thema *Isometrien* (sowohl im euklidischen Raum \mathbb{R}^2 als auch im Rahmen der Saccheri-Ebene) an verschiedenen Stellen im Rahmen der Vorlesung behandelt wurde. Es ist möglich, dass die Studierenden dadurch bereits selbstständig Bezüge zu einem allgemeinen Symmetriebegriff aufbauen. Trotzdem kann für die Behandlung des Themas *Symmetrie* in der Vorlesung (sowohl als mathematischer Inhalt als auch als Schnittstellenthema) nicht von einheitlichen Lernvoraussetzungen ausgegangen werden. Genau an dieser Stelle setzt die Aufgabe *Vorbereitende Reflexion zum Themenblock Symmetrie* (ePortfolioaufgabe 13 (S. 396)) an:

Aufgabenstellung: Vorbereitende Reflexion zum Themenblock *Symmetrie*

In den nächsten beiden Wochen werden wir uns im Detail mit dem Thema *Symmetrie* beschäftigen. Zur Vorbereitung schreiben Sie jeweils einen kurzen Text zur Beantwortung folgender Fragen:

- a) Aus der Schule kennen Sie Begriffe wie *Spiegel- bzw. Achsensymmetrie*, *Drehsymmetrie* oder *Punktsymmetrie*. Welches übergeordnete Konzept von Symmetrie steht für Sie hinter den Begriffen?
- b) Ein Schüler der Klasse 7 fragt Sie:
„Stimmt es, dass es keine 100° -drehsymmetrischen Figuren geben kann?“
Wie würden Sie lernförderlich auf diese Frage reagieren?
- c) Eine Schülerin der Klasse 7 fragt Sie:
„Ich glaube, dass eine Figur mit zwei Achsensymmetrien immer auch drehsymmetrisch ist.“
Wie würden Sie lernförderlich auf diese Frage reagieren?
- d) Warum ist, Ihrer Meinung nach, die Beschäftigung mit Symmetrie im Mathematikunterricht wichtig?

In Aufgabenteil a) sollen die Studierenden ihr Verständnis vom Symmetriebegriff aufschreiben. Dabei ist die Aufgabenstellung so formuliert, dass es bewusst darum geht, ein „ganzheitliches“ Symmetriekonzept zu beschreiben. In Abschnitt 14.1.3 habe ich den Aufbau eines solchen Konzepts durch den aktuellen Mathematikunterricht – zumindest für die Mehrzahl aller SuS – auf Basis der Analysen in Frage gestellt. Die Analyse der Antworten wird zeigen, inwieweit diese Hypothese auch für Mathematiklehramtsstudierende zutrifft und welche Fachkonzepte zum Symmetriebegriff identifiziert werden können.

Die Aufgabenteile b) und c) beinhalten professionsorientierte Situationen im Sinne von (fiktiven) SuS-Äußerungen, die auf die Nutzung von Zusammenhängen zwischen unterschiedlichen Symmetrien im Sinne des Gruppenaspekts (Abschnitt 14.1.2 (S. 241)) abzielen. Dabei werden verschiedene mathemathikhaltige Handlungsanforderungen (nach Prediger (2013, S. 156), vgl. Abschnitt 2.1 (S. 9)) adressiert. Zum einen müssen die Studierenden die Schüleräußerungen *analysieren, bewerten und darauf lernförderlich reagieren* (Handlungsanforderung (7)). Dazu gehört aber auch, dass die Studierenden beide Phänomene für sich selbst fachlich klären müssen ((1) *Anforderungen an Schülerinnen und Schüler [...] selbst bewältigen und auf verschiedenen Niveaus bearbeiten können*). Das explizite Einfordern einer *lernförderlichen* Reaktion verfolgt das Ziel, eine professionelle Handlung einzufordern und damit bewusst die Professionsrelevanz hervorzuheben. Bei der Auswertung liegt der Schwerpunkt auf der mathematischen Perspektive; es wird (bedingt durch den Rahmen einer Fachveranstaltung) nicht die potenzielle Lernförderlichkeit aus fachdidaktischer Perspektive analysiert, sondern der fachliche Gehalt und die fachliche Korrektheit.

Die Teilaufgaben b) und c) verfolgen mehrere Ziele. Neben der Gewinnung von Einsichten zum Kenntnisstand der Studierenden zu Zusammenhängen bzw. Abhängigkeiten zwischen Symmetrien, haben sie auch eine zentrale Funktion für die Reflexionsprozesse zur Schnittstelle *Symmetrie* (vgl. Konzeption des ePortfolios, Abschnitt 8.1), da dieselben professionsorientierten Situationen im Nachgang der Schnittstellenwoche erneut behandelt werden sollen (ePortfolioaufgabe 17 (S. 398)). Im Anschluss sollen die Studierenden dann den Zuwachs, der zur Bewältigung dieser Situation relevanten Kompetenzen durch die Schnittstellenwoche einschätzen.

In Aufgabenteil d) werden die Studierenden um eine Reflexion der Relevanz des Themas *Symmetrie* für den Mathematikunterricht gebeten. Die Analyse liefert Einsichten, inwieweit die Studierenden sich des von z. B. Winter (1976) geschilderten Aspektreichtums des Symmetriebegriffs bewusst sind. Für die Studierenden wird durch den Aufgabenteil eine Möglichkeit zur schriftlichen Reflexion über die Bedeutung des Symmetriebegriffs gegeben.

Die Aufgabe wurde in allen drei Zyklen eingesetzt, wobei Aufgabenteil c) erst ab Zyklus 2 hinzugenommen wurde. Grund dafür waren die positive Resonanz der Studierenden aus Zyklus 1 auf die vergleichende Reflexion im Zusammenhang mit Teil b) sowie aus Forschungsperspektive die Schaffung einer Datengrundlage für weitere vergleichende Analysen. Zur Analyse liegen insgesamt 64 Studierendenbearbeitungen vor (Zyklus 1: $n = 22$, Zyklus 2: $n = 14$, Zyklus 3: $n = 28$). Die entstandenen Texte habe ich mit einer inhaltlich strukturierenden Inhaltsanalyse nach Kuckartz (2018, 97 ff.) mit dem Ziel analysiert, typische Konzepte und (Fehl-)Vorstellungen zum Symmetriebegriff zu beschreiben. Im folgenden Abschnitt werden im Rahmen einer a-priori-Analyse theoriebasiert Erwartungen zum Antwortverhalten der Studierenden formuliert und darauf aufbauend ein initiales Kategoriensystem für die qualitative Inhaltsanalyse entwickelt.

A-priori-Analyse zur ePortfolio-Aktivität *Vorbereitende Reflexion zum Themenblock Symmetrie*

In diesem Abschnitt möchte ich theoriebasiert Hypothesen über die Bearbeitung der ePortfolioaufgabe durch die Studierenden aufstellen. Die wesentliche Grundlage dafür bilden die Analysen zur Rolle des Symmetriebegriffs im Mathematikunterricht (Abschnitt 14.1.3). Die Struktur der folgenden Ausführungen folgt der Struktur der Aufgabenstellung.

Fachkonzepte zur Symmetrie Vor dem Hintergrund der fachlichen Ausführungen zum Symmetriebegriff (Abschnitt 14.1.1) sowie der Analysen zu möglichen Zugängen (Abschnitt 14.1.3) ergeben sich a priori zwei unterschiedliche Sichtweisen für ein übergeordnetes Symmetriekonzept: Im Sinne des *Invarianzaspekts* (14.1.2 (S. 239)) beschreiben Symmetrien Möglichkeiten eine Figur isometrisch auf sich selbst abzubilden. Alternativ können im Sinne des *Rekonstruktions- und Reduktionsaspekts* (14.1.2 (S. 240)) Symmetrien auch Möglichkeiten beschreiben, eine Figur aus Teilen zu rekonstruieren. Auch wenn ich in Abschnitt 14.1.4 ausgeführt habe, dass auf Basis der analysierten schulischen Behandlung des Symmetriebegriffs nicht davon ausgegangen werden kann, dass zum Veranstaltungsbeginn die Begriffsentwicklung bei den Studierenden über die Stufe des *integrierten Begriffsverständnis* (S. 243 f.) hinausgeht, ist es doch möglich, dass manche Studierenden durch die Behandlung des Themas *Isometrien* im Rahmen der Vorlesung selbstständig entsprechende Querbezüge zur Symmetrie herstellen und dadurch zumindest zum Teil die Stufe der *formalen Kenntnis des Begriffs* erreichen. Auf jeden Fall ist es plausibel anzunehmen, dass viele Studierenden bei der Beantwortung der Aufgabe zumindest die einzelnen Symmetrien mit den entsprechenden Isometrien in Verbindung setzen, unabhängig davon, ob darüber hinaus eine Verallgemeinerung im Sinne eines übergeordneten Symmetriekonzepts stattfindet.

SuS-Äußerung zu 100° -drehsymmetrischen Figuren Die SuS-Äußerung kann einfach durch die Figur *Kreis* (oder Kreisscheibe) widerlegt werden. Formal wäre diese Antwort im Sinne eines Gegenbeispiels, das eine Aussage widerlegt, korrekt. Im Sinne der Lernförderlichkeit ist aber eine differenzierte Antwort wünschenswert, da es nicht unwahrscheinlich ist, dass der Schüler eigentlich „Figuren mit Ecken“ meint. Hier können dann (ggf. durch systematisches Betrachten von ganzzahligen Vielfachen des Drehwinkels 100° modulo 360° , vgl. mathematische Bemerkung 14.1.10 (S. 236)) *n*-Ecke mit passender Drehsymmetrie konstruiert werden (z.B. 18-Eck, 36-Eck, 360-Eck). Darüber hinaus könnte (im Sinne einer wertschätzenden Reaktion) noch darauf eingegangen werden, dass die Aussage des Schülers dann stimmt, wenn er meint, dass der *kleinste* Drehsymmetrie-Winkel 100° beträgt. Bei den Studierendenantworten ist es natürlich auch möglich, dass sie selbst den Kreis als einziges Gegenbeispiel sehen und die Fehlvorstellung haben, dass es ein entsprechendes *n*-Eck nicht geben kann, weil jeder Drehsymmetriewinkel (und nicht nur der kleinste, mathematische Bemerkung 14.1.10 (S. 236)) ein Teiler von 360° sein muss.

SuS-Äußerung zu Figuren mit zwei Spiegelachsen Die Aussage der Schülerin gilt nur, wenn die beiden Spiegelachsen sich schneiden. Ansonsten ist die Figur verschiebesymmetrisch und damit insbesondere unbeschränkt (mathematische Bemerkungen 14.1.7, 14.1.8 (S. 235)). Natürlich kann eine solche Figur auch zusätzlich drehsymmetrisch sein; im Allgemeinen gilt diese Aussage aber nicht und folgt insbesondere nicht aus der doppelten Spiegelsymmetrie. Da die Behandlung von Symmetrien unbeschränkter Figuren im Mathematikunterricht nur eine untergeordnete Rolle spielt (Abschnitt 14.1.3), ist es wahrscheinlich, dass viele Studierende diesen Sonderfall nicht erkennen. Schließt man den Sonderfall aus, so stimmt die Aussage,

was daraus folgt, dass die Verknüpfung von zwei Spiegelungen an sich schneidenden Geraden immer eine Drehung ist (mathematische Bemerkung 14.1.9 (S. 235)); dabei kann man ggf. noch explizit darauf eingehen, dass das Drehzentrum der Schnittpunkt der Geraden ist.

Relevanz des Themas Symmetrie im MU Diese Frage ist sehr offen gestellt, individuell beantwortbar und nicht genuin fachlicher Natur. Es gibt weder *richtige* Antworten noch *Fehlvorstellungen*. Aus diesem Grund werde ich die Aussagen der Studierenden zu diesem Aufgabenteil komplett induktiv kodieren und im Anschluss das entstandene Kategoriensystem analysieren.

Aus den Überlegungen zu den einzelnen Aufgabenteilen ergeben sich zusammengefasst die nachfolgend dargestellten Hypothesen. Um sie zu verifizieren, starte ich die qualitative Inhaltsanalyse der Studierendenbearbeitungen mit dem in Tabelle 14.5 dargestellten initialen Kategoriensystem. Die Kategorien spiegeln jeweils die Ergebnisse der hypothesengenerierenden a-priori-Analyse wider.

- (H1) Die Studierenden formulieren übergeordnete Konzepte zum Symmetriebegriff im Sinne des *Invarianzaspekts* (Kategorie 1.A) oder im Sinne des *Rekonstruktions- und Reduktionsaspekts* (Kategorie 1.B) und verwenden dabei den in der Vorlesung eingeführten Isometriebegriff (Kategorie 1.C).
- (H2) Die meisten Studierenden werden den Kreis als 100° -drehsymmetrische Figur angeben (Kategorien 2.A, 2.B). Einige Studierende werden darüber hinaus noch passende n-Ecke diskutieren (Kategorien 2.C, 2.D).
- (H3) Die Studierenden, die angeben, dass es (bis auf ggf. den Kreis) keine weiteren 100° -drehsymmetrischen Figuren gibt, gehen unbewusst von der falschen Annahme aus, dass jeder Drehwinkel (und nicht nur der kleinste) ein Teiler von 360° sein muss.
- (H4) Die meisten Studierenden werden den Sonderfall „parallele Geraden“ nicht berücksichtigen (Kategorie 3.A) und für sich schneidende Geraden ein abbildungsgeometrisches Argument angeben (Kategorien 3.B, 3.C).

Auswertung der qualitativen Inhaltsanalyse

Bei der Durchführung der qualitativen Inhaltsanalyse der Studierendenbearbeitungen zur ePortfolioaufgabe *Wissensstand Kongruenz* wurde das in Tabelle 14.5 vorgestellte initiale Kategoriensystem als Ausgangspunkt genommen und immer dann, wenn Textstellen nicht kodiert werden konnten, induktiv um weitere Kategorien erweitert. Das Ergebnis der Inhaltsanalyse ist das in den Tabellen 14.6 (S. 275), 14.7 (S. 279), 14.8 (S. 282) und 14.9 (S. 285) dargestellte Kategoriensystem (die einzelnen Tabellen beinhalten jeweils genau die Kategorien, die zu einer Aufgabenstellung gehören). Ich werde die zentralen Ergebnisse der Analyse im Folgenden entlang der Aufgabenteile und vor dem Hintergrund der oben vorgestellten Hypothesen vorstellen.

Analyseergebnisse zu Aufgabenteil a) (Fachkonzepte zum Symmetriebegriff) In Tabelle 14.6 ist das Kategoriensystem zur Kodierung der Antworten der Studierenden zu Aufgabenteil a) darge-

Kategorienbezeichnung	Kategorienbeschreibung
1	Fachkonzepte zur Symmetrie
1.A	Selbstabbildung durch geeignete Abbildungen
1.B	Erzeugen aus Teilmenge
1.C	Angabe einzelner Kongruenzabbildungen ohne Verallgemeinerung
2	100°-drehsymmetrische Figuren
2.A	Kreis plus
2.B	Nur Kreis
2.C	n-Eck
2.D	Vielfachheitsargument für Drehwinkel
2.E	Einschränkung für kleinste Drehwinkel
3	Figuren mit zwei Spiegelsymmetrien
3.A	Sonderfall „parallele Geraden“ wird nicht erwähnt
3.B	Drehungen als Verknüpfung von Geradenspiegelungen
3.C	Schnittpunkt der Spiegelachsen als Drehpunkt

Tabelle 14.5: Initiales Kategoriensystem zur Analyse der Studierendenbearbeitungen der ePortfolioaufgabe *Vorbereitende Reflexion zum Themenblock Symmetrie*. Die Hauptkategorien wurden entlang der Aufgabenstellung gebildet; die Unterkategorien sind das Ergebnis der a-priori-Analyse.

stellt. Insgesamt kann festgestellt werden, dass die Analyseergebnisse die Hypothese (H₁)¹⁰³ stützen. Mehr als die Hälfte der Studierenden (36 von 64) geben ein übergeordnetes Symmetriekonzept im Sinne des *Invarianzaspekts* (Kategorie 1.1, 36 Kodierungen, Ankerbeispiel: Alexandra) an. Die entsprechend kodierten Textstellen sind dadurch gekennzeichnet, dass Symmetrien als Eigenschaften beschrieben werden, eine Figur auf sich selbst abzubilden.

ePF | Mit dem Begriff Symmetrie verbinde ich die Eigenschaft, dass ein geometrisches Objekt durch Bewegung auf sich selbst abgebildet werden kann.

Alexandra (Zyklus 3) | Z. 1 | *Kategorie(n)*: 1.1

Auch Symmetriekonzepte, denen das Aufteilen in oder des Herstellen aus eine Teilmenge (im Sinne des *Rekonstruktions- und Reduktionsaspekts*) zugrunde liegt, konnten identifiziert werden (Kategorie 1.4, 7 Kodierungen, Ankerbeispiel: Laurenz).

¹⁰³(H₁) Die Studierenden formulieren übergeordnete Konzepte zum Symmetriebegriff im Sinne des *Invarianzaspekts* oder im Sinne des *Rekonstruktions- und Reduktionsaspekts* und verwenden dabei den in der Vorlesung eingeführten Isometriebegriff.

	Kategorienbezeichnung	Kategorienbeschreibung	#
1	Fachkonzepte zur Symmetrie	Kategorien zu Aufgabenteil a)	
1.1 (1.A)	Selbstabbildung durch geeignete Abbildungen	Hinter Symmetrien einer Figur stehen geometrische Abbildungen (Isometrien), die die Figur (als ganzes) invariant lassen.	36
1.2	Bezug zur Kongruenz	Der Symmetriebegriff hängt mit dem Kongruenzbegriff zusammen.	11
1.3	Falsche/Problematische Formulierungen	Textstellen, die aus fachlicher Perspektive falsch oder zumindest problematisch sind.	10
1.4 (1.B)	Erzeugen aus Teilmenge	Hinter Symmetrien einer Figur stehen geometrische Abbildungen (Isometrien), mit denen die Figur aus Teilen rekonstruiert werden kann.	7
1.5	Keine Antwort	Textstellen, die keine sinnvolle Antwort zur gestellten Aufgabe liefern.	7
1.6	Teilmenge, nur Spiegelsymmetrie	Die Sichtweise „Erzeugen aus Teilmengen“ wird für den Spezialfall der Spiegelsymmetrie erwähnt.	5
1.7	Regelmäßigkeiten	Hinter Symmetrien einer Figur stehen Möglichkeiten, Regelmäßigkeiten der Figur zu beschreiben.	5
1.8 (1.C)	Angabe einzelner Kongruenzabbildungen ohne Verallgemeinerung	Es werden zu verschiedenen Symmetrie-Formen die passenden Isometrien angegeben, aber es findet darüber hinaus keine Verallgemeinerung im Sinne eines übergeordneten Symmetrie-Konzepts statt.	5
1.9	Spiegelung als übergeordnetes Symmetriekonzept	Spiegelungen (in ihrer Rolle als Erzeuger für alle anderen Isometrien) stellen das übergeordnete Konzept zu Symmetrie dar.	4
1.10	Symmetrisch zueinander	Der Begriff Symmetrie wird nicht als Eigenschaft einer Figur, sondern im umgangssprachlichen Sinn als Beziehung zwischen zwei Figuren genutzt.	1

Tabelle 14.6: Teil 1 des Kategoriensystems zur Analyse der Studierendenbearbeitungen der ePortfolioaufgabe *Vorbereitende Reflexion zum Themenblock Symmetrie* (Zyklus 1: $n = 22$, Zyklus 2: $n = 14$, Zyklus 3: $n = 28$ | Gesamt: $n = 64$). Die blau markierten Kategorien entstammen dem initialen Kategoriensystem aus Tabelle 14.5 (S. 274).

ePF | Eine symmetrische Figur „wiederholt“ sich an einem gewissen Punkt auf verschiedene Arten (bei Drehsymmetrien auf andere Art und Weise als bei Achsensymmetrien). Eine Figur, die also Symmetrien aufweist, hat keinen Teil, der sich nicht wiederholt.

Laurenz (Zyklus 2) | Z. 2 | Kategorie(n): 1.4

Einige Studierende nehmen zwar eine Sichtweise auf Symmetrie im Sinne des *Rekonstruktions- und Reduktionsaspekts* ein, beschränken diese aber exklusiv auf die Spiegelsymmetrie (Kategorie 1.6). Diese Kategorie ist interessant im Kontext der in Abschnitt 14.1.3 dargestellten Überlegungen zur Einführung der unterschiedlichen Symmetriearten im Mathematikunterricht. Ein zentrales Ergebnis war, dass der Invarianzaspekt zur Einführung der Achsensymmetrie weniger geeignet ist als der Rekonstruktions- und Reduktionsaspekt. Der folgende Auszug aus dem ePortfolio von Layla liefert ein Argument dafür, warum umgekehrt der Rekonstruktions- und Reduktionsaspekt zur Einführung von Drehsymmetrien – zwar nicht in gleicher Weise ungeeignet – aber immerhin aus Lernendenperspektive nicht ganz naheliegend ist.

ePF

Eng mit dem Symmetriebegriff verbunden ist für mich auch die Formulierung, dass ein Objekt symmetrisch ist. Hier steht dann meiner Ansicht nach nicht so sehr der Abbildungsaspekt im Fokus. Stattdessen wird stärker betont, dass Symmetrie auch eine Eigenschaft eines Körpers ist, bei dem ich bestimmte Punktmengen finde, denen eine besondere Bedeutung zukommt, einerseits die „Symmetrieachsen“ bei Achsenspiegelungen und die „Symmetriepunkte“ bei der Dreh- und Punktspiegelung. Diese Punktmengen bleiben nämlich unter den jeweiligen Symmetrieabbildungen punktweise invariant und zumindest die Symmetrieachsen teilen so eine Figur in geometrische „Hälften“ auf. Diese „Hälften“ sind direkt zu erkennen, da bei Einzeichnen der Spiegelachse/Symmetrieachse die geometrische Figur unmittelbar in zwei geometrische Hälften geteilt wird, welche zu einander kongruent und lediglich „spiegelverkehrt“ sind. Achsensymmetrie Figuren haben also die Besonderheit, dass sie aus zwei kongruenten Teilflächen bestehen, die lediglich unterschiedlich „orientiert“ sind. Dieses Auffinden unterschiedlicher Hälften ist allerdings nur für Achsensymmetrie charakteristisch und gehört damit nicht direkt zu einem übergeordneten Konzept von Symmetrie.

Layla (Zyklus 1) | Z. 1 | *Kategorie(n)*: 1.1, 1.6

Layla beschreibt, wie die Symmetrieachse eine natürliche Teilung einer spiegelsymmetrischen Figur in zwei „Hälften“ vorgibt und stellt fest, dass es etwas Vergleichbares bei anderen Symmetriearten nicht gibt, da die invarianten Punkte bei drehsymmetrischen Figuren keine natürliche Einteilung liefern. Aus fachlicher Sicht können natürlich auch für jede drehsymmetrische Figur Fundamentalbereiche (mathematische Bemerkung 14.1.13 (S. 238)) gefunden werden, die aber aus Lernendenperspektive erst gewählt werden müssen und sich nicht in „offensichtlicher“ Weise ergeben¹⁰⁴.

In der Hypothese (H1) wurde außerdem vermutet, dass die Studierenden versuchen, auf die Veranstaltungsinhalte aufzubauen und eingeführte Fachbegriffe, wie *Isometrie*, zu verwenden. Auch das konnte im Rahmen der Datenauswertung bestätigt werden; Ferdinand nutzt z. B. den Begriff *Isometrie* für eine präzise Symmetrie-Definition im Sinne des *Invarianzaspekts*.

ePF

Übergeordnetes Konzept: Bei allen drei Symmetriebegriffen geht es darum, dass eine Teilmenge F von X unter einer bestimmten Isometrie invariant bleibt. Symmetrie allgemein ist also die Invarianz unter einer Isometrie.

Ferdinand (Zyklus 2) | Z. 1 | *Kategorie(n)*: 1.1

Darüber hinaus erklären auch einige Studierende, denen es nicht gelingt eine Verallgemeinerung des Symmetriebegriffs anzugeben, zumindest, welche Isometrie sich jeweils hinter welcher Symmetrie verbirgt (Kategorie 1.8, 5 Kodierungen) und ordnen damit den Symmetriebegriff auch vor dem Hintergrund der Veranstaltung ein.

Während alle bisher beschriebenen Fachkonzepte zur Symmetrie sehr mathematisiert waren, gab es auch Studierende, die die Idee hinter Symmetrie auf eher phänomenologischer Ebene als durch das Erfassen von *Regelmäßigkeiten* beschreiben (Kategorie 1.7, 5 Kodierungen, Ankerbeispiel: Florian), ohne näher auf mathematische Hintergründe einzugehen.

ePF

Symmetrie ist für mich eine besondere Betrachtungsweise von Objekten und Formen unter dem Aspekt der Regelmäßigkeit.

Florian (Zyklus 1) | Z. 1 | *Kategorie(n)*: 1.7

¹⁰⁴Aus rein fachlicher Perspektive stellt eine der beiden „Hälften“ natürlich nicht die einzige Wahl für einen Fundamentalbereich dar, solche können aus Elementen beider Hälften zusammengesetzt werden.

Eine im Rahmen der qualitativen Inhaltsanalyse neu entwickelte Kategorie beinhaltet Textstellen, in denen eine Verknüpfung zwischen Symmetrie und Kongruenz hergestellt wird (Kategorie 1.2, 11 Kodierungen). Diese Bezüge haben unterschiedliche fachliche Hintergründe, die ich im Folgenden näher erläutern möchte.

Bei einigen Studierenden wird der Bezug zur Kongruenz im Kontext des *Rekonstruktions- und Reduktionsaspekts* (Kategorie 1.4) darüber hergestellt, dass eine symmetrische Figur aus kongruenten Teilen besteht. Ein Beispiel liefert der Text von Julie.

ePF | Wird nämlich von Symmetrie gesprochen, so hat man immer ein gleichmäßiges Bild vor Augen. Das wiederum bedeutet, dass man dieses gleichmäßige Bild unterteilen kann in zwei gleiche Teile. Beispielsweise bei der Spiegelsymmetrie erhält man auf zwei Seiten die gleichen Figuren, die kongruent zueinander sind. Bei einer einzigen Figur, welche symmetrisch ist, kann man diese (gedanklich) in zwei kongruente Teilfiguren unterteilen. Ebenso kann man bei der Drehsymmetrie eine der beiden Formen „wieder zurück auf die andere drehen“. Dann handelt es sich wieder um kongruente Formen.

Julie (Zyklus 3) | Z. 1 | *Kategorie(n)*: 1.2, 1.4

Zunächst einmal beinhaltet die Idee „Zerlegen in kongruente Teile“ aus formaler Sicht das Problem, dass es bei den meisten Figuren eine solche (disjunkte) Zerlegung nicht geben kann, da Punkte des Randes, die auf dem Drehzentrum oder der Spiegelachse liegen, automatisch Bestandteil mehrerer der Teile sind. Davon abgesehen stellt Julie das Überführen der „kongruenten Teile“ aufeinander als durch die Symmetrie festgelegt dar (Drehsymmetrie → drehen) und berücksichtigt damit im Sinne Rekonstruktions- und Reduktionsaspekt sowohl die Teilmenge als auch die Symmetriegruppe. Ein Problem entsteht dann, wenn nur auf das Zerlegen in „kongruente Teile“ fokussiert wird und dabei die Symmetrieeigenschaften außer Acht gelassen werden (z. B. Antonia).

ePF | Das zugrundeliegende Konzept von Spiegel-, Achsen-, Dreh- und Punktsymmetrie ist in meinen Augen, dass sich eine symmetrische Figur in mehrere Teilfiguren aufteilen lässt, welche zueinander kongruent sind.

Antonia (Zyklus 3)

In Antonias Antwort fehlt der Zusammenhang zwischen der Art des Zerteilens und der Symmetrien der Figur. Ein entsprechendes Gegenbeispiel ist in Abbildung 14.18 dargestellt.

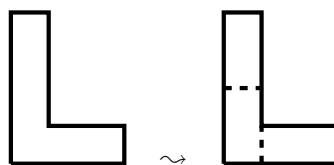


Abbildung 14.18: Die Figur lässt sich in drei kongruente Teilfiguren zerteilen, ist aber nicht symmetrisch.

Nicht alle der in Kategorie 1.2 zusammengefassten Textstellen, in denen Symmetrie in Verbindung mit Kongruenz gebracht wird, beschreiben die Idee des Zerteilens in kongruente Stücke. Teilweise wird die Bedeutung von Kongruenz für Symmetrie auch dadurch motiviert, dass Symmetrie (im Sinne von Kategorie 1.1) bedeutet, dass eine Figur durch eine Isometrie auf sich selbst abgebildet werden kann, und außerdem Figuren die durch Isometrien aufeinander abgebildet werden können, zueinander kongruent sind (Beispiel: Maike)

ePF | Hinter all diesen Begriffen steht für mich die Möglichkeit, [dass] ein (mathematisches) Objekt mit Hilfe von (mathematischen) Abbildung(en) auf sich selbst abgebildet werden kann. [...] Das Konzept der Symmetrie hängt somit stark mit dem Konzept der Kongruenz zusammen.

Maike (Zyklus 1)

Der fachliche Kern von Maikes Aussage ist, dass symmetrische Figuren zu sich selbst kongruent sind, weil sie durch Isometrien auf sich selbst abgebildet werden können. Dabei wird nicht berücksichtigt, dass jede Figur kongruent zu sich selbst ist, und aus der Kongruenz nicht folgt, dass es eine weitere isometrische Selbstabbildung über die Identität hinaus gibt. Vielmehr sind Symmetrie und Kongruenz beides Konzepte die – zumindest im Aufbau der Vorlesung – dem Konzept der Isometrie nachgeordnet sind.

Aussagen, wie die von Maike, können als Versuch interpretiert werden, den Symmetriebegriff möglichst umfassend in den bisherigen Verlauf der Veranstaltung einzubetten, ohne dabei präzise die logischen Abhängigkeiten der Begriffe untereinander zu berücksichtigen. Ein weiteres Beispiel für dieses Phänomen stellt die Kategorie 1.9 (4 Kodierungen) dar. Die dort zusammengefassten Textstellen benennen *Spiegelungen* als übergeordnetes Konzept für Symmetrie. Prototypisch sind die Ausführungen von Philipp.

ePF | Hinter dem Begriff Symmetrie steht für mich das Konzept der Spiegelung, denn all die genannten Symmetriearten basieren auf Spiegelungen an Geraden. Punkt- und Drehsymmetrie lassen sich durch zwei Spiegelungen darstellen.

Philipp (Zyklus 1) | Z. 1 | *Kategorie(n)*: 1.9

Philipp kennt den in der Vorlesung behandelten Dreispiegelungssatz (mathematische Bemerkungen 7.2.6, 7.2.12) und hat auch verstanden, dass sich hinter jeder Symmetrieart eine Isometrie verbirgt. Daraus schließt er dann, dass Spiegelungen die Grundlage für alle Symmetrien darstellen, ungeachtet der Tatsache, dass die Möglichkeit Isometrien durch Spiegelungen darzustellen, nicht mit der Verwendung von Isometrien zur Beschreibung von Symmetrien zusammen hängt.

Auf die als fachlich problematisch oder falsch kategorisierten Textstellen (Kategorie 1.3, 10 Kodierungen) werde ich an dieser Stelle nicht weiter eingehen, da sich innerhalb dieser Kategorie weder systematische Fehler feststellen lassen, noch einzelne Textstellen dabei sind, die instruktive Einsichten in interessante Fehlvorstellungen liefern oder als Grundlage für die Konzeption von Lerngelegenheiten dienen können.

Zusammengefasst lässt sich festhalten, dass es vielen Studierenden gelingt, einen Bezug zwischen Symmetrien und Isometrien herzustellen, auch wenn dieser nicht immer expliziert wird. Die meisten Texte lassen sich dem *Invarianzaspekt* zuordnen, aber auch der *Rekonstruktions- und Reduktionsaspekt* ist (teilweise ausschließlich auf Spiegelsymmetrie bezogen) identifizierbar. In einigen Bearbeitungen lässt sich eine Art übergeneralisierte Nutzung vorangegangener Veranstaltungsinhalte zu Isometrien und deren Verbindung zur Kongruenz feststellen. Als einzelner Fall ist der ePortfolio-Auszug von Layla bemerkenswert, da er eine prototypische Argumentationslinie dafür liefert, warum aus Lernendenperspektive bei Zugängen zu Spiegelsymmetrien der *Rekonstruktions- und Reduktionsaspekt* und bei Zugängen zu Drehsymmetrien der *Invarianzaspekt* naheliegender ist.

Analyseergebnisse zu Aufgabenteil b) (100°-drehsymmetrische Figuren) In Tabelle 14.7 ist das Kategoriensystem für die Antworten der Studierenden zu Aufgabenteil b) dargestellt. Auf dieser Ba-

sis werde ich nun die Analyseergebnisse vor dem Hintergrund der Hypothesen (H₂)¹⁰⁵ und (H₃)¹⁰⁶ vorstellen. Die analysierten Daten zeigen, dass in der Tat die Mehrzahl der Studierenden auf den

	Kategorienbezeichnung	Kategorienbeschreibung	#
2	100°-drehsymmetrische Figuren	Kategorien zu Aufgabenteil b)	
2.1 (2.C)	n-Eck	Als Beispiel für eine 100°-drehsymmetrische Figur wird ein n-Eck (insb. n = 36, n=18) konstruiert.	25
		davon nicht korrekt	1
2.2 (2.A)	Kreis plus	Kreise werden als Beispiele für eine 100°-drehsymmetrische Figuren angegeben und darüber hinaus werden noch weitere Überlegungen angestellt.	20
		davon nicht korrekt	2
2.3 (2.B)	Nur Kreis	Kreise werden als einziges Beispiel für eine 100°-drehsymmetrische Figur genannt.	20
		davon nicht korrekt (weil Vielecke explizit ausgeschlossen werden)	4
2.4	Antwort nicht korrekt	Die gegebene Antwort ist aus mathematischer Perspektive nicht korrekt.	17
2.5 (2.D)	Vielfachheitsargument für Drehwinkel	In der Argumentation wird explizit verwendet, dass ganzzahlige Vielfache eines Drehsymmetriewinkels wieder Drehsymmetriewinkel sind.	9
2.6	Nicht auswertbar	Antworten, die nicht im Sinne des Forschungsinteresse auswertbar sind.	6
2.7 (2.E)	Einschränkung für kleinste Drehwinkel	Die Aussage des Schülers stimmt, wenn es keine kleinere Drehsymmetrie als 100° geben darf.	4
2.8	Problematische Formulierungen	Auch wenn die Antwort insgesamt nicht falsch ist, ist die Textstelle aus fachlicher/fachsprachlicher Sicht problematisch.	2

Tabelle 14.7: Teil 2 des Kategoriensystems zur Analyse der Studierendenbearbeitungen der ePortfolioaufgabe *Vorbereitende Reflexion zum Themenblock Symmetrie* (Zyklus 1: n = 22, Zyklus 2: n = 14, Zyklus 3: n = 28 | Gesamt: n = 64). Die blau markierten Kategorien entstammen dem initialen Kategoriensystem aus Tabelle 14.5 (S. 274).

Kreis als Gegenbeispiel zur Schüleraussage eingeht. Dabei gibt es sowohl Bearbeitungen, in denen ausschließlich der Kreis angesprochen wird (Kategorie 2.3, 20 Kodierungen), als auch solche, bei denen neben dem Kreis (als offensichtliches Gegenbeispiel) noch weitere Überlegungen angestellt werden (Kategorie 2.2, 20 Kodierungen). Von den Studierenden, die nur den Kreis ansprechen (Kategorie 2.3), formulieren vier Studierende explizit die falsche Aussage, dass es eine entsprechende eckige Figur nicht gäbe. Ein großer Teil Studierenden der Kategorie *Kreis plus* geht in den weiteren Überlegungen auf passend konstruierte n-Ecke ein (Kategorie 2.1, 25 Kodierungen). Ein Beispiel liefert die Bearbeitung von Jolina.

¹⁰⁵ (H₂) Die meisten Studierenden werden den Kreis als 100°-drehsymmetrische Figur angeben. Einige Studierende werden darüber hinaus noch passende n-Ecke diskutieren.

¹⁰⁶ (H₃) Die Studierenden, die angeben, dass es (bis auf ggf. den Kreis) keine weiteren 100°-drehsymmetrischen Figuren gibt, gehen unbewusst von der falschen Annahme aus, dass jeder Drehwinkel (und nicht nur der kleinste) ein Teiler von 360° sein muss.

ePF

Nein, das stimmt nicht. Die einfachste Figur, die du dir vorstellen kannst, ist ein Kreis. Drehst du einen Kreis um seinen Mittelpunkt um 100° so bleibt der Kreis erhalten. Da der Kreis ein sehr triviales Beispiel ist, noch eine andere Überlegung: Wenn du dich z.B. fragst, mit welchem $^\circ$ ein Rechteck Drehsymmetrisch ist, so kannst du einfach eine komplette Drehung also 360° durch 4 teilen und erhältst 90° . Jedes Mal, wenn du ein Rechteck um 90° drehst ist es also Drehsymmetrisch (90,180,270,360). So kannst du das z.B. für beliebige gleichseitige Dreiecke, Rechtecke, oder auch gleichseitige Fünf-Sechs-Siebenecke usw. machen. Du musst dann einfach $360/\text{Anzahl der Ecken}$ teilen. Um also noch eine weitere Figur zu finden, die 100° drehsymmetrisch ist kannst du dir einen gleichmäßigen Stern mit 360 Zacken vorstellen. Dann ist jede Drehung um 1° drehsymmetrisch, also auch wenn du das 100-mal ausführst.

Jolina (Zyklus 2) | Z. 11-20 | *Kategorie(n)*: 2.1, 2.2, 2.5

Jolina gibt als Gegenbeispiel zunächst den Kreis an und konstruiert dann systematisch ein Vieleck mit der passenden Eigenschaft. Dabei nutzt sie das Argument, dass ganzzahlige Vielfache von Drehsymmetriewinkeln wieder Winkel angeben bezüglich derer die Figur drehsymmetrisch ist (Kategorie 2.5, 9 Kodierungen).

Bei den Studierenden, die sich nur auf den Kreis beziehen, gibt es solche, die das Gegenbeispiel lediglich nennen (z. B. Maxim), wie auch solche, die die falsche Aussage formulieren, dass Kreise die einzigen Figuren mit der gewünschten Symmetrieeigenschaft seien (z. B. Kaja).

ePF

Das stimmt so nicht. Beispielsweise sind Kreise mit ihrem Mittelpunkt als Drehzentrum Figuren, die bei jeder Drehung (also auch bei 100° -Drehungen) unverändert bleiben und somit auch eine 100° -drehsymmetrische Figur darstellen.

Maxim (Zyklus 2) | Z. 8-10 | *Kategorie(n)*: 2.3

ePF

Betrachten wir zum Beispiel regelmäßige Vielecke, so ist deine Aussage korrekt. Wir können kein regelmäßiges oder unregelmäßiges Vieleck finden, so dass ein Objekt 100° -drehsymmetrisch wäre. ZU 100% stimmt deine Aussage jedoch nicht. Betrachten wir den Kreis als geometrisches Objekt so fällt auf, dass dieser eine besondere Rolle im Bereich der Symmetrie einnimmt. Wir können bei einem Kreis unendlich viele Achsen für die Achsensymmetrie finden. Außerdem ist ein Kreis natürlich punktsymmetrisch, also drehsymmetrisch zu seinem Mittelpunkt. Dabei spielt der Winkel den wir für eine Drehung wählen natürlich keine Rolle. Der Kreis wird stets auf sich selbst abgebildet. Der Kreis ist also ein Objekt, welches 100° -drehsymmetrisch ist.

Kaja (Zyklus 3) | Z. 11-18 | *Kategorie(n)*: 2.3, 2.4

Kajas erster Satz ist offensichtlich falsch und sie gibt darüber hinaus auch kein Argument für die Behauptung an. Sie bildet damit auch ein Beispiel für die Gruppe von Studierenden, die die SuS-Äußerung nicht korrekt beantwortet hätte (Kategorie 2.4, 17 Kodierungen). Bei den als falsch kodierten Bearbeitungen zeigt sich am häufigsten das in Hypothese (H3) antizipierte Fehlermuster: Die Studierenden gehen fälschlicherweise davon aus, dass jeder Drehsymmetriewinkel (und nicht nur der kleinste) ein Teiler von 360° sein muss. Ein Beispiel liefert die Bearbeitung von Franziska.

ePF

Ich würde dem Schüler zuerst zustimmen. Anschließend würde ich die SuS beauftragen, Quadrate, regelmäßige Fünfecke und weitere regelmäßige n-Ecke zu zeichnen. Anschließend sollen sie die Figur ausschneiden und solange drehen, bis diese wieder in Ausgangsposition ist. Die SuS sollten dann den Winkel ermitteln (oder sagen, dass es z.B. eine Vierteldrehung war) und Auffälligkeiten notieren. Anschließend wird alles im Plenum besprochen und es sollte auffallen, dass ein regelmäßiges n-Eck eine n-tel Drehung braucht, um wieder in Ausgangsposition zu sein (Formal in Grad: $360^\circ/n$). Diese Erkenntnis wird dann mit der Frage verglichen. Da aus $360^\circ/n=100^\circ$ $n=3,6$ folgt, ergibt sich die Unmöglichkeit der 100° -Drehsymmetrie. Es gibt eben kein 3,6-Eck. Bei unregelmäßigen Figuren sollte dann auch erkannt worden sein, dass diese nicht drehsymmetrisch sind.

Franziska (Zyklus 1) | Z. 9-18 | *Kategorie(n)*: 2.4

Franziska argumentiert korrekt, dass ein regelmäßiges n-Eck immer einen (minimalen) Drehwinkel von $\frac{360^\circ}{n}$ hat und verbalisiert auch, dass n-tel Drehungen die Figur invariant lassen. Allerdings nutzt sie dann nicht, dass damit auch alle Vielfachen dieser Drehung die Figur invariant lassen.

Einige wenige Studierenden haben die Tatsache, dass die Aussage stimmt, wenn der kleinste Drehwinkel gemeint ist, in ihrer Antwort berücksichtigt (Kategorie 2.7, 4 Kodierungen, Ankerbeispiel: Ali).

ePF

Hierbei kann die Lehrkraft der Aussage in erster Linie zustimmen, dass es keine Figuren geben kann, welche ausschließlich um 100° drehsymmetrisch sind. Das basiert eben darauf, dass 100 kein Teiler von 360 ist und man hierdurch die Figur nicht wieder in die Ausgangslage überführen kann. Nun kann die Lehrkraft jedoch die Frage aufwerfen, was beispielsweise mit 20° drehsymmetrischen Figuren passiert. [...]

Ali (Zyklus 3) | S. 2, Z. 15-21 | *Kategorie(n)*: 2.7

Zusammengefasst, sprechen die Analyseergebnisse für die Hypothesen (H₃) und (H₂). Aber auch wenn der Anteil der Studierenden, die den Kreis als (korrektes) Gegenbeispiel angegeben haben, relativ hoch ist, zeigt sich, dass relativ viele Studierende selber der in der durch die Aufgabe adressierten Fehlvorstellung unterliegen und davon ausgehen, dass es keine Figur oder zumindest kein Vieleck mit der gewünschten Eigenschaft gibt. Diese Studierenden können noch nicht flexibel mit Symmetrien im Sinne des *Gruppenaspekts* umgehen. Dies ist wiederum konsistent dazu, dass die Bedeutung des *Gruppenaspekts* für den Mathematikunterricht in Abschnitt 14.1.3 als gering eingeschätzt wurde. Auf der anderen Seite zeigen die Kategorien 2.5 und 2.7, dass andere Studierende wiederum diese Flexibilität beherrschen, sodass die Lernvoraussetzungen der Studierenden bezogen auf den flexiblen Umgang mit Drehsymmetrien als sehr heterogen eingeschätzt werden können.

Analyseergebnisse zu Aufgabenteil c) (Figuren mit zwei Spiegelsymmetrien) In Tabelle 14.8 ist das Kategoriensystem für die Antworten der Studierenden zu Aufgabenteil c) dargestellt. Die analysierten Daten stützen die im Rahmen der a-priori-Analyse aufgestellte Hypothese (H₄)¹⁰⁷. Nur in fünf der 42 analysierten Antworten wurde explizit darauf eingegangen, dass die Aussage nur gilt, wenn sich die Spiegelgeraden schneiden (Kategorien 3.7, 3.8). Nicht alle Studierenden geben eine weiterführende Erklärung an, wie zum Beispiel Lilian, deren vollständige Bearbeitung der Aufgabe wie folgt lautet:

¹⁰⁷(H₄) Die meisten Studierenden werden den Sonderfall „parallele Geraden“ nicht berücksichtigen und für sich schneidende Geraden ein abbildungsgeometrisches Argument angeben.

	Kategorienbezeichnung	Kategorienbeschreibung	#
3	Figuren mit zwei Spiegelsymmetrien	<i>Kategorien zu Aufgabenteil c)</i>	
3.1(3.A)	Sonderfall „parallele Geraden“ wird nicht erwähnt	Der Sonderfall, dass die beiden Spiegelachsen parallel sind, wird nicht erwähnt.	29
3.2(3.B)	Drehungen als Verknüpfung von Geradenspiegelungen	In der Antwort wird genutzt, dass Drehungen als Verknüpfung von zwei Geradenspiegelungen dargestellt werden können.	19
3.3	Falsche/Problematische Formulierungen	Textstellen, die aus fachlicher Perspektive falsch oder zumindest problematisch sind.	12
3.4(3.C)	Schnittpunkt der Spiegelachsen als Drehpunkt	Der Drehpunkt der Drehsymmetrie ist der Schnittpunkt der Spiegelachsen.	9
3.5	Nicht auswertbar	Antworten, die nicht im Sinne des Forschungsinteresse auswertbar sind.	7
3.6	Nur Spezialfall „Punktsymmetrie“	Es wird nur die Punktsymmetrie und damit verbunden die Spiegelsymmetrie an zwei orthogonalen Geraden betrachtet.	4
3.7	Sonderfall „parallele Geraden“ erkannt, aber nicht behandelt.	Der Sonderfall „parallele Geraden“ wird zwar erkannt, aber nicht weiter behandelt.	3
3.8	Sonderfall „parallele Geraden“ wird erkannt.	Der Sonderfall „parallele Geraden“ wird zwar erkannt und berücksichtigt.	2

Tabelle 14.8: Teil 3 des Kategoriensystems zur Analyse der Studierendenbearbeitungen der ePortfolioaufgabe *Vorbereitende Reflexion zum Themenblock Symmetrie* (Zyklus 2: $n = 14$, Zyklus 3: $n = 28$ | Gesamt: $n = 42$). Die blau markierten Kategorien entstammen dem initialen Kategoriensystem aus Tabelle 14.5 (S. 274).

ePF | „Ja, du hast Recht“ und lasse sie dies an Beispiel nachvollziehen.

Lilian (Zyklus 3)

Diejenigen Studierenden, die eine weiterführende Erklärung angegeben haben, verwenden (ebenefalls konsistent zu Hypothese (H₄)) eine Erklärung, die auf dem in der Veranstaltung behandelten Satz aufbaut, dass die Verknüpfung von zwei Spiegelungen an sich schneidenden Geraden eine Rotation ist (Kategorie 3.2, 19 Kodierungen); neun Studierende erwähnen darüber hinaus explizit, dass sich das Drehzentrum genau aus dem Schnittpunkt der Geraden ergibt (Kategorie 3.4). Ein prototypisches Beispiel liefert die Bearbeitung von Mila.

ePF

Erinnerst du dich noch an den Zusammenhang von Spiegelung und Rotation, den wir anhand der GeoGebra-Datei thematisiert haben? Dort haben wir ebenfalls gezeigt, dass sich eine zweifache Spiegelung auch als Drehung um den Schnittpunkt der beiden Spiegelgeraden darstellen lässt. Wenn du dir nicht mehr sicher bist, schau dir doch nochmal die Datei dazu an. Dieser Zusammenhang lässt sich nun auch auf die Spiegelsymmetrie und die Drehsymmetrie übertragen: Wenn es eine Figur zwei Spiegelachsen hat, kann diese Situation auch als Drehung dargestellt werden. Der Unterschied ist hier nur, dass die Spiegelachsen hier innerhalb der Figur liegen. Der Zusammenhang bleibt aber der gleiche.

Mila (Zyklus 3) | Z. 34 - 41 | Kategorie(n): 3.2, 3.4

Aus diagnostischer Perspektive interessant ist, dass vier Studierende angeben, dass die Aussage nur für zueinander orthogonale Symmetrieachsen gilt (Kategorie 3.6) und damit zum Beispiel gleichseitige Dreiecke – die ein passendes Beispiel darstellen – unberücksichtigt lassen. Ein Beispiel ist die Antwort von Elisa.

ePF | Ja das stimmt. Jedoch muss man beachten, dass die Achsen senkrecht zueinander stehen müssen, da wir wissen, dass bei der Drehsymmetrie alle Winkel gleich groß sein müssen. Das heißt, wenn eine Figur Achsen- und Drehsymmetrisch ist muss der Drehwinkel 90° betragen.

Elisa (Zyklus 3) | Z. 16 - 18 | Kategorie(n): 3.1, 3.6

Es ist möglich, dass Elisa die Aussage der Schülerin als eine Aussage über Figuren mit *genau* zwei Spiegelachsen interpretiert. In diesem Fall hat Elisa Recht, sie schränkt aber die Aussage der Schülerin eventuell in einer nicht intendierten Weise ein. Andernfalls zeigt Elisa eine Fehlvorstellung, deren Kern in dem Teil „[...] da wir wissen, dass bei der Drehsymmetrie alle Winkel [der Spiegelachsen] gleich groß sein müssen“ liegt. Die Behauptung ist wahr, man muss aber *alle* und nicht nur zwei von potenziell mehr als zwei Spiegelachsen berücksichtigen.

Eine genauere Betrachtung der als falsch bzw. problematisch kodierten Textstellen (Kategorie 3.3, 9 Kodierungen) liefert keine Beispiele für typische Fehlvorstellungen. Teilweise liegt ein Begriffsverständnis zugrunde, das nicht mit der üblichen Benutzung im Rahmen der mathematischen Fachsprache übereinstimmt. Beispiele hierfür bilden Kai und Franziska.

ePF | Zunächst ist die Aussage zu verneinen. Dies lässt sich am einfachsten an einem Rechteck mit zwei unterschiedlichen Seiten a und b erläutern. Dieses Rechteck hat zwei Achsensymmetrien, sieht jedoch nach bspw. einer 20° -Drehung nicht mehr genau so aus wie vor der Drehung. Achsensymmetrie und Drehsymmetrie einer Figur sind demnach unabhängig voneinander.

Kai (Zyklus 3) | Z. 19 - 23 | Kategorie(n): 3.3

ePF | Eine Punktspiegelung ist eine Verknüpfung aus zwei Spiegelungen an orthogonalen Geraden. Da Achsen orthogonal sind, ist jede Figur demnach dann auch Punktsymmetrisch, also um 180° drehsymmetrisch. Ich würde die SuS auffordern, Figuren mit zwei Achsensymmetrien zu konstruieren und dann wieder wie in a) vorgehen. Dann sollte klar sein, dass die Frage mit ja zu beantworten ist. Das Resultat wird im Plenum festgehalten.

Franziska (Zyklus 2) | Z. 20 - 25 | Kategorie(n): 3.3

Kai versteht offenbar unter *drehsymmetrisch*, dass eine Figur invariant unter einer *beliebigen* Drehung sein muss und bei Franziskas Interpretation von Achsensymmetrie müssen die Achsen (vermutlich im Sinne von Koordinatenachsen) immer orthogonal zueinander sein.

Einige Studierenden haben große Schwierigkeiten, die unterschiedlichen Symmetrien in einem logischen Argument zueinander in Bezug zu setzen.

ePF

Da hast du Recht. Dies gilt aber nur für ein paar Figuren. Ein Beispiel wäre der Kreis, da man in diesem „viele“ Achsen bilden könnte. Versuche dir erstmal klar zu machen, was achsensymmetrisch, drehsymmetrisch bedeuten. Fallen dir weitere Beispiele ein, die diese Gegebenheit erfüllen? Nutze hierzu Geogebra oder bastel dir Figuren. Weitere Beispiele wären die Raute, Quader und das Rechteck, da diese achsensymmetrisch, drehsymmetrisch und zusätzlich noch punktsymmetrisch sind. Warum gilt hier zusätzlich noch die Punktsymmetrie?

Antonio (Zyklus 3) | Z. 24 - 30 | *Kategorie(n)*: 3.3

Antonios Antwort ist aus logischer Sicht problematisch, da er der \forall -Aussage der Schülerin zunächst zustimmt, dann aber anmerkt, dass die Aussage nicht für alle Figuren gelte, ohne dabei ein Gegenbeispiel zu nennen. Speziell in Bezug auf das Thema *Geometrie* kann ein nicht genau verstandenes Verhältnis von Punkt- und Drehsymmetrie diagnostiziert werden.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass die meisten Studierenden, genau wie im Rahmen der a-priori-Analyse vermutet, den Sonderfall „parallele Geraden“ nicht erwähnen und/oder berücksichtigen. Bezogen auf die Lernendenperspektive auf die Schnittstelle *Symmetrie* bestätigt dies die Vermutung, dass nicht davon ausgegangen werden kann, dass Studierende systematische Vorkenntnisse zu Symmetrieeigenschaften unbeschränkter Figuren haben. Etwas weniger als die Hälfte der Studierenden erkennt, dass in der Situation die Vorkenntnisse aus der Vorlesung zur Verknüpfung von Spiegelungen genutzt werden können. Die darauf aufbauende Erklärung stellt einen Umgang mit Symmetrie im Sinne des *Gruppenaspekts* dar.

Analyseergebnisse zu Aufgabenteil d) (Relevanz von Symmetrie im MU) Abschließend möchte ich darstellen, welche typischen Argumente für die Relevanz des Themas Symmetrie im Mathematikunterricht die Studierenden nennen. Die dazu im Rahmen der qualitativen Inhaltsanalyse induktiv entwickelten Kategorien sind in Tabelle 14.9, sortiert nach der Anzahl der kodierten Textstellen, aufgelistet. Da nahezu alle Studierenden in ihren Antworten jeweils verschiedene Punkte hintereinander aufgelistet haben, ohne ihre einzelnen Aspekte näher zu erklären, ist eine detaillierte Betrachtung unterschiedlicher Ankerbeispiele zu den einzelnen Kategorien nicht ertragreich. Ich möchte jedoch zumindest kurz auf die am häufigsten kodierten Kategorien sowie auf die Anzahl der unterschiedlichen Kategorien eingehen. Die Tatsache, dass in den Antworten der Studierenden 14 unterschiedliche Kategorien identifiziert werden konnten, zeigt, dass die Studierenden insgesamt ein sehr facettenreiches Bild vom Symmetriebegriff haben. Dabei stellen die (sehr) oft genannten Aspekte (Kategorien 4.1 bis 4.3) einen gewissen Konsens dar, der aber durch die Kategorien mit jeweils wenigen Kodierungen mit individuellen Sichtweisen ergänzt wird.

Die drei am häufigsten kodierten Kategorien decken darüber hinaus sehr unterschiedliche Facetten ab. Mehr als die Hälfte der Studierenden gibt als ein Argument für die Behandlung von Symmetrie im Mathematikunterricht an, dass Symmetrien den SuS an verschiedenen Stellen in Umwelt, Natur und Alltag (Kategorie 4.1, 37 Kodierungen) begegnen. Jeweils ungefähr ein Drittel der Studierenden nennt als Argument das Potenzial zur Schulung des Vorstellungsvermögens und räumlichen Denkens (Kategorie 4.2, 24 Kodierungen) sowie die Anwendung von Symmetrien im Kontext der unterrichtlichen Behandlung von Funktionen (Kategorie 4.3, 21 Kodierungen).

Es lässt sich insgesamt festhalten, dass sich die Studierenden des Aspektreichtums des Symmetriebegriffs (wie er z. B. von Winter (1976, S. 16) beschrieben wird) bewusst sind. Dabei geben sie explizit auch Begriffsfacetten an, die nicht aus dem Mathematikunterricht stammen. Im Sinne der

	Kategorienbezeichnung	Kategorienbeschreibung	#
4	Relevanz von Symmetrie im MU	<i>Kategorien zu Aufgabenteil d)</i>	
4.1	Umwelt, Natur und Alltag	Symmetrie ist relevant in Umwelt, Natur und Alltag.	37
4.2	Vorstellungsvermögen / Räumliches Denken	Durch das Arbeiten mit Symmetrie wird das Vorstellungsvermögen/räumliche Denken geschult.	24
4.3	Eigenschaft von Funktionen	Ein wichtiges schulisches Anwendungsfeld für Symmetrie sind Funktionen.	21
4.4	Naturwissenschaften und Technik	Symmetrie ist ein wichtiges Prinzip in den Naturwissenschaften (z.B. Physik, Chemie) und in technischen Kontexten.	18
4.5	Eigenschaft von Figuren im Mathematikunterricht	Symmetrie ist eine wichtige Eigenschaft von geometrischen Figuren (im Mathematikunterricht).	15
4.6	Heuristik	Symmetrie ist eine wichtige Heuristik für das mathematische Arbeiten und Problemlösen.	14
4.7	Ästhetik	Symmetrie ist eng verbunden mit Ästhetik.	10
4.8	Kunst	Symmetrie ist relevant für Kunst.	9
4.9	Erweiterung des Abbildungsbegriffs	Symmetrien liefern einen Anlass für die Beschäftigung mit Abbildungen.	8
4.10	Bau und Architektur	Symmetrie ist ein relevantes Prinzip in Bau und Architektur.	8
4.11	MU liefert Methoden für andere Fächer	Im Mathematikunterricht werden Vorkenntnisse zum Thema Symmetrie aufgebaut, die in anderen Fächern genutzt werden können.	7
4.12	Motivation	Das Thema Symmetrie ist für SuS besonders motivierend.	5
4.13	Stochastik	Symmetrie ist relevant für stochastische Phänomene (z.B. Verteilungen).	4
4.14	Musik	Symmetrien kommen in Musik vor.	2

Tabelle 14.9: Teil 4 des Kategoriensystems zur Analyse der Studierendenbearbeitungen der ePortfolioaufgabe *Vorbereitende Reflexion zum Themenblock Symmetrie* (Zyklus 1: $n = 22$, Zyklus 2: $n = 14$, Zyklus 3: $n = 28$ | Gesamt: $n = 64$).

Professionalisierung der Studierenden stellt ein entsprechend weitgefasser Blick auf *Symmetrie* eine gute und wichtige Voraussetzung für eine facettenreiche Nutzung im Mathematikunterricht dar.

Zusammenfassung und Beurteilung der Ergebnisse

Die in diesem Abschnitt vorgestellte qualitative Studie zielt darauf ab, die Lernendenvoraussetzungen zur Schnittstellenwoche Symmetrie (Abschnitt 14.1.4) weiter auszuscharfen und damit einen Beitrag zur Beantwortung der Forschungsfrage FF-B.2¹⁰⁸ zu leisten. Dazu wurden Studierendenbearbeitungen zur ePortfolioaufgabe 13 (S. 396) (Vorbereitende Reflexion zum Themenblock Symmetrie) analysiert.

Wie auch in der parallelen Studie zur Kongruenz (Abschnitt 13.3.3), müssen die vorgestellten Ergebnisse unter Berücksichtigung forschungsmethodischer Limitationen interpretiert werden. Zunächst einmal sind die Ergebnisse offensichtlich nicht verallgemeinerbar sondern zeigen ein Spektrum möglicher Studierendenperspektiven. Die Studie ist eine Vollerhebung für die Studierenden in der Veranstaltung *Geometrie für Lehramtsstudierende* und erfasst Vorkenntnisse zum Symmetriebegriff genau für diese Gruppe. Das bedeutet noch nicht, dass die daraus abgeleitete Ausschärfung der Lernendenperspektive auf andere Lerngruppen unmittelbar übertragbar ist.

¹⁰⁸FF-B.2 Welche Lernendenvoraussetzungen haben die Studierenden bezogen auf die geometrischen Konzepte *Kongruenz* und *Symmetrie*?

Ein wesentliches Ergebnis der Auswertung ist die Bestätigung der im Rahmen einer a-priori-Analyse aufgestellten Hypothesen (S. 273). Vielen Studierenden gelingt es, ein übergeordnetes Symmetriekonzept zu beschreiben, in dem sie einen mehr oder wenig expliziten Bezug zwischen Symmetrien und den in der Veranstaltung *Geometrie für Lehramtsstudierende* vorher behandelten Isometrien herzustellen. Die Schnittstellenaspekte zum Symmetriebegriff (Abschnitt 14.1.2) stellen ein nützliches Werkzeug zur qualitativen Unterscheidung der beschriebenen Zugänge dar. Die meisten Texte lassen sich dem *Invarianzaspekt* zuordnen, der Rekonstruktions- und Reduktionsaspekt taucht aber ebenfalls auf.

Die mathematischen Hintergründe der Aufgabenteile b) und c) können unter anderem dem *Gruppenaspekt* zugeordnet werden. In beiden Fällen ist die Untersuchung von Abhängigkeiten zwischen unterschiedlichen Symmetrien einer Figur zentraler Bestandteil der fachlichen Klärung. Im Kontext der Frage nach der Existenz von ebenen Figuren mit einer 100° -Drehsymmetrie, gelingt es vielen Studierenden den Kreis als (korrektes) Gegenbeispiel anzugeben. Andererseits können immerhin 17 von 64 Studierenden die Frage nicht korrekt beantworten und unterliegen selbst der durch die Aufgabe adressierten Fehlvorstellung, dass es keine Figur oder zumindest kein Vieleck mit der gewünschten Eigenschaft gibt. Insgesamt müssen die Lernvoraussetzungen der Studierenden bezogen auf den flexiblen Umgang mit Drehsymmetrien (insb. auch im Sinne des Gruppenaspekts) als sehr heterogen eingeschätzt werden.

Die in Aufgabenteil c) angesprochene Drehsymmetrie einer Figur mit zwei Achsensymmetrien gilt nur dann sicher, wenn die Spiegelachsen nicht parallel sind. Dieser Sonderfall wurde – wie vorher antizipiert – von fast allen Studierenden nicht erwähnt und/oder berücksichtigt. Bezogen auf die Lernendenperspektive auf die Schnittstelle Symmetrie bestätigt dies die Vermutung, dass nicht davon ausgegangen werden kann, dass Studierende systematische Vorkenntnisse zu Symmetrieeigenschaften unbeschränkter Figuren haben. Etwas weniger als die Hälfte der Studierenden erkannte, dass in der Situation die Vorkenntnisse aus der Vorlesung zur Verknüpfung von Spiegelungen genutzt werden können.

Die Aufgabenteile b) und c) zeigen, dass ein nennenswerter Teil der Studierenden noch nicht flexibel mit Symmetrien im Sinne des Gruppenaspekts umgehen kann. Dies ist, wie bereits erwähnt, konsistent dazu, dass die Bedeutung des Gruppenaspekts für den Mathematikunterricht eher gering ist (Abschnitt 14.1.3).

Bei der Untersuchung zur Frage nach der Relevanz von Symmetrie im Mathematikunterricht, konnte vor allem belegt werden, dass die Studierenden ein breites Begriffskonzept besitzen, dass deutlich über den gebrauch im Mathematikunterricht hinaus geht.

Im Kontext der Entwicklungsforschung zur Schnittstelle *Symmetrie* trägt diese Studie zur Ausschärfung der Lernendenperspektive bei. Die Ergebnisse bestätigen sehr heterogene Fachkonzepte mit großen (aber vor dem Hintergrund der Analysen in Abschnitt 14.1.3 erwartbaren) Schwierigkeiten beim Umgang mit Symmetrie im Sinne des Gruppenaspekts.

14.4 Synthese und Redesign

14.4.1 Zusammenfassung des Kapitels

In diesem Kapitel habe ich die initiale Umsetzung des in Abschnitt 12.2 beschriebenen Modells zur Schnittstellen-bezogenen Entwicklungsforschung im Kontext der Schnittstelle *Symmetrie* beschrieben. Dabei bin ich parallel zur Schnittstelle *Kongruenz* (Kapitel 13) vorgegangen. Entsprechend der Ausführungen in Abschnitt 12.3 lag der Schwerpunkt auf der *Spezifizierung und Strukturierung*. Dazu habe ich zunächst die fachmathematischen Hintergründe zum Symmetriebegriff im Kontext des in der Veranstaltung genutzten Axiomensystems der Saccheri-Ebene dargestellt (Abschnitt 14.1.1). Darauf aufbauend habe ich, entsprechend der in Abschnitt 12.2.1 (S. 152) vorgestellten Überlegungen, drei *Schnittstellenaspekte* zum Symmetriebegriff herausgearbeitet (Abbildung 14.19).

Invarianzaspekt

Rekonstruktions- und
Reduktionsaspekt

Gruppenaspekt

Abbildung 14.19: Schnittstellenaspekte zum Symmetriebegriff (vgl. Abschnitt 14.1.2)

Wie auch bei der Schnittstelle *Kongruenz*, nehmen einen großen Teil des Kapitels die fachlich-didaktischen Analysen zur Rolle des Symmetriebegriffs im Mathematikunterricht ein (Abschnitt 14.1.3). Dabei habe ich zunächst mit Hilfe der vorher ausgearbeiteten Schnittstellenaspekte verschiedene Zugänge zu den unterschiedlichen Symmetriearten analysiert (S. 243 ff.). Die unterschiedlichen Zugänge habe ich insbesondere vor dem Hintergrund des Aufbaus eines übergreifenden Symmetriekonzepts diskutiert. Im Anschluss wurden Analysen zu den beiden Schwerpunktthemen *Symmetrien ebener Figuren* (S. 248 ff.) und *Begründen mit Symmetrie* (S. 252) durchgeführt. Die Analysen zur Rolle von Symmetrie im Mathematikunterricht unter Verwendung der Schnittstellenaspekte stellt unabhängig von diesem Projekt einen neuen Beitrag zur Präzisierung der Stoffdidaktik zum Thema *Symmetrie* dar. Im Kontext der Entwicklungsforschung zur Schnittstelle bilden die Ergebnisse eine wichtige theoretische Grundlage für sowohl die Entwicklung von Lerngelegenheiten (Abschnitte 13.1.5, 14.2) als auch für weiterführende empirische Untersuchungen (Abschnitt 14.3).

Im Rahmen der Begleitforschung zur Schnittstelle *Symmetrie* wurden parallel zur Schnittstelle *Kongruenz* (Abschnitt 13.3) zwei Studien durchgeführt. In Abschnitt 14.3.2 wird die Auswertung eines Fragebogens beschrieben, der im Anschluss an die Schnittstellenwoche eingesetzt wurde. Das Forschungsinteresse bestand in der Evaluation der Schnittstellenwoche und ihrer Bestandteile sowie in subjektiven Einschätzungen der Studierenden zur Nützlichkeit der Schnittstellenwoche für ihre Professionalisierung. Die zentralen Ergebnisse sind auf S. 268 zusammengefasst. In der zweiten Studie (Abschnitt 14.3.3) wurden Studierendenbearbeitungen der ePortfolioaufgabe *Vorbereitende Reflexion zum Themenblock Symmetrie* mit dem Ziel ausgewertet, die *Lernendenperspektive* zur Schnittstelle *Symmetrie* (Abschnitt 14.1.4) empirisch auszuschärfen.

14.4.2 Redesign der Aktivitäten zur Schnittstelle *Symmetrie*

Wieder analog zur Schnittstelle *Kongruenz* sind auf der Ebene des Redesigns der verschiedenen Veranstaltungselemente zunächst keine größeren Änderungen notwendig. Diese ergeben sich später, im Anschluss an die genauen Analysen der einzelnen Aufgaben. Aus der Lehrpraxis heraus haben

sich jedoch verschiedentlich Notwendigkeiten für kleinere Änderungen ergeben, die ich bereits in den Tabellen in Abschnitt 14.2 vermerkt habe und auf die ich nachfolgend kurz eingehen möchte.

Aspekte des Redesigns der Vorlesung zur Schnittstellenwoche *Symmetrie* In Tabelle 14.2 (S. 257) habe ich die Vorlesung zur Schnittstellenwoche *Symmetrie* in der Variante dargestellt, wie sie im dritten Veranstaltungszyklus (Sommersemester 2020) stattgefunden hat. Im Vergleich zur ersten Durchführung der Veranstaltung (Sommersemester 2019) gab es eine Veränderung, die im Folgenden dargestellt wird.

1. Aufgrund einschlägiger Erfahrungen im ersten Zyklus wurde ab dem zweiten Zyklus in der Vorlesung (vgl. Material 4 (S. 402)) explizit auf die Gefahr der Verwechslung zwischen der Flächenzerlegung (Einzelteile können in beliebiger Weise wieder zusammen gelegt werden.) und der Reduktion und Rekonstruktion symmetrischer Figuren (Art des Zusammenlegens ist durch die Symmetriegruppe bereits eindeutig vorbestimmt.) hingewiesen (Abschnitt 3 in Tabelle 14.2 (S. 257)).

Aspekte des Redesigns der Präsenzaufgaben zur Schnittstellenwoche *Symmetrie* In Tabelle 14.3 (S. 258) habe ich die Präsenzaufgaben zur Schnittstellenwoche *Symmetrie* in der Variante dargestellt, wie sie im dritten Veranstaltungszyklus (Sommersemester 2020) eingesetzt wurden. Hier haben sich über die Veranstaltungsdurchläufe hinweg keine Veränderungen ergeben.

Aspekte des Redesigns der ePortfolioaufgabe zur Schnittstelle *Symmetrie* In Tabelle 14.4 (S. 259) habe ich die ePortfolioaufgaben zur Schnittstelle *Symmetrie* in der Variante dargestellt, wie sie im dritten Veranstaltungszyklus (Sommersemester 2020) eingesetzt wurden. Im Vergleich zur ersten Durchführung der Veranstaltung (Sommersemester 2019) gab es eine Veränderung, die im Folgenden dargestellt wird.

1. Die zweite SuS-Äußerung aus ePortfolioaufgabe 17 (S. 398) war im ersten Zyklus kein Bestandteil von ePortfolioaufgabe 13 (S. 396). Nachdem sich die Idee, die selbe professionsorientierte Situation zweimal zu behandeln, als nützlich, sowohl bezogen auf die Reflexion der Studierenden als auch aus Forschungsperspektive, erwiesen hat, wurde sie auch für diese SuS-Äußerung umgesetzt.

14.4.3 Aktueller Stand und nächste Schritte der Entwicklungsforschung zur Schnittstelle *Symmetrie*

Die Entwicklungsforschung zur Schnittstelle *Symmetrie* befindet sich auf einem ähnlichen Stand, wie die Entwicklungsforschung zur Schnittstelle *Kongruenz*. Zum Zeitpunkt der Finalisierung dieser Arbeit existiert durch die umfangreichen fachlich-didaktischen Analysen und die ergänzende empirische Ausschärfung der Lernendenperspektive eine umfangreiche Spezifizierung und Strukturierung der Schnittstelle *Symmetrie*. Darüber hinaus wurde ein vollständiger Satz an Vorlesungsmaterialien und Übungsaufgaben (für Präsenzübung und ePortfolio) entwickelt (Abschnitt 14.2) und in der Praxis erprobt. Die Ergebnisse der Fragebogenstudie bestätigen den in der Lehrpraxis wahrgenommenen Eindruck, dass die Lerngelegenheiten bei den Studierenden gut ankommen und

wertgeschätzt werden. Darüber hinaus belegen die Ergebnisse der Fragebogenstudie auch einen positiven Einfluss auf die subjektive Facette der zweiten Diskontinuität. Im Kontext dieser Arbeit liefert dieses Kapitel damit Beiträge zur Beantwortung der Forschungsfragen FF-A.3¹⁰⁹, FF-B.2¹¹⁰ und FF-B.3¹¹¹.

Die nächsten Schritte der Entwicklungsforschung bestehen analog zur Schnittstelle *Kongruenz* in einer Fokussierung auf die Analyse einzelner Lerngelegenheiten und darauf aufbauend auf die Entwicklung lokaler Lehr-Lerntheorien. Die dazu notwendigen Daten (vgl. Abschnitt 12.2.3) wurden bereits erhoben, sodass weitere Forschung auch ohne einen erneuten Veranstaltungszyklus möglich ist. Dabei sollte ein Forschungsziel sein, den Beitrag der Lerngelegenheiten im Kontext der Schnittstelle *Symmetrie* in ihrer Wirkung in Bezug auf die *objektiven* Facette der zweiten Diskontinuität zu erforschen. Aus theoretisch-konzeptueller Perspektive ist eine weitere Ausschärfung des Konzeptes der *Schnittstellenaspekte* lohnend. Interessant dabei wäre zum Beispiel die Frage, welche Konsequenzen die Schnittstellenaspekte für die Beschreibung zentraler Grundvorstellungen zum Symmetriebegriff haben.

¹⁰⁹FF-A.3 Wie können professionsorientierte Lerngelegenheiten (kurz: *Schnittstellenlerngelegenheiten*) im Kontext der Geometrieveranstaltung aussehen, die das Potenzial haben, zur Überwindung der zweiten Diskontinuität beizutragen?

¹¹⁰FF-B.2 Welche Lernendenvoraussetzungen haben die Studierenden bezogen auf die geometrischen Konzepte *Kongruenz* und *Symmetrie*?

¹¹¹FF-B.3 Wie evaluieren (insbesondere auch in Bezug auf die eigene Professionalisierung) die Studierenden die Gesamtveranstaltung und die speziellen professionsorientierten Lerngelegenheiten?

Kapitel 15

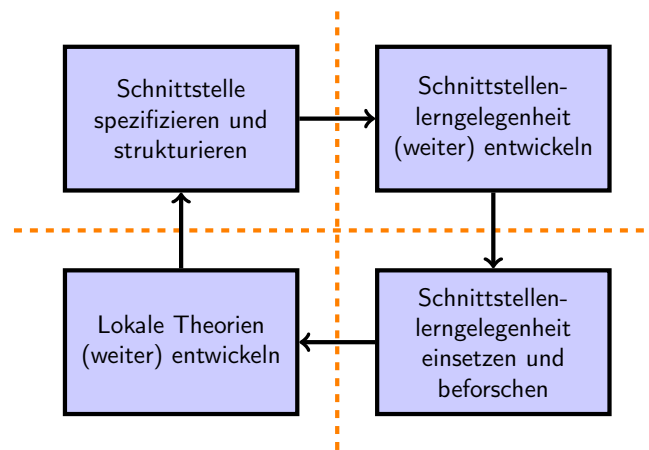
Zusammenfassung: Professionsorientierung durch Explizierung von Schnittstellen

Ich habe in Abschnitt 4 *explizite Professionsorientierung* (S. 36) als ein Entwurfsprinzip für Mathematik-Fachveranstaltungen mit Professionsbezug für Lehramtsstudierende vorgeschlagen. Im Rahmen des Projekts *SiMpLe-Geo* wurde dieses Prinzip insbesondere durch die Implementation der beiden *Schnittstellenwochen* zu den zentralen elementargeometrischen Themen *Kongruenz* und *Symmetrie* umgesetzt. Die Konzeption der Schnittstellenwochen ist Teil eines umfangreichen Entwicklungsforschungsprojekts (Kapitel 13 und 14), dessen aktuellen Stand ich im vorliegenden Kapitel, vor dem Hintergrund der in Kapitel 12 ausgeführten theoretischen und methodischen Grundlagen, reflektieren möchte. Dazu werden zunächst die theoretischen, entwicklungsbezogenen und empirischen Resultate vor dem Hintergrund des in Abbildung 12.2 (S. 150) vorgestellten *Zyklusmodells zur Entwicklung und Beforschung von Schnittstellenlerngelegenheiten* eingeordnet (Abschnitt 15.1). Anschließend werde ich kurz auf die in dieser Arbeit nicht näher behandelte Schnittstelle *Isometrie* eingehen (Abschnitt 15.2). Im letzten Abschnitt (Abschnitt 15.3) möchte ich noch einmal auf das von mir entwickelte Konzept der *Schnittstellenaspekte* eingehen und Perspektiven für die Weiterentwicklung aufzeigen.

15.1 Einordnung aus Perspektive des Entwicklungsforschungszyklus

In Kapitel 12 habe ich die theoretischen und methodischen Hintergründe der Entwicklungsforschung zu den in Kapitel 11 ausgewählten Schnittstellen vorgestellt. Im Mittelpunkt steht das in Abbildung 12.2 (S. 150) vorgestellte *Zyklusmodell zur Entwicklung und Beforschung von Schnittstellenlerngelegenheiten*, dessen Grundstruktur in Abbildung 15.1 noch einmal dargestellt ist. In Abschnitt 12.3 wurde herausgearbeitet, dass die Schwerpunkte dieser Arbeit auf der *Spezifizierung und Strukturierung* der Schnittstellen sowie auf der darauf aufbauenden *Entwicklung von Schnittstellenlerngelegenheiten* liegen und durch die Auswertung von je zwei Studien (Fragebogenstudie im Anschluss

Entwicklung von Schnittstellenlerngelegenheiten



Beforschung von Schnittstellenlerngelegenheiten

Abbildung 15.1: Grundstruktur des Zyklusmodell zur Entwicklung und Beforschung von Schnittstellenlerngelegenheiten aus Abbildung 12.2 (S. 150).

an die Schnittstellenwochen; Analyse von ePortfolio-Bearbeitungen zur Ausschärfung der Lernendperspektiven auf die beiden Schnittstellen) ergänzt werden. Im Rahmen der *Spezifizierung und Strukturierung* wurden zu den Schnittstellen *Kongruenz* und *Symmetrie* zunächst die fachmathematischen Hintergründe unter Bezugnahme auf den mathematischen Aufbau der Gesamtveranstaltung beschrieben (Abschnitte 13.1.1, 14.1.1) und unter Verwendung des in Abschnitt 14.1 entwickelten Konzepts der *Schnittstellenaspekte* in professionsorientierter Weise systematisiert (Abschnitte 13.1.2, 14.1.2). Im Anschluss wurden zu beiden Themen umfangreiche fachlich-didaktische Analysen zur jeweiligen Rolle im Mathematikunterricht durchgeführt (Abschnitte 13.1.3, 14.1.3). Dabei wurden ausgehend von fachdidaktischer Literatur verschiedene reale Schulbuchauszüge analysiert. Für beide Themen konnte festgestellt werden, dass es bezogen auf das Wissen um die Eingangsvoraussetzungen der Studierenden (Lernendenperspektiven auf die Schnittstellen) Forschungslücken gibt, die später durch die Analysen einschlägiger ePortfolio-Bearbeitungen (Abschnitte 13.3.3, 14.3.3) ausgeschärft wurden. Basierend auf diesen Untersuchungen wurden schnittstellenbezogene Lernziele herausgearbeitet (Abschnitte 13.1.5, 14.1.5) und Vorlesungskonzepte, Präsenzaufgaben und ePortfolioaufgaben entwickelt und vorgestellt. (Abschnitte 13.2, 14.2). Neben den bereits erwähnten Analysen von ePortfolio-Bearbeitungen wurden auf der Forschungsebene noch Fragebögen ausgewertet, die im Anschluss an die Schnittstellenwochen eingesetzt wurden und Einsichten zur Akzeptanz und Bewertung der Schnittstellenwochen sowie zum subjektiv wahrgenommenen Beitrag zur Professionalisierung ermöglichen (Abschnitte 13.3.1, 13.3.2, 14.3.2). In den Abschnitten 13.4 und 14.4 wurde dann der aktuelle Stand der jeweiligen Entwicklungsforschung zusammengefasst.

Auch wenn im Rahmen dieser Arbeit nur ein Teil der im Sinne von 12.2.3 erhobenen Daten ausgewertet wurde, tragen die Ergebnisse der Entwicklungsforschung bereits zur Theoriebildung bei. Dazu gehören sowohl die neu konzipierten Schnittstellenaspekte als auch die fachlich-didaktischen Analysen zur Rolle von *Kongruenz* und *Symmetrie* im aktuellen Mathematikunterricht (insbesondere auch unter Verwendung der entwickelten Schnittstellenaspekte). Diese Teile der *Spezifizierung* erweitern die bestehende geometriedidaktische Literatur. Durch die Auswertung der Fragebogenstudien konnte insbesondere aufgezeigt werden, dass die konzipierten Schnittstellenlerngelegenheiten

im Sinne ihrer Intention einen positiven Beitrag zur *subjektiven Facette* der zweiten Diskontinuität leisten; durch die Auswertung der ePortfolioaufgaben konnten die Lernendenperspektiven auf die Themen *Kongruenz* und *Symmetrie* weiter geschärft werden.

Offen bleibt die Frage der Auswirkung auf die *objektive Facette* der zweiten Diskontinuität und damit verbunden auch die Frage nach der Nachhaltigkeit des professionsbezogenen Kompetenzerwerbs. In diesem Sinne müssen im nächsten Schritt die weiteren erhobenen Daten (Videos von Studierenden bei der Bearbeitung der Präsenzaufgaben, ePortfolio-Bearbeitungen zu anderen Aufgaben, Interviews mit Studierenden) ausgewertet werden. Auf diese Weise können insbesondere tiefere Einsichten in die Lernprozesse bezogen auf einzelne Schnittstellenlerngelegenheiten gewonnen werden. Um belastbare Aussagen über die Nachhaltigkeit des Kompetenzerwerbs erhalten zu können, müssen weitere Erhebungen konzipiert werden; denkbar wäre die Durchführung von Fallstudien mit ehemaligen Studierenden der Veranstaltungszyklen zu einem späteren Zeitpunkt (bspw. im Referendariat).

15.2 Ausblick auf die Entwicklungsforschung zur Schnittstelle *Isometrie*

In Kapitel 11 habe ich neben *Kongruenz* und *Symmetrie* auch das Thema *Isometrie* als Schwerpunktthema für Schnittstellenlerngelegenheiten identifiziert, bin aber im Rahmen dieser Arbeit nicht näher darauf eingegangen. In diesem Abschnitt möchte ich kurz die vier ePortfolioaufgaben vorstellen, die speziell zum Thema *Symmetrie* entwickelt und eingesetzt wurden: In den Aufgaben *Steckbriefe zu geometrischen Abbildungen 1/2* (ePortfolioaufgaben 4 (S. 389), 19 (S. 399)) sollten die Studierenden die mathematischen Hintergründe zu wichtigen geometrischen Abbildungen (nicht nur Isometrien) strukturiert zusammenstellen. Die dabei entstandenen Steckbriefe haben das Potenzial auch über die Veranstaltung hinaus aus Möglichkeit zum Nachschlagen zu dienen. Die Aufgabe *Charakterisierung der euklidischen Isometrien* (ePortfolioaufgabe 11 (S. 395)) regt die Studierenden auf Grundlage des Dreispiegelungssatzes zur systematischen Untersuchung aller möglichen euklidischen Isometrien an. Die Bearbeitung der Aktivität bildet die Grundlage für die eigenständige Entwicklung von einschlägigen DGS-Lernumgebungen mit bspw. *GeoGebra* (ePortfolioaufgabe 12 (S. 395)). Eine explorative Untersuchung der Studierendenbearbeitungen zur letztgenannten Aktivität war Gegenstand der Masterarbeit von Dellori (2020). Dabei wurde ein Vorschlag für ein theoretisches Modell zur Analyse von DGS-Lerngelegenheiten aus Struktur- und Funktionsebene entwickelt und pilotiert. Darauf aufbauend können nun weitere Untersuchungen zur Entwicklungsforschung bezogen auf die Schnittstelle *Isometrie* durchgeführt werden. Hierbei gilt es auch die Frage zu beantworten, inwieweit auch der Isometriebegriff in instruktiver Weise unter Verwendung von Schnittstellenaspekten aus professionsorientierter Perspektive systematisiert werden kann.

15.3 Schnittstellenaspekte als professionsorientierte Systematisierungen

Das Konzept der *Schnittstellenaspekte* (Abschnitt 12.2.1) wurde im Rahmen der theoretischen und methodischen Vorüberlegungen zur *Spezifizierung und Strukturierung* von Schnittstellen mit dem

Ziel eingeführt, wesentliche Charakteristika mathematischer Begriffe losgelöst von einer speziellen Umsetzung in einem Axiomensystem zu betrachten. Dies stellt, gerade bezogen auf die Elementargeometrie mit ihren vielfältigen Möglichkeiten der axiomatischen Fundierung, einen Beitrag zur Professionsorientierung in dem Sinne dar, dass der Begriffserwerb zwar in einer bestimmten Axiomatisierung stattfindet (Orientierung an der Fachsystematik), aber zusätzlich wichtige Eigenschaften des Begriffs reflektiert und unter Berücksichtigung der Rolle, die sie im Mathematikunterricht spielen, systematisiert werden.

Im Rahmen dieser Arbeit konnten in diesem Sinne Schnittstellenaspekte zu Begriffen *Kongruenz* (Abschnitt 13.1.2) und *Symmetrie* (Abschnitt 14.1.2) erarbeitet werden. Diese haben sich sowohl für die Durchführung fachlich-didaktischer Analysen (insb. bei der systematischen Betrachtung unterschiedlicher Zugänge zu einem Begriff) als auch aus Sicht der Studierenden (siehe Auswertung der Fragebogenstudien in den Abschnitten 13.3.2, 14.3.2) als sehr hilfreich erwiesen.

Als Nächstes muss, wie bereits in Fußnote 68 (S. 152) erwähnt, der Begriff der *Schnittstellenaspekte* (als ein Konzept der Hochschuldidaktik Mathematik) im Hinblick auf Gemeinsamkeiten und Unterschiede zu *Aspekten* und *Grundvorstellungen* (als Konzepte der Schuldidaktik Mathematik) analysiert werden.

Teil V

Schluss

Kapitel 16

Zusammenfassung, Diskussion und Ausblick

In diesem abschließenden Kapitel, möchte ich die die Arbeit zunächst, gegliedert nach den einzelnen Forschungsfragen aus Abschnitt 6.1, zusammenfassen (Abschnitt 16.1). Im Anschluss folgt eine Diskussion der Ergebnisse dieser Arbeit aus Perspektive der universitären Lehrpraxis (Abschnitt 16.2) und aus Perspektive der Mathematikdidaktik 16.3. Ich schließe die Arbeit mit Perspektiven zu sich anschließenden Forschungs- und Entwicklungsprojekten (Abschnitt 16.4).

16.1 Zusammenfassung der Arbeit unter Berücksichtigung der Forschungsfragen

Bevor ich auf die Beantwortung der einzelnen Forschungsfragen eingehe, fasse ich zunächst rückblickend die Struktur der Arbeit zusammen. Der Hauptteil der Arbeit besteht aus vier Teilen. In Teil I wurden verschiedene theoretische Hintergründe zum Projekt vorgestellt. Dazu habe ich in Kapitel 2 zunächst theoretische Perspektiven auf fachmathematisches Wissen und Können als Disposition für professionelles Handeln von Mathematiklehrkräften vorgestellt und synthetisiert. Darauf aufbauend habe ich in Kapitel 3 das Problem der *zweite Diskontinuität* theoretisch verortet und verschiedene Ansätze zur Überwindung diskutiert. In Kapitel 4 gehe ich auf Inhalte und Ziele des aktuellen Geometrieunterrichts und die entsprechenden mathematischen Hintergründe ein. Den Abschluss des theoretischen Hintergrundes bildet eine Zusammenfassung wesentlicher Literaturbeiträge zur Portfolioarbeit (Kapitel 5). Teil II besteht nur aus Kapitel 6. Dort wurde das Projekt und die dieser Arbeit zugrunde liegenden Forschungsfragen vorgestellt.

In den Teilen III und IV fand die eigentliche Beantwortung der Forschungsfragen statt. In Teil III wurde zunächst die inhaltliche (Kapitel 7) und methodische (Kapitel 8) Konzeption der Veranstaltung *Geometrie für Lehramtsstudierende* dargestellt. Anschließend habe ich die inhaltliche Ausgestaltung durch diverse fachlich-didaktische Analysen fundiert (Kapitel 9) und abschließend Untersuchungen zu Einschätzungen der Studierenden zur Gesamtveranstaltung vorgestellt (Kapitel 10).

Der Fokus von Teil IV liegt auf der Entwicklungsforschung zu den Schnittstellenthemen *Kongruenz* und *Symmetrie*. Zuerst habe ich die Auswahl von *Isometrie*, *Symmetrie* und *Kongruenz* als inhalt-

liche Schwerpunktthemen begründet (Kapitel 11) und anschließend die forschungsmethodischen Hintergründe für diesen Teil des Projekts (Kapitel 12) erläutert. Die eigentlichen Ausführungen zur Entwicklungsforschung waren Bestandteil der Kapitel 13 und 14. In Kapitel 15 habe ich abschließend den Stand der Entwicklungsforschung zu den beiden Schnittstellen zusammengefasst.

Im Mittelpunkt der Arbeit steht die Beantwortung der in Abschnitt 6.1 vorgestellten Forschungsfragen. In den folgenden Abschnitten werde ich herausstellen, welche Teile der Arbeit dafür jeweils einen Beitrag leisten und für jede Forschungsfrage abschließend das methodische Vorgehen kritisch reflektieren.

Beitrag dieser Arbeit zur Beantwortung der Forschungsfrage FF-A.1: Wie kann eine Geometrieveranstaltung inhaltlich und methodisch gestaltet sein, die den a-priori-Entwurfsprinzipien (S. 35) für Fachveranstaltungen zur Überwindung der zweiten Diskontinuität genügt?

In Abschnitt 3.3 habe ich basierend auf den theoretischen Vorüberlegungen in den Kapiteln 2 und 3, a-priori-Entwurfsprinzipien für eine Fachveranstaltung herausgearbeitet, die zur Überwindung der zweiten Diskontinuität beitragen sollen: *Orientierung an der Fachsystematik*, *Orientierung an der fachspezifischen Darstellungsmethodik*, *Implizite Professionsorientierung*, *Explizite Professionsorientierung*. Ein wesentlicher Hintergrund für die Formulierung dieser Entwurfsprinzipien bilden die in Abschnitt 2.3 dargestellten theoretischen Überlegungen über die Wichtigkeit fachmathematischen Wissens und Könnens für professionelles Lehrerhandeln. Die erarbeiteten Entwurfsprinzipien wurden von den Studierenden insgesamt als relevant eingeschätzt (Abschnitt 10.1.2).

Orientierung an der Fachsystematik bedeutet, dass der Wissensaufbau in der Veranstaltung den üblichen wissenschaftlichen Standards der Mathematik entspricht und prototypisch dem Dreischritt *Definition – Satz – Beweis* folgt (S. 35). Für die Konzeption der Veranstaltung *Geometrie für Lehramtsstudierende* musste dementsprechend ein axiomatischer Aufbau der Veranstaltung gefunden werden, der gleichzeitig die Umsetzung *impliziter Professionsorientierung* (S. 36) ermöglicht. Der entsprechend dieser Zielvorgabe gewählte Aufbau ist ausführlich in Kapitel 7 dargestellt und besteht aus einem Einstieg in die ebene Geometrie unter Verwendung der Methoden der linearen Algebra auf die ein elementargeometrischer axiomatischer Aufbau folgt. Letzterer startet bei metrischen Räumen, die dann erst mit der Struktur der *Saccheri-Ebene* (Inzidenzaxiom und Spiegelungsaxiom) und anschließend weiter mit dem *Parallelenaxiom* ausgestattet werden. Dass dieser Zugang in besonderem Maße für die Umsetzung der *impliziten Professionsorientierung* geeignet ist, begründe ich in Kapitel 9 auf Basis umfangreicher fachlich-didaktischer Analysen zu wesentlichen elementargeometrischen Konzepten und ihrer Umsetzung in unterschiedlichen Axiomensystemen. Als zentrale Vergleichsreferenz zur Saccheri-Ebene dient dabei das etablierte Axiomensystem aus den *Grundlagen der Geometrie* von Hilbert (1977) (Vergleiche auch Forschungsfrage FF-A.2).

Die Umsetzung der *Orientierung an der fachspezifischen Darstellungsmethodik* bezieht sich auf die detaillierte Ausgestaltung des Skripts und die Konzeption der einzelnen Veranstaltungstermine. Für diese Arbeit spielt sie nur eine untergeordnete Rolle.

Bezogen auf die Umsetzung der *expliziten Professionsorientierung* (S. 36) habe ich ergänzend zur geschilderten inhaltlichen Gestaltung der Veranstaltung in Kapitel 8, das methodische Konzept der Veranstaltung theoriebasiert vorgestellt. Zentral für die Explizierung von Professionsorientierung sind die von mir neu entwickelten Konzepte des *Schnittstellen-ePortfolios* (Abschnitt 8.1) und der *Schnittstellenwochen* (Abschnitt 8.2). Alle eingesetzten Schnittstellenaufgaben sind in Anhang C auf-

gelistet; auf die Konzeption der Schnittstellenwochen gehe ich detailliert in den Kapiteln 13 und 14 ein.

Die Beantwortung dieser Forschungsfrage baut wesentlich auf Synthesen existierender Literatur und fachlich-didaktischen Analysen auf. Bei den fachlich-didaktischen Analysen habe ich alle mathematischen Aussagen begründet oder auf entsprechende Argumente referenziert. Nichtsdestoweniger muss berücksichtigt werden, dass die Beurteilung der Analyseergebnisse stets subjektive Komponenten enthält. Durch ein differenziertes Darstellen der Argumentationsketten habe ich versucht meine Gedankengänge nachvollziehbar zu schildern. Insgesamt liefert die Beantwortung der Forschungsfrage *ein* mögliches Veranstaltungskonzept, das viele Vorteile im Sinne der Zielvorgaben besitzt.

Beitrag dieser Arbeit zur Beantwortung der Forschungsfrage FF-A.2: Welche fachinhaltlichen Entwurfs-Entscheidungen unterscheiden die konzipierte Veranstaltung von alternativen Zugängen, und inwieweit ist das gewählte Vorgehen im Vergleich zu den Alternativen funktionaler für die Überwindung der zweiten Diskontinuität?

Die Beantwortung dieser Forschungsfrage geschieht in Abschnitt 9.9 auf Basis der umfangreichen fachlich-didaktischen Analysen in Kapitel 9. Dabei wurden die Behandlung wesentlicher und schulrelevanter mathematischer Konzepte im Kontext des Axiomensystems der *Saccheri-Ebene* mit der Behandlung in anderen Zugängen zur ebenen Geometrie verglichen. Als zentrale Vergleichsreferenz zur Saccheri-Ebene dient dabei das etablierte Axiomensystem aus den *Grundlagen der Geometrie* von Hilbert (1977). Die Analyseschwerpunkte umfassten die Themen *Reelle Zahlen* (Abschnitt 9.1), *Geraden* (Abschnitt 9.2), *Abstände und Längen* (Abschnitt 9.3), *Spiegelungsaxiom* (Abschnitt 9.4), *Parallelenaxiom* (Abschnitt 9.5), *von der axiomatischen zur analytischen Geometrie* (Abschnitt 9.6), *Kongruenz und Isometrie* (Abschnitt 9.7) und *Behandlung nichteuklidischer Geometrie* (Abschnitt 9.8).

Bezogen auf die Methodik zur Beantwortung dieser Forschungsfrage gilt das selbe wie oben: Alle mathematischen Aussagen sind entsprechend der wissenschaftlichen Standards begründet; die didaktischen Bewertungen haben immer auch subjektive Facetten.

Beitrag dieser Arbeit zur Beantwortung der Forschungsfrage FF-A.3: Wie können professionsorientierte Lerngelegenheiten (kurz: *Schnittstellenlerngelegenheiten*) im Kontext der Geometrieveranstaltung aussehen, die das Potenzial haben, zur Überwindung der zweiten Diskontinuität beizutragen?

Als Grundlage für die Beantwortung dieser Forschungsfrage habe ich in Kapitel 2 zunächst die Rolle fachmathematischen Wissens und Könnens für professionelles Lehrerhandeln analysiert um zu klären, welchen Beitrag mathematische Fachveranstaltungen zur Professionalisierung von Lehramtsstudierenden leisten können. Eine wesentliche theoretische Grundlage, auch für die spätere Formulierung von Lernzielen und für die Konzeption von Aufgaben, waren die Analysen von Ball und Bass (2002) und Prediger (2013) zu typischen mathematikhaltigen Handlungsanforderungen, die Lehrkräfte bewältigen müssen. In Abschnitt 2.5 habe ich die Ergebnisse der Literatur-Analysen unter der Leitfrage zusammengefasst, inwieweit Mathematiklehrkräfte Mathematiker sind.

In Kapitel 3 bin ich dann auf das bekannte Problem der *doppelten* (insb. *zweiten*) *Diskontinuität* eingegangen und habe dort die Unterscheidung in die *subjektive* und die *objektive Facette* der zwei-

ten Diskontinuität herausgearbeitet (S. 31) und analysiert, unter welchen Bedingungen Fachveranstaltungen einen positiven Einfluss auf beide Facetten haben können (a-priori-Entwurfsprinzipien, S. 35). Als Ergebnis habe ich herausgestellt, dass *Professionsorientierung* in mathematischen Fachveranstaltungen bedeutet, dass professionsorientierte Situationen aus fachmathematischer Perspektive (in der Funktion von fachmathematischen Kompetenzen als eine Facette kognitiver Dispositionen für professionelle Handlungskompetenz, Abbildung 2.1 (S. 8)) analysiert werden und darauf aufbauend ein Plan für eine professionelle Handlung entworfen wird. In diesem Sinne haben wir in Biehler und Hoffmann (im Druck) den Begriff der *fachdidaktischen Urteilskompetenz* als Vorstufe professioneller Handlungskompetenz eingeführt (S. 36). Darauf aufbauend ergibt sich der Aufbau fachdidaktischer Urteilskompetenz als ein wesentliches Ziel für die Gestaltung professionsorientierter Lerngelegenheiten.

Diese Gestaltung wurde im Rahmen dieser Arbeit für die Themen *Kongruenz* und *Symmetrie* im methodischen Rahmen der in Kapitel 12 vorgestellten Entwicklungsforschung durchgeführt. Wesentliches Resultat sind die in den Abschnitten 13.2 und 14.2 vorgestellten Lerngelegenheiten, die vor dem Hintergrund der theoriebasierten und systematischen Spezifizierung und Strukturierung der Schnittstellenthemen (Abschnitte 13.1, 14.1) konzipiert wurden.

Dass die entwickelten Lerngelegenheiten tatsächlich das Potenzial zur Überwindung der zweiten Diskontinuität in ihren beiden Facetten haben, ergibt sich aus der systematischen und theoriebasierten Konzeption und wird durch die ersten durchgeführten Untersuchungen (vgl. Forschungsfrage FF-B.3) – im Rahmen der dort diskutierten Limitationen der Studien – bestätigt.

Beitrag dieser Arbeit zur Beantwortung der Forschungsfrage FF-B.1: Welche professionsbezogenen Einstellungen zu fachmathematischen Veranstaltungen bringen die Studierenden mit in die Veranstaltung, und wie unterscheiden sich diese von entsprechenden Einstellungen bezogen speziell auf die Veranstaltung *Geometrie für Lehramtsstudierende*?

Zur Beantwortung dieser Forschungsfrage wurde in einem Pre-Post-Design eine Fragebogenstudie zu Beliefs der Studierenden bezogen auf die inhaltliche Verbundenheit zum Mathematikunterricht und die wahrgenommene Berufsrelevanz durchgeführt (Abschnitt 10.2). Die eingesetzten Skalen beruhen auf der Arbeit von Isaev und Eichler (2022). Das zentrale Ergebnis der Untersuchung ist, dass eindeutig positive Effekte bei fast allen Studierenden bezogen sowohl auf die Beliefs zur Berufsrelevanz und zur inhaltlichen Verbundenheit festgestellt werden. In der Wahrnehmung der Studierenden gelingt es damit einen Beitrag zur Überwindung der zweiten Diskontinuität zu leisten, der sich von dem anderer besuchter Fachveranstaltungen unterscheidet. Dabei muss berücksichtigt werden, dass dieses Ergebnis eine Aussage über die *subjektive Facette* der zweiten Diskontinuität macht und nicht darüber, ob es *objektiv* gelungen ist, einen nachhaltigen Beitrag zur geometriebezogenen fachdidaktischen Urteilskompetenz zu leisten. Die Limitationen der Studie wurden im Rahmen der entsprechenden Zusammenfassung diskutiert.

Beitrag dieser Arbeit zur Beantwortung der Forschungsfrage FF-B.2: Welche Lernendenvoraussetzungen haben die Studierenden bezogen auf die geometrischen Konzepte *Kongruenz* und *Symmetrie*?

Im Rahmen der *Spezifizierung und Strukturierung* der Schnittstellen *Kongruenz* und *Isometrie* wurden Forschungslücken in Bezug auf das Wissen um die Eingangsvoraussetzungen der Studierenden (Lernendenperspektiven auf die Schnittstellen) identifiziert. Diese Forschungsfrage zielt genau auf eine Verringerung dieser Lücken ab und liefert damit einen wichtigen Baustein für die Entwicklungsforschungsprozesse zu diesen Themen (vgl. Kapitel 12).

Die Beantwortung der Forschungsfrage geschieht durch die qualitativen Analysen der einschlägigen ePortfolioaufgaben 2 (S. 388) und 13 (S. 396). Die Auswertung der Analysen sind in den Abschnitten 13.3.3 und 14.3.3 dargestellt; die zentralen Ergebnisse auf den Seiten 225 ff. und 285 ff. dargestellt. Insgesamt konnte festgestellt werden, dass die Ergebnisse beider Analysen konsistent zu den vorher durchgeführten Analysen zur Bedeutung der Themen *Kongruenz* und *Symmetrie* im Mathematikunterricht sind. Das Vorwissen der Studierenden stellt sich erwartungsgemäß als sehr heterogen dar.

Bezogen auf *Kongruenz* besteht ein zentrales Ergebnis darin, dass die meisten Studierenden eine starke Anbindung des *Kongruenzbegriffs* an die *Kongruenzsätze für Dreiecke* haben. Das führt dazu, dass *Kongruenzaussagen* immer mit dem Ziel verknüpft werden, einen möglichst geringen Satz an geometrischen Größen anzugeben, aus dem bereits die *Kongruenz* gefolgert werden kann. In Sinne der *Schnittstellenaspekte* wird *Kongruenz* also vor allem im Sinne des *Größenaspekts* benutzt, während der *Abbildungsaspekt* in den Studierendenbearbeitungen eine deutlich geringere Rolle spielt.

Bei den Analysen zur *Symmetrie* zeigt sich, dass es vielen Studierenden gelingt, ein übergeordnetes *Symmetriekonzept* zu beschreiben, in dem sie einen mehr oder wenig expliziten Bezug zwischen *Symmetrien* und den in der Veranstaltung *Geometrie für Lehramtsstudierende* vorher behandelten *Isometrien* herzustellen; Schwierigkeiten konnten vor allem beim Umgang mit *Symmetrie* im Sinne des *Gruppenaspekts* identifiziert werden.

Bei der Beantwortung der Forschungsfrage muss berücksichtigt werden, dass zunächst einmal nur die *Lernendenvoraussetzungen* der Studierenden der entsprechenden Zyklen analysiert wurden. Zur Formulierung allgemeingültiger *Lernendenperspektiven* müssen in weiteren Untersuchungen die entwickelten Kategorien auf weitere Datensätze angewandt werden und analysiert werden, ob *Sättigungseffekte* eintreten. Weitere Limitationen der beiden Studien wurden im Rahmen der entsprechenden Zusammenfassungen diskutiert.

Beitrag dieser Arbeit zur Beantwortung der Forschungsfrage FF-B.3: Wie evaluieren (insbesondere auch in Bezug auf die eigene Professionalisierung) die Studierenden die Gesamtveranstaltung und die speziellen professionsorientierten Lerngelegenheiten?

Zur Beantwortung dieser Forschungsfrage wurden verschiedene Fragebogenstudien durchgeführt. Die jeweiligen Schwerpunkte waren *Einschätzung der Studierenden zu den Entwurfsprinzipien und zur methodischen Gestaltung der Veranstaltung* (Abschnitt 10.1), *Einschätzungen der Studierenden zur Schnittstellenwoche *Kongruenz* unter Berücksichtigung der schnittstellenbezogenen Professionalisierung* (Abschnitt

13.3.2) und *Einschätzungen der Studierenden zur Schnittstellenwoche Symmetrie unter Berücksichtigung der schnittstellenbezogenen Professionalisierung* (Abschnitt 14.3.2).

Die Ergebnisse zur Untersuchung bezogen auf die Gesamtveranstaltung sind in Abschnitt 10.3 zusammengefasst. Als ein wesentlicher Punkt kann festgehalten werden, dass die Umsetzung von adressatengerechter Professionsorientierung aus Sicht der Studierenden, die die Veranstaltung bis zum Ende besucht haben, insgesamt gelungen ist. Die Studierenden bewerten sowohl die der Konzeption zugrunde liegenden Entwurfsprinzipien als auch deren Umsetzung positiv; die Umsetzung der *impliziten* und *expliziten Professionsorientierung* wird sogar sehr positiv bewertet. Die ebenfalls positive Bewertung des Einsatzes von STACK-Aufgaben und Visualisierungen mit GeoGebra spricht für die Nutzung dieser Elemente auch in zukünftigen Fachveranstaltungen. Das *Schnittstellen-ePortfolio* wurde zwar immer noch positiv aber insgesamt am kritischsten evaluiert. Eine Vermutung ist, dass dies auf die neuen Anforderungen entsprechender Aktivitäten zurückgeführt werden kann. Diese Einschätzung setzt sich bei den Ergebnissen der Untersuchungen zu den beiden Schnittstellenwochen fort. Auch dort werden die ePortfolioaufgaben jeweils etwas schwächer beurteilt.

Die Ergebnisse der Fragebogenstudie zu den Schnittstellenwochen *Kongruenz* und *Symmetrie* sind auf den Seiten 210 und 268 zusammengefasst. Für beide Themen zeigt sich, dass die meisten Studierenden die Schnittstellenwochen und die zugehörigen Aktivitäten positiv bewerten und den gewählten Themenschwerpunkt als relevant wahrnehmen. Darüber hinaus geben die Studierenden an, dass beide Schnittstellenwochen einen Beitrag dazu geleistet haben, fachliche Hintergründe aus professionsorientierter Perspektive besser zu durchdringen und typische professionelle Handlungsanforderungen zu bewältigen. Die eingeführten Schnittstellenaspekte wurden ebenfalls positiv – sowohl bezogen auf deren Verständlichkeit als auch bezogen auf deren Nützlichkeit, evaluiert. Die Limitationen der Studie wurden im Rahmen der entsprechenden Zusammenfassung diskutiert.

16.2 Diskussion der Ergebnisse aus Perspektive der universitären Lehrpraxis

Aus Perspektive der universitären Lehrpraxis (insbesondere im Kontext der fachmathematischen Lehramtsausbildung) liefert die vorliegende Arbeit neue Beiträge auf inhaltlicher und methodischer Ebene. Diese werde ich kurz zusammenfassen und anschließend auf den im Rahmen der Arbeit bereits mehrfach erwähnten neuralgischen Punkt der *Nachhaltigkeit des Kompetenzerwebs* eingehen.

Inhaltliche Beiträge zur Lehrpraxis Auf inhaltlicher Ebene wurde im Rahmen des Projekts eine vollständige und theoretisch fundierte Elementargeometrie-Vorlesung für Lehramtsstudierende entwickelt, deren inhaltlicher Aufbau (über die Struktur der *Saccheri-Ebene*), auch ohne die begleitenden Schnittstellenaktivitäten, in anderen Veranstaltungen genutzt werden kann. Ein wesentliches Merkmal des Zugangs ist, dass die Elementargeometrie nicht alleinstehend, sondern anschlussfähig an die üblichen Grundvorlesungen präsentiert wird. Darüber hinaus bietet die im Vergleich zur z. B. Hilbert (1977) deutlich geringere Anzahl an Axiomen die Möglichkeit, die einzelnen Axiome (Inzidenzaxiom, Spiegelungsaxiom, Parallelenaxiom) im Detail zu erkunden.

Um die Nachhaltigkeit der Skript-Entwicklung sicherzustellen, arbeite ich im Rahmen des Projekts zusammen mit Tobias Weich und Joachim Hilgert an einer diese Arbeit aus lehrpraktischer Perspektive ergänzenden Lehrbuchpublikation.

Darüber hinaus stellen die unterschiedlichen fachlich-didaktischen Analysen (insb. Kapitel 9) potenzielle Ausgangspunkte für eigenständige mathematische Aktivitäten von Studierenden im Rahmen von Seminaren oder Hausarbeiten dar.

Methodische Beiträge zur Lehrpraxis Für sich genommen stellen die Idee der *Schnittstellenwochen* (Abschnitt 8.2) und das Konzept des *Schnittstellen-ePortfolios* (Abschnitt 8.1) innovative methodische Elemente dar, die auf andere Veranstaltungen übertragen werden können, um dort die Professionsorientierung besonders zu fokussieren.

Auch die ganzheitliche Einbettung der professionsorientierten Lerngelegenheiten in ein Lehr- und Prüfungskonzept (Abschnitt 8.5) ist auf andere Lehramtsveranstaltungen übertragbar. Dabei besteht ein wesentlicher Vorteil der entwickelten Konzeption darin, dass durch die bewusste Trennung zwischen Hausaufgaben und ePortfolioaufgaben sowie zwischen „normalen“ Vorlesungen und Schnittstellenwochen das Herstellen professionsorientierter Bezüge explizit vom mathematischen Theorieaufbau getrennt wird. Auf diese Weise werden mathematische Begriffe sowohl eingebettet in einen rigorosen mathematischen Gedankengang als auch losgelöst von einem speziellen axiomatischen Aufbau und mit Bezug zum Mathematikunterricht betrachtet.

Die Professionsorientierung in der Veranstaltung *Geometrie für Lehramtsstudierende* ist so angelegt, dass fachmathematische Facetten *fachdidaktischer Urteilskompetenz* (S. 36) gefördert werden. Dies zeigt sich auch darin, dass bei den eingesetzten ePortfolioaufgaben vorwiegend auf die Nutzung fachmathematischer Dispositionen abgezielt wird; die psychologische, pädagogische und fachdidaktische Qualität von z. B. formulierten Reaktionen auf SuS-Äußerungen spielt keine Rolle. Im Sinne eines ganzheitlichen Kompetenzerwerbs wäre an dieser Stelle eine passgenaue geometriedidaktische Folgeveranstaltung ideal, in der – ggf. sogar identische – professionsorientierte Situationen aus eben dieser anderen Perspektive betrachtet werden. Im Sinne der Nachhaltigkeit und Verstetigung der Professionalisierung von Mathematiklehrkräften hätte eine solche symbiotische Beziehung zwischen einer Fachveranstaltung (in der bereits professionelle Handlungssituationen aus fachlicher Perspektive betrachtet werden) und einer Didaktikveranstaltung (in der explizit die erworbenen mathematischen Dispositionen funktional eingebunden und durch mathematikdidaktische Theorien ergänzt und bereichert werden) das Potenzial für einen weiteren Schritt zur Überwindung der zweiten Diskontinuität.

16.3 Diskussion der Ergebnisse aus Perspektive der Mathematikdidaktik

Aus mathematikdidaktischer Perspektive stellt die vorliegende Arbeit einen innovativen und praxisorientierten Beitrag zur fachdidaktischen Diskussion über Maßnahmen zur Überwindung der zweiten Diskontinuität in der gymnasialen Lehramtsausbildung dar. Ausgangspunkt des Projektes war die als Entwicklungsforschungsprojekt angelegte Konzeption und Durchführung der Fachveranstaltung „Geometrie für Lehramtsstudierende“ unter besonderer Berücksichtigung der Professionsorientierung. In dieser Arbeit beschreibe ich den theoriebasierten und -geleiteten Entwicklungspro-

zess und berichte über empirische Ergebnisse verschiedener Studien zur Evaluation des Veranstaltungskonzepts und zur Ausschärfung der Lernendenperspektiven auf die Schnittstellen-Themen. Im Rahmen des übergeordneten Projekts *SiMpLe-Geo* können darauf aufbauend nun weitere Zyklen der Entwicklungsforschung durchgeführt werden (vgl. Abschnitt 16.4). Aber auch unabhängig von der Weiterführung des Projekts liefert die Arbeit neue Beiträge zur Mathematikdidaktik auf verschiedenen Ebenen. Diese werden im Folgenden zusammengefasst:

Theoretische Perspektiven auf die Professionalisierung von Lehramtsstudierenden

Professionelle Handlungskompetenz wird in dieser Arbeit unter Verwendung des Kontinuum-Modells zum Kompetenzbegriff von Blömeke et al. (2015) formalisiert (Kapitel 2). In dieser Sichtweise stellt mathematisches Wissen und Können (wie es in den universitären Fachveranstaltungen erworben wird) eine kognitive Disposition für professionelles Handeln dar. Mit dem Ziel zu beschreiben, in welcher Weise diese Dispositionen im Rahmen der „situation-specific skills“ funktional für die Wahrnehmung, die Interpretation und das Treffen von Entscheidungen bezogen auf professionelle Handlungssituationen sind, habe ich in Abschnitt 2.3 drei verschiedene Funktionen mathematischen Wissens und Könnens für professionelles Lehrerhandeln herausgearbeitet. Diese umfassen *Mathematisches Wissen und Können als ...*

- ... Ressource und legitimierender Hintergrund für professionelles Lehrerhandeln (Abschnitt 2.3.1),
- ... epistemologischer Kompass für professionelles Lehrerhandeln (Abschnitt 2.3.2),
- ... als fachliches Panorama (Abschnitt 2.3.3).

Mit diesen Überlegungen lässt sich die zweite Diskontinuität (Kapitel 3) dahingehend beschreiben, dass in Fachvorlesungen zwar mathematische Kompetenzen aufgebaut werden, es aber keine Lerngelegenheiten dafür gibt, diese Dispositionen im Sinne der genannten Funktionen einzusetzen. Da es in der Lehrpraxis unrealistisch ist, in Fachveranstaltungen tatsächliche professionelle Handlungskompetenz zu fördern, haben wir in Biehler und Hoffmann (im Druck) den Begriff der *fachdidaktischen Urteilskompetenz* als Vorstufe professioneller Handlungskompetenz eingeführt, die reales Handeln nicht erreicht, aber neben kognitiven Dispositionen auch situationsspezifische Fähigkeiten und Fertigkeiten beinhaltet (vgl. S. 3.3). Professionsorientierte Lerngelegenheiten (z. B. Schnittstellenaufgaben) verfolgen in dieser Sichtweise das Ziel, die Studierenden beim Aufbau fachdidaktischer Urteilskompetenz zu unterstützen und damit mittelbar einen Beitrag zur professionellen Handlungskompetenz zu leisten.

Ein weiterer Beitrag zur Erweiterung der theoretischen Perspektiven auf die Professionalisierung von Lehramtsstudierenden besteht in der in Abschnitt 4 herausgearbeiteten Differenzierung in die *subjektive* und *objektive Facette* der zweiten Diskontinuität. Die subjektive Facette bezieht sich darauf, dass Studierende subjektiv der Meinung sind, dass die gelernten fachmathematischen Dispositionen nicht nützlich für professionelles Handeln sind; die objektive Facette bezieht sich darauf, dass Studierende objektiv nicht in der Lage sind die gelernten fachmathematischen Dispositionen im Sinne der oben beschriebenen Funktionen zu nutzen. Diese Unterscheidung ermöglicht insbesondere eine differenzierte Sichtweise auf Forschung und Entwicklung von Schnittstellenlerngelegenheiten.

Schnittstellen-ePortfolios als Instrument zur fachdidaktischen Entwicklungsforschung

Das in Abschnitt 8.1 vorgestellte *Schnittstellen-ePortfolio* ermöglicht es aus Lehr-Lern-Perspektive, das Herstellen professionsorientierter Bezüge explizit vom mathematischen Theorieaufbau zu trennen. Auf diese Weise werden mathematische Begriffe sowohl eingebettet in einen rigorosen

mathematischen Gedankengang als auch losgelöst von einem speziellen axiomatischen Aufbau und mit Bezug zum Mathematikunterricht und zu professionellem Handeln betrachtet. Aus Perspektive der Forschung stellt es ein reichhaltiges Artefakt für qualitative Untersuchungen dar. Diese Doppelfunktion macht solche ePortfolios zu nützlichen Werkzeugen der Entwicklungsforschung.

Beiträge zur elementargeometrischen Stoffdidaktik Im Kontext der Spezifizierung der Schnittstellen *Kongruenz* und *Symmetrie* wurde das neue Konzept der *Schnittstellenaspekte* eingeführt (Abschnitte 13.1.2, 14.6) und umgesetzt. Sowohl die Schnittstellenaspekte selbst als auch die darauf aufbauenden Analysen zu Zugängen und zur Rolle von Kongruenz und Symmetrie im Mathematikunterricht (Abschnitte 13.1.3, 14.1.3) stellen neue Beiträge zur elementargeometrischen Stoffdidaktik dar.

Stoffdidaktische Beiträge zur Hochschuldidaktik Mathematik Die vergleichenden fachlich-didaktischen Analysen in Kapitel 9 liefern auf inhaltlicher Ebene einen Beitrag, der eine theoretische Grundlage für die Konzeption von universitären Geometrie-Veranstaltungen und -Seminaren darstellt. Insbesondere die Ausarbeitung und didaktische Begründung des inhaltlich-anschaulichen ZuL-Zugangs zur hyperbolischen Geometrie (Abschnitt 9.8) ist ein innovativer Ansatz, um die Bedeutung des Parallelenaxioms zeiteffizient zu diskutieren. Darüber hinaus stellt die Analyse einen auf andere Themen übertragbaren Prototypen für einen Vergleich unterschiedlicher axiomatischer Zugänge zum selben mathematischen Lerngegenstand dar.

16.4 Perspektiven für Forschung und Entwicklung

Abschließend möchte ich einige Vorschläge für Forschungs- und/oder Entwicklungsprojekte darstellen, in denen an verschiedene Aspekte dieser Arbeit angeknüpft werden kann.

Nächste Schritte im Projekt *SiMple-Geo* Die inhaltliche Gestaltung der Gesamtveranstaltung *Geometrie für Lehramtsstudierende* ist im Wesentlichen abgeschlossen. Die nächsten Schritte im Projekt *SiMple-Geo* beziehen sich vor allem auf die Entwicklungsforschung zu den einzelnen Schnittstellen (Kapitel 12). In Kapitel 15 habe ich dahingehend den Stand zusammengefasst, der im Rahmen dieser Arbeit erreicht werden konnte, und einige offene Fragen beschrieben. Diese beziehen sich unter anderem auf die Beantwortung der in Abschnitt 6.1 bereits als Ausblick formulierten Forschungsfrage FF-B.4¹¹². Mögliche Schwerpunkte für die Weiterführung des Projekts zielen zum Teil darauf ab, nehmen aber auch andere Facetten in den Blick:

- Analysen der Studierendenbearbeitungen zu den eingesetzten Schnittstellenaufgaben, der begleitenden Interviews und der Videoaufzeichnungen aus Präsenzübungen mit dem Ziel, lokale Lehr-Lerntheorien zu entwickeln, aus denen sich mittelfristig Einsichten über Gelingensbedingungen von Schnittstellenaufgaben ableiten lassen
- Analyse von Reflexionstexten, die die Studierenden im Rahmen der ePortfolio-Arbeit verfasst haben, mit dem Ziel, Einsichten über Einstellungen und Orientierungen zur eigenen Professionalisierung zu gewinnen
- weitere Ausdifferenzierung des ePortfolio-Konzepts und des zugrundeliegenden Kompetenzmodells basierend auf theoretischen und empirischen Einsichten

¹¹²FF-B.4 Inwieweit initiieren die professionsorientierten Lerngelegenheiten (Schnittstellenlerngelegenheiten) die durch sie intendierten Lernprozesse? Welche typischen Bearbeitungsprozesse und Hürden können beobachtet werden?

- Entwicklung von Aufgabenkonzepten, die stärker auf die Nutzung fachmathematischer Dispositionen im Sinne des *epistemologischen Kompasses* und des *fachlichen Panoramas* abzielen
- Entwicklungsforschung (parallel zum Vorgehen bei *Kongruenz* und *Symmetrie*) zu den Schnittstellen *Isometrie*, *Parametrisierung* und *Orthogonalität*
- Entwicklungsforschung zum Erstellen geometriebezogener digitaler Lernumgebungen durch Lehramtsstudierende
- Überarbeitung und vertiefte Validierung der entwickelten und eingesetzten Fragebogeninstrumente

Systematisierung fachlicher Hintergründe durch Schnittstellenaspekte In dieser Arbeit wurde die Idee der *Schnittstellenaspekte* eingeführt und für *Kongruenz* und *Symmetrie* umgesetzt. In einem nächsten Schritt gilt es, den Begriff im Vergleich zu ähnlichen Konzepten wie *Aspekten* und *Grundvorstellungen* theoretisch zu verorten. Darüber hinaus kann untersucht und reflektiert werden, für welche weiteren mathematischen Konzepte die Ausarbeitung von Schnittstellenaspekten möglich und lohnenswert ist.

Abbildungsgeometrie in der Schule Ich bin an verschiedenen Stellen auf die zentrale Rolle geometrische Abbildungen eingegangen und habe herausgearbeitet, dass diese im Mathematikunterricht nur eine geringe Rolle spielen. Meiner Ansicht nach wäre es lohnenswert, einen Vorschlag für eine systematische, spirallcurriculare Einbindung des Begriffs geometrischer Abbildungen ins Schulcurriculum zu entwickeln. Dies hätte sowohl Vorteile für eine Resystematisierung der schulischen Elementargeometrie (ohne dass daraus eine gruppentheoretische Abbildungsgeometrie wird) als auch für den Aufbau von Grundvorstellungen zum Funktionsbegriff. Dabei müssen auf der einen Seite kritische Überlegungen (wie z. B. von Bender (1982)) und auf der anderen Seite die neuen Chancen, die durch die Nutzung digitaler Mathematikwerkzeuge entstehen, berücksichtigt werden.

Viereckskongruenz als Gegenstand eigenständiger mathematischer Untersuchungen Die Beschäftigung mit Kongruenzsätzen für Vierecke hat sich im Rahmen der Arbeit als reichhaltiges und höchstgradig nichttriviales mathematisches Betätigungsfeld erwiesen, das sich als Grundlage für Lerngelegenheiten zum prozessorientierten mathematischen Arbeiten (auf Schul- und Hochschulniveau) anbietet.

Literatur

- Ableitinger, C., Kramer, J. & Prediger, S. (Hrsg.). (2013). *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung*. Wiesbaden: Springer.
- Agricola, I. & Friedrich, T. (2015). *Elementargeometrie*. Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Allmendinger, H. (2016). Die Didaktik in Felix Kleins „Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus“. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 37(1), 209–237.
- Bachmann, F. (1973). *Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff*. Berlin Heidelberg New York: Springer.
- Bakker, A. & Eerde, D. V. (2015). An Introduction to Design-Based Research with an Example from Statistics Education. In A. Bikner-Ahsbahr, C. Knipping & N. C. Presmeg (Hrsg.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education* (Kap. 16, S. 429–466). Dordrecht Heidelberg New York London: Springer.
- Ball, D. L. & Bass, H. (2002). Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. In E. Simmt & D. Brent (Hrsg.), *Proceedings of the 2002 annual meeting of the canadian mathematics education study group* (S. 3–14). CMESG/GCEDM.
- Ball, D. L. & Bass, H. (2009). With an eye on the mathematical horizon: knowing mathematics for teaching to learners' mathematical futures. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2009*, 11–22.
- Ball, D. L., Thames, M. H. & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389–407.
- Ballweg, S., Scholz, N., Richter, K. & Bruder, R. (2013). Schreibend lernen lernen. In G. Bräuer & K. Schindler (Hrsg.), *Schreibarrangements für Schule, Hochschule, Beruf* (S. 188–204). Stuttgart: Klett.
- Bauer, R. & Baumgartner, P. (2012). *Schaufenster des Lernens: Eine Sammlung von Mustern zur Arbeit mit E-Portfolios*. Münster: Waxmann.
- Bauer, T. (2013). Schnittstellen bearbeiten in Schnittstellenaufgaben. In C. Ableitinger, J. Kramer & S. Prediger (Hrsg.), *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung* (Kap. 3, S. 39–56). Wiesbaden: Springer Spektrum.

- Bauer, T. (2017). Schulmathematik und Hochschulmathematik – was leistet der höhere Standpunkt? *Der Mathematikunterricht*, 63, 36–45.
- Bauer, T., Gromes, W. & Partheil, U. (2016). Mathematik verstehen von verschiedenen Standpunkten aus – Zugänge zum Krümmungsbegriff. In A. Hoppenbrock, R. Biehler, R. Hochmuth & H.-G. Rück (Hrsg.), *Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase* (S. 483–499). Wiesbaden: Springer.
- Bauer, T., Müller-Hill, E. & Weber, R. (2021). Wie kann man die „zweite Diskontinuität“ produktiv wenden? – Vorschläge mit Blick auf Argumentieren und Beweisen. In K. Hein, C. Heil, S. Ruwisch & S. Prediger (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2021* (S. 81–84). Münster: WTM-Verlag.
- Baum, D. & Klein, H. (Hrsg.). (2004). *XQuadrat 2A. 6. Klassen, Ausgabe Baden Württemberg*. München: Oldenbourg.
- Baumert, J. & Kunter, M. (2006). Stichwort: Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft*, 9(4), 469–520.
- Baumert, J. & Kunter, M. (2011a). Das Kompetenzmodell von COACTIV. In M. Kunter, J. Baumert, W. Blum, U. Klusmann, S. Krauss & M. Neubrand (Hrsg.), *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften: Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV* (Kap. 2, S. 29–53). Waxmann.
- Baumert, J. & Kunter, M. (2011b). Das mathematikspezifische Wissen von Lehrkräften, kognitive Aktivierung im Unterricht und Lernfortschritte von Schülerinnen und Schülern. In M. Kunter, J. Baumert, W. Blum, U. Klusmann, S. Krauss & M. Neubrand (Hrsg.), *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften: Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV* (Kap. 8, S. 163–192). Waxmann.
- Baumert, J., Kunter, M., Blum, W., Klusmann, U., Krauss, S. & Neubrand, M. (2011). Professionelle Kompetenz von Lehrkräften, kognitiv aktivierender Unterricht und die mathematische Kompetenz von Schülerinnen und Schülern (COACTIV) – Ein Forschungsprogramm. In M. Kunter, J. Baumert, W. Blum, U. Klusmann, S. Krauss & M. Neubrand (Hrsg.), *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV* (Kap. 1, S. 7–25). Waxmann.
- Becker, G. (1980). *Geometrieunterricht*. Bad Heilbrunn/Obb.: Klinkhardt.
- Behrends, E. (2019). *Parkettierungen der Ebene*. Wiesbaden: Springer.
- Bender, P. (1982). Abbildungsgeometrie in der didaktischen Diskussion. *ZDM*, 14(1), 9–24.
- Beutelspacher, A., Danckwerts, R., Nickel, G., Spies, S. & Wickel, G. (2011). *Mathematik Neu Denken: Impulse für die Gymnasiallehrerbildung an Universitäten*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.
- Biehler, R. (2018). Die Schnittstelle Schule / Hochschule - Übersicht und Fokus. *Der Mathematikunterricht*, 64(5), 3–15.
- Biehler, R. (2019). Allgemeinbildung, Mathematical Literacy, and Competence Orientation. In H. N. Jahnke & L. Hefendehl-Hebeker (Hrsg.), *Traditions in German-Speaking Mathematics Education Research. ICME-13 Monographs* (Kap. 6, S. 141–170). Springer.

- Biehler, R. & Hoffmann, M. (im Druck). Fachwissen als Grundlage fachdidaktischer Urteilskompetenz - Beispiele für die Herstellung konzeptueller Bezüge zwischen fachwissenschaftlicher und fachdidaktischer Lehre im gymnasialen Lehramtsstudium. In V. Isaev, A. Eichler & F. Loose (Hrsg.), *Professionsorientierte Fachwissenschaft – Kohärenzstiftende Lerngelegenheiten für das Lehramtsstudium (?)*. Springer.
- Biehler, R. & Kempen, L. (2016). Didaktisch orientierte Beweiskonzepte – Eine Analyse zur mathematikdidaktischen Ideenentwicklung. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 37(1), 141–179.
- Bigalke, A. & Köhler, N. (Hrsg.). (2015). *Mathematik. Gymnasiale Oberstufe NRW. Qualifikationsphase. Leistungskurs*. Berlin: Cornelsen.
- Biggs, J. (1996). Enhancing teaching through constructive alignment. *Higher Education*, 32(32), 347–364.
- Blömeke, S., Gustafsson, J. E. & Shavelson, R. J. (2015). Beyond dichotomies: Competence viewed as a continuum. *Zeitschrift für Psychologie / Journal of Psychology*, 223(1), 3–13.
- Bosch, M. & Gascón, J. (2014). Introduction to the Anthropological Theory of the Didactic (ATD). In A. Bikner-Ahsbals & S. Prediger (Hrsg.), (Kap. 5, S. 67–83). Springer International Publishing Switzerland. Zugriff unter <http://link.springer.com/10.1007/978-3-319-05389-9>
- Bräuer, G. (2014). *Das Portfolio als Reflexionsmedium für Lehrende und Studierende*. Opladen & Toronto: Verlag Barbara Budrich.
- Braun, A., Giersemehl, I., Jörgens, T., Jürgensen-Engl, T., Lohmann, J., Riemer, W. & Spielmanns, H. (2020). *Lambacher Schweizer 7. Mathematik für Gymnasien - G9. Nordrhein-Westfalen*. Stuttgart: Klett.
- Bruder, R., Scholz, N. & Menhard, I. (2012). *Lehrveranstaltungen mit E-Portfoliobegleitung. Handreichung für Lehrende*. TU Darmstadt. Zugriff unter <https://mahara.hrz.tu-darmstadt.de/artefact/file/download.php?file=115044&view=4585>
- Bruner, J. S. (1970). *Der Prozeß der Erziehung* (5. Aufl.). Berlin, Düsseldorf: Berlin Verlag, Pädagogischer Verlag Schwann.
- Brunner, I. & Born, J. (2007). Arbeiten mit Portfolios - Erfahrungen mit einem Online-Seminar. In M. Gläser-Zikuda & T. Hascher (Hrsg.), *Lernprozesse dokumentieren, reflektieren und beurteilen* (S. 267–294). Bad Heilbrunn: Klinkhardt.
- Bungartz, P. & Wynands, A. (1998). Wie beurteilen Referendare ihr Mathematikstudium für das Lehramt Sek II? Zugriff unter <http://www.math.uni-bonn.de/people/wynands/Kurzbericht.html>
- Burkhardt, H. & Schoenfeld, A. H. (2003). Improving Educational Research : Toward a More. *Educational Researcher*, 32(December), 3–14.
- Cukrowicz, J. & Zimmermann, B. (Hrsg.). (2000). *MatheNetz 7, Ausgabe N*. Braunschweig: Westermann.

- Danckwerts, R. & Vogel, D. [Dankwart]. (2006). *Analysis verständlich unterrichten*. München [u.a.]: Elsevier, Spektrum Akademischer Verlag.
- Davis, B. & Simmt, E. (2006). Mathematics-for-teaching: An ongoing investigation of the mathematics that teachers (need to) know. *Educational Studies in Mathematics*, 61(3), 293–319.
- Dellori, A. (2018). *Axiomatische Zugänge zur nichteuklidischen Geometrie im Rahmen der Saccherie Ebene* (Bachelorarbeit, Universität Paderborn).
- Dellori, A. (2020). *Design dynamischer Arbeitsblätter zur Untersuchung verketteter Geradenspiegelungen als Aufgabenstellung - Didaktische Analysen zu Aufgabebearbeitungen von Studierenden* (Masterarbeit, Universität Paderborn).
- Dreher, A., Lindmeier, A., Heinze, A. & Niemand, C. (2018). What Kind of Content Knowledge do Secondary Mathematics Teachers Need? *Journal für Mathematik-Didaktik*, 39(2), 319–341.
- Eberl, A., Krauss, S., Mossburger, M., Rauch, T. & Weber, P. (2021). Inwieweit kann universitäres mathematisches Fachwissen helfen, auf Schüler(Fehl)vorstellungen zu reagieren? *MNU journal*, 74(01), 62–66.
- Eichler, A. & Isaev, V. (2017). Disagreements between mathematics at university level and school mathematics in secondary teacher education. In R. Göller, R. Biehler, R. Hochmuth & H.-G. Rück (Hrsg.), *Didactics of Mathematics in Higher Education as a Scientific Discipline. Conference Proceedings* (S. 52–59). Kassel: khdm.
- Euklid. (1980). *Die Elemente. Buch I–XIII: Nach Heibergs Text aus dem Griechischen übersetzt* (C. Thaer, Hrsg.). Wissenschaftliche Buchgesellschaft.
- Feudel, F. (2020). *Die Ableitung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler. Analysen zum benötigten, gelehrten und von Studierenden erreichten Verständnis des Ableitungsbegriffs*. Wiesbaden: Springer.
- Field, A., Miles, J. & Field, Z. (2012). *Discovering Statistics Using R*. Los Angeles London New Delhi Singapore Washington DC: SAGE.
- Filler, A. (1993). *Euklidische und Nichteuklidische Geometrie*. Mannheim, Leipzig, Wien, Zürich: BI-Wissenschaftsverlag.
- Fletscher, T. (1975). Is the teacher of mathematics a mathematician or not. *Schriftenreihe des IDM Bielefeld*, 6, 203–218.
- Franke, M. & Reinhold, S. (2016). *Didaktik der Geometrie. In der Grundschule* (3. Aufl.). Berlin Heidelberg: Springer Spektrum.
- Girnat, B. (2017). *Individuelle Curricula über den Geometrieunterricht*. Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V. & Weigand, H.-G. (2016). *Didaktik der Analysis. Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe*. Berlin Heidelberg: Springer Spektrum.

- Greulich, D., Jörgens, T., Jürgensen-Engl, T., Riemer, W. & Schmitt-Hartmann, R. (Hrsg.). (2010). *Lambacher Schweizer 7. Mathematik für Gymnasien - G9. Nordrhein-Westfalen*. Stuttgart: Klett.
- Griesel, H., Postel, H. & Suhr, F. (Hrsg.). (2004). *Mathematik heute 3 - Baden Württemberg*. Braunschweig: Schroedel.
- Grieser, D. (2017). *Mathematisches Problemlösen und Beweisen* (2. Aufl.). Wiesbaden: Springer.
- Häcker, T. (2005). Mit der Portfoliomethode den Unterricht verändern. *Pädagogik*, 57(3), 13–18.
- Häcker, T. (2011). Vielfalt der Portfoliobegriffe. In I. Brunner, T. Häcker & F. Winter (Hrsg.), *Das Handbuch Portfolioarbeit* (4. Aufl., S. 33–39). Seelze: Klett/Kallmeyer.
- Hedderich, J. & Sachs, L. (2012). *Angewandte Statistik. Methodensammlung mit R* (14. Aufl.). Berlin Heidelberg: Springer.
- Hefendehl-Hebeker, L. (2013). Doppelte Diskontinuität oder die Chance der Brückenschläge. In C. Ableitinger, J. Kramer & S. Prediger (Hrsg.), *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung* (Kap. 1, S. 1–16). Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Hefendehl-Hebeker, L. & Schuster, A. (2006). *Probleme und Perspektiven der Lehramtsausbildung im Fach Mathematik. Ergebnisse eines Symposiums der Jahrestagung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 2006*. Deutsche Telekom Stiftung. Bonn.
- Heinze, A., Dreher, A., Lindmeier, A. & Niemand, C. (2016). Akademisches versus schulbezogenes Fachwissen – ein differenzierteres Modell des fachspezifischen Professionswissens von angehenden Mathematiklehrkräften der Sekundarstufe. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft*, 19(2), 329–349.
- Henn, H.-W. (2012). *Geometrie und Algebra im Wechselspiel* (2. Aufl.). Wiesbaden: Vieweg+Teubner.
- Henn, H.-W. & Filler, A. (2015). *Didaktik der analytischen Geometrie und linearen Algebra : Algebraisch verstehen - Geometrisch veranschaulichen und anwenden*. Berlin Heidelberg: Springer Spektrum.
- Hilbert, D. (1977). *Grundlagen der Geometrie* (12. Aufl.). Stuttgart: Teubner.
- Hilgert, J. (2012). *Skript zum Basismodul Geometrie (SS 2012)*. Universität Paderborn. Paderborn.
- Hilgert, J. (2014). *Skript zum Basismodul Geometrie (SS 2014)*. Universität Paderborn. Paderborn.
- Hilgert, J., Hoffmann, M. & Panse, A. (2015). *Einführung in mathematisches Denken und Arbeiten: tutoriell und transparent* (1. Aufl.). Berlin Heidelberg: Springer Spektrum.
- Hilzensauer, W. & Hornung-Prähauser, V. (2006). *ePortfolio. Methode und Werkzeug für kompetenzbasiertes Lernen*. Salzburg.
- Hoffmann, M. (2018). Konzeption von fachmathematischen Schnittstellenmodulen für Lehramtsstudierende am Beispiel ausgewählter Themen der höheren Analysis. Masterarbeit - Überarbeitete Version. *khdM-Report*, 18 - 06. Zugriff unter <http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:hebis:34-2017110153692>

- Hoffmann, M. (2020). Zirkel und Lineal ohne Parallelenaxiom: Ein konstruktiver Zugang zur hyperbolischen Geometrie. *Der Mathematikunterricht*, 66(6).
- Hoffmann, M. (2021). Einsatz von Schnittstellenaufgaben in Mathematikveranstaltungen – Praxisbeispiele aus der Universität Paderborn. In R. Biehler, A. Eichler, R. Hochmuth, S. Rach & N. Schaper (Hrsg.), *Lehrinnovationen in der Hochschulmathematik: praxisrelevant - didaktisch fundiert - forschungsbasiert*. (Kap. 9, S. 179–204). Springer.
- Hofstadter, D. R. (2018). *Gödel, Escher, Bach. Ein endlos geflochtenes Band*. (3. Aufl.). Stuttgart: Klett-Cotta.
- Holland, G. (1974). *Geometrie für Lehrer und Studenten. Band 1*. Hannover: Hermann Schroedel Verlag.
- Holland, G. (2007). *Geometrie in der Sekundarstufe* (3. Aufl.). Hildesheim, Berlin: Verlag Franzbecker.
- Hoppenbrock, A., Biehler, R., Hochmuth, R. & Rück, H.-G. (Hrsg.). (2016). *Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase*. Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Hoth, J., Jeschke, C., Dreher, A., Lindmeier, A. & Heinze, A. (2019). Ist akademisches Fachwissen hinreichend für den Erwerb eines berufsspezifischen Fachwissens im Lehramtsstudium? Eine Untersuchung der Trickle-down-Annahme. *Journal für Mathematik-Didaktik*.
- Hüsing, S. (2018). *Fachliche Analyse des Zugangs zur Dreiecks-Kongruenz in Schulbüchern mit Schwerpunkt auf „Neue Wege“* (Unveröffentlichte Bachelorarbeit, Universität Paderborn).
- Hußmann, S., Thiele, J., Hinz, R., Prediger, S. & Ralle, B. (2013). Gegenstandsorientierte Unterrichtsdesigns entwickeln und erforschen. Fachdidaktische Entwicklungsforschung im Dortmunder Modell. In M. Komorek & S. Prediger (Hrsg.), *Der lange Weg zum Unterrichtsdesign. Zur Begründung und Umsetzung fachdidaktischer Forschungs- und Entwicklungsprogramme* (S. 25–42). Münster New York München Berlin: Waxmann.
- Isaev, V. & Eichler, A. (2022). Der Fragebogen zur doppelten Diskontinuität. In S. Halverscheid, B. Schmidt-Thieme & I. Kersten (Hrsg.), *Bedarfsgerechte fachmathematische Lehramtsausbildung* (Kap. 18, S. 321–338). Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Iversen, B. (1992). An invitation to geometry. *Aarhus Universitet, Matematisk Institut: Lecture Notes Series*, 59.
- Kasten, H. & Vogel, D. [Denis]. (2018). *Grundlagen der ebenen Geometrie*. Springer.
- Kirsch, A. (1976). Eine „intellektuell ehrliche“ Einführung des Integralbegriffs in Grundkursen. *Didaktik der Mathematik*, 4(2), 87–105.
- Klein, F. (1872). Vergleichende Betrachtung über neuere geometrische Forschungen. Programm zum Eintritt in die philosophische Facultät und den Senat der k. Friedrich-Alexanders-Universität zu Erlangen. Erlangen: Verlag von Anderas Deichert.
- Klein, F. (1908). *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. Teil I: Arithmetik, Algebra, Analysis*.

- KMK. (2004). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss. Beschluss vom 4.12.2003.*
- KMK. (2012). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife. (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012).*
- Körner, H. (2015). Mathematik in Schule und Hochschule – welche Mathematik für Lehramtsstudierende? In J. Roth, T. Bauer, H. Koch & S. Prediger (Hrsg.), *Übergänge konstruktiv gestalten. Ansätze für eine zielgruppenspezifische Hochschuldidaktik Mathematik* (Kap. 14, S. 199–209). Wiesbaden: Springer.
- Körner, H., Lergenmüller, A., Schmidt, G. & Zacharias, M. (Hrsg.). (2013). *Mathematik Neue Wege 6*. Braunschweig: Bildungshaus Schulbuchverlage.
- Körner, H., Lergenmüller, A., Schmidt, G. & Zacharias, M. (Hrsg.). (2014). *Mathematik Neue Wege 7*. Braunschweig: Bildungshaus Schulbuchverlage.
- Körner, H., Lergenmüller, A., Schmidt, G. & Zacharias, M. (Hrsg.). (2020). *Mathematik Neue Wege 7*. Braunschweig: Bildungshaus Schulbuchverlage.
- Kuckartz, U. (2018). *Qualitative Inhaltsanalyse. Methoden, Praxis, Computerunterstützung*. (4. Aufl.). Weinheim Basel: Beltz Juventa.
- Kunter, M. & Baumert, J. (2011). Das COACTIV-Forschungsprogramm zur Untersuchung professioneller Kompetenz von Lehrkräften - Zusammenfassung und Diskussion. In M. Kunter, J. Baumert, W. Blum, U. Klusmann, S. Krauss & M. Neubrand (Hrsg.), *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV* (Kap. 18, S. 345–366). Waxmann.
- Kunz, E. (1976). *Ebene Geometrie*. Reinbeck bei Hamburg: Rowohlt Taschenbuch Verlag.
- Lambacher Schweizer QP NRW. (2015). *Lambacher Schweizer. Mathematik Qualifikationsphase. Leistungskurs Grundkurs. Nordrhein-Westfalen* (1. Aufl.) (M. Baum, M. Bellstedt, D. Brandt, H. Buch, R. Dürr, H. Freudigmann, ... M. Zinser, Hrsg.). Stuttgart: Klett.
- Lambert, A. (2020). Mathematik und/oder Mathe (in der Schule) - ein Vorschlag zur Unterscheidung. *Der Mathematikunterricht*, 66(2), 3–15.
- Laudano, F. & Vincenzi, G. (2017). Congruence theorems for quadrilaterals. *Journal for Geometry and Graphics*, 21(1), 45–59.
- Lenz, H. (1967). *Nichteuklidische Geometrie*. Mannheim: Bibliographisches Institut AG.
- Leuders, T. (2016). *Erlebnis Algebra: zum aktiven Entdecken und selbstständigen Erarbeiten*. Berlin Heidelberg: Springer Spektrum.
- Lindmeier, A. (2011). *Modeling and Measuring Knowledge and Competencies of Teachers. A Threefold Domain-Specific Structure Model for Mathematics*. Waxmann.

- Link, M. (2012). *Grundschul Kinder beschreiben operative Zahlenmuster. Entwurf, Erprobung und Überarbeitung von Unterrichtsaktivitäten als ein Beispiel für Entwicklungsforschung*. Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Loos, A., Sinn, R. & Ziegler, G. M. (2022). *Panorama der Mathematik*. Berlin Heidelberg: Springer.
- Menhard, I., Scholz, N. & Bruder, R. (2012). Kompetent kompetenzorientiert lehren? Einsatz von lehrveranstaltungsbezogenen Kompetenzprofilen im Rahmen eines E-Portfolio-Projekts. 7(4), 50–59.
- Mischau, A. & Blunck, A. (2014). Mathematikstudierende, ihr Studium und ihr Fach: Einfluss von Studiengang und Geschlecht. *Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 14(1), 46–52.
- Moosbrugger, H. & Kelava, A. (2012). *Testtheorie und Fragebogenkonstruktion* (2. Aufl.). Berlin Heidelberg: Springer-Verlag.
- MSW NRW (Hrsg.). (2007). *Kernlehrplan für das Gymnasium – Sekundarstufe I (G8) in Nordrhein-Westfalen. Mathematik*.
- MSW NRW (Hrsg.). (2008). *Richtlinien und Lehrpläne für die Grundschule in Nordrhein-Westfalen. Deutsch Sachunterricht Mathematik Englisch Musik Kunst Sport Evangelische Religionslehre Katholische Religionslehre*.
- MSW NRW (Hrsg.). (2014). *Kernlehrplan für die Sekundarstufe II Gymnasium/Gesamtschule in Nordrhein-Westfalen. Mathematik*.
- MSW NRW (Hrsg.). (2019). *Kernlehrplan für die Sekundarstufe I Gymnasium in Nordrhein-Westfalen*. Zugriff unter https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplan/195/g9_m_klp_3401_2019_06_23.pdf
- Neubrand, M. (2018). Conceptualizations of professional knowledge for teachers of mathematics. *ZDM*, 50, 601–612.
- NRW. (2020). *Gesetz über die Ausbildung für Lehrämter an öffentlichen Schulen (Lehrerausbildungsgesetz - LABG)*.
- Pallack, A. (Hrsg.). (2013a). *Fundamente der Mathematik 5. Nordrhein-Westfalen. Gymnasium*. Berlin: Cornelsen.
- Pallack, A. (Hrsg.). (2013b). *Fundamente der Mathematik 6. Nordrhein-Westfalen. Gymnasium*. Berlin: Cornelsen.
- Pallack, A. (Hrsg.). (2014). *Fundamente der Mathematik 7. Nordrhein-Westfalen. Gymnasium*. Berlin: Cornelsen.
- Pallack, A. (Hrsg.). (2020). *Fundamente der Mathematik 7. Nordrhein-Westfalen. Gymnasium G9*. Berlin: Cornelsen.

- Paulson, F. L., Paulson, P. R. & Meyer, C. A. (1991). What Makes a Portfolio a Portfolio? *Educational Leadership*, 48(5), 60–63.
- Philipp, R. A. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affect. In *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (S. 257–315). Charlotte, NC: Information Age Publishing.
- Pieper-Seier, I. (2002). Lehramtsstudierende und ihr Verhältnis zur Mathematik. In W. Peschek (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2002* (S. 395–398). Hildesheim: Franzbecker.
- Plomp, T. (2013). Educational design research: An introduction. In T. Plomp & N. Nieveen (Hrsg.), *Educational Design Research. Part A: An introduction* (S. 10–51).
- Prediger, S. (2013). Unterrichtsmomente als explizite Lernanlässe in fachinhaltlichen Veranstaltungen. In C. Ableitinger, J. Kramer & S. Prediger (Hrsg.), *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung* (Kap. 9, S. 151–168). Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Prediger, S. (2015). Theorien und Theoriebildung in didaktischer Forschung und Entwicklung. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (Kap. 24, S. 643–662). Berlin Heidelberg: Springer.
- Prediger, S. (2019). Investigating and promoting teachers' expertise for language-responsive mathematics teaching. *Mathematics Education Research Journal*, 31(4), 367–392.
- Prediger, S. & Hefendehl-Hebeker, L. (2016). Zur Bedeutung epistemologischer Bewusstheit für didaktisches Handeln von Lehrkräften. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 37(1), 239–262.
- Prediger, S., Link, M., Hinz, R., Hußmann, S., Thiele, J. & Ralle, B. (2012). Lehr-Lernprozesse initiieren und erforschen – Fachdidaktische Entwicklungsforschung im Dortmunder Modell. *Mathematischer und naturwissenschaftlicher Unterricht*, 65(8), 452–457.
- Rach, S. & Heinze, A. (2017). The Transition from School to University in Mathematics: Which Influence Do School-Related Variables Have? *International Journal of Science and Mathematics Education*, 15(7), 1343–1363.
- Rach, S. & Ufer, S. (2020). Which Prior Mathematical Knowledge Is Necessary for Study Success in the University Study Entrance Phase? Results on a New Model of Knowledge Levels Based on a Reanalysis of Data from Existing Studies. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 6, 375–403.
- Rachel, A., Schadl, C. & Ufer, S. (2018). Problemorientierte Aufgaben zur Intensivierung des Berufsfeldbezugs im Lehramtsstudium Mathematik. In Fachgruppe Didaktik der Mathematik der Universität Paderborn (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2018* (S. 1451–1454). Münster: WTM-Verlag.
- Remus, D. (2017). *Skript zum Basismodul Geometrie (SS 2017)*. Universität Paderborn. Paderborn.
- Roth, J., Bauer, T., Koch, H. & Prediger, S. (Hrsg.). (2015). *Übergänge Konstruktiv Gestalten : Ansätze Für eine Zielgruppenspezifische Hochschuldidaktik Mathematik*. Wiesbaden: Springer.

- Rowland, T. (2020). Researching Mathematical Knowledge in Teaching. In D. Potari & O. Chapman (Hrsg.), *Knowledge and beliefs in mathematics teaching and teaching development. The international handbook of mathematics teacher education: Volume 1* (2. Aufl., Kap. 4, S. 105–128). Leiden: Brill | Sense.
- Sangwin, C. (2015). Computer Aided Assessment of Mathematics Using STACK. *Selected Regular Lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education*, 695–713.
- Schmidt, G., Lergenmüller, A. & Körner, H. (Hrsg.). (2015). *Mathematik Neue Wege. Arbeitsbuch für Gymnasien. Qualifikationsphase. Nordrhein-Westfalen. Leistungskurs*. Braunschweig: Bildungshaus Schulbuchverlage.
- Scriba, C. J. & Schreiber, P. (2010). *5000 Jahre Geometrie*. Berlin, Heidelberg: Springer. Zugriff unter <http://link.springer.com/10.1007/978-3-642-02362-0>
- Seaman, C. E. & Szydlik, J. E. (2007). Mathematical sophistication among preservice elementary teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10(3), 167–182.
- Shulman, L. S. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4–14.
- Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard educational review*, 57(1), 1–23.
- Siebenhaar, S., Scholz, N., Karl, A., Hermann, C. & Bruder, R. (2013). E-Portfolios in der Hochschullehre. Mögliche Umsetzungen und Einsatzszenarien. In C. Bremer & D. Krömker (Hrsg.), *E-Learning zwischen Vision und Alltag* (S. 407–412). Münster: Waxmann.
- Speer, N. M., King, K. D. & Howell, H. (2015). Definitions of mathematical knowledge for teaching: using these constructs in research on secondary and college mathematics teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 18(2), 105–122.
- Stokes, D. E. (2011). *Pasteur's quadrant: Basic science and technological innovation*. Brookings Institution Press.
- Suzuka, K., Sleep, L., Ball, D. L., Bass, H., Lewis, J. & Thames, M. H. (2009). Designing and Using Tasks to Teach Mathematical Knowledge for Teaching. In D. S. Mewborn & H. S. Lee (Hrsg.), *Scholarly Practices and Inquiry in the Preparation of Mathematics Teachers* (S. 7–23). Association of Mathematics Teacher Educator.
- Tatto, M. T., Schwille, J., Senk, S. L., Ingwarson, L., Rowley, G., Peck, R., . . . Reckase, M. (2012). *Policy, Practise, and Readiness to Teach Primary and Secondary Mathematics in 17 Countries: Findings from the IEA Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-M)*. Amsterdam: IEA.
- Trudeau, R. (1998). *Die geometrische Revolution*. Basel: Springer.
- Universität Paderborn. (2016a). Allgemeine Bestimmungen der Prüfungsordnung für den Bachelorstudiengang Lehramt an Gymnasien und Gesamtschulen an der Universität Paderborn. 12.

- Juni 2020. Zugriff unter <http://digital.ub.uni-paderborn.de/hs/download/pdf/2083933?originalFilename=true>
- Universität Paderborn. (2016b). Besondere Bestimmungen der Prüfungsordnung für den Masterstudiengang Lehramt an Gymnasien und Gesamtschulen mit dem Unterrichtsfach Mathematik an der Universität Paderborn. 12. Juni 2020. Zugriff unter <http://digital.ub.uni-paderborn.de/hs/download/pdf/2101195?originalFilename=true>
- UPB. (2011). Besondere Bestimmungen der Prüfungsordnung für den Bachelorstudiengang Lehramt an Gymnasien und Gesamtschulen mit dem Unterrichtsfach Mathematik an der Universität Paderborn. Zugriff unter <https://plaz.uni-paderborn.de/lehrerbildung/lehramtsstudium-und-pruefungen/lehramtsstudium-bachelor-of-education/bachelor-of-education-fuer-die-lehraemter-g-hrsge-gyge-bk-mit-gleichwertigen-faechern-und-sp/pruefungsordnungen-bed-vor-wise-201617>
- van den Akker, J., Gravemeijer, K., McKenney, S. & Nieveen, N. (2006). Introducing educational design research. In J. van den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney & N. Nieveen (Hrsg.), *Education Design Research* (S. 3–7). London: Routledge.
- Vance, I. E. (1982). Minimum Conditions for Congruence of Quadrilaterals. *School Science and Mathematics*, 82(5), 403–415.
- Volkert, K. (Hrsg.). (2015). *David Hilbert. Grundlagen der Geometrie (Festschrift 1899)*. Berlin Heidelberg: Springer.
- Vollrath, H.-J. (1979). Die Bedeutung von Hintergrundtheorien für die Bewertung von Unterrichtssequenzen. *Der Mathematikunterricht*, 25(5), 77–89.
- Wagner, J. (2017). *Einblicke in die euklidische und nichteuklidische Geometrie*. Detuschland: Springer Spektrum.
- Wasserman, N. H., Fukawa-Connelly, T., Villanueva, M., Mejia-Ramos, J. P. & Weber, K. (2017). Making Real Analysis Relevant to Secondary Teachers: Building Up from and Stepping Down to Practice. *Primus*, 27(6), 559–578.
- Weich, T. (2016). *Skript zum Basismodul Geometrie (SS 2016)*. Universität Paderborn. Paderborn.
- Weigand, H.-G. (2013). Grußwort der GDM zur Verabschiedung von Prof. Lisa Hefendehl aus dem aktiven Dienst am 25.04.2013. *GDM-Mitteilungen*, 95.
- Weigand, H.-G., Filler, A., Hölzl, R., Kuntze, S., Ludwig, M., Roth, J., ... Wittman, G. (2014). *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I* (2. Aufl.). Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.
- Weiss-Pidstrygach, Y. (2014). Umfängliches und Diametrales. In R. Kaenders & R. Schmidt (Hrsg.), *Mit GeoGebra mehr Mathematik verstehen* (2. Aufl., Kap. 4, S. 41–61). Wiesbaden: Springer.
- Winter, H. (1976). Was soll Geometrie in der Grundschule. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 8(1/2), 14–18.

- Winter, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didakt. der Math.* (61), 37–46.
- Wittmann, E. C. & Müller, G. N. (1997). *Spiegeln mit dem Spiegelbuch*. Stuttgart, Leipzig: Klett.
- Wolf, P. (2017). *Anwendungsorientierte Aufgaben für Mathematikveranstaltungen der Ingenieurstudiengänge*. Wiesbaden: Springer. Zugriff unter <http://link.springer.com/10.1007/978-3-658-17772-0>
- Wu, H.-H. (2011). The mis-education of mathematics teachers. *Notices of the AMS*3, 58(3), 34–37.
- Zwetschler, L. (2015). *Gleichwertigkeit von Termen. Entwicklung und Beforschung eines diagnosegeleiteten Lehr-Lernarrangements im Mathematikunterricht der 8. Klasse*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Allgemeiner Begriffsindex

- Constructive Alignment, 80
- Diskontinuität
 - doppelte, 29
 - objektive Facette, 31, 32
 - subjektive Facette, 31, 32
 - erste, 30
 - zweite, 30
- Entwurfsprinzipien
 - explizite Professionsorientierung, 35, 36
 - implizite Professionsorientierung, 35, 36
 - Orientierung an der fachspez. Darstellungsmethodik, 35
 - Orientierung an der fachspezifischen Darstellungsmethodik, 35
 - Orientierung an der Fachsystematik, 35
- eTests, 76
- epistemologische Aspekte, 18
- epistemologische Bewusstheit, 18
- Forschungsfragen, 54
- Funktionen math. Wissens und Könnens
 - epistemologischer Kompass, 18
 - fachliches Panorama, 21
 - legitimierender Hintergrund, 14
 - Ressource, 14
- fachdidaktische Urteilskompetenz, 36
- fundamental principles of mathematics, 20
- Grunderfahrungen (nach Winter), 10
- generische Definition, 151
- Hintergrundtheorie, 12
- Intellectual Trickle-Down Theory, 30
- intellektuelle Ehrlichkeit, 12
- Kompetenz als Kontinuum, 8
- mathematical sophistication, 19
- mathematikhaltige professionelle Handlungsforderungen, 9
- Portfolio, 45
 - Definition, 46
 - Dimensionen von Portfolioarbeit, 47
 - ePortfolio, 48
- professionelle Handlungskompetenz, 7
- Schnittstellen-ePortfolio, 73
 - Aktivitäten, 74
 - Organisation, 74
 - theoretische Einordnung, 75
 - Ziele, 73
- Schnittstellenaspekt, 151
- Schnittstellenaspekte
 - Kongruenz
 - Abbildungsaspekt, 169
 - Größenaspekt, 168
 - Klassifikationsaspekt, 169
 - Relationsaspekt, 169
- Schnittstellenwochen
 - allgemein, 76
- Spiralprinzip (Spiralcurriculum), 12

Mathematischer Index

- Drehsymmetrie, 234
- Dreieck, 161
- Dreispiegelungssatz
 - euklidisch, 65
- euklidische Ebene, 67
- Figur
 - kongruent, 65
- Fundamentalebene, 238
- französische Eisenbahnmetrik, 88
- Gerade, 82
 - euklidisch, *siehe* Vektorraumgerade
 - metrisch, *siehe* metrische Gerade
- Inzidenzaussagen, 83
- Inzidenzaxiom, 66
- Isometrie, 66
 - bijektiv, 109
 - euklidisch, 64
- Kongruenzsätze
 - SSS, 70
- metrische Gerade, 65, 82, 90
 - Parametrisierung, 65, 82
 - isometrische Parametrisierung, 65, 82
- Orbit, 237
- Orthogonalität
 - euklidisch, 64
- Parallelenaxiom, 67, 99
- Parallelität, 67, 99
- Punktsymmetrie, 234
- Reelle Zahlen, 82
- Saccheri-Ebene, 66
- Seiten
 - einer Gerade, 66, 96
- Spiegelsymmetrie, 234
- Spiegelung
 - Gerade, 66, 96
- Spiegelungsaxiom, 66, 96
- Symmetriegruppe, 234
- Vektorraumgerade, 63, 85, 90
- Winkel
 - euklidisch, 64
- Winkelgröße
 - euklidisch, 64

Abbildungsverzeichnis

2.1	Kompetenz, als Kontinuum modelliert.	8
2.2	<i>Domains of Mathematical Knowledge for Teaching</i>	24
5.1	Dimensionen zur Charakterisierung und Unterscheidung von Portfolioarbeiten.	47
6.1	Quadrantenmodell nach Stokes (2011, S. 73).	56
7.1	Beweisidee für den Kongruenzsatz SSS, die sowohl in der Saccheri-Ebene als auch im euklidischen Raum \mathbb{R}^2 funktioniert.	70
7.2	Schritte zum Beweis des Kongruenzsatzes SSS im euklidischen Raum \mathbb{R}^2 und in der Saccheri-Ebene.	71
8.1	Screenshot einer Variante der Aufgabe STACK-1-5.	79
8.2	Einsatz der eTests im Moodle-Kurs der Veranstaltung <i>Geometrie für Lehramtsstudierende</i> (Screenshot).	79
9.1	Parametrisierung einer metrischen Geraden.	83
9.2	Bezüglich der $\ \cdot\ _\infty$ -Norm gibt es außer der Vektorraumgerade noch weitere metrische Geraden durch die Punkte A und B.	88
9.3	In dieser Geometrie sind alle zweielementigen Teilmengen der Punktmenge $\mathbb{P} = \{A, B, C, D\}$ Hilbert-Geraden.	89
9.4	Zusammenfassung des Vergleichs unterschiedlicher Zugänge für Geraden.	90
9.5	Beweisskizze zur mathematischen Bemerkung 9.3.3, Teil 1.	95
9.6	Beweisskizze zur mathematischen Bemerkung 9.3.3, Teil 2.	95
9.7	Beweisskizze zur mathematischen Bemerkung 9.3.3, Teil 3.	95
9.8	Beweisskizze für die Trennungseigenschaft von Geraden im Rahmen der Hilbert-Axiomatik unter Verwendung des <i>Pasch-Axioms</i>	97

9.9	Existenz des rechten Winkels und Konstruktion einer Geradenspiegelung im Kontext der Hilbert-Axiomatik.	98
9.10	Die geometrische Deutung des Produkts das Produkt $s_{\tau_1}(\tau_2)$ entspricht der geometrischen Interpretation des euklidischen Skalarprodukts im \mathbb{R}^2	104
9.11	Multiplikation von Hilbert-Strecken a und b	104
9.12	Skizze zum Satz von Pappos-Pascal	105
9.13	Kommutativität der Multiplikation von Hilbert-Strecken.	106
9.14	Beweisskizze zum ersten Fall des Beweises der Bijektivität von Isometrien in Saccheri-Ebenen.	110
9.15	Beweisskizze zum zweiten Fall des Beweises der Bijektivität von Isometrien in Saccheri-Ebenen.	110
9.16	Geraden in der Poincaré-Halbebene.	113
9.17	Planskizze zur Kreisinverson.	114
9.18	Konstruktion einer Typ-1-Geraden.	115
9.19	Verschiedene parallele Geraden zu g_1 bzw. g_2 durch P	116
9.20	Spiegelung von g an h (Teil 1).	116
9.21	Spiegelung von g an h (Teil 2).	117
9.22	Jeder Punkt auf g wird tatsächlich auf die konstruierte Gerade abgebildet.	117
9.23	Die Punkte auf g liefern eine äquidistante Einteilung bezüglich der hyperbolischen Metrik d_H	118
9.24	Die Bilder verschiedener Translationen in gleicher Richtung liegen nicht zwingend auf einer hyperbolischen Geraden.	119
9.25	Verschiedene hyperbolische Dreiecke.	120
9.26	Zweischaliges Hyperboloid (links) und Pseudosphäre (rechts).	121
9.27	Punkte und hyperbolische Gerade in unterschiedlichen Modellen: Beltrami-Klein (links), Poincaré-Scheibe (mittig) und Poincaré-Halbebene (rechts).	121
9.28	Saccheri-Viereck	122
10.1	Darstellung der Ergebnisse zur Einschätzung der Relevanz der in Abschnitt 3.3 vorgeschlagenen Entwurfsprinzipien durch die Studierenden aller drei Zyklen (Items EntwurfPrinzRelevanz_1 bis EntwurfPrinzRelevanz_7).	132
10.2	Darstellung der Ergebnisse zur Umsetzung der in Abschnitt 3.3 vorgeschlagenen Entwurfsprinzipien in der Veranstaltung <i>Geometrie für Lehramtsstudierende</i> (Items EntwurfPrinzUmsetzung_1 bis EntwurfPrinzUmsetzung_7).	133

10.3	Darstellung der Ergebnisse zur Einschätzung der Nützlichkeit des begleitenden ePortfolio-Einsatzes durch die Studierenden aller drei Zyklen (Item <i>ePortfolio_Nuetzlichkeit</i>).134	
10.4	Darstellung der Ergebnisse zur Bewertung der Häufigkeit der eingesetzten Veranstaltungselemente durch die Studierenden aller drei Zyklen (Items <i>Umfang_ePortfolio</i> , <i>Umfang_eRechenaufgaben</i> , <i>Umfang_Visualisierungen</i>).	134
10.5	Darstellung der Ergebnisse zu den Beliefs der Studierenden aller drei Zyklen zur Berufsrelevanz und inhaltlichen Verbundenheit bezogen auf die bisher besuchten Mathematikveranstaltungen (oben) und bezogen auf die Veranstaltung <i>Geometrie für Lehramtsstudierende</i> (unten) (Skalen DDRB, DDIV, GRB, GIV).	137
10.6	Pre-Post-Vergleich der Beliefskalen auf Einzelfallebene. Jede Linie steht für einen der Studierenden aus den drei Zyklen.	138
12.1	Zyklus der Fachdidaktischen Entwicklungsforschung im Dortmunder Modell.	148
12.2	Zyklenmodell zur Entwicklung und Beforschung von Schnittstellenlerngelegenheiten.	150
13.1	Beweisskizze zum Lemma über die Kongruenzklassen von Geraden	160
13.2	Beweisskizze zum Lemma über die Kongruenzklassen von Strecken.	161
13.3	Beispiel für eine konvexe Menge mit drei Extrempunkten, die kein Dreieck im intendierten Sinn ist.	162
13.4	Beweisskizze zum Kongruenzsatz SSS.	164
13.5	Beweisskizze zu den Kongruenzsätzen SWS und WSW.	165
13.6	Beweisskizze zum Kongruenzsatz SsW.	167
13.7	Gegenbeispiel für die Gültigkeit eines Kongruenzsatzes SSSS für Vierecke.	167
13.8	Gegenbeispiel für die Gültigkeit eines Kongruenzsatzes SWSW für Vierecke.	167
13.9	Verzichtet man auf eine feste Anordnung der Seiten (Mitte) und/oder die Forderung von Konvexität (rechts), folgt aus der Übereinstimmung in allen Seitenlängen und der Länge einer Diagonale noch nicht die Kongruenz.	168
13.10	Schnittstellenaspekte zum Kongruenzbegriff.	170
13.11	Definiert man <i>formgleich</i> über die Anzahl der Ecken, reicht für die <i>Gleichheit der Maße</i> ein Vergleich der Kantenlängen nicht aus, um den Kongruenz-Begriff zu definieren. Ansonsten wären diese beiden Vierecke kongruent.	173
13.12	Die beiden Vierecke stimmen in ihren Winkeln überein, sind aber nicht ähnlich. . . .	174
13.13	Unterstützende Skizzen zu ausgewählten Fällen aus Tabelle 13.2.	180
13.14	Planvolles Nutzen geometrischer Abbildungen beim Beweis von SWS.	184
13.15	Wegen der Gleichschenkligkeit sind die beiden Dreiecke kongruent, auch wenn die Ausgangssituation für die Anwendung von WSW nur im rechten Dreieck gegeben ist.187	

13.16	Darstellung der Ergebnisse zur Bewertung der Schnittstellenwoche <i>Kongruenz</i> durch die Studierenden der Zyklen 1 und 2 (Items BewertungVL, BewertungPue, BewertungHue, Bewertung).	206
13.17	Darstellung der Ergebnisse zur Einschätzung der Verständlichkeit der Aufgabenstellungen durch die Studierenden (Items VerstaendlichkeitPue, VerstaendlichkeitHue).	207
13.18	Darstellung der Ergebnisse zur Beurteilung der Studierenden der Zyklen 1 und 2 zum generellen und mathematischen Anspruch der Schnittstellenwoche <i>Kongruenz</i> (Items SchwierigkeitVL, SchwierigkeitPue, SchwierigkeitHue, Schwierigkeit, SchwierigkeitVLMathe, SchwierigkeitPueMathe, SchwierigkeitHueMathe, SchwierigkeitMathe).	207
13.19	Darstellung der Studierenden-bezogenen Differenzen im Antwortverhalten zur Einschätzung des generellen und mathematischen Anspruchs der Schnittstellenwoche <i>Kongruenz</i> .	208
13.20	Auswertungen der Einschätzungen der Studierenden der Zyklen 1 und 2 zur aufgabenbezogenen Motivation in der Schnittstellenwoche <i>Kongruenz</i> (Skala Aufgabenmotivation)	208
13.21	Auswertungen der Einschätzungen der Studierenden der Zyklen 1 und 2 zum Item Aufgabenmotivation_2.	209
13.22	Vergleich des Item Aufgabenmotivation_2 mit der Skala Aufgabenmotivation.	210
13.23	Darstellung der Ergebnisse zu Relevanzeinschätzungen durch die Studierenden der Zyklen 1 und 2 (Items Relevanz_Profession, Relevanz_SuS, Relevanz_Matheunterricht).	210
13.24	Auswertung der Skalen bezogen auf die Selbsteinschätzungen der Studierenden zur schnittstellenbezogenen Professionalisierung in der Schnittstellenwoche <i>Kongruenz</i> (Skalen Hintergrundtheorie, SelbstwirksamkeitProfHandeln, Schnittstellenaspekte).	211
13.25	Darstellung der Ergebnisse zur Einschätzung der Studierenden der Zyklen 1 und 2 zum Transferpotenzial der Schnittstellenwoche <i>Kongruenz</i> auf andere Themenbereiche. (Items Transfer_1, Transfer_2, Transfer_3)	212
13.26	Schnittstellenaspekte zum Kongruenzbegriff (vgl. Abschnitt 13.1.2)	228
14.1	Der Orbit eines Punktes P.	237
14.2	Darstellung verschiedener Fundamentalbereiche der Figur F aus Abbildung 14.1 mit $\text{Sym}(F) = \left\{ \text{id}, \sigma_g, \sigma_k, \sigma_l, \rho_S, \frac{2\pi}{3}, \rho_S, \frac{4\pi}{3} \right\}$.	238
14.3	Alle Abbildungen halten das Rechteck invariant. Ohne die Beschriftung der Ecken würde man die Anwendung der Abbildung nicht erkennen.	240
14.4	Rekonstruktion symmetrischer Figuren	241

14.5	Rekonstruktion einer 90° -drehsymmetrischen Figur aus einem Fundamentalbereich.	241
14.6	Schnittstellenaspekte zum Symmetriebegriff.	242
14.7	Das <i>Haus der Vierecke</i> aus Symmetrie-Perspektive.	249
14.8	Beweis des Satzes von Pythagoras mit einer symmetrischen Erweiterung	252
14.9	Darstellung der Ergebnisse zur Bewertung der Schnittstellenwoche <i>Symmetrie</i> durch die Studierenden der Zyklen 1 und 2 (Items BewertungVL, BewertungPue, BewertungHue, Bewertung).	264
14.10	Darstellung der Ergebnisse zur Einschätzung der Verständlichkeit der Aufgabenstellungen durch die Studierenden (Items VerstaendlichkeitPue, VerstaendlichkeitHue).	264
14.11	Darstellung der Ergebnisse zur Beurteilung der Studierenden der Zyklen 1 und 2 zum generellen und mathematischen Anspruchs der Schnittstellenwoche <i>Symmetrie</i> (Items SchwierigkeitVL, SchwierigkeitPue, SchwierigkeitHue, Schwierigkeit, SchwierigkeitVLMathe, SchwierigkeitPueMathe, SchwierigkeitHueMathe, SchwierigkeitMathe).	265
14.12	Darstellung der Studierenden-bezogenen Differenzen im Antwortverhalten zur Einschätzung des generellen und mathematischen Anspruch der Schnittstellenwoche <i>Symmetrie</i>	266
14.13	Auswertungen der Einschätzungen der Studierenden der Zyklen 1 und 2 zur aufgabenbezogenen Motivation in der Schnittstellenwoche <i>Symmetrie</i> (Skala Aufgabenmotivation)	266
14.14	Auswertungen der Einschätzungen der Studierenden der Zyklen 1 und 2 zum Item Aufgabenmotivation_2.	267
14.15	Darstellung der Ergebnisse zu Relevanzeinschätzungen durch die Studierenden der Zyklen 1 und 2 (Items Relevanz_Profession, Relevanz_SuS, Relevanz_Matheunterricht).	267
14.16	Auswertung der Skalen bezogen auf die Selbsteinschätzungen der Studierenden zur schnittstellenbezogenen Professionalisierung in der Schnittstellenwoche <i>Symmetrie</i> (Skalen Hintergrundtheorie, SelbstwirksamkeitProfHandeln, Schnittstellenaspekte).	268
14.17	Darstellung der Ergebnisse zur Einschätzung der Studierenden der Zyklen 1 und 2 zum Transferpotenzial der Schnittstellenwoche <i>Symmetrie</i> auf andere Themenbereiche. (Items Transfer_1, Transfer_2, Transfer_3)	269
14.18	Die Figur lässt sich in drei kongruente Teilfiguren zerteilen, ist aber nicht symmetrisch.	277
14.19	Schnittstellenaspekte zum Symmetriebegriff (vgl. Abschnitt 14.1.2)	287
15.1	Grundstruktur des <i>Zyklenmodell zur Entwicklung und Beforschung von Schnittstellenlerngelegenheiten</i> aus Abbildung 12.2 (S. 150).	292

A.1	Skizze zum Nachweis von $\ \Theta(P)\ _2 = d(O, P)$	371
B.1	Eine Übersicht über wichtige der von Hilbert (1977) konstruierten Modelle seines Axiomensystems. Die Übersicht beruht auf der Zusammenfassung von Volkert (2015, S. 247 ff.).	378

Tabellenverzeichnis

7.1	Inhaltlicher Überblick über die einzelnen Semesterwochen in der Version des dritten Veranstaltungszyklus (Sommersemester 2020).	64
8.1	Übersicht über die in der Veranstaltung <i>Geometrie für Lehramtsstudierende</i> eingesetzten STACK-Aufgaben.	78
9.1	Eigenschaften der reellen Zahlen, die durch die isometrische Parametrisierung Eigenschaften metrischer Geraden festlegen.	84
9.2	Vergleich zweidimensionaler Modelle der hyperbolischen Geometrie.	122
10.1	Items aus dem <i>Posttest zur doppelten Diskontinuität und Veranstaltungsevaluation</i> zur Einschätzung der Relevanz der in Abschnitt 3.3 vorgeschlagenen Entwurfsprinzipien für Fachveranstaltungen, die zur Überwindung der zweiten Diskontinuität beitragen sollen.	130
10.2	Items aus dem <i>Posttest zur doppelten Diskontinuität und Veranstaltungsevaluation</i> zur Umsetzung der in Abschnitt 3.3 vorgeschlagenen Entwurfsprinzipien in der Veranstaltung <i>Geometrie für Lehramtsstudierende</i>	131
10.3	Items aus dem <i>Posttest zur doppelten Diskontinuität und Veranstaltungsevaluation</i> zur Bewertung der eingesetzten Veranstaltungselemente.	132
13.1	Unterschiedliche Zugänge zum Kongruenzbegriff für ebene Figuren. Herausgearbeitet aus Weigand et al. (2014, S. 186 ff.).	175
13.2	Übersicht über typische Dreieckskonstruktionsaufgaben (mit dem Werkzeug ZuL) und deren Randbedingungen. Entartete Dreiecke werden in dieser Übersicht ausgeschlossen.	181
13.3	Inhaltlicher Überblick basierend auf Tabelle 7.1 (S. 64). In den markierten Wochen finden Lehr-Lernaktivitäten zur Schnittstelle <i>Kongruenz</i> statt.	191
13.4	Gliederung der Vorlesung zur Schnittstellenwoche <i>Kongruenz</i>	192
13.5	Übersicht über die eingesetzten Präsenzaufgaben zur Schnittstellenwoche <i>Kongruenz</i>	193
13.6	Übersicht über die eingesetzten ePortfolio-Aktivitäten zur Schnittstelle <i>Kongruenz</i>	194

13.7	Items aus dem <i>Fragebogen zur Schnittstellenwoche Kongruenz</i> zu verschiedenen Einschätzungen zur Schnittstellenwoche und ihren Lernaktivitäten	200
13.8	Items aus dem <i>Fragebogen zur Schnittstellenwoche Kongruenz</i> zur aufgabenbezogenen Motivation	201
13.9	Items aus dem <i>Fragebogen zur Schnittstellenwoche Kongruenz</i> zu professionalisierungsbezogenen Selbsteinschätzungen zum Agieren im Rahmen des fachmathematischen Hintergrundes	202
13.10	Items aus dem <i>Fragebogen zur Schnittstellenwoche Kongruenz</i> zur Selbstwirksamkeitserwartung zum professionellen Handeln.	203
13.11	Items aus dem <i>Fragebogen zur Schnittstellenwoche Kongruenz</i> zu den Schnittstellenaspekten.	204
13.12	Items aus dem <i>Fragebogen zur Schnittstellenwoche Kongruenz</i> zur Selbsteinschätzung zum Transfer auf andere Bereiche.	205
13.13	Initiales Kategoriensystem zur Analyse der Studierendenbearbeitungen der ePortfolioaufgabe <i>Wissensstand: Kongruenz</i>	217
13.14	Teil 1 des Kategoriensystems zur Analyse der Studierendenbearbeitungen der ePortfolioaufgabe <i>Wissensstand: Kongruenz: Hauptkategorie 3, Kongruenz von Kreisen</i> . . .	218
13.15	Teil 2 des Kategoriensystems zur Analyse der Studierendenbearbeitungen der ePortfolioaufgabe <i>Wissensstand: Kongruenz: Hauptkategorie 1, Kongruenz von Dreiecken</i> . .	219
13.16	Teil 3 des Kategoriensystems zur Analyse der Studierendenbearbeitungen der ePortfolioaufgabe <i>Wissensstand: Kongruenz: Hauptkategorie 2, Kongruenz von Vierecken</i> . .	221
13.17	Übersicht über fehlerhafte Studierendenformulierungen zur Kongruenz von Vierecken.	223
13.18	Teil 4 des Kategoriensystems zur Analyse der Studierendenbearbeitungen der ePortfolioaufgabe <i>Wissensstand: Kongruenz: Hauptkategorie 4, Kongruenz beliebiger Figuren</i> .	224
13.19	Ungenau und inhaltlich problematische Studierendenformulierungen zur Kongruenz.	226
14.1	Inhaltlicher Überblick basierend auf Tabelle 7.1 auf Seite 64. In den markierten Wochen finden Lehr-Lernaktivitäten zur Schnittstelle <i>Symmetrie</i> statt.	255
14.2	Gliederung der Vorlesung zur Schnittstellenwoche <i>Symmetrie</i>	257
14.3	Übersicht über die eingesetzten Präsenzaufgaben zur Schnittstellenwoche <i>Symmetrie</i> .	258
14.4	Übersicht über die eingesetzten ePortfolio-Aktivitäten zur Schnittstelle <i>Symmetrie</i> . . .	259
14.5	Initiales Kategoriensystem zur Analyse der Studierendenbearbeitungen der ePortfolioaufgabe <i>Vorbereitende Reflexion zum Themenblock Symmetrie</i>	274
14.6	Teil 1 des Kategoriensystems zur Analyse der Studierendenbearbeitungen der ePortfolioaufgabe <i>Vorbereitende Reflexion zum Themenblock Symmetrie</i>	275

14.7	Teil 2 des Kategoriensystems zur Analyse der Studierendenbearbeitungen der ePortfolioaufgabe <i>Vorbereitende Reflexion zum Themenblock Symmetrie</i>	279
14.8	Teil 3 des Kategoriensystems zur Analyse der Studierendenbearbeitungen der ePortfolioaufgabe <i>Vorbereitende Reflexion zum Themenblock Symmetrie</i>	282
14.9	Teil 4 des Kategoriensystems zur Analyse der Studierendenbearbeitungen der ePortfolioaufgabe <i>Vorbereitende Reflexion zum Themenblock Symmetrie</i>	285
E.1	Items aus dem <i>Pretest zur doppelten Diskontinuität</i> zu Beliefs bezüglich der Koheränz zwischen Schulmathematik und universitärer Mathematik aus Isaev und Eichler (2022).	407
E.2	Items aus dem <i>Pretest zur doppelten Diskontinuität und Bildungsbiographie</i> zu Beliefs bezüglich der Nützlichkeit der universitären Mathematik für die spätere Tätigkeit als Lehrkraft in der Schule aus Isaev und Eichler (2022).	408
E.3	Items aus dem <i>Postest zur doppelten Diskontinuität und Veranstaltungsevaluation</i> zu Beliefs bezüglich der Koheränz zwischen Schulmathematik und der Mathematik in der Geometrie-Vorlesung nach Isaev und Eichler (2022).	409
E.4	Items aus dem <i>Postest zur doppelten Diskontinuität und Veranstaltungsevaluation</i> zu Beliefs bezüglich der Nützlichkeit der Mathematik in der Geometrievorlesung für die spätere Tätigkeit als Lehrkraft in der Schule nach Isaev und Eichler (2022).	410

Teil VI

Anhänge

Anhang A

Kurzskript: Axiomatische Geometrie auf Grundlage metrischer Räume

Es folgt ein Kurzskript des Veranstaltungsteils zur axiomatischen Geometrie. Dieses enthält alle verwendeten Axiome, Definitionen, Theoreme und Beweise. Allerdings wird auf weitere Erklärungen, Beispiele oder Skizzen verzichtet. Darüber hinaus befindet sich auf Seite 375 ein Begriffsindex extra für dieses Skript.

Definition A.0.1 (Metrischer Raum)

Sei X eine Menge und $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine Abbildung mit folgenden Eigenschaften für beliebige $x, y, z \in X$:

$$(M_1) \quad d(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y,$$

$$(M_2) \quad d(x, y) = d(y, x) \text{ (Symmetrie),}$$

$$(M_3) \quad d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z). \text{ (Dreiecksungleichung)}$$

Dann nennen wir (X, d) einen **metrischen Raum** und d eine **Metrik**.

A.1 Kreise

Definition A.1.1 (Kreis)

Sei (X, d) ein metrischer Raum, $r \geq 0$ und $M \in X$. Dann definieren wir durch

$$K_r(M) := \{P \in X \mid d(P, M) = r\}$$

den **Kreis** um M mit Radius r .

A.2 Geraden

Definition A.2.1 (Metrische Gerade)

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $g \subset X$ bezeichnen wir als **metrische Gerade**, wenn wir eine Abbildung $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow X$ mit den Eigenschaften

- (1) $\gamma(\mathbb{R}) = g$
- (2) $\forall t, s \in \mathbb{R} : d(\gamma(t), \gamma(s)) = |t - s|$, (Isometrie-eigenschaft)

finden können. Diese Abbildung nennen wir **(isometrische) Parametrisierung der metrischen Gerade** g .

Beispiel A.2.2 (Metrische Geraden in normierten Vektorräumen)

Sei $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum und $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ die von $\|\cdot\|$ durch $d(x, y) = \|x - y\|$ für $x, y \in \mathbb{R}^n$ induzierte Metrik. Dann ist für jedes $a, b \in \mathbb{R}^n$ mit $a \neq 0$ die Vektorraumgerade $g := \mathbb{R}a + b$ eine metrische Gerade.

Beweis. Wähle $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ als $\gamma(t) = \frac{a}{\|a\|}t + b$. Dann ist $\gamma(\mathbb{R}) = g$ und für $s, t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\|\gamma(s) - \gamma(t)\| = \left\| \frac{a}{\|a\|} (s - t) \right\| = |s - t| \cdot \left\| \frac{a}{\|a\|} \right\| = |s - t|.$$

□

Beispiel A.2.3 (Euklidische Geraden)

Aus Beispiel A.2.2 folgt sofort, dass die euklidischen Geraden, metrische Geraden im metrischen Raum (\mathbb{R}^2, d_2) sind. □

Beispiel A.2.4 (Metrische Geraden bezüglich der Maximumsnorm)

Im normierten Raum $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ gibt es durch die Punkte $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mehr als eine metrische Gerade.

Beweis. Aus dem letzten Beispiel wissen wir, dass die Vektorraumgerade durch A und B eine metrische Gerade ist. Wir betrachten nun die Abbildung

$$\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \gamma(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} t + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \end{pmatrix}, & t \leq 0 \\ \begin{pmatrix} t + \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \end{pmatrix}, & t > 0 \end{cases}$$

und zeigen, dass es bei γ sich um eine *parametrisierte Gerade* handelt, d.h. $\gamma(\mathbb{R})$ ist eine metrische Gerade, die durch die Abbildung $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \gamma(\mathbb{R})$ parametrisiert wird. Dazu seien $s, t \in \mathbb{R}$. Es können drei verschiedene Fälle auftreten:

1. $s, t \leq 0$:

$$\|\gamma(t) - \gamma(s)\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} t - s \\ \frac{1}{2}(t - s) \end{pmatrix} \right\|_\infty = |t - s|.$$

2. $s, t > 0$:

$$\|\gamma(t) - \gamma(s)\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} t - s \\ \frac{1}{2}(s - t) \end{pmatrix} \right\|_\infty = |t - s|.$$

3. $s \leq 0 < t$:

$$\|\gamma(t) - \gamma(s)\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} t - s \\ -\frac{1}{2}(t + s) \end{pmatrix} \right\|_\infty = |t - s|.$$

Also ist γ eine parametrisierte Gerade.

□

□

Bemerkung A.2.5 (Eigenschaften metrischer Geraden)

Seien (X, d) ein metrischer Raum und $g \subset X$ eine metrische Gerade, die durch $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \gamma(\mathbb{R}) = g \subset X$ parametrisiert wird. Dann gelten folgende Aussagen:

1. Weil γ eine Isometrie ist, ist γ injektiv, also bijektiv als Abbildung $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \gamma(\mathbb{R})$.
2. $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow X$ ist stetig.
3. $\gamma_{-}(x) := \gamma(-x)$ oder für $k \in \mathbb{R}$: $\gamma_k(x) := \gamma(x + k)$ sind Parametrisierungen für g . Insbesondere kann eine metrische Gerade also unendlich viele Parametrisierungen haben.

□

Lemma A.2.6

Seien (X, d) ein metrischer Raum und $g \subset X$ eine metrische Gerade mit einer Parametrisierung $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \gamma(\mathbb{R}) = g \subset X$. Ferner sei $P = \gamma(p) \in g$. Dann gibt es für jede positive reelle Zahl d genau zwei Punkte auf g , die von P den Abstand d haben.

Beweis. Auf \mathbb{R} gibt es genau zwei Punkte, deren Abstand von p gerade d ist, nämlich $q_{\pm} = p \pm d$. Da γ eine Isometrie ist, sind $Q_{\pm} := \gamma(q_{\pm})$ zwei Punkte auf g , die den Abstand d von P haben. Wenn $Q = \gamma(q)$ ein Punkt mit $d(P, Q) = d$ ist, dann gilt $d = d(P, Q) = |p - q|$, also ist $q \in \{q_+, q_-\}$ und $Q \in \{Q_+, Q_-\}$. □

Lemma A.2.7 (Charakterisierung von Parametrisierungen)

Seien (X, d) ein metrischer Raum und $g \subset X$ eine metrische Gerade. Dann gelten:

- (i) Zu $A, B \in g$ und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 < d(A, B) = |a - b|$ gibt es genau eine Parametrisierung γ von g mit $\gamma(a) = A$ und $\gamma(b) = B$.
- (ii) Zu $A, B \in g$ und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 < d(A, B) \neq |a - b|$ gibt es keine Parametrisierung γ von g mit $\gamma(a) = A$ und $\gamma(b) = B$.
- (iii) Zu $A \in g$ und $a \in \mathbb{R}$ gibt es genau zwei Parametrisierungen γ von g mit $\gamma(a) = A$.

Beweis.

- (i) Die Eindeutigkeit ist klar, weil jeder Punkt c in \mathbb{R} durch die beiden Abstände $|a - c|$ und $|b - c|$ eindeutig festgelegt wird. Um die Existenz einer solchen Parametrisierung zu zeigen, betrachten wir eine beliebige Parametrisierung $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow g \subset X$ von g . Wenn $A = \gamma(a')$, dann sind $\gamma_{\pm} : \mathbb{R} \rightarrow g \subset X, t \mapsto \gamma(\pm(t - a) + a')$ Parametrisierungen von g mit $\gamma_{\pm}(a) = A$. Weiter gilt $d(\gamma_{\pm}(b), A) = d(\gamma_{\pm}(b), \gamma_{\pm}(a)) = |b - a| = d(B, A)$. Wegen $\gamma_+(b) = \gamma(+ (b - a) + a') \neq \gamma(- (b - a) + a') = \gamma_-(b)$ zeigt Lemma A.2.6, dass $B \in \{\gamma_+(b), \gamma_-(b)\}$, das heißt, entweder γ_+ oder γ_- hat die gewünschten Eigenschaften.

(ii) Dieser Teil ist klar, weil eine Parametrisierung isometrisch sein muss.

(iii) Sei $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow g \subset X$ eine Parametrisierung von g und $a' \in \mathbb{R}$ die (eindeutig bestimmte) Zahl mit $\gamma(a') = A$. Dann sind $\gamma_{\pm} : \mathbb{R} \rightarrow g \subset X$ aus (i) zwei unterschiedliche Parametrisierungen von g mit $\gamma_{\pm}(a) = A$. Wenn $\eta : \mathbb{R} \rightarrow g \subset X$ eine beliebige Parametrisierung von g mit $\eta(a) = A$ ist, dann gilt für $B := \eta(a+1)$, dass $d(B, A) = |(a+1) - a| = 1$. Wenn $b_{\pm} \in \mathbb{R}$ so gewählt ist, dass $\gamma_{\pm}(b_{\pm}) = B$, dann gilt $1 = d(B, A) = |b_{\pm} - a|$. Also ist entweder $b_+ = a + 1$ oder $b_- = a + 1$. Nach (i) stimmt dann η entweder mit γ_+ oder mit γ_- überein.

□

Definition A.2.8 (Zwischen-Relation für metrische Geraden)

Seien (X, d) ein metrischer Raum und $g \subset X$ eine metrische Gerade mit einer Parametrisierung $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow g = \gamma(\mathbb{R}) \subset X$. Ferner seien $A = \gamma(a), B = \gamma(b)$ und $C = \gamma(c)$ Punkte auf g . Wir sagen, dass **C auf der Geraden g zwischen A und B liegt**, wenn entweder $a < c < b$ oder $a > c > b$ gilt.

Proposition A.2.9 (Wohldefiniertheit der Zwischen-Relation)

Die in A.2.8 definierte Zwischen-Relation ist wohldefiniert, im Sinne, dass sie nicht von der Wahl der Parametrisierung abhängt.

Beweis. Sei $\delta : \mathbb{R} \rightarrow g$ eine weitere isometrische Parametrisierung von g mit Parametern a', b' und c' für A, B und C . Ohne Einschränkung gelte $a < c < b$. Weil γ, δ Isometrien sind, folgt:

$$\begin{cases} |c' - a'| = d(A, C) = |c - a| = c - a, \\ |b' - c'| = d(C, B) = |b - c| = b - c, \\ |b' - a'| = d(A, B) = |b - a| = b - a. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad |c' - a'| + |b' - c'| = |b' - a'| \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a' < c' < b' & \text{oder} \\ a' > c' > b'. \end{cases}$$

Damit ist die Wohldefiniertheit gezeigt.

□

Satz A.2.10

Seien (X, d) ein metrischer Raum und $g \subset X$ eine metrische Gerade mit einer Parametrisierung $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow g = \gamma(\mathbb{R}) \subset X$. Dann gilt für alle $A, B \in g$: Liegt C auf g zwischen A und B , dann gilt

$$d(A, C) + d(C, B) = d(A, B).$$

Beweis. Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ die Parameter von A, B, C bezüglich der Parametrisierung γ . Ohne Einschränkung gelte $a < c < b$. Wir erhalten

$$d(A, C) + d(C, B) = |c - a| + |b - c| \stackrel{a < c < b}{=} |b - a| = d(A, B).$$

□

Definition A.2.11 (Stetige Wege und ihre Länge) (a) Seien (X, d) ein metrischer Raum und $a, b \in \mathbb{R}$. Eine stetige Abbildung $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ nennen wir einen **stetigen Weg**. Wir bezeichnen $\gamma([a, b]) \subset X$ als die zu γ gehörige **Kurve** mit Anfangspunkt $\gamma(a)$ und Endpunkt $\gamma(b)$.

(b) Für einen injektiven stetigen Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ in einem metrischen Raum (X, d) definieren wir die **Länge von γ** durch

$$L(\gamma) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \sum_{i=1}^n d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i-1})) \mid a \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n \leq b \right\}.$$

Bemerkung A.2.12 (Wohldefiniertheit der Weglänge für verschiedene Parametrisierungen)

Injektive stetige Wege $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ und $\delta : [c, d] \rightarrow X$ mit der selben Kurve $K \subset X$ haben die gleiche Länge, denn:

Die Verknüpfung $\delta^{-1} \circ \gamma : [a, b] \rightarrow [c, d]$ ist bijektiv, stetig und es gilt $a \mapsto c$ und $b \mapsto d$. Also sie insbesondere streng monoton steigend. Für die Umkehrfunktion $\gamma^{-1} \circ \delta$ gilt das gleiche. Damit gibt es zu jeder Folge $a \leq t_0 < \dots < t_n \leq b$ eine Folge $c \leq t'_0 < \dots < t'_n \leq d$, sodass die Summe der Abstände übereinstimmen und umgekehrt genauso. Damit stimmen auch die beiden Suprema überein und es folgt $L(\gamma) = L(\delta)$, wie gewünscht. \square

Bemerkung A.2.13 (Kürzeste-Wege Eigenschaft metrischer Geraden)

Wir erklären nun, wie aus Satz A.2.10 die Kürzeste-Wege Eigenschaft folgt.

Sei $\delta : \mathbb{R} \rightarrow X$ eine isometrische Parametrisierung von g mit $\delta(p) = P$ und $\delta(q) = Q$. Ohne Einschränkung gelte $p < q$. Da δ stetig ist, ist $\delta' := \delta|_{[p, q]}$ ein stetiger Weg von P nach Q und es gilt mit Satz A.2.10:

$$\begin{aligned} L(\delta') &= \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \sum_{i=1}^n d(\delta'(t_i), \delta'(t_{i-1})) \mid p \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n \leq q \right\} \\ &\stackrel{\text{A.2.10}}{=} \sup_{n \in \mathbb{N}} \{ d(\delta'(t_0), \delta'(t_n)) \mid p \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n \leq q \} \\ &\stackrel{\delta' \text{ isom.}}{=} \sup_{n \in \mathbb{N}} \{ |t_n - t_0| \mid p \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n \leq q \} \\ &= |p - q| = d(P, Q). \end{aligned}$$

Durch die Einschränkung der Parametrisierung auf $[p, q]$ erhalten wir also tatsächlich einen stetigen Weg von P nach Q , dessen Länge dem Abstand der beiden Punkte entspricht.

Gäbe es nun einen kürzeren Weg zwischen diesen beiden Punkten, so müsste es $n \in \mathbb{N}$ und $p = t_0 < t_1 < \dots < t_n = q$ geben, sodass

$$\sum_{i=1}^n d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i-1})) < d(P, Q)$$

gilt. Dies widerspräche aber der Dreiecksungleichung. Also stellt das Geradenstück tatsächlich eine kürzeste Verbindungen zwischen den auf ihr enthaltenden Punkten dar. Man beachte dabei aber, dass dieses Geradenstück nicht der einzige kürzeste Verbindungsweg zu sein braucht (siehe Beispiel A.2.4). \square

A.3 Isometrien

Definition A.3.1 (Isometrie)

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Eine Abbildung $\varphi : X \rightarrow Y$ heißt **Isometrie**, falls für alle $P, Q \in X$ gilt

$$d_Y(\varphi(P), \varphi(Q)) = d_X(P, Q).$$

Bemerkung A.3.2 1. Isometrien sind injektiv (folgt sofort aus der Metrikeigenschaft (M1)).

2. Ist eine Isometrie bijektiv, so ist auch die Umkehrabbildung eine bijektive Isometrie.

3. Isometrien sind stetig.

4. Parametrisierungen von metrischen Geraden sind Isometrien.

□

Beispiel A.3.3 (Die Isometrien von $(\mathbb{R}, |\cdot|)$)

Wir klassifizieren die Isometrien des metrischen Raums $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Dazu betrachten wir die folgenden beiden Mengen

$$R := \{r_y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid y \in \mathbb{R}, x \mapsto r_y(x) = y - x\}, \quad T := \{t_y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid y \in \mathbb{R}, x \mapsto t_y(x) = y + x\}.$$

Wir interpretieren R und T zunächst geometrisch und zeigen anschließend, dass die Vereinigung der beiden Mengen $\text{Isom}(\mathbb{R})$ ist. Seien $x, y \in \mathbb{R}$, $r_y \in R$ und $t_y \in T$. Es gelten

$$r_y(x) = r_y\left(\frac{y}{2} + \left(x - \frac{y}{2}\right)\right) = \frac{y}{2} - \left(x - \frac{y}{2}\right) \quad \text{und} \quad t_y(x) = t_y(x) = y + x.$$

R beschreibt Spiegelungen r_y am Punkt $\frac{y}{2}$, T Verschiebungen t_y um y .

Für $x_1, x_2, y \in \mathbb{R}$ gilt $|(x_1 \pm y) - (x_2 \pm y)| = |x_1 \pm y - x_2 \mp y| = |x_1 - x_2|$, also $R, T \subset \text{Isom}(\mathbb{R})$.

Seien umgekehrt $\gamma \in \text{Isom}(\mathbb{R})$ und $y := \gamma(0)$. Dann folgt für $x \in \mathbb{R}$ aus $|\gamma(0) - \gamma(x)| = |0 - x| = x$:

$$\gamma(x) \in \{\gamma(0) \pm x\} = \{y \pm x\} = \{t_y(x), r_y(x)\} \quad (\star).$$

Insbesondere gilt also $\gamma(1) \in \{y \pm 1\}$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

Fall 1: $\gamma(1) = y + 1$. Angenommen es gäbe ein $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $\gamma(x) \neq y + x = t_y(x)$. Nach (\star) wäre dann $\gamma(x) = y - x$. Da γ eine Isometrie ist, folgt

$$|x - 1| = |\gamma(x) - \gamma(1)| = |y - x - (y + 1)| = |-x - 1| = |x + 1|.$$

Wegen $x \neq 0$ kann dies aber nicht sein. Widerspruch. Zusammen mit $\gamma(0) = y = y + 0 = t_y(0)$ folgt $\gamma = t_y$.

Fall 2: $\gamma(1) = y - 1$. Angenommen es gäbe ein $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $\gamma(x) \neq y - x = r_y(x)$. Nach (\star) wäre dann $\gamma(x) = y + x$. Da γ eine Isometrie ist, folgt

$$|x - 1| = |\gamma(x) - \gamma(1)| = |y + x - (y - 1)| = |y + x - y + 1| = |x + 1|.$$

Wegen $x \neq 0$ kann dies aber nicht sein. Widerspruch. Zusammen mit $\gamma(o) = y = y - o = r_y(o)$ folgt $\gamma = r_y$.

Es folgt $\gamma \in R \cup T$ und damit die gewünschte Aussage $R \cup T = \text{Isom}(\mathbb{R})$. \square

Lemma A.3.4 (Kreise unter Isometrien)

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $\varphi : X \rightarrow Y$ eine bijektive Isometrie. Dann gilt für $M \in X$ und $r > 0$:

$$\varphi(K_r(M)) = K_r(\varphi(M)).$$

Isometrien bilden also Kreise auf Kreise ab, wobei der Radius erhalten bleibt.

Beweis.

$$\begin{aligned} P \in \varphi(K_r(M)) &\stackrel{\text{bijektiv}}{\Leftrightarrow} \varphi^{-1}(P) \in K_r(M) \Leftrightarrow d_X(\varphi^{-1}(P), M) = r \\ &\stackrel{\text{Isometrie}}{\Leftrightarrow} d_Y(P, \varphi(M)) = r \Leftrightarrow P \in K_r(\varphi(M)). \end{aligned}$$

\square

Lemma A.3.5 (Metrische Geraden unter Isometrien)

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $\varphi : X \rightarrow Y$ eine bijektive Isometrie. Ferner sei $g \subset X$ eine metrische Gerade. Dann ist auch $\varphi(g)$ eine metrische Gerade.

Beweis. Sei $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow X$ eine Parametrisierung von g . Dann gelten für $\delta := \varphi \circ \gamma : \mathbb{R} \rightarrow X$ folgende Eigenschaften:

$\delta(\mathbb{R}) = \varphi(\gamma(\mathbb{R})) = \varphi(g)$ und außerdem für $s, t \in \mathbb{R}$:

$$d_Y(\delta(s), \delta(t)) = d_X(\gamma(s), \gamma(t)) = |t - s|.$$

Somit ist γ eine Parametrisierung einer metrischen Gerade und $\varphi(g)$ eine metrische Gerade. \square

Bemerkung A.3.6 (Gruppe der bijektiven Isometrien)

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $\text{Isom}(X)$ die Menge der bijektiven Isometrien $X \rightarrow X$. Es ist leicht zu verifizieren, dass $\text{Isom}(X)$ abgeschlossen unter der Verkettung von Abbildungen ist und $(\text{Isom}(X), \circ)$ eine Gruppe bildet. \square

A.4 Saccheri-Ebenen

Axiom A.4.1 (Inzidenzaxiom)

Sei (X, d) ein metrischer Raum mit mindestens zwei Punkten. Wir sagen, dass X das **Inzidenzaxiom** der ebenen Geometrie erfüllt, falls es zu je zwei Punkten $A, B \in X$ mit $A \neq B$ genau eine metrische Gerade gibt, die A und B enthält.

Proposition A.4.2 (Strikte Dreiecksungleichung)

Sei (X, d) ein metrischer Raum, der das Inzidenzaxiom A.4.1 erfüllt. Ferner seien $A, B, C \in X$ Punkte,

die nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Dann gilt die **strikte Dreiecksungleichung**

$$d(A, C) < d(A, B) + d(B, C).$$

Beweis. Wir führen einen Beweis durch Widerspruch. Angenommen es gälte

$$d(A, C) = d(A, B) + d(B, C). \quad (\star)$$

Wir wählen $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $b - a = d(A, B)$ und $c - b = d(B, C)$. Da das Inzidenzaxiom erfüllt ist, existieren drei metrische Geraden die jeweils paarweise A, B und C enthalten. Wegen (\star) können wir Parametrisierungen $\gamma_{AB}, \gamma_{BC}, \gamma_{AC} : \mathbb{R} \rightarrow X$ wählen mit

$$\begin{aligned} \gamma_{AB}(a) &= A, & \gamma_{AB}(b) &= B, \\ \gamma_{AC}(a) &= A, & \gamma_{AC}(c) &= C, \\ \gamma_{BC}(b) &= B, & \gamma_{BC}(c) &= C. \end{aligned}$$

Um zu zeigen, dass A, B und C unter obiger Annahme tatsächlich auf einer metrischen Gerade liegen, konstruieren wir zunächst einen Kandidaten für eine Parametrisierung:

$$\gamma : \mathbb{R} \rightarrow X, \quad t \mapsto \begin{cases} \gamma_{AC}(t), & t < a \\ \gamma_{AB}(t), & t \in]a, b], \\ \gamma_{BC}(t), & t \in]b, c], \\ \gamma_{AC}(t), & t > c. \end{cases}$$

Nun muss gezeigt werden, dass γ tatsächlich die Parametrisierung einer metrischen Geraden ist. Dazu seien $s, t \in \mathbb{R}$. Unser Ziel ist der Nachweis der definierenden Eigenschaft parametrisierter metrischer Geraden: $d(\gamma(s), \gamma(t)) = |s - t|$.

Wenn s und t aus demselben Definitionsintervall von γ sind, ist nichts zu zeigen, da γ_{AB}, γ_{AC} und γ_{BC} als Parametrisierungen metrischer Geraden die zu zeigende Eigenschaft erfüllen. Für die anderen Fälle zeigen wir die Abschätzungen $d(\gamma(s), \gamma(t)) \leq |s - t|$ (1) und $d(\gamma(s), \gamma(t)) \geq |s - t|$ (2).

(1) Wir betrachten den Fall $s \in]a, b], t \in]b, c]$ die anderen Fälle rechnet man analog.

$$\begin{aligned} d(\gamma(s), \gamma(t)) &\leq d(\gamma(s), \gamma(b)) + d(\gamma(b), \gamma(t)) \\ &= d(\gamma_{AB}(s), \gamma_{AB}(b)) + d(\gamma_{BC}(b), \gamma_{BC}(t)) \\ &= s - b + b - t \\ &= |s - t|. \end{aligned}$$

(2) Wähle $m, M \in \mathbb{R}$ mit $m \leq \min(a, s)$ und $M \geq \max(t, c)$. Dann liegen $\gamma(m)$ und $\gamma(M)$ auf $\gamma_{AC}(\mathbb{R})$ und es gilt

$$\begin{aligned} M - m &= |M - m| = d(\gamma_{AC}(m), \gamma_{AC}(M)) \\ &= d(\gamma(m), \gamma(M)) \\ &\leq d(\gamma(m), \gamma(s)) + d(\gamma(s), \gamma(t)) + d(\gamma(t), \gamma(M)) \\ &\stackrel{(1)}{\leq} s - m + d(\gamma(s), \gamma(t)) + M - t. \end{aligned}$$

Umstellen der Ungleichung liefert $d(\gamma(s), \gamma(t)) \geq |t - s|$.

Damit ist γ die Parametrisierung der metrischen Geraden $\gamma(\mathbb{R})$, auf der A, B und C liegen. Dies steht im Widerspruch zur Voraussetzung. Damit kann (\star) nicht gelten, und die Behauptung folgt aus der Dreiecksungleichung. \square

Satz A.4.3 (Metrische Geraden unter Isometrien (mit Inzidenzaxiom))

Seien (X, d) ein metrischer Raum, der das Inzidenzaxiom A.4.1 erfüllt und $\varphi : X \rightarrow Y$ eine Isometrie. Ferner sei $g \subset X$ eine metrische Gerade. Dann ist auch $\varphi(g)$ eine metrische Gerade.

Beweis. Seien $A, B \in g$ verschiedene Punkt auf der Geraden. Diese existieren, weil g nach Definition A.2.1 isomorph zu \mathbb{R} ist und somit mehr als zwei Punkte enthält. Weil φ als Isometrie injektiv ist (Bemerkung A.3.2) sind auch die Bilder $\varphi(A)$ und $\varphi(B)$ verschieden. Nach dem Inzidenzaxiom A.4.1 gibt es genau eine metrische Gerade k durch $\varphi(A)$ und $\varphi(B)$. Wir zeigen, dass $k = \varphi(g)$ ist.

Sei C ein Punkt ohne Einschränkung zwischen A und B . Dann gilt nach Satz A.2.10

$$d(A, C) + d(C, B) = d(A, B) \stackrel{\varphi \text{ Isom.}}{\Leftrightarrow} d(\varphi(A), \varphi(C)) + d(\varphi(C), \varphi(B)) = d(\varphi(A), \varphi(B)).$$

Mit der strikten Dreiecksungleichung (Satz A.4.2) folgt dann $C \in k$ durch Kontraposition.

Für die anderen beiden Möglichkeiten der Position von $C \in g$ in Relation zu A und B tauscht man im obigen Argument nur die Rollen der Punkte. Es gilt also $\varphi(C) \in k$ für alle $C \in g$ und damit $\varphi(g) \subset k$.

Wir nehmen nun an, es gäbe einen Punkt $Q \in k \setminus \varphi(g)$. Dann ist Q nach Lemma A.2.6 durch seine Abstände zu $\varphi(A), \varphi(B) \in k$ in eindeutiger Weise bestimmt. Wieder nach Lemma A.2.6 gibt es einen Punkt $P \in g$, der, bezogen auf A und B , durch die gleichen Abstände eindeutigbestimmt ist. Dann muss $\varphi(P) \in \varphi(g) \subset k$ aber bereits Q gewesen sein, da es sonst auf k zwei Punkte dieser Art gibt, was nicht sein kann. Das steht im Widerspruch zur Voraussetzung $Q \notin \varphi(g)$. Damit folgt $\varphi(g) = k$, wie gewünscht. In metrischen Räumen mit gültigem Inzidenzaxiom ist das Bild einer metrischen Geraden also wieder eine metrische Gerade. \square

Definition A.4.4 (Strecke)

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Für $A, B \in X$ definieren wir die **Strecke** $[A, B]$ durch

$$[A, B] := \{P \in X \mid d(A, P) + d(P, B) = d(A, B)\}.$$

Bemerkung A.4.5

Erfüllt der metrische Raum das Inzidenzaxiom, liegt nach dem Beweis von A.4.2 die Strecke $[A, B]$ auf der (eindeutig bestimmten) Geraden durch A und B . Für jeder Parametrisierung γ dieser Geraden mit $\gamma(a) = A$ und $\gamma(b) = B$ gilt $[A, B] = \gamma([a, b])$. \square

Definition A.4.6 (Strahl)

Seien (X, d) ein metrischer Raum, $g \subset X$ eine metrischer Gerade und $A \in g$. Nach Lemma A.2.7 gibt es dann genau zwei isometrische Parametrisierungen $\gamma_+, \gamma_- : \mathbb{R} \rightarrow X$ von g mit $\gamma_+(0) = \gamma_-(0) = A$. Dann definieren wir $\gamma_+([0, \infty[)$ und $\gamma_-([0, \infty[)$ als die beiden **Strahlen** mit Ursprung A entlang g .

Definition A.4.7 (Bogenzusammenhang)

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Wir nennen eine Teilmenge $U \subset X$ **bogenzusammenhängend**, wenn es für zwei beliebige $A, B \in U$ immer einen stetigen Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ gibt, der A und B verbindet. Für $U \subset X$ nennen wir $Z \subset U$ eine **(Bogen-) Zusammenhangskomponente** von U , falls jede echte Obermenge $M \supsetneq Z$ mit $M \subset U$ nicht bogenzusammenhängend ist.

Korollar A.4.8

Seien (X, d) ein metrischer Raum, der das Inzidenzaxiom erfüllt, und $A, B \in X$. Dann gelten folgende Aussagen:

- (i) Sei $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow X$ Parametrisierung der metrischen Geraden durch A und B und $a, b \in \mathbb{R}$ die zu A und B gehörigen Parameter. Ohne Einschränkung sei $a < b$. Dann wird durch

$$\delta : [0, 1] \rightarrow \gamma(\mathbb{R}), \quad t \mapsto \gamma(t \cdot (b - a) + a)$$

ein stetiger Weg von A nach B definiert. Es gilt $\delta([0, 1]) = [A, B]$.

- (ii) Die Strecke $[A, B]$ ist eine bogenzusammenhängende Teilmenge von X .

Beweis. Da γ als Parametrisierung einer metrischen Gerade stetig ist, ist δ als Verknüpfung stetiger Abbildungen ebenfalls stetig. Die Gleichheit $\delta([0, 1]) = [A, B]$ folgt direkt aus der Definition und liefert sofort das Argument für die Korrektheit von (ii). \square

Axiom A.4.9 (Spiegelungsaxiom)

Sei (X, d) ein metrischer Raum, der das Inzidenzaxiom erfüllt. Wir sagen, dass X das **Spiegelungsaxiom** der ebenen Geometrie erfüllt, wenn für jede Gerade $k \subset X$ gilt:

1. Das Komplement $X \setminus k$ der Geraden k zerfällt in genau zwei Bogenzusammenhangskomponenten. Diese nennen wir die **Seiten** von k .
2. Es gibt eine bijektive Isometrie $\sigma_k : X \rightarrow X$, die k punktweise fixiert und die beiden Seiten von k vertauscht. Diese Isometrie nennen wir die **Spiegelung** an k .

Definition A.4.10 (Saccheri-Ebene)

Einen metrischen Raum (X, d) , der sowohl das Inzidenzaxiom A.4.1 als auch das Spiegelungsaxiom A.4.9 erfüllt, nennen wir eine **Saccheri-Ebene**.

Beispiel A.4.11

Der Raum \mathbb{R}^2 mit der vom euklidischen Skalarprodukt induzierten Metrik ist eine Saccheri-Ebene. Dies werden wir Schritt für Schritt in den Übungen diese und nächste Woche nachrechnen. \square

A.5 Orthogonalität und Eigenschaften der Spiegelung

Satz A.5.1

Seien (X, d) eine Saccheri-Ebene, $g \subset X$ eine Gerade und $P \in X \setminus g$ ein Punkt. Dann existiert genau ein Punkt $P^g \in g$ mit der Eigenschaft

$$\forall Q \in g \text{ mit } Q \neq P^g : d(P, P^g) < d(P, Q).$$

Der Punkt P^g ist der Schnittpunkt von g mit der Geraden durch P und $\sigma(P)$.

Beweis. Wir müssen *Existenz* und *Eindeutigkeit* des Punktes P^g zeigen und beginnen mit der *Eindeutigkeit*.

Eindeutigkeit. Da in der Formulierung der Aussage eine echte Ungleichheit gefordert wird, folgt die *Eindeutigkeit* sofort.

Existenz. Das Spiegelungsaxiom liefert uns die Existenz einer Spiegelung $\sigma : X \rightarrow X$ an g . Da σ die Seiten von g vertauscht, liegen P und $\sigma(P)$ in unterschiedlichen Zusammenhangskomponenten. Die Strecke $[P, \sigma(P)]$, und damit auch die Gerade k durch P und $\sigma(P)$, schneidet g also in mindestens einem Punkt. Dieser Schnittpunkt ist eindeutig, denn gäbe es zwei solche Schnittpunkte, folgte im Widerspruch zu $P \in X \setminus g$ nach dem Inzidenzaxiom bereits $g = k$. Wir nennen den eindeutigen Schnittpunkt P^g . Es bleibt zu zeigen, dass P^g tatsächlich die geforderte strikte Ungleichung erfüllt. Sei dazu $Q \in g \setminus \{P^g\}$. Dann ist Q nicht in k enthalten. Da $\sigma(P^g) = P^g$ gilt und σ eine Isometrie ist, haben wir $d(P^g, P) = d(P^g, \sigma(P))$ und damit

$$d(P, \sigma(P)) = d(P, P^g) + d(P^g, \sigma(P)) = 2d(P, P^g).$$

Die strikte Dreiecksungleichung A.4.2 liefert

$$d(P, \sigma(P)) < d(P, Q) + d(Q, \sigma(P)) = 2d(P, Q),$$

woraus $d(P, P^g) < d(P, Q)$ sofort folgt. □

Korollar A.5.2

Seien (X, d) eine Saccheri-Ebene, $g \subset X$ eine Gerade und $\sigma : X \rightarrow X$ eine Spiegelung an g . Dann gelten für jedes $P \in X \setminus g$ die folgenden Eigenschaften.

- (i) $(\sigma(P))^g = P^g$.
- (ii) P, P^g und $\sigma(P)$ liegen auf einer Geraden.
- (iii) Die Gerade durch P und $\sigma(P)$ ist invariant unter σ .
- (iv) $\sigma \circ \sigma = \text{id}_X$.

Beweis.

- (i) Nach Definition gilt $(\sigma(P))^g \in g$, also $\sigma((\sigma(P))^g) = (\sigma(P))^g$. Wäre $(\sigma(P))^g \neq P^g$, so hätte man wegen Satz A.5.1, dass

$$d(P^g, \sigma(P)) > d((\sigma(P))^g, \sigma(P)) = d(\sigma((\sigma(P))^g), \sigma(P)) = d((\sigma(P))^g, P) > d(P^g, P) = d(P^g, \sigma(P)).$$

Dieser Widerspruch zeigt, dass $(\sigma(P))^g = P^g$ gelten muss.

- (ii) Dies folgt unmittelbar aus der zweiten Aussage von Satz A.5.1, denn dort wurde gezeigt, dass P^g der Schnittpunkt von g und der Geraden durch P und $\sigma(P)$ ist.
- (iii) Die Gerade k durch P und $\sigma(P)$, das heißt die Gerade durch P^g und P , ist nach (i) und (ii) auch die Gerade durch $(\sigma(P))^g$ und $\sigma(P)$. Aber auch $\sigma(k)$ ist eine Gerade durch $(\sigma(P))^g$ und $\sigma(P)$. Also gilt $\sigma(k) = k$.
- (iv) Auf k , das isometrisch zu \mathbb{R} ist gibt es genau zwei Punkte, die den Abstand $d(P^g, P)$ von P^g haben, nämlich P und $\sigma(P)$. Weil aber $\sigma(\sigma(P)) \in \sigma(k) = k$ die Gleichung $d(P^g, \sigma(\sigma(P))) = d(P^g, \sigma(P)) = d(P^g, P)$ erfüllt, muss $\sigma(\sigma(P)) \in \{P, \sigma(P)\}$ liegen. $\sigma(\sigma(P)) = \sigma(P)$ würde $\sigma(P) = P$ implizieren, scheidet also aus. Also gilt $\sigma(\sigma(P)) = P$. Weil σ auf g ohnehin trivial ist, folgt die Behauptung. □

Satz A.5.3

Sei (X, d) eine Saccheri-Ebene und $g \subset X$ eine Gerade. Dann gelten folgende Aussagen:

- (i) Es gibt genau eine Spiegelung σ_g an g .
- (ii) Eine Isometrie $\kappa : X \rightarrow X$, die g punktweise fixiert ist entweder die Spiegelung σ_g oder die Identität id_X .

Beweis.

- (i) Seien σ_1 und σ_2 beides Spiegelungen an g . Nach Definition gilt $\sigma_1(P) = P = \sigma_2(P)$ für alle $P \in g$. Wir zeigen, dass $\sigma_1(P) = \sigma_2(P)$ auch für $P \in X \setminus g$ gilt: Dazu sei h die Gerade durch P und P^g . Nach Korollar A.5.2 liegen $\sigma_1(P)$ und $\sigma_2(P)$ auf h . Außerdem gilt

$$d(P^g, \sigma_1(P)) = d(P, P^g) = d(P^g, \sigma_2(P)).$$

Da h isometrisch zu \mathbb{R} ist, gibt es außer P noch genau einen weiteren Punkt mit dem Abstand $d(P, P^g)$ zur P^g . Da $\sigma_1(P) \neq P \neq \sigma_2(P)$ ist, müssen somit $\sigma_1(P)$ und $\sigma_2(P)$ identisch gewesen sein.

- (ii) Da κ als Isometrie stetig ist, sind Bilder von Bogenzusammenhangskomponenten unter κ wieder Zusammenhangskomponenten. Somit müssen wir zwei Fälle betrachten
- (1) Falls κ die Seiten von g austauscht, ist κ nach Definition eine Spiegelung. Aus (i) folgt also $\kappa = \sigma_g$.
 - (2) Falls κ die Seiten von g nicht vertauscht, ist $\kappa \circ \sigma_g$ eine Isometrie die g punktweise fixiert und die Seiten von g vertauscht. Das heißt, $\kappa \circ \sigma_g$ ist eine Spiegelung an g und (i) liefert $\sigma_g = \kappa \circ \sigma_g$, also $\kappa = \text{id}_X$.

□

Definition A.5.4 (Orthogonalität) (i) Den in Satz A.5.1 konstruierten Punkt P^g nennen wir die **orthogonale Projektion** von P auf g . Für $p \in g$ setzen wir $P^g := P$ und machen damit die orthogonale Projektion auf g zu einer Abbildung $X \rightarrow g \subset X, P \mapsto P^g$.

- (ii) Seien g und h zwei Geraden in einer Saccheri-Ebene und σ_g die Spiegelung an g . Wir sagen, dass h **orthogonal** (senkrecht) zu g ist, falls $g \neq h$ und $\sigma_g(h) = h$ ist. Wir schreiben $h \perp g$, wenn h orthogonal zu g ist.

Bemerkung A.5.5

Seien (X, d) eine Saccheri-Ebene, $g \subset X$ eine Gerade und $P \in X \setminus g$. Dann ist nach Korollar A.5.2 die Gerade h durch P und P^g orthogonal zu g . □

Proposition A.5.6 (Isometrie und orthogonale Projektion)

Sei (X, d) eine Saccheri-Ebene und $\kappa : X \rightarrow X$ eine beliebige bijektive Isometrie. Dann gilt für jede Gerade $g \subset X$ und $P \in X$, dass das Anwenden der Isometrie und das Bilden der orthogonalen Projektion vertauschbar ist:

$$\kappa(P^g) = \kappa(P)^{\kappa(g)}.$$

Beweis. Nach Definition A.5.4 ist $P^g \in g$ der eindeutige Punkt mit $d(P, P^g) < d(P, Q)$ für alle $Q \in g \setminus \{P^g\}$. Als Bild einer metrischen Geraden unter einer Isometrie ist $\kappa(g)$ eine metrische Gerade. Sei $Q' \in \kappa(g) \setminus \{\kappa(P^g)\}$. Da κ bijektiv ist, gibt es $Q \in g \setminus \{P^g\}$ mit $\kappa(Q) = Q'$. Da κ eine Isometrie ist, erhalten wir

$$d(\kappa(P), Q') = d(\kappa(P), \kappa(Q)) = d(P, Q) > d(P, P^g) = d(\kappa(P), \kappa(P^g)).$$

Also ist $\kappa(P^g)$ nach Satz A.5.1 die orthogonale Projektion $\kappa(P)^{\kappa(g)}$ von $\kappa(P)$ auf $\kappa(g)$. □

Proposition A.5.7 (Symmetrie der Orthogonalität)

Seien g und h Geraden in einer Saccheri-Ebene (X, d) . Dann gilt

$$h \perp g \Leftrightarrow g \perp h.$$

Beweis. Wir nehmen an, dass $h \perp g$, das heißt, $\sigma_g(h) = h$. Für $P \in g \setminus h$ gilt außerdem $\sigma_g(P) = P$. Mit Proposition A.5.6 erhalten wir

$$\sigma_g(P^h) = \sigma_g(P)\sigma_g(h) = P^h.$$

Da die Punkte auf g die einzigen Fixpunkte von σ_g sind, folgt $P^h \in g$. Wegen $P \neq P^h$ ist g die eindeutig bestimmte Gerade durch P und P^h . Da $P, \sigma_h(P)$ und P^h nach Korollar A.5.2(ii) auf einer Geraden liegen, gilt $\sigma_h(P) \in g$. Wir haben also gezeigt, dass $\sigma_h(g \setminus h) \subseteq g$. Weil σ_h die Punkte auf h fixiert, folgt daraus $\sigma_h(g) \subseteq g$. Wendet man σ_h auf diese Inklusion an, erhält man mit Korollar A.5.2(iv) auch $g \subseteq \sigma_h(g)$. Damit gilt $\sigma_h(g) = g$, also $g \perp h$.

Die umgekehrte Implikation folgt mit dem selben Argument, wenn man die Rollen von g und h vertauscht. \square

Proposition A.5.8 (Orthogonalität unter Isometrien)

Seien $g, h \subset X$ zwei Geraden in einer Saccheri-Ebene (X, d) mit $g \perp h$ und $\kappa : X \rightarrow X$ eine bijektive Isometrie. Dann gilt $\kappa(g) \perp \kappa(h)$.

Beweis. Sei σ_g die Spiegelung an g . Dann ist die Abbildung $\phi = \kappa \circ \sigma_g \circ \kappa^{-1} : X \rightarrow X$ eine bijektive Isometrie. Sei $P \in \kappa(g)$. Wir haben die folgenden Implikationen:

$$\kappa^{-1}(P) \in g \Rightarrow \sigma_g(\kappa^{-1}(P)) = \kappa^{-1}(P) \Rightarrow \phi(P) = P.$$

Also hält ϕ die Gerade $\kappa(g)$ punktweise fest.

Wäre $\phi = \text{id}_X$, müsste nach Definition bereits $\sigma_g = \text{id}_X$ sein, was falsch ist. Mit Satz A.5.3 folgt, dass $\phi = \sigma_{\kappa(g)}$ die Spiegelung an $\kappa(g)$ ist. Wegen

$$\sigma_{\kappa(g)}(\kappa(h)) = \phi \circ \kappa(h) = \kappa \circ \sigma_g \circ \kappa^{-1} \circ \kappa(h) = \kappa(\sigma_g(h)) \stackrel{h \perp g}{=} \kappa(h)$$

gilt also $\kappa(h) \perp \kappa(g)$. \square

Proposition A.5.9 (Saccheri-Ungleichung)

Sei (X, d) eine Saccheri-Ebene. Seien $g \subset X$ eine Gerade und $A, B \in X \setminus g$. Dann gilt die **Saccheri-Ungleichung**:

$$d(A, B) \geq d(A^g, B^g).$$

Beweis. Wir setzen $A_0 := A$ und $A_1 := B$, sowie $P_0 := A^g$ und $P_1 := B^g$. Dann spiegeln wir das Viereck $\square A_0 A_1 P_1 P_0$ an der Gerade g_1 durch A_1 und P_1 (die nach Bemerkung A.5.5 senkrecht auf g steht). Dies liefert ein neues Viereck $\square A_1 A_2 P_2 P_1$ mit $P_2 = A_2^g$ (weil die Gerade g_2 durch A_2 und P_2 nach A.5.8 senkrecht auf g steht). Jetzt spiegeln wir an g_2 und fahren immer so fort.

Aus der Dreiecksungleichung folgt

$$d(P_0, P_{2n}) \leq d(P_0, A_0) + d(A_0, A_1) + \dots + d(A_{2n-1}, A_{2n}) + d(A_{2n}, P_{2n}).$$

Da Spiegelungen Isometrien sind, ergibt sich daraus

$$2nd(P_0, P_1) \leq 2nd(A_0, A_1) + 2d(P_0, A_0) \Rightarrow d(A^g, B^g) - d(A, B) \leq \frac{1}{n}d(A, A^g).$$

Damit folgt die Behauptung für $n \rightarrow \infty$. □

Bemerkung A.5.10

Die Saccheri-Ungleichung gilt auch, wenn einer oder beide Punkte auf g liegen. Letzterer Fall ist dabei trivial und ersterer folgt mit der Dreiecksungleichung durch Spiegelung an der zu k senkrechten Gerade durch den Punkt, der nicht auf k liegt. □

Satz A.5.11

Seien (X, d) eine Saccheri-Ebene und $g \subset X$ eine Gerade. Dann gibt es für jeden Punkt $Q \in g$ einen Punkt $P \in X \setminus g$ mit $Q = P^g$.

Beweis. Sei $S \subset X$ eine der beiden Seiten von g und

$$f: S \rightarrow g, \quad P \mapsto P^g.$$

Es genügt zu zeigen, dass f surjektiv ist. Dazu zeigen wir zunächst

$$U, V \in f(S) \Rightarrow [U, V] \subset f(S). \quad (*)$$

Seien $A, B \in S$ mit $f(A) = U$ und $f(B) = V$. Da S bogenzusammenhängend ist, gibt es einen stetigen Weg $\gamma: [0, 1] \rightarrow S$ mit $\gamma(0) = A$ und $\gamma(1) = B$. Die Saccheri-Ungleichung A.5.9 liefert die Stetigkeit von f , also auch von $f \circ \gamma$. Identifiziert man g über eine Parametrisierung mit \mathbb{R} , so sagt der Zwischenwertsatz, angewendet auf die stetige Funktion $f \circ \gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, dass jeder Punkt zwischen $U = f \circ \gamma(0)$ und $V = f \circ \gamma(1)$ im Bild von $f \circ \gamma$ liegt. Aber das ist gerade die Aussage $[U, V] \subseteq f(\gamma([0, 1]))$ und beweist $(*)$.

Als nächstes zeigen wir, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $P \in S$ mit $d(Q, f(P)) \leq \varepsilon$ gibt: Wir wählen einen beliebigen Punkt $P' \in S$ und betrachten die Strecke $[Q, P']$. Wegen $P' \notin g$ ist Q der einzige Punkt im Schnitt von g und der Geraden durch Q und P' . Da Strecken nach Bemerkung A.4.5 isometrische Bilder von Intervallen und damit bogenzusammenhängend sind, gilt $[Q, P'] \setminus \{Q\} \subset S$. Identifiziert man $[Q, P']$ über eine Parametrisierung mit einem Intervall, so ist Q ein Randpunkt und man findet ein $P \in [Q, P'] \setminus \{Q\}$ mit $d(Q, P) = \varepsilon$. Die Saccheri-Ungleichung A.5.9 liefert mit $Q^g = Q$ die gewünschte Ungleichung

$$d(Q, f(P)) = d(Q^g, P^g) \leq d(Q, P) = \varepsilon.$$

Da das Argument für jedes $Q \in g$ funktioniert, haben wir gezeigt, dass jedes $Q \in g$ beliebig gut durch Punkte in $f(S)$ approximiert werden kann.

Identifiziert man g über eine Parametrisierung mit \mathbb{R} bedeutet die Bedingung $(*)$, dass $f(S)$ eine konvexe Teilmenge von g , also ein Intervall, ist. Da jeder Punkt auf g durch Punkte in $f(S)$ approximiert werden kann, ist dieses Intervall beidseitig unbeschränkt, also gleich g . Das heißt, wir haben $f(S) = g$ bewiesen. □

Korollar A.5.12

In der Situation aus Satz A.5.11 existiert zu $Q \in g$ eine Gerade $k \subset X$, die g in Q schneidet und senkrecht zu g ist.

Beweis. Nach Satz A.5.11 gibt es ein $P \in X \setminus g$ mit $P^g = Q$. Dann hat die Gerade k durch P und Q nach Bemerkung A.5.5 die gewünschten Eigenschaften. \square

A.6 Punktspiegelung und Mittelsenkrechte

Definition A.6.1 (Rotation)

Sei (X, d) eine Saccheri-Ebene. Eine Isometrie $\rho : X \rightarrow X$ bezeichnen wir als **Rotation**, wenn ρ genau einen Fixpunkt $Z \in X$ hat oder die Identität ist. Z nennen wir **(Rotations)zentrum** von ρ . Ist $\rho = \text{id}_X$, so sind alle Punkte in X Rotationszentren.

Definition A.6.2 (Punktspiegelung)

Seien (X, d) eine Saccheri-Ebene und $S \in X$. Eine Rotation $\rho : X \rightarrow X$ mit Zentrum S nennen wir **Punktspiegelung** an S , wenn alle metrischen Geraden durch S von ρ fixiert werden und ρ nicht die Identität ist.

Proposition A.6.3 (Eindeutigkeit der Punktspiegelung)

In einer Saccheri-Ebene (X, d) gibt es nur eine Punktspiegelung an $S \in X$.

Beweis. Seien $\rho_1, \rho_2 : X \rightarrow X$ Punktspiegelungen an S und $P \in X \setminus \{S\}$. Wegen des Inzidenzaxioms A.4.1 gibt es genau eine metrische Gerade g durch S und P . Wegen Definition A.6.2 gelten außerdem $\rho_1(g) = \rho_2(g) = g$ und $\rho_1(S) = \rho_2(S) = S$. Da ρ_1, ρ_2 Isometrien sind, müssen $\rho_1(P), \rho_2(P)$ dann Punkte auf g sein, die zu S den selben Abstand haben, wie P . Weil S der einzige Fixpunkt ist, gilt außerdem $\rho_1(P), \rho_2(P) \neq P$. Lemma A.2.6 zeigt daher $\rho_1(P) = \rho_2(P)$. \square

Definition A.6.4 (Mittelpunkt)

Seien A, B verschiedene Punkte einer Saccheri-Ebene (X, d) . Wir definieren den **Mittelpunkt** M_{AB} von A und B als den eindeutig bestimmten Punkt auf der metrischen Geraden durch A und B , für den gilt

$$d(M_{AB}, A) = d(M_{AB}, B) = \frac{1}{2}d(A, B).$$

Proposition A.6.5

Seien $m, n \subset X$ zwei verschiedene Geraden in einer Saccheri-Ebene (X, d) und $\sigma_m, \sigma_n : X \rightarrow X$ die Spiegelungen an diesen Geraden. Die Abbildungen σ_m und σ_n kommutieren genau dann, wenn m und n orthogonal sind.

Beweis. Sei $\sigma_m \sigma_n = \sigma_n \sigma_m$. Für $x \in n$ gilt $\sigma_n(x) = x$ und wegen

$$\sigma_m(x) = \sigma_m(\sigma_n(x)) = \sigma_n \sigma_m(x)$$

ist $\sigma_m(x)$ ein Fixpunkt von σ_n . Also liegt auch $\sigma_m(x)$ auf n . Damit ist aber auch n , die Gerade durch x und $\sigma_m(x)$, invariant unter σ_m . Wegen $m \neq n$ sind m und n nach Definition A.5.4 orthogonal.

Sei umgekehrt $n \perp m$. Wir behaupten, dass für $x \in m \cup n$ gilt $\sigma_m \sigma_n \sigma_m \sigma_n(x) = x$. Dazu betrachten wir zunächst $x \in n$. Die Spiegelung σ_n fixiert jedes Element aus n . Andererseits ist $\sigma_m(x) \in m$, da $n \perp m$ gilt. Da Spiegelungen Involutionen sind, folgt

$$\sigma_m(\sigma_n(\sigma_m(\sigma_n(x)))) = \sigma_m(\sigma_n(\sigma_m(x))) = \sigma_m \sigma_m(x) = x.$$

Für $x \in m$ gilt $\sigma_n(x) \in m$ wegen $m \perp n$ gilt. Nun fixiert aber σ_m jeden Punkt von m , also erhalten wir

$$\sigma_m(\sigma_n(\sigma_m(\sigma_n(x)))) = \sigma_m(\sigma_n(\sigma_n(x))) = \sigma_m(x) = x.$$

Damit ist unsere Behauptung bewiesen, das heißt $\sigma_m \sigma_n \sigma_m \sigma_n|_{m \cup n} = \text{id}_{m \cup n}$. Also hält die Isometrie $\sigma_m \sigma_n \sigma_m \sigma_n$ die Gerade n punktweise fest. Nach Satz A.5.3 kann sie somit nur die Spiegelung an n oder aber id_X sein. Da die Spiegelung σ_n die Gerade m nicht punktweise fixiert, folgt $\sigma_m \sigma_n \sigma_m \sigma_n = \text{id}_X$, das heißt $\sigma_m \sigma_n(x) = \sigma_n \sigma_m(x)$ für alle $x \in X$. \square

Proposition A.6.6

Seien X, d eine Saccheri-Ebene, $S \in X$ und $m, n \subset X$ zueinander orthogonale Geraden, die sich in S schneiden. Dann ist S der einzige Fixpunkt von $\sigma_m \circ \sigma_n$.

Beweis. Aus Proposition A.6.5 folgt sofort, dass $\sigma_m \circ \sigma_n$ eine Involution ist. Wegen $S \in m \cap n$ ist S außerdem Fixpunkt. Wegen der Orthogonalität ist m invariant unter σ_n , also ist auch $X \setminus m$ invariant unter σ_n . Nach Definition der Spiegelungen an Geraden ist S der einzige Fixpunkt von $\sigma_m \circ \sigma_n$ auf $m \cap n$. Da jede der beiden Seiten m^+, m^- von m schneidet n , enthält jede Seite Fixpunkte von σ_n . Also werden die beiden Seiten von σ_n nicht ausgetauscht. Da die stetige Abbildung σ_n bogenzusammenhängende Mengen auf bogenzusammenhängende Menge abbildet, müssen m^+ und m^- invariant unter σ_n sein. Analog zeigt man, dass n^+ und n^- invariant unter σ_m sind.

Das Komplement von $m \cup n$ zerfällt in vier Quadranten:

$$m^+ \cap n^+, \quad m^+ \cap n^-, \quad m^- \cap n^- \quad \text{und} \quad m^- \cap n^+.$$

Die Involution $\sigma_m \circ \sigma_n$ vertauscht dann $m^+ \cap n^+$ mit $m^- \cap n^-$ und $m^+ \cap n^-$ mit $m^- \cap n^+$. Also ist S ist tatsächlich der einzige Fixpunkt von $\sigma_m \circ \sigma_n$. \square

Satz A.6.7 (Charakterisierung der Punktspiegelung)

Seien S ein Punkt in einer Saccheri-Ebene (X, d) und $\rho : X \rightarrow X$ eine Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (1) ρ ist die Punktspiegelung an S .
- (2) S ist ein Fixpunkt von ρ und für alle $P \in X \setminus \{S\}$ gilt, dass S der Mittelpunkt von P und $\rho(P)$ ist.
- (3) ρ ist die Verknüpfung der Spiegelungen σ_g, σ_h an zwei beliebigen orthogonalen Geraden $g, h \subset X$ mit Schnittpunkt S .

Beweis.

„(1) \Rightarrow (2)“ Sei ρ eine Punktspiegelung an S . Nach Definition A.6.2 ist S ein Fixpunkt von ρ . Seien $P \in X \setminus \{S\}$ und $g \subset X$ die nach dem Inzidenzaxiom A.4.1 eindeutige Gerade durch P und S . Nach Definition A.6.2 gilt $\rho(g) = g$ und damit insbesondere $\rho(P) \in g$. Also liegen $P, \rho(P), S$ auf einer Geraden und da ρ eine Isometrie ist, folgt mit

$$d(P, S) = d(\rho(P), \rho(S)) = d(\rho(P), S)$$

und $P \neq \rho(P)$, dass S der Mittelpunkt (Definition A.6.4) von P und $\rho(P)$ ist.

„(2) \Rightarrow (3)“ Es gelte (2). Nach Korollar A.5.12 gibt es zu jeder Geraden $m \subset X$ durch S eine senkrechte Gerade n durch S . Seien jetzt $m, n \subset X$ solche Geraden sowie σ_m und σ_n die zugehörigen Spiegelungen. Wir wollen zeigen, dass $\sigma_m \circ \sigma_n = \rho$ gilt.

Nach Proposition A.6.6 ist S der einzige Fixpunkt von $\sigma_m \circ \sigma_n$. Wir zeigen nun, dass $\rho' := \sigma_m \circ \sigma_n$ gleich ρ ist. Dazu sei $P \in X \setminus \{S\}$. Da ρ' nach Proposition A.6.5 eine Involution ist, vertauscht ρ' die Punkte P und $\rho'(P)$. Also ist die Gerade durch diese beiden Punkte invariant unter ρ' . Der Mittelpunkt bleibt sogar fix, muss also S gewesen sein. Das zeigt, dass ρ' auf der Gerade durch $P, \rho'(P)$ und S sich genauso verhält wie ρ . Da $P \in X \setminus \{S\}$ beliebig gewählt war, folgt $\rho' = \rho$.

„(3) \Rightarrow (1)“ Als Verknüpfungen von zwei Isometrien ist ρ eine Isometrie. Nach Proposition A.6.6 S der einzige Fixpunkt von ρ , das heißt ρ ist eine Rotation. Sei nun $g \subset X$ eine Gerade, die S enthält. Dann gibt es nach Korollar A.5.12 eine zu g orthogonale Gerade $h \subset X$. Da (nach dem Beweis der Implikation „(2) \Rightarrow (3)“) ρ nicht von der Wahl des orthogonalen Geradenpaars abhängt, so lange sie sich im Punkt S schneiden, können wir $\rho = \sigma_g \circ \sigma_h$ annehmen. Dann folgt wegen $g \perp h$ sofort $\rho(g) = \sigma_g(\sigma_h(g)) = \sigma_g(g) = g$, wie gewünscht. Da ρ nicht die Identität ist, muss ρ also die Punktspiegelung an S sein.

□

Korollar A.6.8

Wenn $n \perp m$, dann lässt die Spiegelungen σ_n an n nicht nur m , sondern auch beide Seiten von m invariant.

Beweis. Folgt direkt aus dem Beweis von Proposition A.6.6. □

Proposition A.6.9

Seien (X, d) eine Saccheri-Ebene, $g \subset X$ eine Gerade und $S \in g$. Dann vertauscht die Punktspiegelung ρ an S die beiden Seiten von g .

Beweis. Sei $k \subset X$ eine Gerade die senkrecht zu g steht und g in S schneidet (existiert nach Korollar A.5.12). Dann haben ρ und σ_g die selbe Einschränkung auf k . Für $P \in k \setminus g$ liegen daher P und $\rho(P)$ auf verschiedenen Seiten von g . Da g invariant unter ρ ist, folgt die Behauptung.

□

Proposition A.6.10

Seien (X, d) eine Saccheri-Ebene und g, k verschiedene Geraden. Wenn g und k einen gemeinsamen Punkt haben, dann schneidet g beide Seiten von k .

Beweis. Sei S der Schnittpunkt von g und k und ρ sei die Punktspiegelung an S . Dann gilt für $P \in g \setminus k$ mit Proposition A.6.9, dass P und $\rho(P) \in g$ auf verschiedenen Seiten von k liegen. □

Proposition A.6.11

Seien $g \subset X$ eine metrische Gerade in einer Saccheri-Ebene (X, d) und $A, B \in g$ zwei verschiedene Punkte. Dann gibt es einen stetigen Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ von A nach B , sodass $\gamma([1, 0])$ auf einer der beiden Seiten von g liegt.

Beweis. Seien $h_A, h_B \subset X$ zur g orthogonale Geraden durch A bzw. B und S eine der beiden Seiten von g . Nach Korollar A.5.12 und dem Beweis von Satz A.5.11 gibt es Punkte $P \in h_A$ und $Q \in h_B$, die in S liegen. Wir stellen fest, dass h_A neben A keinen weiteren gemeinsamen Punkt mit g , denn sonst wäre $h_A = g$ nach dem Inzidenzaxiom. Da nach Korollar A.4.8 alle Punkte in $[A, P] \setminus \{A\}$ durch einen stetigen Weg in h_A mit P verbunden werden können, gibt es also einen stetigen Weg $\gamma_A : [0, 1] \rightarrow h_A$ von A nach P mit $\gamma_A([0, 1]) \subset S$. Analog konstruieren wir einen stetigen Weg $\gamma_B : [0, 1] \rightarrow h_B$ von Q nach B mit $\gamma_B([0, 1]) \subset S$. Da S bogenzusammenhängend ist, gibt es außerdem einen stetigen Weg $\delta : [0, 1] \rightarrow S$ von P nach Q . Nach einer Umparametrisierung, erhalten wir dann einen zusammengesetzten stetigen Weg von A nach B der gewünschten Art. \square

Satz A.6.12 (Bijektivität von Isometrien in Saccheri-Ebenen)

Sei (X, d) eine Saccheri-Ebene und $\phi : X \rightarrow X$ eine Isometrie. Dann ist ϕ bijektiv.

Beweis. ϕ ist als Isometrie auf jeden Fall injektiv. Wir nehmen nun an, dass ϕ nicht surjektiv ist, es also ein $x_0 \in X$ gibt mit $x_0 \notin \text{Bild}(\phi)$. Da $X \neq \emptyset$ gibt es auf jeden Fall ein $a \in \text{Bild}(\phi)$. Insbesondere gilt dann $a \neq x_0$. Sei $g \subset X$ die Gerade durch x_0 und a . Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

(F1) Es gibt $b \in \text{Bild}(\phi) \setminus \{a\}$ mit $b \in g$:

Wegen der Injektivität von ϕ sind $\phi^{-1}(b)$ und $\phi^{-1}(a)$ wohldefiniert und verschieden. Also gibt es genau eine Gerade \tilde{g} durch diese beiden Urbilder. Da Isometrien Geraden surjektiv auf Geraden abbilden, gilt $\phi(\tilde{g}) = g$. Wegen $x_0 \in g$ wäre dann aber $x_0 \in \text{Bild}(\phi)$, was im Widerspruch zur Definition von x_0 steht.

(F2) Für alle $b \in g \setminus \{a\}$ gilt $b \notin \text{Bild}(\phi)$:

Wir behaupten, dass es keinen Punkt $a_1 \in X \setminus g$ mit $a_1 \in \text{Bild}(\phi)$ geben kann.

Angenommen es gäbe so ein a_1 . Dann wäre (mit dem analogen Argument wie in (F1)) auch die gesamte Gerade k durch a und a_1 in $\text{Bild}(\phi)$. Weil sich g und k in a schneiden, aber ungleich sind, existiert nach Proposition A.6.10 ein Punkt $a_2 \in k \subset \text{Bild}(\phi)$, der auf der anderen Seite von g liegt als a_1 .

Sei $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ ein stetiger Weg von $\phi^{-1}(a_1)$ nach $\phi^{-1}(a_2)$, bei dem $\gamma([0, 1])$ auf einer Seite von $\phi^{-1}(k)$ liegt. So ein Weg existiert nach Proposition A.6.11. Dann gilt $\phi^{-1}(a) \notin \gamma([0, 1])$.

Die Abbildung $\phi \circ \gamma$ ein stetiger Weg von a_1 nach a_2 . Da a_1 und a_2 nach Definition in unterschiedlichen Seiten von g liegen, muss dieser Weg die Gerade g schneiden. Dieser Schnittpunkt ist nach Konstruktion ungleich a , läge aber in $\text{Bild}(\phi) \cap g$. Dies steht im Widerspruch zur Grundannahme von (F2). Damit ist die Behauptung gezeigt.

Aus der Behauptung folgt $\text{Bild}(\phi) \subset g$, also $\text{Bild}(\phi) = \{a\}$, was wegen der Injektivität von ϕ nicht sein kann. Das bedeutet, auch in diesem Fall ergibt sich ein Widerspruch.

Die Isometrie ϕ muss also surjektiv und damit bijektiv sein. \square

Proposition A.6.13

Seien (X, d) ein metrischer Raum, $U \subset X$ und $Z \subset U$ eine Bogenzusammenhangskomponente von U . Sei ferner $X \supset A \neq \emptyset$ bogenzusammenhängend. Dann gilt

$$A \subset U \text{ und } A \cap Z \neq \emptyset \Leftrightarrow A \subset Z.$$

Beweis. Die Implikation „ \Leftarrow “ ist klar. Für die Umkehrung sei $A \subset U$ mit $A \cap Z \neq \emptyset$ und $P \in A \cap Z$. Angenommen, es gäbe $Q \in A \setminus Z$. Da A bogenzusammenhängend ist, gäbe es dann einen Weg von P nach Q . Dann wäre aber insbesondere $Z \cup (A \setminus Z) \supseteq Z$ bogenzusammenhängend, was wegen der Maximalität von Z nicht sein kann. Dieser Widerspruch beweist $A \subset Z$. \square

Korollar A.6.14

Seien (X, d) eine Saccheri-Ebene und $k \subset X$ eine Gerade. Dann sind für $A, B \in X \setminus k$ die folgenden Aussagen äquivalent:

- (1) A und B liegen auf der selben Seite von k .
- (2) $k \cap [A, B] = \emptyset$.

Beweis. Falls k die Strecke $[A, B]$ nicht schneidet, dann ist die bogenzusammenhängende Menge $[A, B]$ (vgl. Korollar A.4.8) im Komplement von k und damit nach Proposition A.6.13 Teilmenge einer der beiden Seiten von k .

Umgekehrt, falls k die Strecke $[A, B]$ in einem Punkt S schneidet, dann teilt S die Gerade durch A und B in zwei Strahlen a und b mit $A \in a$ und $B \in b$. Diese sind bogenzusammenhängend und liegen nach Proposition A.6.13 jeweils in einer der beiden Seiten von k . Nach Proposition A.6.10 müssen das verschiedene Seiten sein. \square

Proposition A.6.15 (Ortslinieneigenschaft von senkrechten Geraden durch Mittelpunkte)

Sei (X, d) eine Saccheri-Ebene und seien $A, B \in X$ verschieden. Ferner sei n eine Gerade, die senkrecht auf der Geraden durch A und B steht und den Mittelpunkt von A und B enthält. Dann sind für $P \in X$ die folgenden Aussagen äquivalent:

- (1) $P \in n$.
- (2) $d(A, P) = d(B, P)$.

Beweis. „(1) \Rightarrow (2)“ Sei σ_n die Spiegelung an n . Dann vertauscht σ_n die Punkte A und B und fixiert alle Punkte auf n . Somit gilt für alle $P \in n$:

$$d(P, A) = d(\sigma_n(P), \sigma_n(A)) = d(P, B).$$

„(2) \Rightarrow (1)“ Wir zeigen, dass für alle $P \notin n$ gilt: Liegt P auf der selben Seite von n wie B , dann gilt $d(A, P) > d(B, P)$. Den anderen Fall zeigt man analog.

Sei dazu N der Schnittpunkt von $[A, P]$ mit n . (Existiert nach Korollar A.6.14.) Da P und B auf der selben Seite von n liegen, gilt (ebenfalls nach Korollar A.6.14) $N \notin [P, B]$. Die strikte Dreiecksungleichung aus Proposition A.4.2 liefert

$$d(P, B) < d(P, N) + d(N, B) = d(P, N) + d(N, A) = d(P, A).$$

Damit ist die gewünschte Aussage gezeigt. \square

Proposition A.6.16 (Eindeutigkeit senkrechter Geraden)

Sei (X, d) eine Saccheri-Ebene, k eine Gerade in X und $Q \in X$. Dann gibt es durch Q genau eine Gerade n , die senkrecht auf k steht.

Beweis. Wenn Q nicht auf k liegt, dann ist die Gerade durch Q und Q^k senkrecht auf k . Dies zeigt die Existenz einer Geraden mit den gewünschten eigenschaften. Wenn n eine zu k orthogonale Gerade durch Q

ist, dann ist n invariant unter σ_k . Das heißt n enthält Q und $\sigma_k(Q) \neq Q$, ist durch diese beiden Punkte dann aber eindeutig festgelegt.

Wenn Q auf k liegt, dann gibt es nach Satz A.5.11 einen Punkt $P \notin k$ mit $P^k = Q$. Also ist die Gerade durch P und Q senkrecht auf k . Für die Eindeutigkeit wählen wir zwei Punkte A und B deren Mittelpunkt Q ist. Dann zeigt Proposition A.6.15, dass es nur eine Gerade durch Q geben kann, die senkrecht auf k steht. \square

Definition A.6.17 (Mittelsenkrechte)

Seien (X, d) eine Saccheri-Ebene und $A, B \in X$ verschieden. Dann heißt die nach Proposition A.6.16 eindeutig bestimmte Gerade durch den Mittelpunkt von A und B , die senkrecht auf der Geraden durch A und B steht, die **Mittelsenkrechte von A und B** .

A.7 Dreiecke und Kongruenz

Definition A.7.1 (Dreieck)

Seien (X, d) eine Saccheri-Ebene und $A, B, C \in X$ drei Punkte. Liegen die drei Punkte nicht auf einer Geraden, so bilden sie ein **Dreieck** $\triangle ABC$.

Die Punkte A, B und C heißen die **Ecken** des Dreiecks; die Strecken $[A, B]$, $[B, C]$ und $[C, A]$ heißen die **Seiten** des Dreiecks.

Definition A.7.2 (Kongruenz)

Seien $F, G \subset X$ Teilmengen in einer Saccheri-Ebene (X, d) . Wir nennen F **kongruent** zu G (Notation: $F \cong G$), falls es eine Isometrie $\varphi : X \rightarrow X$ mit $\varphi(F) = G$ gibt.

Satz A.7.3 (Kongruenzsatz SSS)

Zwei Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle RST$ in einer Saccheri-Ebene (X, d) sind genau dann kongruent, wenn (bis auf Umbenennung der Ecken) folgende Gleichheiten gelten:

$$d(A, B) = d(R, S), \quad d(A, C) = d(R, T) \quad \text{und} \quad d(B, C) = d(S, T).$$

Beweis. Dass die Gleichungen für kongruente Dreiecke gelten ist evident. Wir nehmen als umgekehrt an, dass die drei Abstandsgleichheiten gelten. Um die Kongruenz zu zeigen, konstruieren wir eine Isometrie $\varphi : X \rightarrow X$ mit $\varphi(A) = R$, $\varphi(B) = S$ und $\varphi(C) = T$.

Konstruktionsidee: Wir wissen, dass die Spiegelung an der Mittelsenkrechte zweier Punkte den einen Punkt auf den anderen abbildet. Wir wollen durch Spiegeln an maximal drei Mittelsenkrechten die Ecken des einen Dreiecks auf die Ecken des anderen Dreiecks abbilden. Dabei müssen wir garantieren, dass die bereits zur Deckung gebrachten Punkte nicht wieder verändert werden. Dafür wird die Ortslinieneigenschaft der Mittelsenkrechten (vgl. Proposition A.6.15) von entscheidender Bedeutung sein.

Schritt 1: (Falls $A \neq R$) Wir betrachten zunächst die Spiegelung $\sigma_{m_{AR}}$ an der Mittelsenkrechten von A und R . Dann gilt $\sigma_{m_{AR}}(A) = R$ und wir definieren $\sigma_{m_{AR}}(B) =: B'$ sowie $\sigma_{m_{AR}}(C) =: C'$.

Im Fall $A = R$ setzen wir $\sigma_{m_{AR}} = \text{id}$.

Auf diese Art und Weise erhalten wir ein neues Dreieck $\triangle RB'C'$, das in (mindestens) einem Punkt mit $\triangle RST$ übereinstimmt.

Schritt 2: (Falls $B' \neq S$) Wir betrachten die Spiegelung $\sigma_{m_{B'S}}$ an der Mittelsenkrechten von B' und S . Dann gilt $\sigma_{m_{B'S}}(B') = S$ und wir definieren $\sigma_{m_{B'S}}(C') =: C''$. Außerdem gilt $\sigma_{m_{B'S}}(R) = R$, denn

$$d(R, B') = d(\sigma_{m_{AR}}(A), \sigma_{m_{AR}}(B)) \stackrel{\sigma_{m_{AR}} \text{ Isom.}}{=} d(A, B) \stackrel{\text{Voraus.}}{=} d(R, S) \stackrel{\text{Ortsl.}}{\Rightarrow} R \in m_{B'S}.$$

Im Fall $B' = S$ setzen wir $\sigma_{m_{B'S}} = \text{id}$.

Auf diese Art und Weise erhalten wir ein neues Dreieck $\triangle RSC''$, dass in (mindestens) zwei Punkten mit $\triangle RST$ übereinstimmt.

Schritt 3: (Falls $C'' \neq T$) Wir betrachten die Spiegelung $\sigma_{m_{C''T}}$ an der Mittelsenkrechten von C'' und T . Dann gilt $\sigma_{m_{C''T}}(C'') = T$. Außerdem gelten $\sigma_{m_{C''T}}(R) = R$ und $\sigma_{m_{C''T}}(S) = S$, denn

$$d(R, C'') = d(\sigma_{m_{B'S}}(\sigma_{m_{AR}}(A)), \sigma_{m_{B'S}}(\sigma_{m_{AR}}(C))) \stackrel{\sigma_{m_{AR}}, \sigma_{m_{B'S}} \text{ Isom.}}{=} d(A, C) \stackrel{\text{Voraus.}}{=} d(R, C)$$

$$d(S, C'') = d(\sigma_{m_{B'S}}(\sigma_{m_{AR}}(B)), \sigma_{m_{B'S}}(\sigma_{m_{AR}}(C))) \stackrel{\sigma_{m_{AR}}, \sigma_{m_{B'S}} \text{ Isom.}}{=} d(B, C) \stackrel{\text{Voraus.}}{=} d(S, C) \\ \stackrel{\text{Ortsl.}}{\Rightarrow} R, S \in m_{B'S}.$$

Im Fall $C'' = T$ setzen wir $\sigma_{m_{C''T}} = \text{id}$.

Auf diese Art und Weise erhalten wir das Dreieck $\triangle RST$.

Ingesamt haben wir also mit $\varphi = \sigma_{m_{C''T}} \circ \sigma_{m_{B'S}} \circ \sigma_{m_{AR}}$ eine Abbildung gefunden, für die $\varphi(A) = R$, $\varphi(B) = S$ und $\varphi(C) = T$ gilt. Damit ist die Dreieckskongruenz gezeigt. \square

Korollar A.7.4 (Eindeutige Festlegung von Isometrien)

Seien $A, B, C \in X$ nicht kollinear und $R, S, T \in X$. Dann gibt es höchstens eine Isometrie $\varphi : X \rightarrow X$ mit $\varphi(A) = R$, $\varphi(B) = S$ und $\varphi(C) = T$.

Beweis. Seien φ und τ zwei Isometrien mit dem beschriebenen Abbildungsverhalten. Dann hält $\tau^{-1} \circ \varphi$ die Punkte A, B und C fest. Nach Satz A.5.3 muss dann $\tau^{-1} \circ \varphi = \text{id}$ gelten, also $\tau = \varphi$. \square

Mit diesen Vorbereitungen können wir auch in der Saccheri-Ebene den Dreispiegelungssatz beweisen.

Korollar A.7.5 (Dreispiegelungssatz)

Jede Isometrie $\varphi : X \rightarrow X$ lässt sich als Verknüpfung von maximal drei Spiegelungen schreiben.

Beweis. Wähle drei nicht kollineare Punkte $A, B, C \in X$. Dann ist $\triangle ABC$ kongruent zu $\triangle \varphi(A)\varphi(B)\varphi(C)$ und nach dem Beweis von Satz A.7.3 können wir die nach Satz A.7.4 eindeutig bestimmte Abbildung φ wie gewünscht als Verknüpfung von maximal drei Spiegelungen (an Mittelsenkrechten) darstellen. \square

A.8 Winkel

Definition A.8.1 (Winkel)

Seien g_+ und h_+ Strahlen in einer Saccheri-Ebene (X, d) , die beide einen gemeinsamen Ursprung (den **Scheitel** des Winkels) haben. Dann nennen wir $\angle(g_+, h_+)$ einen **Winkel**. Die Strahlen heißen auch **Schenkel** des Winkels.

Ist der Scheitel ein Punkt $O \in X$ und sind $A \in g_+$ und $B \in h_+$ Punkte auf den beiden Schenkeln, so schreiben wir auch $\angle AOB := \angle(g_+, h_+)$.

Definition A.8.2 (Kongruenz von Winkeln)

Wir nennen zwei Winkel $\angle(a_+, b_+)$ und $\angle(g_+, h_+)$ in einer Saccheri-Ebene (X, d) **kongruent**, wenn es eine Isometrie $\varphi : X \rightarrow X$ mit $\varphi(a_+) = g_+$ und $\varphi(b_+) = h_+$ gibt.

In Iversen (1992) wird auf wohldefinierte Art und Weise ein Maß $\angle(h_+, g_+) \in \mathbb{R}$ für die Größe eines Winkels $\angle(h_+, g_+)$ definiert. Dieses Maß stellt eine Verallgemeinerung des bekannten Bogenmaßes auf die Saccheri-Ebene dar und kann Werte im Intervall $]0, \pi[$ annehmen.

Mit den Kongruenzsätzen im Sinn, zitieren wir bereits an dieser Stelle folgende Lemmata.

Lemma A.8.3

Zwei Winkel $\angle(a_+, b_+)$ und $\angle(g_+, h_+)$ in einer Saccheri-Ebene (X, d) sind genau dann kongruent, wenn $\angle(a_+, b_+) = \angle(g_+, h_+)$ gilt.

Beweis. Siehe Iversen (1992). □

Lemma A.8.4

Sei h_+ ein Strahl in einer Saccheri-Ebene (X, d) . Für ein gegebenes $\alpha \in [0, \pi]$ gibt es auf jeder Seite der durch h_+ festgelegten Geraden genau einen Strahl g_+ mit $\angle(h_+, g_+) = \alpha$.

Beweis. Siehe Iversen (1992). □

Satz A.8.5 (Kongruenzsatz SWS)

Zwei Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle RST$ in einer Saccheri-Ebene (X, d) sind genau dann kongruent, wenn (bis auf Umbenennung der Ecken) folgende Gleichheiten gelten:

$$d(A, B) = d(R, S), \quad \angle BAC = \angle SRT \quad \text{und} \quad d(A, C) = d(R, T).$$

Beweis. Sind die beiden Dreiecke kongruent, so liefert die dadurch existierende Isometrie auch die Kongruenz von $\angle BAC$ und $\angle SRT$ und Lemma A.8.3 die Größengleichheit der Winkel. Damit ist die eine Richtung gezeigt.

Umgekehrt nehmen wir an, dass die beschriebenen Gleichheiten gelten. Dann folgt mit Lemma A.8.3 aus $\angle BAC = \angle SRT$ sofort die Kongruenz von $\angle BAC$ und $\angle SRT$. Seien b_+ und c_+ die Schenkel von $\angle BAC$, die durch B bzw. C gehen und entsprechend s_+ und t_+ die Schenkel von $\angle SRT$, die durch S bzw. T gehen. Nach Definition A.8.2 gibt es dann eine Isometrie $\varphi : X \rightarrow X$ so, dass $\varphi(b_+) = s_+$ und $\varphi(c_+) = t_+$. Insbesondere gilt $\varphi(A) = R$.

Nun muss $\varphi(B)$ ein Punkt auf s_+ sein, der den gleichen Abstand zu R hat, wie B zu A . Es gibt aber auf einem Strahl nur genau einen solchen Punkt, nämlich S . Damit folgt $\varphi(B) = S$ und völlig analog auch $\varphi(C) = T$. Damit sind die beiden Dreiecke kongruent. \square

Satz A.8.6 (Kongruenzsatz WSW)

Zwei Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle RST$ in einer Saccheri-Ebene (X, d) sind genau dann kongruent, wenn (bis auf Umbenennung der Ecken) folgende Gleichheiten gelten:

$$\angle BAC = \angle SRT, \quad d(A, B) = d(R, S) \quad \text{und} \quad \angle CBA = \angle TSR.$$

Beweis. Sind die beiden Dreiecke kongruent, folgen die Größengleichheiten wie im Beweis von A.8.5.

Wir nehmen umgekehrt an, dass die drei Gleichheiten gelten. Aus der Gleichheit der Winkelgrößen folgt mit Lemma A.8.3 die Kongruenz der Winkel. Insbesondere gibt es also eine Isometrie $\varphi : X \rightarrow X$, die $\angle BAC$ auf $\angle SRT$ abbildet und für die $\varphi(A) = R$ gilt. Der Punkt $\varphi(B)$ liegt auf dem Schenkel mit Ursprung R , der durch S geht und von R den Abstand $d(A, B) = d(R, S)$ hat. Also gilt $\varphi(B) = S$. Somit wird der Strahl von B durch A auf den Strahl von S durch R abgebildet.

Der Strahl von B durch C wird auf einen Strahl s mit Ursprung S abgebildet. Dieser Strahl s liegt auf der selben Seite von der Geraden durch R und S , wie T und schließt mit dem Strahl durch S und R einen Winkel ein, der genauso groß ist wie $\angle TSR$. Damit muss nach Lemma A.8.4 der Strahl durch S und $\varphi(C)$ gleich dem Strahl durch S und T sein. Also ist $\varphi(C) = T$ der eindeutige Schnittpunkt der Strahlen und es folgt die Kongruenz. \square

Satz A.8.7 (Scheitelwinkelsatz)

Sei (X, d) eine Saccheri-Ebene und $g, h \subset X$ zwei Geraden, die sich in einem Punkt $O \in X$ schneiden. Mit g_+ und h_+ bezeichnen wir zwei Strahlen, auf g bzw. h mit Ursprung O . Die beiden anderen Strahlen auf g bzw. h mit Ursprung O bezeichnen wir mit g_- und h_- .

Dann sind sowohl $\angle(g_+, h_+)$ und $\angle(g_-, h_-)$ als auch $\angle(g_+, h_-)$ und $\angle(g_-, h_+)$ jeweils kongruent und insbesondere gleich groß.

Beweis. Die Kongruenz folgt sofort durch eine Punktspiegelung an O , die Größengleichheit aus Lemma A.8.3. \square

Satz A.8.8 (Basiswinkelsatz)

Seien (X, d) eine Saccheri-Ebene und $A, B, C \in X$ nicht alle auf einer Geraden. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

- (1) $\angle BAC = \angle CBA$.
- (2) $\angle BAC$ und $\angle CBA$ sind kongruent.
- (3) $\triangle ABC$ ist gleichschenkelig mit $d(A, C) = d(B, C)$.

Beweis. Die Äquivalenz von (1) und (2) folgt sofort aus A.8.3.

Seien nun $\angle BAC$ und $\angle CBA$ kongruent. Nach Definition existiert dann eine Isometrie $\varphi : X \rightarrow X$, die insbesondere den Strahl von A durch C auf den Strahl von B durch C abbildet, also die Geraden durch A und C

bzw. B und C vertauscht. Insbesondere ist dann $\varphi(C)$ auf dem Strahl von B durch C. Wäre $\varphi(C) \neq C$, dann hätten die Gerade durch A und C und die Gerade durch B und C zwei Schnittpunkte, müssten wegen des Spiegelungsaxioms A.4.9 also im Widerspruch zur Voraussetzung gleich sein.

Falls umgekehrt $d(A, C) = d(B, C)$ ist, dann liegt C auf der Mittelsenkrechten von A und B. Die Spiegelung an dieser Mittelsenkrechten liefert dann die Kongruenz der Winkel.

□

Definition A.8.9 (Rechter Winkel)

Sei (X, d) eine Saccheri-Ebene und $g, h \subset X$ zwei Geraden, die sich in einem Punkt $O \in X$ schneiden. Mit g_+ und h_+ bezeichnen wir zwei Strahlen, auf g bzw. h mit Ursprung O . g_- sei der andere Strahl auf g mit Ursprung O .

Wir nennen $\angle(g_+, h_+)$ einen **rechten Winkel**, wenn er kongruent zu $\angle(g_-, h_+)$ ist.

Korollar A.8.10

Sei (X, d) eine Saccheri-Ebene und $g, h \subset X$ zwei Geraden, die sich in einem Punkt $O \in X$ schneiden. Mit g_+ und h_+ bezeichnen wir zwei Strahlen, auf g bzw. h mit Ursprung O . Die beiden anderen Strahlen auf g bzw. h mit Ursprung O bezeichnen wir mit g_- und h_- .

Wenn $\angle(g_+, h_+)$ ein rechter Winkel ist, dann sind die drei anderen Winkel $\angle(g_-, h_-)$, $\angle(g_+, h_-)$ und $\angle(g_-, h_+)$

1. kongruent zu $\angle(g_+, h_+)$,
2. ebenfalls rechte Winkel,
3. alle gleich groß.

Beweis. Weil $\angle(g_+, h_+)$ ein rechter Winkel ist, folgt mit Definition A.8.9 die Kongruenz zu $\angle(g_-, h_+)$. Die anderen Kongruenzen folgen dann sofort aus dem Scheitelwinkelsatz A.8.7. Die Größengleichheit folgt aus A.8.3. □

Lemma A.8.11 (Orthogonalität und rechte Winkel)

Seien g und h Geraden in einer Saccheri-Ebene (X, d) , die einen gemeinsamen Punkt $O \in X$ haben. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

- (1) $g \perp h$.
- (2) Für einen Strahl g_+ auf g mit Ursprung O und einen Strahl h_+ auf h mit Ursprung O ist $\angle(g_+, h_+)$ ein rechter Winkel.

Beweis. Sei $g \perp h$. Dann ist g invariant unter der Spiegelung an h (Definition A.5.4), und h wird durch diese Spiegelung punktweise fixiert (Spiegelungsaxiom A.4.9). Dann werden die beiden Strahlen auf g mit Ursprung $O \in h \cap g$ durch die Spiegelung an h vertauscht (Korollar A.5.2). Damit sind $\angle(g_+, h_+)$ und $\angle(g_-, h_+)$ kongruent, also $\angle(g_+, h_+)$ ein rechter Winkel.

Umgekehrt gelte (2). Dann gibt es eine Isometrie φ , die h_+ auf sich selbst abbildet, also h punktweise fixiert und g_+ mit g_- vertauscht. Nach Proposition A.5.3 ist φ dann die Spiegelung an h , die g invariant lässt. Mit Definition A.5.4 folgt also $g \perp h$, wie gewünscht. □

A.9 Weitere Hintergründe zur Saccheri-Ebenen

Hinweis: Die Aussagen in diesem Abschnitt wurden in der Vorlesung aus Zeitgründen nur genannt und nicht bewiesen. Hier sind sie der Vollständigkeit und Zitierbarkeit halber aber vollständig aufgeschrieben.

Definition A.9.1 (Translation)

Seien (X, d) eine Saccheri-Ebene und $g \subset X$ eine metrische Gerade. Eine **Translation entlang g** ist eine Isometrie der Form $\sigma_n \circ \sigma_m$, wobei σ_m und σ_n Spiegelungen an zu g orthogonalen Geraden m und n sind.

Lemma A.9.2

Sei g eine Gerade in einer Saccheri-Ebene (X, d) . Wenn eine Translation τ entlang g einen Fixpunkt hat, dann ist τ bereits die Identität.

Beweis. Nach Definition gibt es zu g senkrechte Geraden $m, n \subset X$, sodass wir $\tau = \sigma_n \circ \sigma_m$ schreiben können. Sei $P \in X$ ein Fixpunkt von τ . Wegen $P = \tau(P) = \sigma_n(\sigma_m(P))$ zeigt Proposition A.5.3, dass $\sigma_m(P) = \sigma_n(P)$.

Falls $P \neq \sigma_m(P)$ ist, sind sowohl σ_m als auch σ_n die Spiegelung an der nach Proposition A.6.16 eindeutig bestimmten Mittelsenkrechten von P und $\sigma_m(P) = \sigma_n(P)$. Das heißt, $\sigma_m = \sigma_n$, also $\tau = \text{id}_X$.

Falls $P = \sigma_m(P) = \sigma_n(P)$ gilt, folgt sofort $P \in m \cap n$. Da m und n nach Voraussetzung senkrecht auf g stehen, folgt mit Proposition A.6.16 $m = n$ und somit wieder $\tau = \text{id}_X$. \square

Korollar A.9.3

In einer Saccheri-Ebene (X, d) kann es kein Dreieck geben, bei dem mehr als ein Paar der Seiten orthogonal zueinander ist.

Beweis. Wir betrachten das Dreieck $\triangle ABC$ mit den Ecken $A, B, C \in X$. Seien g die Gerade durch A und B , m die Gerade durch A und C und n die Gerade durch B und C . Ohne Einschränkung gelte $m, n \perp g$. Dann ist die Verknüpfung der Spiegelungen an m und n eine Translation mit Fixpunkt C , also nach Lemma A.9.2 die Identität, was wegen $m \neq n$ nicht sein kann. \square

Proposition A.9.4

Sei (X, d) eine Saccheri-Ebene und g eine Gerade in X . Für jede Translation τ entlang g und jedes $P \in g$ gilt $\tau(P) \in g$.

Beweis. Nach Definition gibt es zu g senkrechte Geraden $n, m \subset X$, sodass $\tau = \sigma_n \circ \sigma_m$ ist. Da die Geraden n und m senkrecht auf g stehen, ist g nach Definition A.5.4 invariant unter beiden Spiegelungen und damit auch unter τ . \square

Proposition A.9.5

Sei (X, d) eine Saccheri-Ebene und $g \subset X$ eine Gerade. Ferner seien $P \in g$ ein Punkt auf g und $\tau \neq \text{id}_X$ eine Translation entlang g . Dann ist P der Mittelpunkt von $\tau(P)$ und $\tau^{-1}(P)$.

Beweis. Sei $\tau = \sigma_n \circ \sigma_m$ mit n und m orthogonal zu g . Dann ist $\tau^{-1} = \sigma_m \circ \sigma_n$ ebenfalls eine Translation. Proposition A.9.4 angewandt auf τ und τ^{-1} zeigt $\tau(P), \tau^{-1}(P) \in g$. Da τ^{-1} als Translation eine Isometrie ist, finden wir

$$d(\tau(P), P) = d(\tau^{-1}(\tau(P)), \tau^{-1}(P)) = d(P, \tau^{-1}(P)).$$

Da $P, \tau(P)$ und $\tau^{-1}(P)$ auf einer Geraden liegen, genügt es jetzt zu zeigen, dass $\tau(P) \neq \tau^{-1}(P)$ ist. Angenommen, $\tau(P) = \tau^{-1}(P)$. Dann ist $\eta := \tau \circ \tau|_g : g \rightarrow g$ eine bijektive Isometrie, die einen Fixpunkt, nämlich P , hat. Da g isometrisch isomorph zu $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ ist, muss η dann bereits die Identität auf g sein, da eine \mathbb{R} -Spiegelung nicht durch zweifaches Anwenden einer \mathbb{R} -Isometrie erzeugt werden kann. Also ist $\tau \circ \tau$ nach Satz A.5.3 die Identität auf X , da τ die Seiten von g nicht vertauscht. Es müsste also gelten

$$\tau = \tau^{-1} \Leftrightarrow \sigma_n \circ \sigma_m = \sigma_m \circ \sigma_n.$$

Da nach Korollar A.9.3 nicht gleichzeitig $m, n \perp g$ und $m \perp n$ gelten kann, folgt mit Proposition A.6.5 bereits $m = n$, also $\tau = \text{id}_X$ im Widerspruch zur Voraussetzung. \square

Satz A.9.6

Seien g eine Gerade in einer Saccheri-Ebene (X, d) und $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ Spiegelungen an zu g orthogonalen Geraden. Dann ist die Verknüpfung $\sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1 =: \sigma$ selbst eine Spiegelung an einer zu g senkrechten Geraden.

Beweis. Um die Aussage zu beweisen, ist unser Ziel zunächst einen Kandidaten für die zu σ gehörende Fixpunktgerade zu finden. Anschließend müssen wir dann noch nachweisen, dass σ tatsächlich die Spiegelung an dieser Geraden ist.

Sei $k_1 \subset X$ die zu σ_1 gehörende Fixpunktgerade. Dann gilt $\sigma(k_1) = \sigma_3(\sigma_2(\sigma_1(k_1))) = \sigma_3(\sigma_2(k_1))$. Wir bezeichnen den Schnittpunkt von k_1 und g als K_1 . Da $\sigma_3 \circ \sigma_2$ eine Translation ist, folgt mit Proposition A.9.4 aus $K_1 \in g$ bereits $\sigma(K_1) = \sigma_3(\sigma_2(K_1)) \in g$. Wegen $K_1 \in k_1$ ist $\sigma(K_1)$ dann der Schnittpunkt von g und $\sigma(k_1)$.

Ist σ tatsächlich eine Spiegelung, so vertauscht sie nach Korollar A.5.2 die Punkte K_1 und $\sigma(K_1)$. Dann ist die Mittelsenkrechte m von K_1 und $\sigma(K_1)$ ein sinnvoller Kandidat für die zu σ gehörende Spiegelgerade. Wir zeigen nun, dass tatsächlich $\sigma = \sigma_m$ ist.

Nach Satz A.5.3 müssen wir zeigen, dass σ die Gerade m punktweise fixiert und nicht die Identität ist. Wir beginnen mit Letzterem. Wäre $\sigma = \text{id}_X$, folgte $\sigma(K_1) = \sigma_3(\sigma_2(K_1)) = K_1$. Dann wäre K_1 ein Fixpunkt von $\sigma_3 \circ \sigma_2$. Nach Lemma A.9.2 wäre $\sigma_3 \circ \sigma_2$ dann aber die Identität, also $\sigma = \sigma_1$. Dies führt zum Widerspruch, da σ nicht gleichzeitig Identität und Spiegelung sein kann. σ ist also nicht die Identität.

Es bleibt zu zeigen, dass m von σ punktweise fixiert wird. Sei hierzu $P \in m$. Es gelten

(I) $d(K_1, P) = d(\sigma(K_1), \sigma(P))$, da σ eine Isometrie ist.

(II) $d(\sigma(K_1), P) = d(K_1, \sigma(P))$, denn:

Wegen $\sigma(K_1) = \sigma_3 \circ \sigma_2(K_1)$ folgt mit A.9.5, dass K_1 der Mittelpunkt von $\sigma(K_1)$ und $\sigma_2 \circ \sigma_3(K_1)$ ist. Somit ist $\sigma_1(\sigma_2 \circ \sigma_3(K_1)) = \sigma(K_1)$. Wir erhalten

$$d(\sigma(K_1), P) = d(\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3(K_1), P) = d(\sigma_2 \circ \sigma_3(K_1), \sigma_1(P)) = d(K_1, \sigma(P)),$$

wie gewünscht.

Mit A.6.15 gilt wegen $P \in m$ bereits $d(K_1, P) = d(\sigma(K_1), P)$. Mit (I) und (II) erhalten wir dann auch $d(\sigma(K_1), \sigma(P)) = d(K_1, \sigma(P))$, was wieder mit A.6.15 $\sigma(P) \in m$ bedeutet. Also ist m auf jeden Fall eine Fixgerade unter σ . Es gilt $m = \sigma(m)$.

Sei $M = \sigma(M)$ der eindeutige Schnittpunkt von $m = \sigma(m)$ und $g = \sigma(g)$. Um nachzuweisen, dass m von σ punktweise fixiert wird, benutzen wir, dass σ_1, σ_2 und σ_3 nach Korollar A.6.8 die Seiten von g nicht vertauschen. Dann sind P und $\sigma(P)$ Punkte auf $m = \sigma(m)$, die von $M = \sigma(M)$ den gleichen Abstand haben und auf der selben Seite von g liegen. Nach Lemma A.2.6 folgt dann $P = \sigma(P)$. \square

Korollar A.9.7 (Gruppe der Translationen)

Seien (X, d) eine Saccheri-Ebene und $g \subset X$ eine Gerade. Dann bilden die Translationen entlang g eine abelsche Gruppe, die zu $(\mathbb{R}, +)$ isomorph ist.

Beweis. Nach Satz A.9.6 ist die Verknüpfung von zwei Translationen entlang g wieder eine Translation. Wie wir schon im Beweis von Proposition A.9.5 festgestellt haben, ist auch die Umkehrfunktion einer Translation entlang g wieder eine Translation. Insgesamt bilden die Translationen entlang g also eine Untergruppe der Gruppe der Isometrien von X .

Sei nun $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow g$ eine isometrische Parametrisierung von g . Für eine Translation τ entlang g gibt es nach Definition zu g senkrechte Geraden k_1, k_2 , sodass $\tau = \sigma_2 \circ \sigma_1$ durch Spiegelungen an diesen Geraden entsteht. Die Einschränkung dieser Spiegelungen auf g ist von der Form

$$P = \gamma(p) \mapsto \gamma(a - p),$$

wobei $\frac{1}{2}a$ ($a \in \mathbb{R}$) der Fixpunkt der Spiegelung ist. Entsprechend ist die Einschränkung von τ auf g von der Form

$$P = \gamma(p) \mapsto (p + c) \text{ mit } c \in \mathbb{R}.$$

Die Zuordnung $\tau \mapsto c$ liefert dann den gewünschten Isomorphismus. Die Surjektivität folgt sofort, die Injektivität aus Proposition A.9.2. \square

Proposition A.9.8

Sei (X, d) eine Saccheri-Ebene. Dann kann man jede Translation entlang einer Geraden $g \subset X$ auch als Verknüpfung von zwei Punktspiegelungen an Punkten auf g ausdrücken. Umgekehrt ist jede Verknüpfung von zwei Punktspiegelungen bereits eine Translation entlang einer Geraden, nämlich der Geraden durch die beiden Spiegelungszentren.

Beweis. Satz A.6.7 liefert, dass eine Abbildung genau dann eine Punktspiegelung ist, wenn sie als Verknüpfung von zwei Spiegelungen an zueinander orthogonalen Geraden geschrieben werden kann. Insbesondere dürfen wir für die Darstellung beider Punktspiegelungen jeweils g als eine der beiden Geraden verwenden. Dann enthält die Darstellung der Verknüpfung $\sigma_g \circ \sigma_g$, was sich mit Korollar A.5.2 aufhebt. Übrig bleiben die Spiegelungen an zwei zu g senkrechten Geraden. Mit diesem Gedankengang folgt die Äquivalenz sofort. \square

Proposition A.9.9 (Schnittpunkte Kreis–Gerade)

Seien g eine Gerade in einer Saccheri-Ebene (X, d) und $M \in X$. Dann schneidet g für jedes $r > d(M, M^g)$ den Kreis $K_r(M)$ in genau zwei Punkten L und R und es gilt

$$g \cap \overset{\circ}{K}_r(M) =]L, R[.$$

Beweis. Zweifaches Anwenden der Dreiecksungleichung liefert für zwei Punkte $A, B \in X$ die Abschätzung

$$|d(A, M) - d(B, M)| \leq d(A, B)$$

und damit die Stetigkeit der Abbildung $X \rightarrow \mathbb{R}, A \mapsto d(A, M)$.

Sei g_+ ein Strahl auf g mit Ursprung M^g . Wie betrachten die Funktion

$$f : g_+ \rightarrow \mathbb{R}, P \mapsto d(P, M)$$

und identifizieren g_+ mit \mathbb{R}^+ . Nach der Vorbemerkung ist f stetig.

Wir zeigen, dass f streng monoton steigend ist. Dazu seien $A, B \in g_+$ mit $A < B$ und n die Mittelsenkrechte von A und B . Da n ebenso wie die Gerade durch M und M^g senkrecht auf g steht, schneiden sich die beiden Geraden nicht (Korollar A.9.3). Insbesondere liegen M und M^g auf der selben Seite von n (nämlich auf der Seite, in der auch A liegt). Der Beweis von Proposition A.6.15 liefert dann $d(M, A) < d(M, B)$ und damit die Monotonie.

Ein Spezialfall der Saccheri-Ungleichung (Bemerkung A.5.10) liefert $d(A, M) \geq d(A, M^g)$. Damit folgt, dass für $g_+ \ni A \rightarrow \infty$ der Abstand $d(A, M)$ gegen ∞ geht. Der Zwischenwertsatz liefert die Existenz von genau einem Schnittpunkt von g_+ mit K . Die selbe Argumentation angewandt auf den anderen Strahl ergibt einen weiteren Schnittpunkt und schließt das Argument. \square

A.10 Parallelität in Saccheri-Ebenen

Definition A.10.1 (Parallelität)

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Wir bezeichnen zwei Geraden $g, h \subset X$ als **parallel** (kurz: $g \parallel h$), wenn $h \cap k = \emptyset$ oder $h = k$ gilt.

Proposition A.10.2 (Automatische Existenz einer Parallelen durch einen Punkt)

In einer Saccheri-Ebene (X, d) gibt es für jede Gerade $g \subset X$ und jeden Punkt $P \in X$ *mindestens* eine zu g parallele Gerade h , die P enthält.

Beweis. Für $P \in g$ ist nichts zu zeigen. Sei also $P \notin g$.

Wegen Proposition A.6.16 existieren eindeutige Geraden $k, h \subset X$ wobei k die zu g orthogonale Gerade durch P und h die zu k orthogonale Gerade durch P ist. Dann können die zu k senkrechten Geraden g und h nach Korollar A.9.3 keinen gemeinsamen Punkt haben. \square

Proposition A.10.3 (Parallelität unter Isometrien)

Seien (X, d) eine Saccheri-Ebene und $g, h \subset X$ Geraden mit $g \parallel h$. Ist $\varphi : X \rightarrow X$ eine Isometrie, so gilt $\varphi(g) \parallel \varphi(h)$.

Beweis. Der Fall $g = h$ ist evident, sei also $g \neq h$. Angenommen, es gibt ein $S \in \varphi(g) \cap \varphi(h)$. Da φ als Isometrie injektiv, sind dann die Urbilder $T_g \in g$ und $T_h \in h$ von S gleich. Das heißt, g und h schneiden sich im Punkt $T_g = T_h$, was ein Widerspruch zur Voraussetzung ist. \square

A.11 Das Parallelenaxiom

Axiom A.11.1 (Parallelenaxiom)

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Wir sagen, dass X das **Parallelenaxiom** erfüllt, wenn es zu jeder Geraden $g \subset X$ und jedem Punkt $P \in X$ genau eine Gerade $h \subset X$ mit $P \in h$ und $g \parallel h$ gibt.

Definition A.11.2 (Euklidische Ebenen)

Wir nennen eine Saccheri-Ebene eine **euklidische Ebene**, wenn sie das Parallelenaxiom erfüllt.

Lemma A.11.3

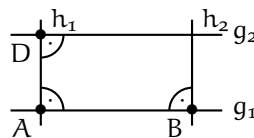
Die Parallelität in einer euklidischen Ebene (\mathbb{E}, d) ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Geraden in \mathbb{E} .

Beweis. Reflexivität und Symmetrie sind evident. Für den Beweis der Transitivität ist nur der Fall nicht klar, in dem drei Geraden $g, h, k \in \mathbb{E}$ paarweise verschieden sind und $g \cap h = \emptyset$ sowie $h \cap k = \emptyset$ gilt. Gäbe es $P \in g \cap k$, dann wären g und k zwei unterschiedliche Parallelen zu h durch P , was durch das Parallelenaxiom ausgeschlossen ist. Also folgt $g \parallel k$ und damit auch die Transitivität. \square

Satz A.11.4 (Rechtecke)

Sei (\mathbb{E}, d) eine euklidische Ebene und seien $g_1, g_2, h_1, h_2 \subset \mathbb{E}$ paarweise verschiedene Geraden mit folgenden Eigenschaften:

- $g_1 \perp h_1$ mit Schnittpunkt $A \in \mathbb{E}$,
- $g_2 \perp h_1$ mit Schnittpunkt $D \in \mathbb{E}$,
- $g_1 \perp h_2$ mit Schnittpunkt $B \in \mathbb{E}$.



Dann schneiden sich h_2 und g_2 in einem Punkt $C \in \mathbb{E}$ und es gilt $h_2 \perp g_2$.

Beweis. Nach der Konstruktion im Beweis von Lemma A.10.2 sind g_1 und g_2 bzw. h_1 und h_2 parallel.

Wir zeigen zunächst, dass sich h_2 und g_2 schneiden. Wären die beiden Geraden parallel, folgte wegen $g_2 \parallel g_1$ mit der Transitivität der Parallelität (vgl. A.11.3) direkt $h_2 \parallel g_1$ im Widerspruch zu $g_1 \cap h_2 = \{B\}$. Also schneiden sich h_2 und g_2 in einem Punkt, den wir C nennen.

Wegen $h_2 \perp g_1$ gilt $C^{g_1} = B$ und wegen $g_2 \perp h_1$ gilt $C^{h_1} = D$.

Sei nun $k \subset \mathbb{E}$ die eindeutige zu h_2 orthogonale Gerade durch C (existiert nach A.6.16). Wieder nach der Konstruktion im Beweis von Lemma A.10.2 ist diese parallel zu g_1 . Da das Parallelenaxiom gilt und g_2 ebenfalls parallel zu g_1 ist und C beinhaltet, folgt $k = g_1$. Nach Konstruktion ist dann $g_2 \perp h_2$, wie gewünscht. \square

Bemerkung A.11.5

Anschaulich bedeutet Satz A.11.4, dass in einer euklidischen Ebene jedes Viereck mit drei rechten Winkeln ein Rechteck ist. In einer Saccheri-Ebene ist diese Aussage im allgemeinen falsch. \square

A.12 Entwicklung einer elementargeometrisch fundierten Vektorraumstruktur

A.12.1 Die abelsche Gruppe der Parallelverschiebungen

Definition A.12.1 (Parallelverschiebung)

Sei (\mathbb{E}, d) eine euklidische Ebene. Wir nennen eine Isometrie $\tau : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ **Parallelverschiebung**, falls sie sich als $\tau = \rho_2 \circ \rho_1$ schreiben lässt, wobei ρ_1 und ρ_2 Punktspiegelungen sind.

Wir bezeichnen die Menge der Parallelverschiebungen mit

$$V(\mathbb{E}) := \{\tau \in \text{Isom}(\mathbb{E}) \mid \tau \text{ ist Parallelverschiebung}\}.$$

Bemerkung A.12.2

Mit Proposition A.9.8 folgt sofort, dass jede Parallelverschiebung eine Translation entlang der Geraden durch die beiden Spiegelzentren ist. \square

Lemma A.12.3

In einer euklidischen Ebene (\mathbb{E}, d) ist die Verknüpfung von drei Punktspiegelungen wieder eine Punktspiegelung.

Beweis. Seien $A, B, C \in \mathbb{E}$ und ρ_A, ρ_B, ρ_C die zugehörigen Punktspiegelungen. Wir zeigen, dass es einen Punkt $D \in \mathbb{E}$ gibt, sodass $\rho_A \circ \rho_B \circ \rho_C = \rho_D$ eine Punktspiegelung an D ist.

Falls $B = C$, ist nichts weiter zu zeigen. Sei also $B \neq C$ und n die Gerade durch B und C . Ferner sei $m \subset \mathbb{E}$ die eindeutig bestimmte Parallele zu n durch A . Seien weiter $a, b, c \subset \mathbb{E}$ zu n orthogonale Geraden durch A, B, C . Die Existenz dieser Geraden liefert Proposition A.6.16.

Aus $a \perp n$ und $m \parallel n$ folgt $a \perp m$, denn: Wegen $m \parallel n$ folgt mit Proposition A.10.3 direkt $\sigma_a(m) \parallel \sigma_a(n) = n$. Das Parallelenaxiom liefert uns dann wegen $A \in \sigma_a(m)$ bereits $\sigma_a(m) = m$ und damit $a \perp m$.

Mit Bemerkung A.6.8 rechnen wir

$$\rho_A \circ \rho_B \circ \rho_C = (\sigma_m \circ \sigma_a) \circ (\sigma_b \circ \sigma_n) \circ (\sigma_n \circ \sigma_c) = \sigma_m \circ (\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c).$$

Dann existiert nach Satz A.12.3 eine Gerade $d \perp n$ mit $\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c = \sigma_d$. Mit Satz A.11.4 folgt aus $a \perp n$, $a \perp m$ und $d \perp n$, dass $d \perp m$. Also gilt für $D := d \cap m$, dass

$$\rho_A \circ \rho_B \circ \rho_C = \sigma_m \circ \sigma_d = \rho_D$$

eine Punktspiegelung ist. \square

Proposition A.12.4 (Gruppe der Parallelverschiebungen)

Sei (\mathbb{E}, d) eine euklidische Ebene. Die Menge $V(\mathbb{E})$ der Parallelverschiebungen bildet zusammen mit der Verknüpfung von Abbildungen eine abelsche Untergruppe von $\text{Isom}(\mathbb{E})$.

Beweis. Zum Beweis rechnet man die Untergruppeneigenschaften sowie die Kommutativität unter Verwendung von Lemma A.12.3 nach. \square

Proposition A.12.5

Zu zwei Punkten P, Q in einer euklidischen Ebene (\mathbb{E}, d) gibt es genau eine Parallelverschiebung $\tau_{PQ} \in V(\mathbb{E})$ mit $\tau_{PQ}(P) = Q$.

Beweis. Sei M der Mittelpunkt von P und Q , dann gilt $\rho_M \circ \rho_P(P) = \rho_M(P) = Q$. Damit ist die Existenz einer solchen Punktspiegelung bewiesen.

Sei $\tau \in V(\mathbb{E})$ eine Parallelverschiebung mit $\tau(P) = Q$. Dann ist $\rho_M \circ \tau$ nach Lemma A.12.3 eine Punktspiegelung mit $\rho_M \circ \tau(P) = \rho_M(Q) = P$, also $\rho_M \circ \tau = \rho_P$. Es folgt $\tau = \rho_M \circ \rho_P = \tau_{PQ}$, was die Eindeutigkeit beweist. \square

Korollar A.12.6

In einer euklidischen Ebene (\mathbb{E}, d) gibt es immer eine Bijektion

$$\Phi : \mathbb{E} \rightarrow V(\mathbb{E}).$$

Beweis. Wir wählen einen beliebigen Punkt $O \in \mathbb{E}$ und definieren

$$\Phi_O : \mathbb{E} \rightarrow V(\mathbb{E}), \quad P \mapsto \tau_{OP}.$$

Wegen Proposition A.12.5 ist Φ_O invertierbar mit $\Phi_O^{-1}(\tau) = \tau(O) \in \mathbb{E}$. \square

Proposition A.12.7

Die für $P \in \mathbb{E}$ durch

$$|\cdot| : V(\mathbb{E}) \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad \tau \mapsto d(P, \tau(P))$$

definierte Abbildung hängt nicht von der Wahl von P ab.

Beweis. Zu $P, Q \in \mathbb{E}$ gibt es nach A.12.5 eine Parallelverschiebung τ_{PQ} mit $\tau_{PQ}(P) = Q$. Da nach Proposition A.12.4 $(V(\mathbb{E}), \circ)$ eine abelsche Gruppe ist, können wir für $\tau \in V(\mathbb{E})$ wie folgt rechnen

$$d(P, \tau(P)) = d(\tau_{PQ}(P), \tau_{PQ} \circ \tau(P)) = d(Q, \tau \circ \tau_{PQ}(P)) = d(Q, \tau(Q)).$$

\square

Definition A.12.8 (Länge einer Parallelverschiebung)

Sei (\mathbb{E}, d) eine euklidische Ebene und $\tau \in V(\mathbb{E})$. Dann heißt $|\tau|$ die **Länge** von τ .

A.12.2 Zentrische Streckungen als Skalarmultiplikation

Definition A.12.9 (Zentrische Streckung)

Sei (X, d) eine Saccheri-Ebene, $Z \in X$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Wir definieren eine Abbildung $\zeta_{Z,\lambda} : X \rightarrow X$ durch folgende Vorschrift:

- $\zeta_{Z,\lambda}(Z) = Z$
- Für $P \neq Z$ definieren wir $p := d(Z, P)$. Ferner sei $\gamma_P : \mathbb{R} \rightarrow X$ die Parametrisierung der Geraden durch Z und P mit $\gamma_P(0) = Z$ und $\gamma_P(p) = P$. Dann definieren wir

$$\zeta_{Z,\lambda}(P) := \gamma_P(\lambda \cdot p).$$

Wir nennen $\zeta_{z,\lambda}$ die **zentrische Streckung mit Zentrum Z und Streckfaktor λ** .

Bemerkung A.12.10

Anschaulich bedeutet Definition A.12.9: Strecke den zu P gehörenden Parameter zentrisch auf der reellen Zahlengerade. Das Ergebnis ist der Parameter, der zur zentrischen Streckung von P gehört. \square

Korollar A.12.11 (Zentrische Streckung und Punktspiegelung)

Sei (X, d) eine Saccheri-Ebene. Dann ist die Punktspiegelung an $Z \in X$ genau die zentrische Streckung $\zeta_{Z,-1}$.

Beweis. Seien $P \in X$ und $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow X$ die isometrische Parametrisierung der Geraden durch Z und P mit $\gamma(0) = Z$ und $\gamma(p) = P$ mit $p := d(P, Z)$. Dann ist $\zeta_{Z,-1}(P) = \gamma(-p)$ und somit ist Z der Mittelpunkt von P und $\zeta_{Z,-1}(P)$. Die zentrische Streckung entspricht somit der Punktspiegelung für jeden Punkt P . \square

Proposition A.12.12

Sei (\mathbb{E}, d) eine euklidische Ebene, $\tau \in V(\mathbb{E})$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist die Abbildung

$$\mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}, \quad P \mapsto \zeta_{P,\lambda}(\tau(P))$$

wieder eine Parallelverschiebung.

Beweis. Wir betrachten zunächst den Fall $\tau = \text{id}_{\mathbb{E}}$. Dann gilt für $P \in \mathbb{E}$

$$\zeta_{P,\lambda}(\text{id}_{\mathbb{E}}(P)) = \zeta_{P,\lambda}(P) = P = \text{id}_{\mathbb{E}}(P).$$

Das die Identität eine Parallelverschiebung ist, sind wir mit diesem Fall fertig.

Sei nun $\tau \neq \text{id}_{\mathbb{E}}$ und $A \in \mathbb{E}$ beliebig. Wir setzen

$$\begin{aligned} B &:= \tau(A), \\ C &:= (\lambda \cdot \tau)(A) = \zeta_{A,\lambda}(\tau(A)) = \zeta_{A,\lambda}(B). \end{aligned}$$

Die Punkte A, B und C liegen auf einer Geraden, die wir durch $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}$ mit $\gamma(0) = A$ und $\gamma(b) = B$ (mit $b := d(A, B)$) in eindeutiger Weise parametrisieren.

Wenn wir zeigen können, dass $\lambda \cdot \tau = \tau_{AC}$, dann sind wir fertig. Wir definieren für $P \in \mathbb{E}$ die Isometrie

$$\delta := \tau_{AP} \circ \gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E},$$

die

$$\begin{aligned} \delta(o) &= \tau_{AP}(A) = P, \\ \delta(b) &= \tau_{AP}(B) = \tau_{AP}(\tau(A)) = \tau(\tau_{AP}(A)) = \tau(P) \end{aligned}$$

erfüllt. Damit rechnen wir

$$\begin{aligned} \zeta_{P,\lambda}(\tau(P)) &= \delta(\lambda \cdot b) = \tau_{AP}(\gamma(\lambda b)) = \tau_{AP}(\zeta_{A,\lambda}(B)) \\ &= \tau_{AP}(\tau_{AC}(A)) = \tau_{AC}(\tau_{AP}(A)) = \tau_{AC}(P). \end{aligned}$$

□

Definition A.12.13 (Skalarmultiplikation für Parallelverschiebungen)

Für $\tau \in V(\mathbb{E})$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ definieren wir eine Skalarmultiplikation $\lambda \cdot \tau$ als Abbildung $\mathbb{R} \times V(\mathbb{E}) \rightarrow V(\mathbb{E})$ durch

$$\lambda \cdot \tau = (P \mapsto \zeta_{P,\lambda}(\tau(P))).$$

Bemerkung A.12.14 (Zwischenstand)

Wir haben gezeigt, dass $V(\mathbb{E}) \subset \text{Isom}(\mathbb{E})$ eine abelsche Gruppe ist und wir schreiben im Folgenden für die Verknüpfung

$$+ : V(\mathbb{E}) \times V(\mathbb{E}) \rightarrow V(\mathbb{E}), \quad (\tau, \delta) \mapsto \tau + \delta := \tau \circ \delta.$$

Außerdem haben wir die Abbildung

$$\cdot : \mathbb{R} \times V(\mathbb{E}) \rightarrow V(\mathbb{E}), \quad (\lambda, \tau) \mapsto \lambda \cdot \tau : P \mapsto \zeta_{P,\lambda}(\tau(P)),$$

sowie

$$|\cdot| : V(\mathbb{E}) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad \tau \mapsto |\tau| = d(A, \tau(A)), \text{ für } A \in \mathbb{E} \text{ beliebig.}$$

Es bleibt zu zeigen, dass $(V(\mathbb{E}), +, \cdot, |\cdot|)$ ein normierter Vektorraum ist.

□

Lemma A.12.15

Mit der Notation aus Bemerkung A.12.14 gelten

$$|\tau + \delta| \leq |\tau| + |\delta|, \quad \forall \tau, \delta \in V(\mathbb{E})$$

$$|\lambda \cdot \tau| = |\lambda| \cdot |\tau|, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \tau \in V(\mathbb{E})$$

$$|\tau| = 0 \Leftrightarrow \tau = \text{id}_{\mathbb{E}}$$

Beweis. Sei $P \in \mathbb{E}$. Aus $0 = |\tau| = d(P, \tau(P))$ folgt $P = \tau(P)$. Damit ist $\tau = \text{id}_{\mathbb{E}}$. Sei umgekehrt $\tau = \text{id}_{\mathbb{E}}$. Dann ist $|\tau| = d(P, \tau(P)) = d(P, P) = 0$. Damit ist die letzte Aussage bewiesen.

Sei $P \in \mathbb{E}$ und $Q := \tau(P)$. Ferner sei $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}$ die Parametrisierung der Geraden durch P und Q mit $\gamma(o) = P$ und $\gamma(|\tau|) = Q$. Dann gilt

$$|\lambda \cdot \tau| = d(P, \zeta_{P,\lambda}(P)) = d(\gamma(o), \gamma(\lambda|\tau|)) = |\lambda|\tau| = |\lambda| \cdot |\tau|.$$

Schließlich gilt noch

$$|\tau + \sigma| = d(P, \tau(\sigma(P))) \leq d(P, \sigma(P)) + d(\sigma(P), \tau(\sigma(P))) = |\sigma| + |\tau|.$$

□

Proposition A.12.16 (Parallelität von Bild- und Urbildgerade bei Parallelverschiebungen)

Seien (\mathbb{E}, d) eine euklidische Ebene, $g \subset \mathbb{E}$ eine metrische Gerade und $\tau \in V(\mathbb{E})$ eine Parallelverschiebung. Dann ist $g \parallel \tau(g)$.

Beweis. Wenn $\tau = \text{id}_{\mathbb{E}}$, ist nichts zu zeigen. Sei also $\tau \neq \text{id}_{\mathbb{E}}$. Haben g und $\tau(g)$ keinen gemeinsamen Punkt sind wir ebenfalls fertig. Wir müssen also nur den Fall betrachten, dass es $S \in g \cap \tau(g)$ gibt. Dann sind $S, \tau^{-1}(S) \in g$ und wegen den Definitionen A.12.13 und A.12.9 ist auch $2 \cdot \tau^{-1}(S) \in g$. Dann bildet τ die Gerade g , als Gerade durch $2 \cdot \tau^{-1}(S)$ und $\tau^{-1}(S)$ auf die Gerade durch $\tau^{-1}(S)$ und S ab, also auf sich selbst. Damit folgt $\tau(g) = g$ und damit nach Definition A.10.1 die Parallelität. □

Satz A.12.17 (Vektorraumstruktur einer euklidischen Ebene)

Mit den Notationen aus Bemerkung A.12.14 ist $(V(\mathbb{E}), +, \cdot, |\cdot|)$ ein normierter Vektorraum.

Beweis. Wir wissen bereits aus A.12.4, dass $(V(\mathbb{E}), +)$ eine abelsche Gruppe ist, und A.12.15 liefert die Normeigenschaften. Es bleiben für $\tau, \delta \in V(\mathbb{E})$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ noch die folgenden Rechengesetze zu zeigen:

- (i) $1 \cdot \tau = \tau$,
- (ii) $0 \cdot \tau = \text{id}_{\mathbb{E}}$,
- (iii) $\lambda \cdot (\mu \cdot \tau) = (\lambda\mu) \cdot \tau$,
- (iv) $(\lambda + \mu) \cdot \tau = \lambda \cdot \tau + \mu \cdot \tau$,
- (v) $\lambda \cdot (\tau + \delta) = \lambda \cdot \tau + \lambda \cdot \delta$.

Sei im Folgenden $P \in \mathbb{E}$.

zu (i): $(1 \cdot \tau)(P) = \zeta_{P,1}(\tau(P)) = \tau(P)$.

zu (ii): $(0 \cdot \tau)(P) = \zeta_{P,0}(\tau(P)) = P$.

zu (iii): $\lambda \cdot (\mu \cdot \tau)(P) = \zeta_{P,\lambda}((\mu \cdot \tau)(P)) = \zeta_{P,\lambda}(\zeta_{P,\mu}(\tau(P))) = \zeta_{P,\lambda\mu}(\tau(P)) = (\lambda\mu) \cdot \tau$.

zu (iv): Seien $A \in \mathbb{E}$, $B := \tau(A)$, $C := (\mu \cdot \tau)(A)$ und $D := \tau(C)$. Nach den Definitionen A.12.13 und A.12.9 liegen A, B und C auf einer Geraden. Da τ eine Parallelverschiebung ist, muss diese Gerade nach Proposition A.12.16 parallel zur Geraden durch $\tau(A) = B$ und $\tau(C) = D$ sein. Da B auf beiden Geraden liegt, folgt, dass alle vier Punkte auf einer Geraden g liegen.

Wir betrachten die folgenden zwei isometrischen Parametrisierungen von g :

$$\gamma_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}, \quad \gamma_1(0) = A, \quad \gamma_1(|\tau|) = B,$$

$$\gamma_2 := (\mu \cdot \tau) \circ \gamma_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}, \quad \gamma_2(0) = C, \quad \gamma_2(|\tau|) \stackrel{(\star)}{=} D.$$

$$\text{zu } (\star): \quad \gamma_2(|\tau|) = (\mu \cdot \tau)(B) = (\mu \cdot \tau) \circ \tau(A) = \tau \circ (\mu \cdot \tau)(A) = \tau(C) = D$$

τ und $\text{id}_{\mathbb{E}}$ sind als Parallelverschiebungen nach A.12.2 Translationen und zwar entlang g . Mit Satz A.9.7 erhalten wir dann für alle $t \in \mathbb{R}$ die Gleichheit

$$\gamma_2(t) = \gamma_1(\mu \cdot |\tau| + t).$$

Damit haben wir dann insgesamt

$$\begin{aligned} (\lambda \cdot \tau + \mu \cdot \tau)(A) &= (\lambda \cdot \tau) \circ (\mu \cdot \tau)(A) = (\lambda \cdot \tau)(C) = \zeta_{C,\lambda}(\tau(C)) = \gamma_2(\lambda \cdot |\tau|) \\ &= \gamma_1(\lambda |\tau| + \mu |\tau|) = \gamma_1((\lambda + \mu) |\tau|) = \zeta_{A,\lambda+\mu}(\tau(A)) \\ &= (\lambda + \mu) \cdot \tau(A). \end{aligned}$$

zu (v): Wir zeigen die Identität schrittweise für $\lambda \in \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ und \mathbb{R} .

Sei $\lambda \in \mathbb{N}$. Wir verwenden vollständige Induktion. Zunächst gilt mit

$$\mathbf{1} \cdot (\tau + \delta) \stackrel{(i)}{=} \tau + \delta \stackrel{(i)}{=} \mathbf{1} \cdot \tau + \mathbf{1} \cdot \delta$$

der Induktionsanfang. Für den Induktionsschritt rechnen wir dann

$$\begin{aligned} (\lambda + \mathbf{1})(\tau + \delta) &\stackrel{(iv)}{=} \mathbf{1} \cdot (\tau + \delta) + \lambda \cdot (\tau + \delta) = \mathbf{1} \cdot \tau + \mathbf{1} \cdot \delta + \lambda \cdot \tau + \lambda \cdot \delta \\ &\stackrel{(iv)}{=} (\lambda + \mathbf{1})\tau + (\lambda + \mathbf{1})\delta. \end{aligned}$$

Sei $\lambda \in \mathbb{Z}$. Wir betrachten zunächst den Fall $\lambda = -\mathbf{1}$. Dann gilt für alle $\tau \in V(\mathbb{E})$

$$\tau + (-\mathbf{1}) \cdot \tau \stackrel{(iv)}{=} (\mathbf{1} - \mathbf{1})\tau = \text{id}_{\mathbb{E}},$$

woraus folgt, dass $(-\mathbf{1}) \cdot \tau = -\tau$ ist.

Weiter gilt

$$\begin{aligned} (\tau + \delta) + (-\mathbf{1}) \cdot \tau + (-\mathbf{1}) \cdot \delta &\stackrel{(iv)}{=} (\mathbf{1} - \mathbf{1}) \cdot \tau + (\mathbf{1} - \mathbf{1}) \cdot \delta = \text{id}_{\mathbb{E}} \\ \Rightarrow (-\mathbf{1}) \cdot \tau + (-\mathbf{1}) \cdot \delta &= -(\tau + \delta) = (-\mathbf{1}) \cdot (\tau + \delta). \end{aligned}$$

Mit diesen Vorbereitungen können wir den Fall $\lambda \in \mathbb{Z}$ beliebig folgern. Für $\lambda \geq 0$ folgt die Aussage aus den Überlegungen zu $\lambda \in \mathbb{N}$; für $\lambda < 0$ ist $\lambda = (-\mathbf{1}) |\lambda|$ und wir erhalten

$$\begin{aligned} \lambda \cdot (\tau + \delta) &= ((-\mathbf{1}) \cdot |\lambda|) \cdot (\tau + \delta) \stackrel{(iii)}{=} (-\mathbf{1}) \cdot (|\lambda| (\tau + \delta)) \\ &\stackrel{|\lambda| \in \mathbb{N}}{=} (-\mathbf{1}) \cdot (|\lambda| \tau + |\lambda| \delta) = (-\mathbf{1} \cdot |\lambda|)\tau + (-\mathbf{1} \cdot |\lambda|)\delta \\ &= \lambda\tau + \lambda\delta \end{aligned}$$

Sei $\lambda = \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ mit $r, s \in \mathbb{Z}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{r}{s} \cdot (\tau + \delta) &\stackrel{(iii)}{=} \frac{\mathbf{1}}{s} (r \cdot (\tau + \delta)) \stackrel{r \in \mathbb{Z}}{=} \frac{\mathbf{1}}{s} (r \cdot \tau + r \cdot \delta) \stackrel{(iii)}{=} \frac{\mathbf{1}}{s} \left(s \cdot \left(\frac{r}{s} \cdot \tau \right) + s \cdot \left(\frac{r}{s} \cdot \delta \right) \right) \\ &\stackrel{s \in \mathbb{Z}}{=} \frac{\mathbf{1}}{s} \cdot \left(s \cdot \left(\frac{r}{s} \cdot \tau + \frac{r}{s} \cdot \delta \right) \right) \stackrel{(iii)}{=} \frac{r}{s} \cdot \tau + \frac{r}{s} \cdot \delta. \end{aligned}$$

Sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Sei außerdem $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ eine Folge mit $\lambda_n \rightarrow \lambda$ für $n \rightarrow \infty$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |\lambda \cdot \tau + \lambda \cdot \delta - \lambda \cdot (\tau + \delta)| &= |\lambda \cdot \tau + \lambda \cdot \delta - \lambda \cdot (\tau + \delta) - \lambda_n \cdot \tau - \lambda_n \cdot \delta + \lambda_n \cdot (\tau + \delta)| \\ &\stackrel{\mu_n = \lambda - \lambda_n}{=} \stackrel{(iv)}{=} |\mu_n \cdot \tau + \mu_n \cdot \delta - \mu_n \cdot (\tau + \delta)| \\ &\stackrel{A.12.15}{\leq} |\mu_n \cdot \tau| + |\mu_n \cdot \delta| + |\mu_n (\tau + \delta)| \\ &= \underbrace{|\mu_n|}_{\rightarrow 0} (|\tau| + |\delta| + |\tau + \delta|) \end{aligned}$$

Wieder mit Lemma A.12.15 folgt dann $\lambda \cdot \tau + \lambda \cdot \delta - \lambda \cdot (\tau + \delta) = 0$, wie behauptet.

□

A.13 Vektorraumgeraden in der euklidischen Ebene

Satz A.13.1 (Punkt-Richtungs-Form von Geraden in der euklidischen Ebene)

Seien (\mathbb{E}, d) eine euklidische Ebene, $\tau \in V(\mathbb{E})$ und $A \in \mathbb{E}$. Dann ist

$$g_{\tau, A} := \{(\lambda \cdot \tau)(A) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{E}$$

eine metrische Gerade. Wir nennen τ die **Richtung** und A den **Stützpunkt** von $g_{\tau, A}$.

Umgekehrt lässt sich jede metrische Gerade in \mathbb{E} auf diese Art (durch Richtung und Stützpunkt) ausdrücken.

Beweis. Um zu zeigen, dass $g_{\tau, A}$ eine metrische Gerade ist, zeigen wir, dass

$$\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}, \quad \lambda \mapsto \left(\frac{\lambda}{|\tau|} \cdot \tau \right) (A)$$

eine isometrische Parametrisierung angeben. Die Gleichheit $\gamma(\mathbb{R}) = g_{\tau, A}$ ist evident und auch die Isometrie folgt sofort durch Nachrechnen mit Hilfe der oben bewiesenen Eigenschaften von $(V(\mathbb{E}), +, \cdot, |\cdot|)$ (Lemma A.12.15, Satz A.12.17).

Sei $g \subset \mathbb{E}$ eine metrische Gerade mit einer isometrischen Parametrisierung $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}$ von g . Wir definieren $\tau \in V(\mathbb{E})$ als die Parallelverschiebung, die $\gamma(0)$ auf $\gamma(1)$ abbildet (also $|\tau| = 1$). Wir behaupten, dass $g = g_{\tau, \gamma(0)}$ gilt.

Aus dem ersten Teil dieses Beweises können wir benutzen, dass $g_{\tau, \gamma(0)}$ eine metrische Gerade ist. Außerdem sind nach Definition von $g_{\tau, \gamma(0)}$ die verschiedenen Punkte $\gamma(0)$ und $\gamma(1)$ beide Elemente von $g_{\tau, \gamma(0)}$. Damit haben wir zwei verschiedene Punkte im Schnitt der metrischen Geraden g und $g_{\tau, \gamma(0)}$ gefunden. Mit dem Inzidenzaxiom A.4.1 folgt die Gleichheit $g = g_{\tau, \gamma(0)}$. \square

Satz A.13.2 (Parallelität von Geraden gleicher Richtung)

Seien g_1 und g_2 Geraden in einer euklidischen Ebene (\mathbb{E}, d) mit gleicher Richtung $\tau \in V(\mathbb{E})$. Dann gilt $g_1 \parallel g_2$.

Beweis. Seien A_1 und A_2 Stützpunkte von g_1 bzw. g_2 . Liegt A_2 auf g_1 , so kann man A_2 nach Satz A.13.1 als $(\lambda \cdot \tau)(A_1)$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ darstellen. Sei $(\mu \cdot \tau)(A_2) \in g_2$ mit $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ein weiterer Punkt auf g_2 . Dann gilt mit den Rechenregeln aus Satz A.12.17

$$(\mu \cdot \tau)(A_2) = (\mu\lambda \cdot \tau)(A_1) \in g_1.$$

Also stimmen g_1 und g_2 in mindestens zwei Punkten überein und mit dem Inzidenzaxiom A.4.1 folgt die Gleichheit und damit nach Definition A.10.1 die Parallelität. Das Argument funktioniert mit vertauschten Rollen auch für den Fall $A_1 \in g_2$.

Seien also $A_1 \notin g_2$ und $A_2 \notin g_1$. Angenommen es gäbe $P \in g_1 \cap g_2$. Dann gäbe es nach Satz A.13.1 insbesondere $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$(\lambda_1 \cdot \tau)(A_1) = P = (\lambda_2 \cdot \tau)(A_2) \quad \Leftrightarrow \quad ((\lambda_1 - \lambda_2) \cdot \tau)(A_1) = A_2 \quad \Rightarrow \quad A_2 \in g_1,$$

was ein Widerspruch zur Voraussetzung ist. \square

Satz A.13.3

Sei Z ein Punkt in einer euklidischen Ebene (\mathbb{E}, d) .

- (i) Falls $g \subset \mathbb{E}$ eine Gerade ist, so ist für $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ auch $\zeta_{Z,\lambda}(g) \subset \mathbb{E}$ eine zu g parallele Gerade.
(ii) Falls $A, B \in \mathbb{E}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, so gilt

$$d(\zeta_{Z,\lambda}(A), \zeta_{Z,\lambda}(B)) = |\lambda| d(A, B).$$

Beweis.

- (i) Für $\lambda = 1$ ist die zentrische Streckung die Identität und es ist nichts weiter zu zeigen. Wir nehmen also an, dass $\lambda \neq 1$.

Seien $A, B \in g$ verschieden. Dann gilt $g = g_{A, \tau_{AB}}$. Wir definieren $A' := \zeta_{Z,\lambda}(A)$.

Wir betrachten einen Punkt $P \in g$. Dann gibt es $\mu \in \mathbb{R}$ mit $P = (\mu \cdot \tau_{AB})(A)$. Außerdem gilt nach den Propositionen A.12.4, A.12.5 und A.12.12

$$\tau_{ZP} = \mu \cdot \tau_{AB} + \tau_{ZA} \quad (*)$$

und wir erhalten

$$\zeta_{Z,\lambda}(P) \stackrel{A.12.12}{=} (\lambda \cdot \tau_{ZP})(Z) (\lambda \mu \cdot \tau_{AB} + \lambda \cdot \tau_{ZA})(Z) \stackrel{A.12.17, A.12.13}{=} (\lambda \mu) \cdot \tau_{AB}(A').$$

Also ist

$$\zeta_{Z,\lambda}(g) = \{(\nu \cdot \tau_{AB})(A') \mid \nu \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{E}$$

nach Satz A.13.1 eine Gerade und nach Satz A.13.2 parallel zu g .

- (ii) Seien $A' := \zeta_{Z,\lambda}(A)$ und $B' := \zeta_{Z,\lambda}(B)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \lambda \cdot \tau_{AB} &= \lambda \cdot (\tau_{ZB} + \tau_{AZ}) = \lambda \cdot (\tau_{ZB} - \tau_{ZA}) \\ &= \lambda \cdot \tau_{ZB} - \lambda \cdot \tau_{ZA} = \tau_{ZB'} - \tau_{ZA'} \\ &= \tau_{A'B'} \end{aligned}$$

und

$$d(\zeta_{Z,\lambda}(A), \zeta_{Z,\lambda}(B)) = d(A', B') = |\tau_{A'B'}| = |\lambda \cdot \tau_{AB}| = |\lambda| |\tau_{AB}| = |\lambda| d(A, B).$$

□

Korollar A.13.4 (Parallele durch Punktspiegelung)

In einer euklidischen Ebene (\mathbb{E}, d) erhält man die Parallele zu einer Geraden $g \subset \mathbb{E}$ durch einen Punkt $P \in \mathbb{E}$ durch die Punktspiegelung am Mittelpunkt von P und einem beliebigen Punkt $Q \in g$.

Beweis. Die Aussage folgt sofort aus Satz A.13.3 (i) in Verbindung mit A.12.11. □

Definition A.13.5 (Parallelogramm)

Seien $A, B, C, D \in \mathbb{E}$ Punkte in einer euklidischen Ebene (\mathbb{E}, d) , so gegeben, dass immer nur zwei Punkte auf einer Geraden liegen. Wir bezeichnen mit g_1 und g_2 die Geraden durch A und D bzw. durch B und C und mit h_1 und h_2 die Geraden durch A und B bzw. durch C und D . Wir nennen das Viereck $\square ABCD$ ein **Parallelogramm**, wenn $g_1 \parallel g_2$ und $h_1 \parallel h_2$ gilt.

Korollar A.13.6 (Seitenlängen im Parallelogramm)

In einem Parallelogramm $\square ABCD$ in einer euklidischen Ebene (\mathbb{E}, d) gelten $d(A, D) = d(B, C)$ und $d(A, B) = d(D, C)$.

Beweis. Sei M der Mittelpunkt von A und C und ρ_M die Punktspiegelung an M . Dann gilt nach Satz A.6.7 sofort $\rho_M(A) = C$. Nach Korollar A.13.4 liegt $\rho_M(B)$ sowohl auf der Geraden durch A und D , als auch auf der Geraden durch C und D , woraus $\rho_M(B) = D$ folgt.

Da ρ_M als Punktspiegelung eine Isometrie ist, folgt die Aussage. \square

A.14 Klassifikation euklidischer Ebenen**A.14.1 Koordinatisierung von euklidischen Ebenen****Satz A.14.1**

Seien (\mathbb{E}, d) eine euklidische Ebene und $x_1, x_2 \subset \mathbb{E}$ zwei Geraden mit $x_1 \perp x_2$, die sich in einem Punkt O schneiden. Ferner seien $E_1 \in x_1$ und $E_2 \in x_2$ Punkte mit $d(O, E_1) = d(O, E_2) = 1$.

Dann gibt es einen Vektorraumisomorphismus $\psi : V(\mathbb{E}) \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\psi(\tau_{OE_1}) = (1, 0)$ und $\psi(\tau_{OE_2}) = (0, 1)$.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $\{\tau_{OE_1}, \tau_{OE_2}\}$ bereits ein Erzeugendensystem für $V(\mathbb{E})$ ist. Seien dazu $\tau \in V(\mathbb{E})$ und $P := \tau(O)$. Wir betrachten die orthogonalen Projektionen $P_1 := P^{x_1} \in x_1$ und $P_2 := P^{x_2} \in x_2$. Dann ist nach Proposition A.10.2 die Gerade durch P und P_1 parallel zu x_2 und die Gerade durch P und P_2 parallel zu x_1 .

Nach Satz A.13.1 gibt es $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit $P_1 = (\lambda \cdot \tau_{OE_1})(O)$ und $P_2 = (\mu \cdot \tau_{OE_2})(O)$. Wir betrachten $\tilde{\tau} := \lambda \cdot \tau_{OE_1} + \mu \cdot \tau_{OE_2}$ und erhalten

$$\tilde{\tau}(O) = (\lambda \cdot \tau_{OE_1})(P_2) = (\mu \cdot \tau_{OE_2})(P_1).$$

Mit Satz A.13.2 erhalten wir, dass $\tilde{\tau}(O)$ auf der Parallelen zu x_1 durch P_2 sowie auf der Parallelen zu x_2 durch P_1 liegt. Wegen des Parallelenaxioms liegt $\tilde{\tau}(O)$ im Schnitt der Geraden durch P und P_1 sowie P und P_2 , was $\tilde{\tau}(O) = P$ impliziert.

Da außerdem τ_{OE_1} und τ_{OE_2} linear unabhängig sind (da es sonst einen weiteren Schnittpunkt von x_1 und x_2 gäbe, was $x_1 = x_2$ implizieren würde), bilden die beiden Parallelverschiebungen eine Basis für $V(\mathbb{E})$. Damit ist insbesondere die Darstellung von $\tilde{\tau}$ als Linearkombination von τ_{OE_1} und τ_{OE_2} eindeutig und wir erhalten eine Bijektion

$$\psi : V(\mathbb{E}) \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \tau = \lambda \cdot \tau_{OE_1} + \mu \cdot \tau_{OE_2} \mapsto (\lambda, \mu).$$

Die Linearität von ψ zeigt man, indem man für $\tau_1, \tau_2 \in V(\mathbb{E})$ und $v \in \mathbb{R}$ direkt $\psi(v \cdot \tau_1 + \tau_2) = v \cdot \psi(\tau_1) + \psi(\tau_2)$ nachrechnet. Damit haben wir gezeigt, dass $V(\mathbb{E})$ in der Tat isomorph zu \mathbb{R}^2 ist. \square

A.14.2 Der Hauptsatz über euklidische Ebenen

Bemerkung A.14.2 (Weiteres Vorgehen)

Seien $x_1, x_2 \in \mathbb{E}$ und $E_1, E_2, O \in \mathbb{E}$, wie in Satz A.14.1, dann haben wir

$$\Theta : \begin{cases} \mathbb{E} \xrightarrow{\Phi_Q} V(\mathbb{E}) \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}^2, \\ P \xrightarrow[\text{bij. (A.12.6)}]{\tau_{OP}} \tau_{OP} \xrightarrow[\text{VR Isom. (A.14.1)}]{\psi} (\lambda, \mu). \end{cases} \quad , \quad \text{mit } \tau_{OP} = \lambda\tau_{OE_1} + \mu\tau_{OE_2}.$$

Um eine euklidische Ebene vollständig mit $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ identifizieren zu können, bleibt noch zu zeigen, dass

$$\Theta : (\mathbb{E}, d) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, d_2)$$

eine Isometrie ist. Hierfür genügt es zu zeigen, dass für alle $P \in \mathbb{E}$ gilt

$$\|\Theta(P)\|_2 = d(O, P),$$

denn dann rechnet man für $P, Q \in \mathbb{E}$ sofort nach:

$$\begin{aligned} d(P, Q) &= d(O, \tau_{PO}(Q)) = \|\Theta(\tau_{PO}(Q))\|_2 = \|\psi(\Phi_O(\tau_{PO}(Q)))\|_2 \\ &= \|\psi(\tau_{PO} + \tau_{OQ})\|_2 = \|\psi(\tau_{OQ}) - \psi(\tau_{OP})\|_2 \\ &= \|\Theta(P) - \Theta(Q)\|_2 = d_2(\Theta(P), \Theta(Q)). \end{aligned}$$

Um einen Ansatz für den Beweis von $\|\Theta(P)\|_2 = d(O, P)$ zu finden, betrachten wir Abbildung A.1.

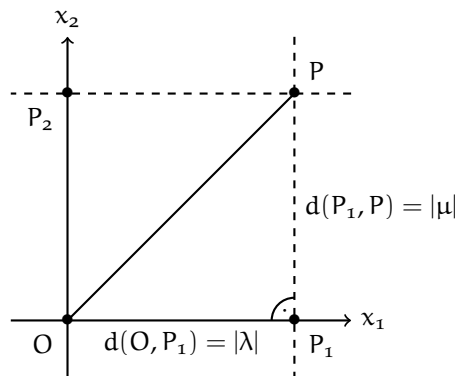


Abbildung A.1: Skizze zum Nachweis von $\|\Theta(P)\|_2 = d(O, P)$.

Wir wissen, dass $\Theta(P) = (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, also gilt $\|\Theta(P)\|_2 = |\lambda|^2 + |\mu|^2$. Es bleibt zu zeigen, dass $d(O, P_1)^2 + d(P_1, P)^2 = d(O, P)^2$ ist. Wir müssen also die Gültigkeit des *Satzes von Pythagoras* für euklidische Ebenen beweisen. □

Satz A.14.3 (Satz des Pythagoras)

Seien (\mathbb{E}, d) eine euklidische Ebene und $\triangle ABC$ ein Dreieck, bei dem die Seite durch A und C orthogonal auf der Seite durch B und C steht. Wir definieren $a = d(B, C)$, $b = d(A, C)$ und $c = d(A, B)$. Dann gilt

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Wir stellen den Beweis zurück und beweisen zunächst folgendes Lemma.

Lemma A.14.4

Seien (\mathbb{E}, d) eine euklidische Ebene, $\tau_1, \tau_2 \in V(\mathbb{E}) \setminus \{\text{id}_{\mathbb{E}}\}$ und $O \in \mathbb{E}$. Wir definieren

$$s_{\tau_1}(\tau_2) := |\tau_1| \cdot d(O, \tau_2(O))^{g_{O, \tau_1}}.$$

Dann gelten für $\lambda > 0$

$$s_{\lambda \cdot \tau_1}(\tau_2) = s_{\tau_1}(\lambda \cdot \tau_2) = \lambda s_{\tau_1}(\tau_2) \quad \text{und} \quad s_{\tau_1}(\tau_2) = s_{\tau_2}(\tau_1).$$

Beweis. Es gilt

$$s_{\lambda \cdot \tau_1}(\tau_2) = \underbrace{|\lambda \cdot \tau_1|}_{\lambda |\tau_1|} \cdot d(O, \tau_2(O))^{g_{O, \tau_1}} = \lambda \cdot s_{\tau_1}(\tau_2)$$

Die zweite Gleichheit folgt direkt aus dem Strahlensatz.

Wir zeigen noch die Symmetrie in τ_1 und τ_2 : Es gilt $s_{\tau_1}(\tau_2) = |\tau_1| \cdot |\tau_2| \cdot s_{\tilde{\tau}_1}(\tilde{\tau}_2)$, wobei $\tilde{\tau}_i = \frac{\tau_i}{|\tau_i|}$ ist. Wir betrachten die Mittelsenkrechte m von $\tilde{\tau}_1(O)$ und $\tilde{\tau}_2(O)$. Wegen $|\tilde{\tau}_i| = 1$ folgt $O \in m$. Durch die Spiegelung an m erhält man die Symmetrie der beiden Situationen und damit die Gleichheit der Längen. \square

Bemerkung A.14.5

Für $\tau_1, \tau_2 \in V(\mathbb{E})$ entspricht $s_{\tau_1}(\tau_2)$ genau der geometrischen Interpretation des (Betrags des) Skalarprodukts, wie es in der Schule eingeführt wird. In Lemma A.14.4 haben wir gezeigt, dass $s_{\tau_1}(\tau_2)$ homogen bezüglich Skalierung in beiden Variablen sowie symmetrisch ist. Wir haben jedoch nicht bewiesen, dass es bilinear ist.

Folgender Satz zeigt, dass aus der *Symmetrie* von $s_{\tau_1}(\tau_2)$ direkt der Kathetensatz und damit der Satz des Pythagoras folgt. \square

Satz A.14.6 (Kathetensatz)

Seien (\mathbb{E}, d) eine euklidische Ebene und $\triangle ABC$ ein Dreieck, bei dem die Seite durch A und C orthogonal auf der Seite durch B und C steht. Ferner sei P die orthogonale Projektion von C auf die Gerade durch A und B. Dann gelten die zwei Gleichheiten

$$d(A, C)^2 = d(A, B) \cdot d(A, P) \quad \text{und} \quad d(B, C)^2 = d(A, B) \cdot d(B, P).$$

Beweis.

$$d(A, C)^2 = s_{\tau_{AC}}(\tau_{AB}) = s_{\tau_{AB}}(\tau_{AC}) = d(A, B) \cdot d(A, P).$$

Die zweite Gleichung zeigt man komplett analog. \square

Nun können wir den Satz des Pythagoras beweisen.

Beweis. (von Satz A.14.3)

$$a^2 + b^2 \stackrel{\text{Satz A.14.6}}{=} d(A, B) \cdot d(A, P) + d(A, B) \cdot d(B, P) = d(A, B) \cdot (d(A, P) + d(B, P)) = c^2$$

\square

Mit Bemerkung A.14.2 ergibt sich, dass es bis auf Isometrie nur genau eine euklidische Ebene gibt.

Satz A.14.7 (Hauptsatz über euklidische Ebenen)

Jede euklidische Ebene ist isometrisch isomorph zu (\mathbb{R}^2, d_2) .

Index des Kurzskepts

- Bogenzusammenhang, 341
- Bogenzusammenhangskomponente, 341
- Dreieck, 352
- Dreiecksungleichung
 - strikte, 340
- euklidische Ebene, 361
- Gerade
 - metrisch, *siehe* metrische Gerade
- Inzidenzaxiom, 339
- Isometrie, 338
 - bijektiv, 350
- Kreis, 333
- Metrik, 333
- Mittelpunkt, 347
- Mittelsenkrechte, 352
 - Eindeutigkeit, 351
 - Ortslinieneigenschaft, 351
- metrische Gerade, 334
 - Parametrisierung, 334
 - isometrische Parametrisierung, 334
- metrischer Raum, 333
- orthogonal, 344
- orthogonale Projektion, 344
- Parallelenaxiom, 361
- Parallelität, 360
- Parallelogramm, 369
- Parallelverschiebung, 362
 - Länge, 363
- Punktspiegelung, 347
- Rotation, 347
- Saccheri-Ebene, 342
- Saccheri-Ungleichung, 345
- Scheitel
 - eines Winkels, 354
- Schenkel
 - eines Winkels, 354
- Seiten
 - einer Gerade, 342
- Spiegelung
 - Eindeutigkeit, 344
 - Gerade, 342
 - Involution, 343
- Spiegelungsaxiom, 342
- Strecke, 341
- Translation, 357
- Winkel, 354
 - Kongruenz, 354
 - rechter, 356
- Zusammenhangskomponente, 341
- zentrische Streckung, 364

Anhang B

Überblick über Hilberts Axiomenensystem aus den „Grundlagen der Geometrie“

Für seine Axiomatisierung der Geometrie nutzt Hilbert (1977) 20 Axiome, die er in fünf Axiomengruppen unterteilt. In den mathematischen Bemerkungen B.o.1 bis B.o.5 stelle ich die Axiome zunächst vor. Im Anschluss stelle ich in Abbildung B.1 eine Übersicht über wichtige Modelle bereit, die sich aus der bewussten Auswahl einer Teilmenge der Axiome ergeben.

Mathematische Bemerkung B.o.1 (Hilberts Axiomengruppe I: Axiome der Verknüpfung)

- I.1 Zu zwei Punkten A, B gibt es stets eine Gerade a , die mit jedem der beiden Punkte A, B zusammengehört. (Hilbert, 1977, S. 3)
- I.2 Zu zwei Punkten A, B gibt es nicht mehr als eine Gerade, die mit jedem der beiden Punkte A, B zusammengehört. (Hilbert, 1977, S. 3)
- I.3 Auf einer Geraden gibt es stets wenigstens zwei Punkte. Es gibt wenigstens drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen. (Hilbert, 1977, S. 3)
- I.4 Zu irgend drei nicht auf ein und derselben Geraden liegenden Punkte A, B, C gibt es stets eine Ebene α , die mit jedem der drei Punkte A, B, C zusammengehört. Zu jeder Ebene gibt es stets einen mit ihr zusammengehörigen Punkt. (Hilbert, 1977, S. 3)
- I.5 Zu irgend drei nicht auf ein und derselben Geraden liegenden Punkten A, B, C gibt es nicht mehr als eine Ebene, die mit jedem der drei Punkte A, B, C zusammengehört. (Hilbert, 1977, S. 3)
- I.6 Wenn zwei Punkte A, B einer Geraden a in einer Ebene α liegen, so liegt jeder Punkt von a in der Ebene α . (Hilbert, 1977, S. 3)
- I.7 Wenn zwei Ebenen α, β einen Punkt A gemein haben, so haben sie wenigstens noch einen weiteren Punkt B gemein. (Hilbert, 1977, S. 4)
- I.8 Es gibt wenigstens vier nicht in einer Ebene gelegenen Punkte. (Hilbert, 1977, S. 4)

Mathematische Bemerkung B.o.2 (Hilberts Axiomengruppe II: Axiome der Anordnung)

- II.1 Wenn ein Punkt B zwischen einem Punkt A und einem Punkt C liegt, so sind A, B, C drei verschiedene Punkte einer Geraden, und B liegt dann auch zwischen C und A. (Hilbert, 1977, S. 4)
- II.2 Zu zwei Punkten A und C gibt es stets wenigstens einen Punkt B auf der Geraden AC, so daß C zwischen A und B liegt. (Hilbert, 1977, S. 5)
- II.3 Unter irgend drei Punkten einer Gerade gibt es nicht mehr als einen, der zwischen den beiden anderen liegt. (Hilbert, 1977, S. 5)
- II.4 Es seien A, B, C drei nicht in gerader Linie gelegene Punkte und A eine Gerade in der Ebene ABC, die keinen der Punkte A, B, C trifft: wenn dann die Gerade a durch einen Punkt der Strecke AB geht, so geht sie gewiß auch durch einen Punkt der Strecke AC oder durch einen Punkt der Strecke BC. (Hilbert, 1977, S. 5)

Mathematische Bemerkung B.o.3 (Hilberts Axiomengruppe III: Axiome der Kongruenz)

- III.1 Wenn A, B zwei Punkte auf einer Geraden a und ferner A' ein Punkt auf derselben oder einer anderen Geraden a' ist, so kann man auf einer gegebenen Seite der Geraden a' von A' stets einen Punkt B' finden, so daß die Strecke AB der Strecke A'B' kongruent oder gleich ist, in Zeichen: $AB \cong A'B'$. (Hilbert, 1977, S. 11)
- III.2 Wenn eine Strecke A'B' und eine Strecke A''B'' derselben Strecke AB kongruent sind, so ist auch die Strecke A'B' der Strecke A''B'' kongruent; oder kurz: wenn zwei Strecken einer dritten kongruent sind, so sind sie untereinander kongruent. (Hilbert, 1977, S. 11)
- III.3 Es seien AB und BC zwei Strecken ohne gemeinsame Punkte auf der Geraden a und ferner A'B' und B'C' zwei Strecken auf derselben oder einer anderen Geraden a' ebenfalls ohne gemeinsame Punkte; wenn dann $AB \cong A'B'$ und $BC \cong B'C'$ ist, so ist auch stets $AC \cong A'C'$. (Hilbert, 1977, S. 12)
- III.4 Es sei ein Winkel $\sphericalangle(h, k)$ in einer Ebene α und eine Gerade a' in einer Ebene α' sowie eine bestimmte Seite von a' in α' gegeben. Es bedeute h' einen Halbstrahl der Geraden a', der vom Punkte O' ausgeht: dann gibt es in der Ebene α' einen und nur einen Halbstrahl k', so daß der Winkel $\sphericalangle(h, k)$ kongruent oder gleich dem Winkel $\sphericalangle(h', k')$ ist und zugleich alle inneren Punkte des Winkels $\sphericalangle(h', k')$ auf der gegebenen Seite von a' liegen, in Zeichen: $\sphericalangle(h, k) \cong \sphericalangle(h', k')$. Jeder Winkel ist sich selbst kongruent, d. h. es ist stets $\sphericalangle(h, k) \cong \sphericalangle(h, k)$. (Hilbert, 1977, S. 13 f.)
- III.5 Wenn für zwei Dreiecke ABC und A'B'C' die Kongruenzen $AB \cong A'B'$, $AC \cong A'C'$, $\sphericalangle BAC \cong \sphericalangle B'A'C'$ gelten, so ist auch stets die Kongruenz $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle A'B'C'$ erfüllt. (Hilbert, 1977, S. 14)

Mathematische Bemerkung B.o.4 (Hilberts Axiomengruppe IV: Axiom der Parallelen)

IV.1 (Euklidisches Axiom) Es sei a eine beliebige Gerade und A ein Punkt außerhalb a : dann gibt es in der durch a und A bestimmten Ebene höchstens eine Gerade, die durch A läuft und a nicht schneidet. (Hilbert, 1977, S. 28)

Mathematische Bemerkung B.o.5 (Hilberts Axiomengruppe V: Axiome der Stetigkeit)

IV.1 (Axiom des Messens oder Archimedisches Axiom) Sind AB und CD irgendwelche Strecken, so gibt es eine Anzahl n derart, daß das n -malige Hintereinander-Abtragen der Strecke CD von A aus auf den durch B gehenden Halbstrahl über den Punkt B hinausführt. (Hilbert, 1977, S. 30)

IV.2 (Axiom der linearen Vollständigkeit) Das System der Punkte einer Geraden mit seinen Anordnungs- und Kongruenzbeziehungen ist keiner solchen Erweiterung fähig, bei welcher die zwischen den vorigen Elementen bestehenden Beziehungen sowie auch die aus den Axiomen I-III folgenden Grundeigenschaften der linearen Anordnung und Kongruenz, und VI erhalten bleiben. (Hilbert, 1977, S. 30)

Hilbert (1977) gibt einige Modelle für Geometrie an, die jeweils verschiedene Teilmengen seiner Axiome I bis V erfüllen bzw. nicht erfüllen. Diese Konstruktionen nutzt vor allem zum Nachweise der Unabhängigkeit einzelner Axiome. Eine lesenswerte und instruktive Übersicht über „Hilberts Modelle“ liefert Volkert (2015, S. 247 ff.). In Abbildung B.1 habe ich darauf aufbauend eine Übersicht über die relevanten Modelle erstellt.

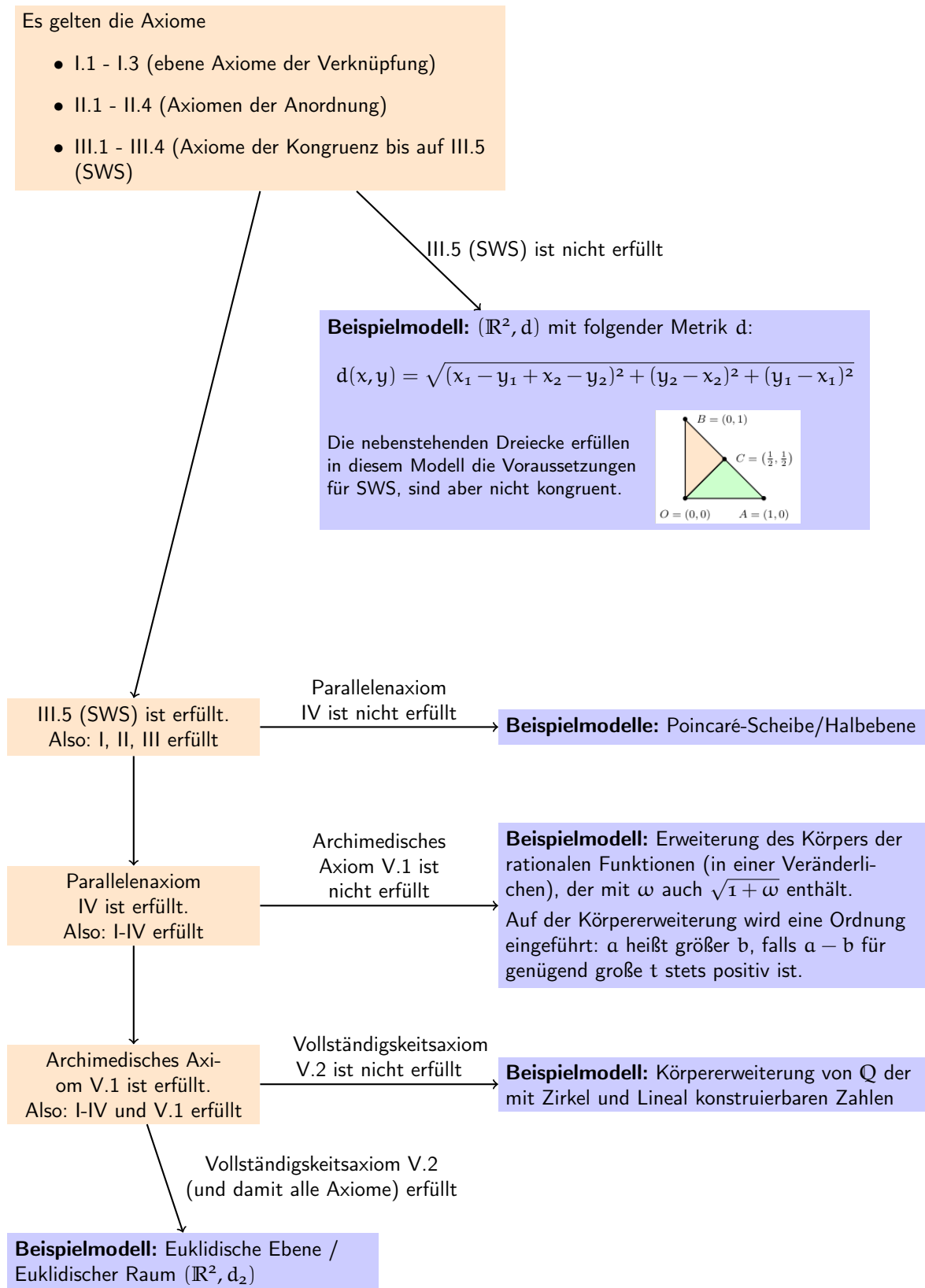


Abbildung B.1: Eine Übersicht über wichtige der von Hilbert (1977) konstruierten Modelle seines Axiomensystems. Die Übersicht beruht auf der Zusammenfassung von Volkert (2015, S. 247 ff.).

Anhang C

Ausgewählte Lehr-Lern-Materialien zur Veranstaltung

In diesem Anhang befinden sich all die Lehr-Lern-Materialien zur Veranstaltung *Geometrie für Lehramtsstudierende*, die im Hauptteil der Arbeit referenziert werden.

C.1 Präsenzaufgaben in den Schnittstellenwochen

In diesem Abschnitt sind die Aufgaben aufgelistet, die als Präsenzaufgaben im Rahmen der Schnittstellenwochen *Kongruenz* (vgl. Kapitel 13) und *Symmetrie* (vgl. Kapitel 14) eingesetzt wurden. Die Version der Aufgaben entspricht der des dritten Veranstaltungszyklus (Sommersemester 2020); es werden aber auch Aufgaben aufgeführt, die nicht in allen Zyklen eingesetzt wurden.

Aufgabentitel	Referenz in dieser Übersicht	Bezüge im Hauptteil dieser Arbeit
Schnittstellenwoche Kongruenz		
Konstruktionen entlang der Kongruenzsätze Winkel abtragen	Präsenzübung 1 (S. 380)	
	Präsenzübung 2 (S. 381)	
Planskizzen in Konstruktionsaufgaben	Präsenzübung 3 (S. 382)	
Kongruenz von Vierecken	Präsenzübung 4 (S. 382)	Abschnitt 13.2.4 (S. 195)
Kongruente Würfelnetze	Präsenzübung 5 (S. 383)	
Schnittstellenwoche Symmetrie		
Zugänge zur Symmetrie in Schulbüchern	Präsenzübung 6 (S. 384)	
Spiegeln mit dem Spiegelbuch	Präsenzübung 7 (S. 385)	Abschnitt 14.2.4 (S. 260)

Symmetrie von Funktionen Präsenzübung 8 (S. 385)

Platonische Parkettierungen Präsenzübung 9 (S. 385)
 (Zusatzaufgabe)

Präsenzaufgabe 1 (Konstruktionen entlang der Kongruenzsätze – Gruppenarbeit)

In dieser Aufgabe soll es darum gehen, Dreiecke aus gegebenen Größen mit Zirkel und Lineal (nicht Geodreieck) zu konstruieren.

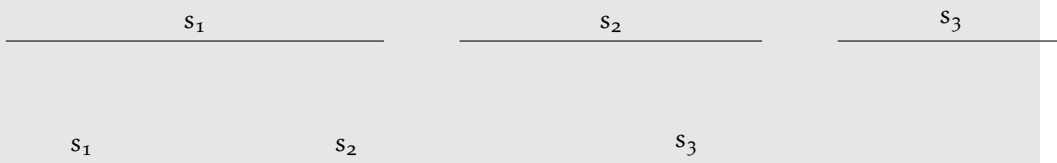
- a) Tun Sie sich in Vorbereitung der Präsenzübung mit anderen Kommilitonen aus Ihrer Übungsgruppe zusammen. Jedes Gruppenmitglied wählt eine Ausgangskonfiguration: SSS, SWS oder WSW und erstellt in *Einzelarbeit* eine Konstruktionsanleitung, wie mit Hilfe von Zirkel und Lineal aus den gegebenen Größen ein Dreieck konstruiert werden kann. Entsprechende Tripel gegebener Größen finden Sie auf der nächsten Seite.

Hinweis: In Ihren Konstruktionsbeschreibungen können Sie das Abgraten der Größen wie folgt beschreiben: (*Trage die Strecke ... an den Punkt ... (auf dem Strahl ...) an.* bzw. *Trage an den Strahl ... einen Strahl ... so an, das der Winkel ... entsteht.*)

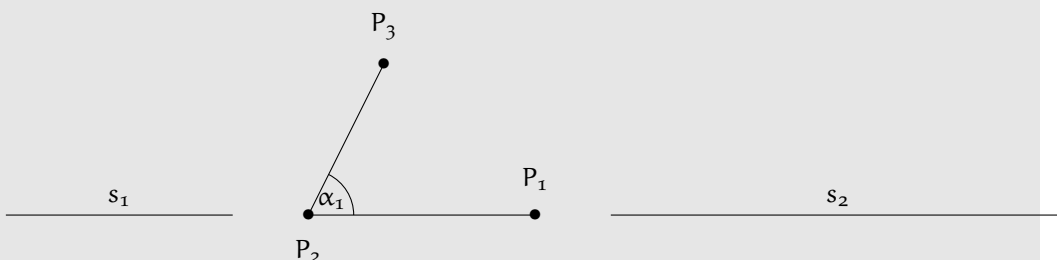
- b) Tauschen Sie Ihre Konstruktionsbeschreibungen innerhalb der Gruppe und führen Sie die Konstruktionsbeschreibung eines anderen Gruppenmitgliedes aus. Diskutieren Sie ggf. auftretende Probleme in der Gruppe.
- c) Reflektieren Sie die Erfahrungen, die Sie bei der Bearbeitung dieser Aufgabe gemacht haben. Was würden Sie beachten, wenn sie solche Aufgaben im Schulunterricht einsetzen?

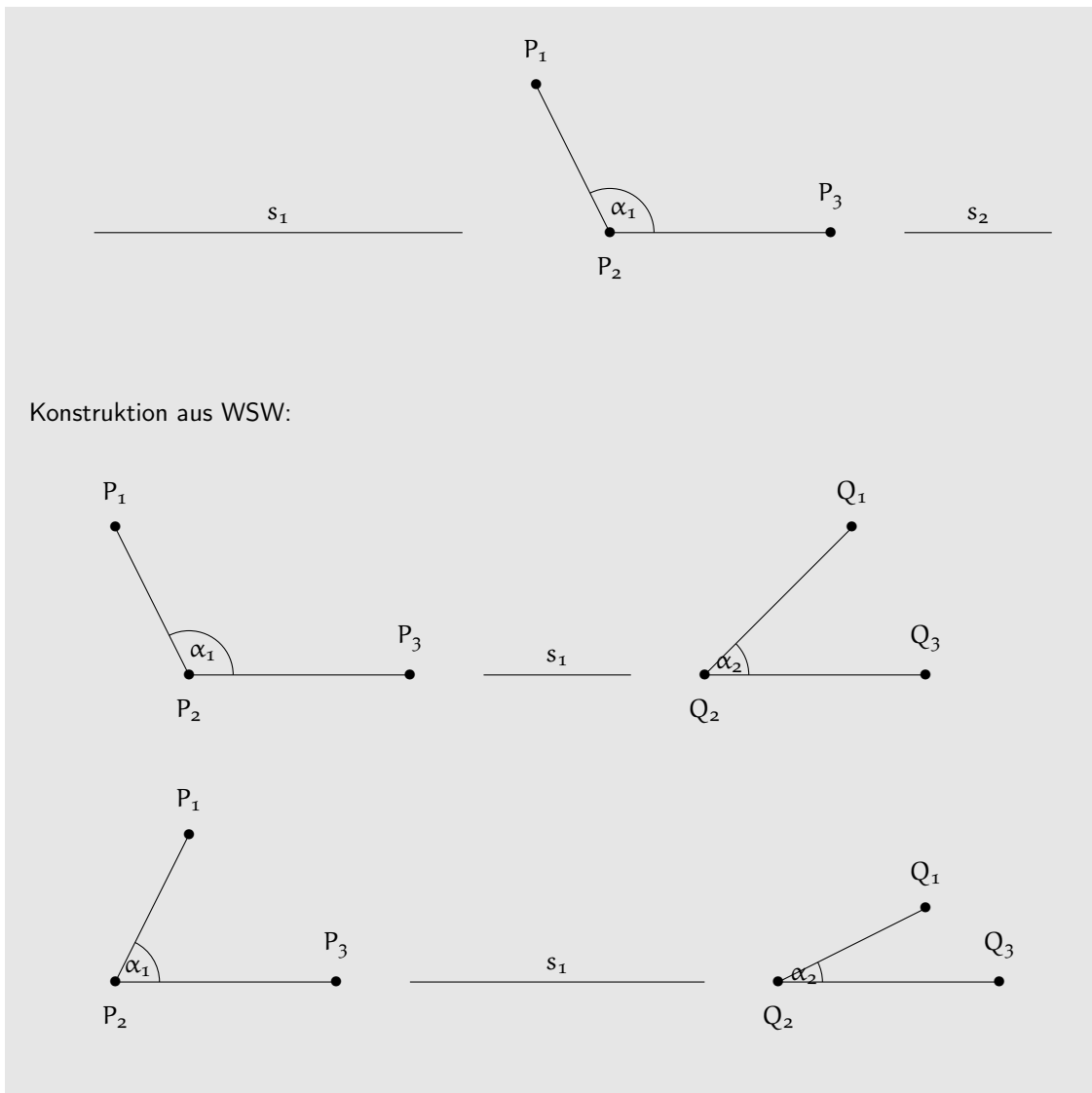
Größen für die Konstruktion von Dreiecken:

Konstruktion aus SSS:



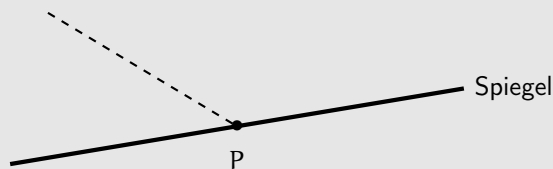
Konstruktion aus SWS:





Präsenzaufgabe 2 (Winkel abtragen – Gruppenarbeit)

Betrachten Sie folgende Situation in der ein Lichtstrahl (gestrichelt) auf einen Spiegel trifft:

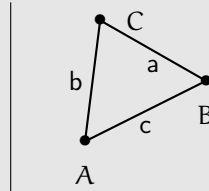


- Konstruieren Sie mit Zirkel und Lineal, wie der Lichtstrahl am Spiegel reflektiert wird auf zwei unterschiedliche Arten: Erstens, indem sie den Winkel mit Zirkel und Lineal übertragen, und zweitens unter Verwendung eines Geodreiecks.
- Vergleichen Sie die beiden Wege und diskutieren Sie Vor- und Nachteile, insbesondere auch in Bezug auf einen Einsatz dieser Aufgabe im Mathematikunterricht.

Präsenzaufgabe 3 (Planskizzen in Konstruktionsaufgaben – Gruppenarbeit)

Vergleichen Sie die folgenden beiden Aufgabenstellungen. Welche Gemeinsamkeiten und Unterschiede stellen Sie fest?

Konstruieren Sie ein Dreieck mit den Seitenlängen 3 cm, 5 cm und 6 cm.



Konstruieren Sie das Dreieck $\triangle ABC$ mit $a = 3$ cm, $b = 5$ cm und $c = 6$ cm.

Welche der beiden Aufgaben würden Sie eher im Unterricht einsetzen. Bereiten sie sich darauf vor, in der ePräsenzübung über Vor- und Nachteile zu diskutieren.

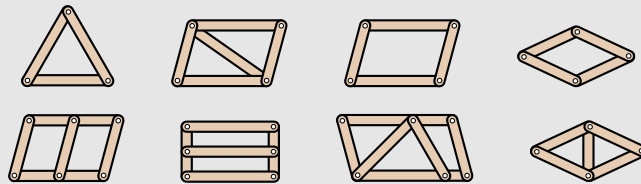
Präsenzaufgabe 4 (Kongruenz von Vierecken – Gruppenarbeit)

Betrachten Sie folgende Schulbuchaufgabe aus *Neue Wege 7* (Körner et al., 2014, S. 195):

Gelenkvierecke

Stelle aus Lochstangen und Briefklammern verschiedene Vierecke und Dreiecke her. Welche dieser Figuren sind in ihrer Form festgelegt (starr), welche sind beweglich?

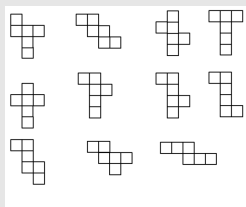
Erkläre deine Beobachtungen. Was hat der Kongruenzsatz SSS damit zu tun?



- Was hat diese Aufgabe mit dem Thema Kongruenz zu tun?
- Lösen Sie die Aufgabe: Überlegen Sie sich jeweils für jede der abgebildeten Figuren, ob diese beweglich ist oder nicht. Erklären Sie Ihre Beobachtungen und diskutieren Sie, welche Rolle der Kongruenzsatz SSS spielt.
- Überlegen Sie sich – basierend auf Ihren Überlegungen aus a) und b) – zwei Kongruenzsätze für Vierecke.

Präsenzaufgabe 5 (Würfelnetze – Gruppenarbeit)

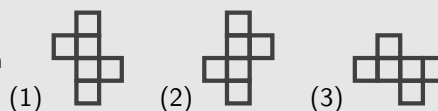
Bitte lesen Sie sich folgenden Transskriptauszug aus dem Unterrichtspraktikum der Lehramtstudentin Lara (Mathematik, Klasse 5) durch (Quelle: Prediger und Hefendehl-Hebeker (2016, S. 249)).



Die Klasse hat den selbstdifferenzierenden Arbeitsauftrag, alle Würfelnetze zu finden. Nachdem in der abschließenden Sammelphase 11 Würfelnetze als Pappmodelle auf dem Overheadprojektor liegen (siehe linke Abbildung), kommt Mia nach vorne und beginnt eine Diskussion, welche Netze untereinander als gleich zählen:

Mia: Das sind aber noch nicht alle, was ist mit dem hier? Und dem? [*nimmt das Würfelnetz (1) und klappt und dreht es, so dass (2) und (3) entstehen*]

Merve: Der [*zeigt auf (2)*] ist doch gleich dem [*zeigt auf (1)*].



Ozan: Das erste [*zeigt auf (2)*] ist anders [*als (1)*], das zweite [*zeigt auf (3)*] ist quasi gleich.

- a) Beschreiben Sie den fachmathematischen Hintergrund dieser Diskussion im Kontext des Kongruenzbegriffs. Interpretieren Sie, welches Konzept die handelnden Schüler jeweils von „geometrisch gleich“ haben.
- b) Lara antwortet in der Situation mit

Lara: Toll, dass Ihr nochmal nach weiteren Netzen sucht. Aber die, die nur gedreht oder gespiegelt sind, darf man nicht mitzählen.

Nehmen Sie aus fachmathematischer Sicht Stellung zum unterstrichenen Satzteil.

- c) Erarbeiten Sie in Ihrer Gruppe eine alternative, lernförderliche Reaktion Laras auf diese Schüleräußerungen.
- d) Diskutieren Sie, inwieweit die einzelnen Aspekte des Kongruenzbegriffs in der gegebenen Situation eine Rolle spielen.

Präsenzaufgabe 6 (Zugänge zur Symmetrie in Schulbüchern)

Betrachten Sie die folgenden Auszüge aus Schulbüchern:

Achsensymmetrische Figuren

(Hier ist im Original das Foto von einem symmetrischen Drachen.)



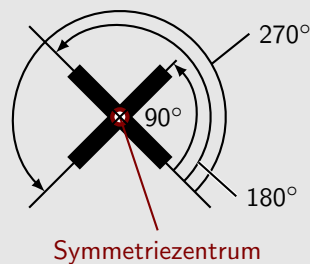
Symmetrieachse

Bei manchen Figuren ist die eine Hälfte das genaue Spiegelbild der anderen. Diese Figuren nennt man **achsensymmetrisch**.

Zugang zur Achsensymmetrie in *Neue Wege 6* (Körner et al., 2013, S. 146).

Drehsymmetrie

(Hier ist im Original das Foto eines sechszackigen Zimtsternes.)



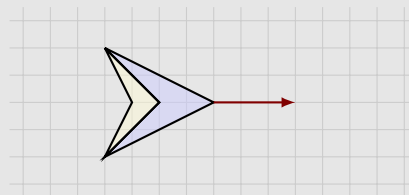
Symmetriezentrum

Manche Figuren kann man um einen Winkel (kleiner als 360°) drehen, und es sieht so aus, als wäre nichts geschehen. Diese Figuren nennt man **drehsymmetrisch**.

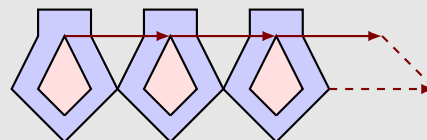
Zugang zur Punkt- und Drehsymmetrie in *Neue Wege 6* (Körner et al., 2013, S. 146).

Bandornamente 1

Zeichne ein Bandornament aus der Grundfigur in dein Heft. Nutze die ganze Heftbreite. Erfinde selbst eine Grundfigur, gib einen Verschiebungspfeil vor und lasse deine Nachbarin oder deinen Nachbarn daraus ein Bandornament zeichnen.

**Tipp**

Mithilfe der Verschiebung kann man Bandornamente zeichnen. Hat man eine Grundfigur einmal verschoben, so verschiebt man die Bildfigur mit dem gleichen Verschiebungspfeil usw.



Zugang zu Bandornamenten in *Neue Wege 6* (Körner et al., 2013, S. 158).

- a) Diskutieren Sie, welcher der Schnittstellenaspekte zur Symmetrie in den Schulbuchzugängen jeweils die dominierende Rolle spielt.

- b) Überlegen Sie, ob auch die jeweils anderen beiden Aspekte geeignet wären um die einzelnen Symmetrievarianten einzuführen. Skizzieren Sie ggf. jeweils einen Entwurf.

Präsenzaufgabe 7 (Spiegeln mit dem Doppelspiegel)

- a) Lösen Sie die erste der Seiten aus dem Buch „Spiegeln mit dem Spiegelbuch“.
- b) Diskutieren Sie in Ihrer Gruppe, welche Schwierigkeiten Sie bei den Aufgaben hatten.
- c) Lösen Sie nun die zweite Aufgabenseite aus dem Buch „Spiegeln mit dem Spiegelbuch“ und gehen dabei immer nach folgendem Schema vor:
1. Finden Sie einen Fundamentalebenebereich der Figur sowie das Symmetriezentrum der Drehsymmetrie und das zugehörige α_{\min} .
 2. Nutzen Sie diese Informationen um sich zu überlegen, wie der Doppelspiegel zu platzieren ist, und überprüfen Sie dann Ihre Vermutung, indem Sie den Doppelspiegel tatsächlich anlegen.
- d) Formulieren Sie eine strategische Hilfe für Schüler*innen der Unterstufe zur Lösung solcher Doppelspiegel-Probleme
- e) Diskutieren Sie die Rolle, die die drei Aspekte des Symmetriebegriffs bei dieser Aufgabe spielen.
- f) Kann man jede drehsymmetrische Figur mit dem Doppelspiegel erzeugen? Geben Sie ein Argument an oder finden Sie ein Gegenbeispiel.

Präsenzaufgabe 8 (Symmetrie von Funktionen)

In der Oberstufe ist ein wesentliches Themengebiet die Diskussion von Funktionen.

- a) Rufen Sie sich in Erinnerung, wie das Thema Symmetrie in die Kurvendiskussion mit einfloß.
- b) Bei welcher Art von Fragestellungen kann die Kenntnis über das Symmetrieverhalten einer Funktion von Nutzen sein?
- c) Diskutieren Sie die Rolle, die die drei Aspekte des Symmetriebegriffs in diesem Themenfeld spielen.

Präsenzaufgabe 9 (Platonische Parkettierung (Zusatzaufgabe))

Eine Parkettierung der Ebene heißt *platonisch*, falls Sie nur aus genau einer Sorte kongruenter und regelmäßiger n -Ecke besteht, die immer angeordnet werden, dass Kante an Kante stößt.

Die Frage danach, welche platonischen Parkettierungen es gibt, wird im Geometrieunterricht oft zunächst enaktiv mit Puzzelsteinen behandelt und danach über die Winkelsumme an den Eckpunkten systematisch beantwortet. In dieser Aufgabe wollen wir einen alternativen Zugang betrachten, der auf Symmetrieüberlegungen fußt.

- a) Finden Sie mit den zu Verfügung stehenden Bauteilen verschiedene platonische Parkettierungen.
- b) Zeigen Sie allgemein, für welche n es solche Parkettierungen überhaupt nur geben kann. Nutzen Sie dabei Ihr Wissen über Parkettierungen aus der Vorlesung.
- c) Diskutieren Sie die Rolle, die die drei Aspekte des Symmetriebegriffs bei dieser Aufgabe spielen.

C.2 Aktivitäten für das Schnittstellen-ePortfolio

In diesem Abschnitt sind alle Arbeitsaufträge für das Schnittstellen-ePortfolio (siehe Abschnitt 8.1) in der Version des dritten Veranstaltungszyklus (Sommersemester 2020) aufgelistet:

Aufgabentitel	Referenz in dieser Übersicht	Bezüge im Hauptteil dieser Arbeit
Einstiegsreflexion	ePortfolioaufgabe 1 (S. 387)	
Wissensstand: Kongruenz	ePortfolioaufgabe 2 (S. 388)	Abschnitt 13.3.3 <i>Analyse von Lernendenvoraussetzungen zum Kongruenzbegriff</i>
Kompetenzraster (Veranstaltungsbeginn)	ePortfolioaufgabe 3 (S. 388)	
Steckbriefe zu geometrischen Abbildungen 1	ePortfolioaufgabe 4 (S. 389)	
Zwei Winkel und eine Seite (Vor der Schnittstellenwoche)	ePortfolioaufgabe 5 (S. 391)	Abschnitt 13.2.4 (S. 196)
Konstruktion von Dreiecken (Vor der Schnittstellenwoche)	ePortfolioaufgabe 6 (S. 392)	
Zwei Winkel und eine Seite (In der Schnittstellenwoche)	ePortfolioaufgabe 7 (S. 393)	
Der Kongruenzsatz SsW	ePortfolioaufgabe 8 (S. 393)	

Konstruktion von Dreiecken (In der Schnittstellenwoche)	ePortfolioaufgabe 9 (S. 394)	
Wechselwinkelsatz	ePortfolioaufgabe 10 (S. 394)	13.2.4 (S. 197)
Charakterisierung der euklidischen Isometrien	ePortfolioaufgabe 11 (S. 395)	
Verknüpfung von Spiegelungen mit DGS	ePortfolioaufgabe 12 (S. 395)	
Vorbereitende Reflexion zum Themenblock <i>Symmetrie</i>	ePortfolioaufgabe 13 (S. 396)	
Zwischenreflexion Saccheri- Ebene	ePortfolioaufgabe 14 (S. 396)	
Das Haus der Vierecke	ePortfolioaufgabe 15 (S. 396)	Abschnitt 14.2.4 (S. 261)
Symmetrie-Aspekte in Schulbü- chern	ePortfolioaufgabe 16 (S. 397)	Abschnitt 14.2.4 (S. 262)
SuS-Äußerungen zur Symme- trie	ePortfolioaufgabe 17 (S. 398)	
Symmetrie als Argumentati- onsstrategie	ePortfolioaufgabe 18 (S. 398)	
Steckbriefe zu geometrischen Abbildungen 2	ePortfolioaufgabe 19 (S. 399)	
Abschlussreflexion	ePortfolioaufgabe 20 (S. 399)	
Kompetenzraster (Veranstaltungsabschluss)	ePortfolioaufgabe 21 (S. 399)	

ePortfolioaufgabe 1 (Einstiegsreflexion)

Setzen Sie sich auf 1,5-3 DinA4-Seiten mit folgenden Leitfragen auseinander:

- 1) Welche positiven, negativen oder allgemein besondere Erinnerungen verbinden Sie mit dem *Geometrie*-Unterricht in Ihrer Schulzeit.
- 2) Beschreiben Sie die Rolle, die *Geometrie* in Ihrem bisherigem Studium gespielt hat.

- 3) Wie fühlen Sie sich zum momentanen Zeitpunkt darauf vorbereitet, *Geometrie* in der Schule zu unterrichten?
- 4) Warum ist *Geometrie* in der Schulmathematik Ihrer Meinung nach ein wichtiges Thema?

ePortfolioaufgabe 2 (Wissensstand: Kongruenz)

Schreiben Sie bitte auf, wie Sie folgende Definitionen ergänzen würden. Schlagen Sie bitte nicht in einem Buch oder online nach und tauschen Sie sich bitte auch nicht mit Ihren Mitstudierenden aus, sondern antworten Sie so, als ob Sie diese Fragen in einem Gespräch gestellt bekommen. Es geht insbesondere nicht zwingend um eine „formale Definition“. Schreiben Sie einfach, was Ihnen gerade durch den Kopf geht.

- Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn ...
- Zwei Vierecke sind kongruent, wenn ...
- Zwei Kreise sind kongruent, wenn ...
- Zwei beliebige Figuren der Ebene sind kongruent, wenn ...

Die Antwort wird nicht bewertet, sondern dient als erster Teil einer veranstaltungsbegleitenden Selbstreflexion Ihres Lernprozesses.

ePortfolioaufgabe 3 (Kompetenzraster)

Ordnen Sie sich selbst in das Kompetenzraster auf der nächsten Seite ein. Notiere Sie dazu in der farbigen Spalte

- + für: „Kann ich.“
- o für: „Kann ich bedingt.“
- für: „Kann ich nicht.“

Ich kann typische Begriffe des Geometrie-Unterrichts der Sekundarstufe I mathematisch präzise definieren.	
Kreis	
Strecke	
Gerade	
Winkel und Winkelgröße	
Orthogonalität	
Kongruenz	
Symmetrie	
Ähnlichkeit	

Mittelsenkrechte	
Winkelhalbierende	
Orthogonale Projektion	
Ich kenne Begründungen für typische Theoreme des Geometrie-Unterrichts der Sekundarstufe I.	
Innenwinkelsummensatz des Dreiecks	
Satz des Thales	
Basiswinkelsatz	
Neben- und Scheitelwinkelsatz	
Wechsel- und Stufenwinkelsatz	
Satzgruppe des Pythagoras	
Strahlensatz	
Ich kenne typische geometrische Abbildungen samt Definition und typischen Eigenschaften (bspw. Fixpunkte oder Umkehrungen)	
Spiegelung	
Drehung	
Verschiebung	
Gleitspiegelung	
zentrische Streckung	
Ich kann systematisch die resultierenden Abbildungen beschreiben, die bei Verknüpfungen gleicher bzw. unterschiedlicher geometrischer Abbildungen Abbildungen entstehen	
Ich kenne einen konsistenten und rigorosen mathematischen Hintergrund für alle bis hierhin erwähnten Themen.	
Ich kann die Geometrie der Mittelstufe mit der analytischen Geometrie der Oberstufe in Verbindung bringen.	
Ich habe das notwendige mathematische Hintergrundwissen um im Geometrieunterricht professionell in folgenden Bereichen zu handeln:	
Lernförderliche Reaktion auf Schüleräußerungen und -fehler	
Moderation produktiver Diskussionen	
Zugänge in Unterrichtsmaterialien (bspw. Schulbücher) analysieren und bewerten	

ePortfolioaufgabe 4 (Steckbriefe zu geometrischen Abbildungen 1)

Erstellen Sie zu folgenden geometrischen Abbildungen der euklidischen Geometrie Steckbriefe unter Verwendung der angefügten Kopiervorlage.

Hinweis: Behandeln sie in allen Aufgabenteilen den „einfachen“ Fall, dass $(0,0)$ ein Fixpunkt ist, getrennt.

- a) Orthogonale Projektion
- b) Spiegelung (Denken Sie daran, dass es hier zwei Darstellungen gibt.)
- c) Rotation

Abbildungssteckbrief (Vorlage)

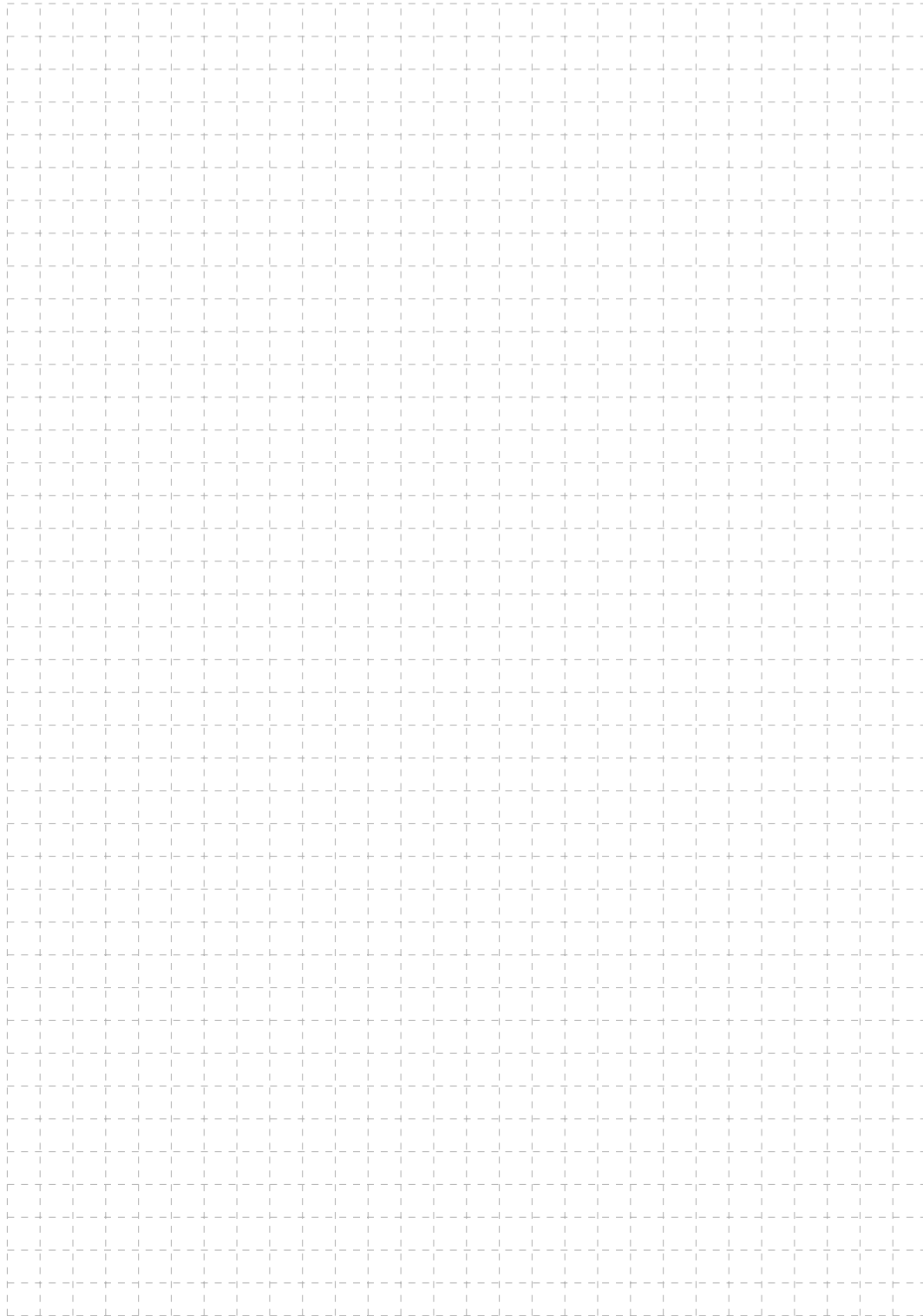
Bezeichnung der Abbildung

Definierende Geometrische Objekte Notieren Sie hier die geometrischen Objekte, von denen die Abbildung abhängt. Für eine Rotation sind dies bspw. das Rotationszentrum $Z \in \mathbb{R}^2$, sowie ein Winkel $\alpha \in [0, 2\pi[$.

Abbildungsvorschrift Notieren Sie hier verschiedene Möglichkeiten der Darstellung (bspw. mit oder ohne Verwendung von Matrizen) sowie wichtige Sonderfälle, wie bspw. die Spiegelung an einer Ursprungsgeraden im Unterschied zur Spiegelung an einer beliebigen Geraden. Erläutern Sie außerdem die einzelnen Bestandteile der Darstellungen, wie die Bedeutung von einzelnen Termelementen oder Matrizeneinträgen.

(Ein Beispiel findet sich auf der nächsten Seite \leftrightarrow)

Beispiel Wählen Sie eine Beispielkonfiguration für die Abbildung und wenden Sie diese auf einen selbstgewählten Punkt an. Kommentieren Sie Ihren Lösungsweg ausführlich. Denken Sie auch an eine aussagekräftige Planskizze.

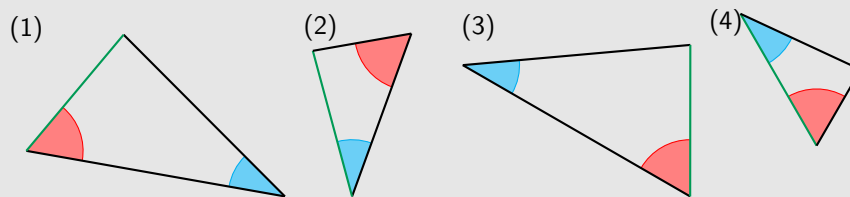


ePortfolioaufgabe 5 (Zwei Winkel und eine Seite)

Stellen Sie sich vor, Ihre Schülerinnen und Schüler bearbeiten im Unterricht die folgende Aufgabe aus dem Schulbuch *Neue Wege 7* (Körner et al., 2014, S. 193).

Die Dreiecke haben alle eine Seite der Länge 2,5 cm und Winkel von 35° und 60° .

- Welche Dreiecke sind kongruent zueinander? Begründe.
- Konstruiere die Dreiecke in deinem Heft. Bei welchen Dreiecken musst du hierfür eine zusätzliche Größe bestimmen?



- Lösen Sie die Schulbuchaufgabe.

Hinweis: Denken Sie bei a) in der Schulbuchaufgabe insbesondere auch daran, sowohl die Kongruenz als auch die Nicht-Kongruenz zu begründen.

Hinweis: Bei b) bedeutet ‚Konstruiere‘ die Verwendung von Zirkel und Lineal.

Ihre Schülerin Emma ist verwirrt und fragt: „Wie passt das denn dazu, dass nach den Kongruenzsätzen zwei Dreiecke kongruent sind, wenn sie in zwei Winkeln und einer Seite übereinstimmen?“

- Klären Sie Emmas Frage aus fachmathematischer Sicht.
- Wie würden Sie auf Emmas Frage reagieren?

ePortfolioaufgabe 6 (Konstruktion von Dreiecken)

Sind drei Größen (Seitenlängen oder Winkel) gegeben, so kann aus diesen unter bestimmten Umständen ein Dreieck konstruiert werden. Nicht immer geschieht dies in eindeutiger Weise, zum Beispiel wenn nur drei Winkel gegeben sind. In dieser Aufgabe geht es nun um Größenangaben aus denen überhaupt kein Dreieck konstruiert werden kann.

- Geben Sie zwei systematisch unterschiedliche Tripel von Größen an (also nicht nur andere Zahlenwerte), aus denen kein Dreieck konstruiert werden kann. Begründen Sie sorgfältig.

Finn zeigt auf und sagt: „Aber die Kongruenzsätze sagen doch, dass wir aus drei Seiten *immer* ein Dreieck konstruieren können. Das versteh ich nicht.“

- Klären Sie Finns Bemerkung aus fachmathematischer Sicht.
- Reagieren Sie auf Finn.

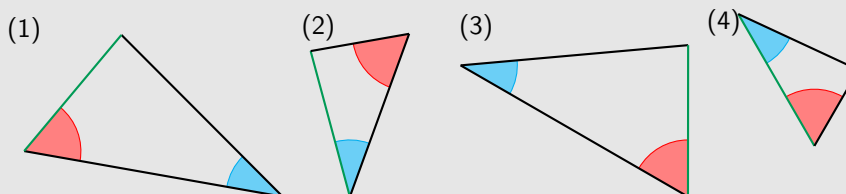
ePortfolioaufgabe 7 (Zwei Winkel und eine Seite)

Bearbeiten Sie einen Teil dieser Aufgabe aus der letzten Woche erneut und nutzen Sie das Wissen, das Sie in der letzten Vorlesung erworben haben.

Stellen Sie sich vor, Ihre Schülerinnen und Schüler bearbeiten im Unterricht die folgende Aufgabe aus dem Schulbuch *Neue Wege 7* (Körner et al., 2014, S. 193)

Die Dreiecke haben alle eine Seite der Länge 2,5 cm und Winkel von 35° und 60° .

- Welche Dreiecke sind kongruent zueinander? Begründe.
- Konstruiere die Dreiecke in deinem Heft. Bei welchen Dreiecken musst du hierfür eine zusätzliche Größe bestimmen?



Ihre Schülerin Emma ist verwirrt und fragt: „Wie passt das denn dazu, dass nach den Kongruenzsätzen zwei Dreiecke kongruent sind, wenn sie in zwei Winkeln und einer Seite übereinstimmen?“

- Klären Sie Emmas Frage aus fachmathematischer Sicht.
- Wie würden Sie auf Emmas Frage reagieren?
- Welche Schnittstellenaspekte spielen bei dieser Aufgabe eine Rolle. Begründen Sie Ihre Antwort.
- Reflektieren Sie, wie sich Ihre Sicht auf die Aufgabe und Ihre Bearbeitung der Aufgabe im Vergleich zur letzten Woche verändert hat.

ePortfolioaufgabe 8 (Der Kongruenzsatz SsW)

- Erstellen Sie eine *GeoGebra-Datei*, in der verdeutlicht wird, dass es für die Gültigkeit des Kongruenzsatzes SsW entscheidend ist, dass der gegebene Winkel der größeren und nicht der kleineren der beiden gegebenen Seiten gegenüber liegt.
- Erläutern Sie die Idee und Funktionsweise Ihres Produktes aus a).

ePortfolioaufgabe 9 (Konstruktion von Dreiecken)

Bearbeiten Sie einen Teil dieser Aufgabe aus der letzten Woche erneut und nutzen Sie das Wissen, dass Sie in der letzten Vorlesung erworben haben.

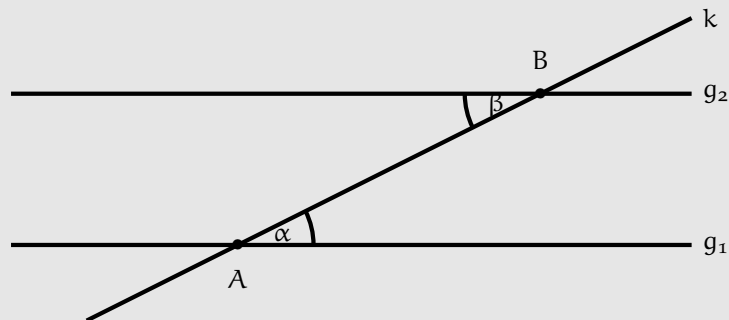
Sind drei Größen (Seitenlängen oder Winkel) gegeben, so kann aus diesen unter bestimmten Umständen ein Dreieck konstruiert werden. Nicht immer geschieht dies in eindeutiger Weise, zum Beispiel wenn nur drei Winkel gegeben sind. In dieser Aufgabe geht es nun um Größenangaben aus denen überhaupt kein Dreieck konstruiert werden kann.

Finn zeigt auf und sagt: „Aber die Kongruenzsätze sagen doch, dass wir aus drei Seiten *immer* ein Dreieck konstruieren können. Das versteh ich nicht.“

- Klären Sie Finns Bemerkung aus fachmathematischer Sicht.
- Reagieren Sie auf Finn.
- Welche Schnittstellenaspekte spielen bei dieser Aufgabe eine Rolle. Begründen Sie Ihre Antwort.
- Reflektieren Sie, wie sich Ihre Sicht auf die Aufgabe und ihre Bearbeitung der Aufgabe im Vergleich zur letzten Woche verändert hat.

ePortfolioaufgabe 10 (Wechselwinkelsatz)

Aus der Schule kennen Sie den Wechselwinkelsatz im \mathbb{R}^2 :



Diese besagt, dass aus der Parallelität von g_1 und g_2 bereits $\alpha = \beta$ folgt.

- Beweisen Sie den Satz einmal mit einem Abbildungsbeweis und einmal mit einem Kongruenzbeweis. Geben Sie ggf. an, welche weiteren schulmathematischen Theoreme Sie benutzen.

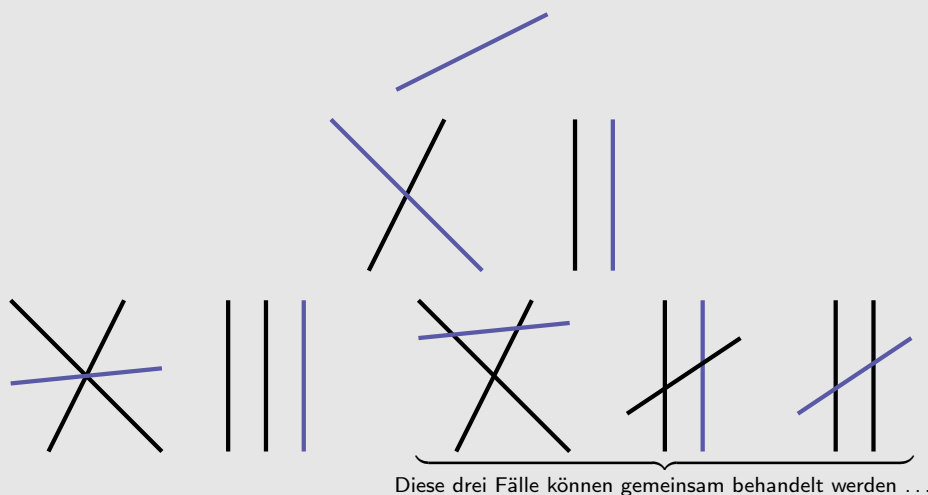
Hinweis: Es kann hilfreich sein, zusätzliche Punkte und Geraden in der Planskizze zu ergänzen.

- Welche Schnittstellenaspekte spielen bei Kongruenzbeweisen eine Rolle. Begründen Sie Ihre Antwort.
- Nennen Sie bitte Vor- und Nachteile der beiden Beweiszugänge.

ePortfolioaufgabe 11 (Charakterisierung der euklidischen Isometrien)

In der Vorlesung haben Sie gelernt, dass sich jede Isometrie $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ als Verknüpfung von maximal drei euklidischen Spiegelungen schreiben lässt.

Erstellen Sie eine systematische Übersicht über alle möglichen Arten von euklidischen Bewegungen und wie diese durch Geradenspiegelungen dargestellt werden können. Zur systematischen Betrachtung der unterschiedlichen Fälle, können Sie sich nach dem Schnittverhalten der beteiligten Geraden richten:



Illustrieren Sie alle Fälle mit instruktiv kommentierten Skizzen und begründen Sie Ihre Überlegungen.

ePortfolioaufgabe 12 (Verknüpfung von Spiegelungen mit DGS)

In dieser Aufgabe geht es um das Erstellen von *GeoGebra*-Dateien zur Verkettung von Geradenspiegelungen. Im Sinne des oben zitierten Kernlehrplans, soll es das Ziel sein, dass Schülerinnen und Schüler mit Hilfe dieser Dateien Verkettungen von Geradenspiegelungen *analysieren*. Ihre Aufgabe:

- Erstellen Sie zu den unten genannten Fällen jeweils eine *GeoGebra*-Datei.
- Erläutern Sie die Idee und Funktionsweise ihrer Dateien (ggf. mit Screenshots).
- Beschreiben Sie, wie Schülerinnen und Schüler Ihre Dateien nutzen sollen. Welche Arbeitsaufträge würden Sie Ihrer Klasse an die Hand geben?

Erstellen Sie jeweils eine Datei für folgende Fälle:

- Zwei Spiegelungen an sich schneidenden Geraden.
- Drei Spiegelungen an parallelen Geraden.

ePortfolioaufgabe 13 (Vorbereitende Reflexion zum Themenblock *Symmetrie*)

In den nächsten beiden Wochen werden wir uns im Detail mit dem Thema *Symmetrie* beschäftigen. Zur Vorbereitung schreiben Sie jeweils einen kurzen Text zur Beantwortung folgender Fragen:

a) Aus der Schule kennen Sie Begriffe wie *Spiegel-* bzw. *Achsensymmetrie*, *Drehsymmetrie* oder *Punktsymmetrie*. Welches übergeordnete Konzept von Symmetrie steht für Sie hinter den Begriffen?

b) Ein Schüler der Klasse 7 fragt Sie:

„Stimmt es, dass es keine 100° -drehsymmetrischen Figuren geben kann?“

Wie würden Sie lernförderlich auf diese Frage reagieren?

c) Eine Schülerin der Klasse 7 fragt Sie:

„Ich glaube, dass eine Figur mit zwei Achsensymmetrien immer auch drehsymmetrisch ist.“

Wie würden Sie lernförderlich auf diese Frage reagieren?

d) Warum ist, Ihrer Meinung nach, die Beschäftigung mit Symmetrie im Mathematikunterricht wichtig?

ePortfolioaufgabe 14 (Zwischenreflexion *Saccherie-Ebene*)

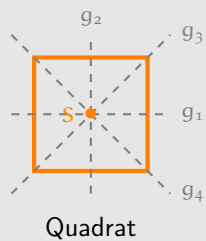
Wir haben jetzt den Bereich *Saccherie-Ebene* abgeschlossen.

a) Welches Resultat aus diesem Themenbereich ist Ihnen besonders in Erinnerung geblieben? Stellen Sie diese kurz vor (inkl. einer instruktiven Planskizze) und beschreiben Sie (ca. eine halbe Seite), was genau für Sie jeweils das Besondere war.

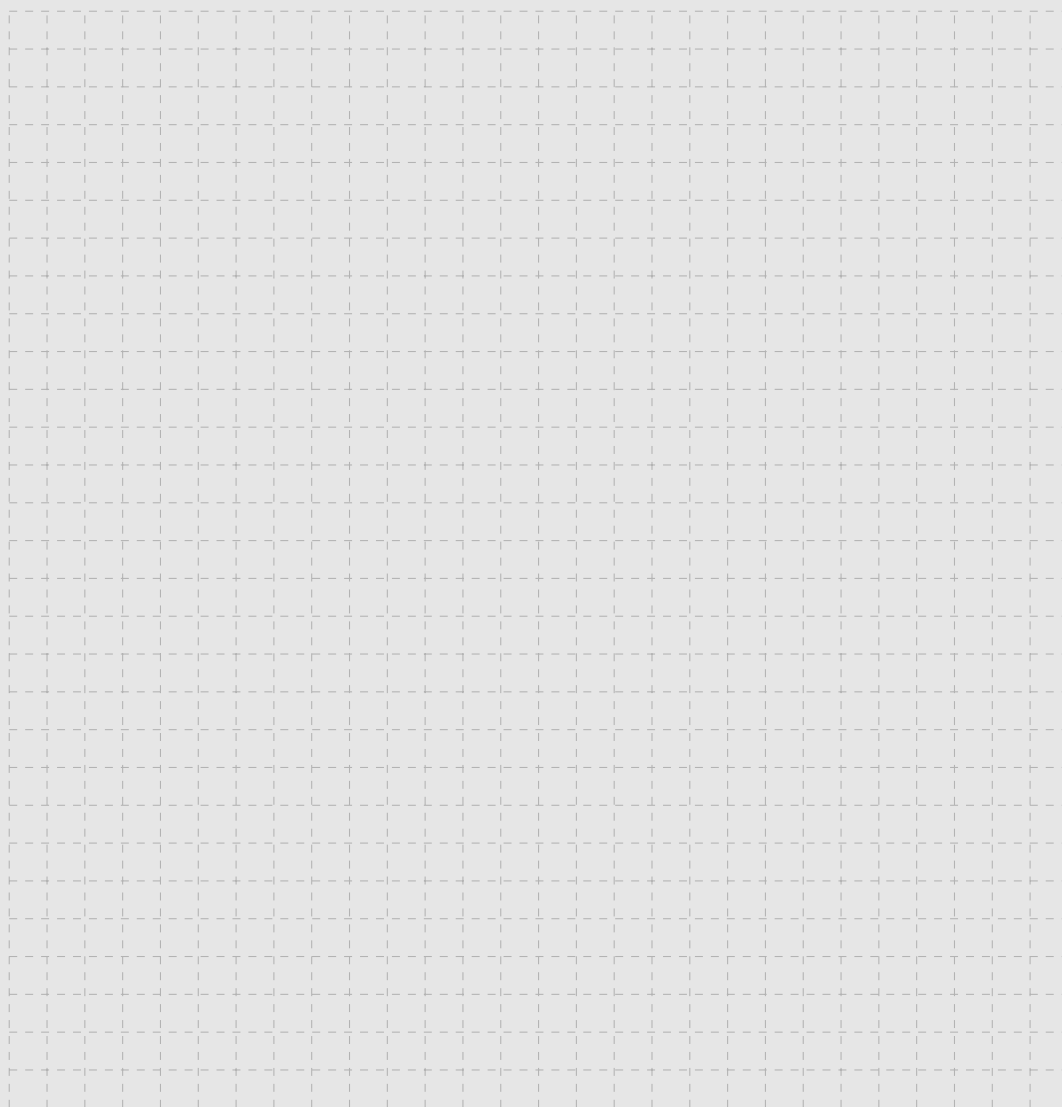
b) Nennen Sie einen Aspekt von Geometrie (der in Verbindung mit dem Vorlesungsabschnitt steht, den Sie später gerne Ihren Schülern mitgeben möchten). Erläutern sie kurz Ihre Wahl.

ePortfolioaufgabe 15 (Das Haus der Vierecke)

Ordnen Sie Vierecke in der euklidischen Ebene nach ihren Symmetrieeigenschaften. Stellen Sie die Zusammenhänge strukturiert dar und geben Sie jeweils die Symmetriegruppe an.



$$\text{Sym}(\square) = \left\{ \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right\}$$



allgemeines Viereck

$$\text{Sym}(\triangle) = \{\text{id}_{\mathbb{R}^2}\}$$

ePortfolioaufgabe 16 (Symmetrie-Aspekte in Schulbüchern)

In der Vorlesung haben Sie drei Aspekte des Symmetriebegriffs kennen gelernt.

- a) Finden Sie je zwei Aufgaben aus Mathematikschulbüchern, in denen der Invarianzspekt bzw. der Rekonstruktions- und Reduktionsaspekt des Symmetriebegriffs fokussiert wird.

Erklären Sie präzise, warum der jeweilige Aspekt in Ihren Beispielen relevant ist.

- b) Geben Sie ein weiteres Beispiel aus einem Schulbuch an, in dem der Gruppenaspekt eine Rolle spielt und begründen Sie auch hier Ihre Wahl. Spielt in dem von Ihnen gewählten Beispiel auch noch einer der anderen Aspekte eine Rolle?

Hinweis: Falls Sie aktuell keinen Zugriff auf Schulbücher haben, können Sie auch Aufgaben im Internet recherchieren und dann unter Angabe der Quelle nutzen.

ePortfolioaufgabe 17 (SuS-Äußerungen zur Symmetrie)

Betrachten Sie die folgenden beiden Schüleräußerungen:

- (1) „Außer Kreisen bzw. Kreisscheiben kann es keine anderen 100° -drehsymmetrischen Figuren geben.“
- (2) „Ich glaube, dass eine Figur mit zwei Achsensymmetrien, immer auch drehsymmetrisch ist.“

Beantworten Sie für *beide* Äußerungen jeweils die Teilaufgaben a) und b).

- a) Mathematisieren Sie die Aussage und klären Sie die Frage auf Basis Ihres fachmathematischen Hintergrundes.
- b) Antworten Sie differenziert und lernförderlich auf die Schüleräußerung (Klasse 7) in Brief- oder Mail-Form. Nutzen Sie gerne auch visualisierende Elemente.
- c) Reflektieren Sie anschließend, wie sich durch die letzten beiden Veranstaltungswochen, ihre Antwort solche Fragen im Vergleich zu ihrer Antwort von vor zwei Wochen verändert hat.

ePortfolioaufgabe 18 (Symmetrie als Argumentationsstrategie)

Laut Bildungsstandards und Kernlehrplänen sollen die Schülerinnen und Schüler *Symmetrie* auch zum Argumentieren und Problemlösen verwenden. Geben Sie jeweils eine schulmathematische Aussage, samt einem auf einem Symmetrieargument basierenden Beweis an, bei dem

- a) eine in den Voraussetzungen bereits existierende Symmetrieeigenschaft für den Beweis verwendet wird,

- b) eine Beweisskizze so ergänzt wird, dass sie neue Symmetrieeigenschaften erhält, die dann für den Beweis genutzt werden können.

Erklären Sie jeweils, wie die Symmetrie in dem Argument eingesetzt wird und welche Aspekte des Symmetriebegriffs dabei zum Tragen kommen.

ePortfolioaufgabe 19 (Steckbriefe zu geometrischen Abbildungen 2)

Erstellen Sie zu folgenden geometrischen Abbildungen der euklidischen Geometrie Steckbriefe unter Verwendung der bekannten Kopiervorlage.

- a) zentrische Streckung
- b) Kreisspiegelung

ePortfolioaufgabe 20 (Abschlussreflexion)

Setzen Sie sich auf insgesamt 2-4 DinA4-Seiten mit folgenden Leitfragen auseinander:

- 1) Wählen Sie zwei Inhalte der Vorlesung (bspw. ein Satz, ein Beweis, ein Beispiel) aus, die Ihnen besonders in Erinnerung geblieben sind. Stellen Sie diese kurz vor und beschreiben Sie, was genau für Sie jeweils das Besondere war.
- 2) Wie fühlen Sie sich zum momentanen Zeitpunkt darauf vorbereitet, *Geometrie* in der Schule zu unterrichten? Wie hat diese Vorlesung dazu beigetragen? Was hätten sie sich in dieser *Fachvorlesung* noch gewünscht?
- 3) Wie hat dieses ePortfolio Ihren Lernprozess begleitet? War es nützlich für Ihr fachliches Lernen? Inwieweit hat es zu Ihrer Professionalisierung als angehende Mathematiklehrkraft beigetragen?
- 4) Warum ist Geometrie in der Schulmathematik Ihrer Meinung nach ein wichtiges Thema?

ePortfolioaufgabe 21 (Kompetenzraster)

Ordnen Sie sich erneut in folgendes Kompetenzraster ein. Notieren Sie dazu in der grauen Spalte

- + für: „Kann ich.“
- o für: „Kann ich bedingt.“
- für: „Kann ich nicht.“

Vergleichen Sie Ihre Einschätzungen mit denen vom Vorlesungsbeginn.

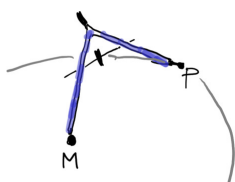
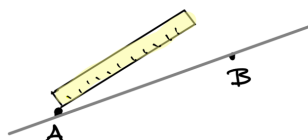
Ich kann typische Begriffe des Geometrie-Unterrichts der Sekundarstufe I mathematisch präzise definieren.	
Kreis	
Strecke	
Gerade	
Winkel und Winkelgröße	
Orthogonalität	
Kongruenz	
Symmetrie	
Ähnlichkeit	
Mittelsenkrechte	
Winkelhalbierende	
Orthogonale Projektion	
Ich kenne Begründungen für typische Theoreme des Geometrie-Unterrichts der Sekundarstufe I.	
Innenwinkelsummensatz des Dreiecks	
Satz des Thales	
Basiswinkelsatz	
Neben- und Scheitelwinkelsatz	
Wechsel- und Stufenwinkelsatz	
Satzgruppe des Pythagoras	
Strahlensatz	
Ich kenne typische geometrische Abbildungen samt Definition und typischen Eigenschaften (bspw. Fixpunkte oder Umkehrungen)	
Spiegelung	
Drehung	
Verschiebung	
Gleitspiegelung	
zentrische Streckung	
Ich kann systematisch die unterschiedlichen Ergebnisse beschreiben die bei Verknüpfungen gleicher bzw. unterschiedlicher Abbildungen entstehen	
Ich kenne einen konsistenten und rigorosen mathematischen Hintergrund für alle bis hierhin erwähnten Themen.	
Ich kann die Geometrie der Mittelstufe mit der analytischen Geometrie der Oberstufe in Verbindung bringen.	
Ich habe das notwendige mathematische Hintergrundwissen um im Geometrieunterricht professionell zu handeln.	
Lernförderliche Reaktion auf Schüleräußerungen und -fehler	
Moderation produktiver Diskussionen	
Zugänge in Unterrichtsmaterialien (bspw. Schulbücher) analysieren und bewerten	

C.3 Weitere Lehr-Lern-Materialien

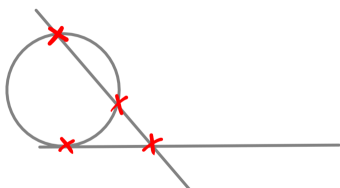
In diesem Abschnitt befinden sich weitere Materialien, die im Rahmen der Veranstaltung eingesetzt wurden und für diese Arbeit relevant sind.

Material 1 (Übersicht über die ZuL-Grundkonstruktionen)

1. Durch zwei gegebene Punkte lässt sich eine gerade Linie ziehen.
2. Eine gegebene begrenzte Linie lässt sich zusammenhängend gerade verlängern.



3. Um einen gegebenen Punkt lässt sich ein Kreis durch einen anderen Punkt ziehen.



4. Zwischen gegebenen geraden Linien und Kreisen lassen sich alle Schnittpunkte bestimmen.

Material 2 (Konstruktionsanleitung zum Übertragen von Strecken und Winkel mit ZuL)

Antragen einer Strecke an einen Punkt.

Gegeben: Eine Strecke $[A, B]$, Punkt P an den die Strecke angetragen werden soll.

- a. Zeichne einen Strahl s mit Ursprung P , der die Richtung der anzutragenden Strecke festlegt.
- b. Stelle den Zirkel so ein, dass ein Kreis um A durch B geschlagen werden kann.
- c. Schlage einen Kreis k um P mit der Zirkel-einstellung aus dem letzten Schritt.
- d. k schneidet s in einem Punkt S .
- e. $[P, S]$ ist die gesuchte Strecke.

Antragen eines Winkels an einen Strahl

Gegeben: Ein Winkel $\angle ABC$, Punkt P und ein Strahl s mit Ursprung P .

- a. Zeichne den Strahl c mit Ursprung B durch C .
- b. Schlage einen Kreis um B durch A . Dieser schneidet c in einem Punkt C' .
- c. Schlage einen Kreis um P mit der Zirkel-einstellung aus dem letzten Schritt. Dieser schneidet s in einem Punkt Q .
- d. Stelle den Zirkel so ein, dass ein Kreis um A durch C' geschlagen werden kann.
- e. Schlage einen Kreis k_2 um Q mit der Zirkel-einstellung an dem letzten Schritt.
- f. k_2 schneidet k_1 in zwei Punkten R_1 und R_2 .
- g. Zusammen mit s bilden die Strahlen mit Ursprung P durch R_1 bzw. R_2 beide den gesuchten Winkel.

Material 3 (Präsentationsfolien zur „Kommunikation der Ausgangskonfiguration“)



06 - SCHNITTSTELLE KONGRUENZ

Kommunikation der Ausgangskonfiguration (2)

Warum überhaupt die geometrisch präsentierte Ausgangskonfiguration?

- Die Übertragung der textuell präsentierten Ausgangskonfiguration in die eigene Konstruktion erfordert ein Geodreieck \rightsquigarrow *Werkzeugbruch*
- Die Übertragung der geometrisch präsentierten Ausgangskonfiguration funktioniert mit Zirkel und Lineal, ist aber etwas umständlicher.
- Aus Gründen der intellektuellen Ehrlichkeit, sollte Mathematiklehrkräften dieser Unterschied klar sein. Dieses Wissen stellt die Voraussetzung für eine bewusste und reflektierte Entscheidung für den Einsatz der textuell präsentierten Ausgangskonfiguration im Mathematikunterricht dar.

In Konstruktionsbeschreibungen müssen für das Abtragen von Strecken und Winkeln nicht alle Einzelschritte formuliert werden. Es reicht ein: „Trage ... an.“
Max Hoffmann

18



06 - SCHNITTSTELLE KONGRUENZ

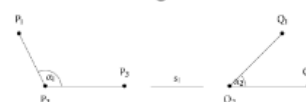
Kommunikation der Ausgangskonfiguration (1)

Wie wird bei einer Konstruktionsaufgabe die Ausgangskonfiguration kommuniziert?

Aufgabe: Konstruieren Sie ein Dreieck aus folgenden Größen:
Eine Seite ist 3 LE lang und zwei Innenwinkel haben eine Größe von 42° bzw. 20° .

vs.

Aufgabe: Konstruieren Sie ein Dreieck aus folgenden Größen:



Textuell

Geometrisch

Max Hoffmann

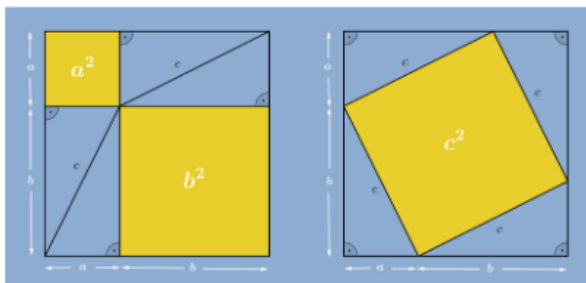
17

Material 4 (Präsentationsfolie zum Zerlegen vs. Rekonstruieren)

12 - SCHNITTSTELLE SYMMETRIE

Zerlegen vs. Rekonstruieren (2)

Beispiel: Der folgende Beweis für den Satz von Pythagoras nutzt **keine** Symmetrie:



Quelle:

<https://www.mathematicus.at/index.php/view-article/53-ein-einfacher-beweis-des-satzes-von-pythagoras>

Die Rekonstruktion erfolgt hier nicht entlang einer Symmetriegruppe.

Max Hoffmann

18

Anhang D

Ausführliche Zitate aus den Schnittstellen-ePortfolios

In diesem Anhang sind Auszüge aus den Schnittstellen-ePortfolios vollständig aufgeschrieben, die im Hauptteil der Arbeit aus Gründen der Übersichtlichkeit des Textes weggelassen wurden.

D.1 ePortfolio-Zitate zur Analyse der Lernendenvoraussetzungen zum Kongruenzbegriff

In Abschnitt 13.3.3 wurden die Lernendenvoraussetzungen zum Kongruenzbegriff unter Nutzung der Arbeitsergebnisse zu ePortfolio-Aufgabe 2 auf Seite 388 analysiert.

- D.1.1* ePF | Zwei Vierecke sind kongruent, wenn sie in allen vier Seitenlängen übereinstimmen.
Ferdinand (Zyklus 2) | Z. 2 | *Kategorie(n)*: 2.1
- D.1.2* ePF | Zwei Vierecke sind kongruent, wenn sie in zwei gegenüberliegenden Winkeln und der verbindenden Diagonalenlänge übereinstimmen.
Mattis (Zyklus 2) | Z. 2 | *Kategorie(n)*: 2.1
- D.1.3* ePF | Zwei Vierecke sind kongruent, wenn sie in zwei aneinander liegenden Seiten und zwei nicht gegenüber liegenden Winkeln übereinstimmen.
Elisabeth (Zyklus 2) | Z. 2 | *Kategorie(n)*: 2.1
- D.1.4* ePF | Zwei Vierecke sind kongruent, [...] wenn die entsprechenden Diagonalen gleich lang sind und sich im gleichen Winkel schneiden.
Ali (Zyklus 3) | Z. 1-5 | *Kategorie(n)*: 2.1
- D.1.5* ePF | Zwei Vierecke sind kongruent, wenn die Länge einer Seite und ihrer Winkel gleich sind.
Sam (Zyklus 3) | Z. 2 | *Kategorie(n)*: 2.1

- D.1.6* ePF | Zwei beliebige Figuren der Ebene sind kongruent, wenn sie deckungsgleich sind [...].
Mirko (Zyklus 2) | Z. 1 | *Kategorie(n)*: 4.1
- D.1.7* ePF | Zwei beliebige Figuren der Ebene sind kongruent, wenn sie durch Verschiebung, Drehung und/oder Spiegelung ineinander überführt werden können.
Mattis (Zyklus 2) | Z. 4 | *Kategorie(n)*: 4.3
- D.1.8* ePF | Zwei beliebige Figuren der Ebene sind kongruent, wenn sie die gleiche Form und Größe haben
Sam (Zyklus 3) | Z. 4 | *Kategorie(n)*: 4.4

Anhang E

Items zum Fragebogen zur doppelten Diskontinuität

Item	Ausprägungen	Bezeichner
Die universitäre Mathematik weist viele inhaltliche Parallelen zur Schulmathematik auf.		DDIV_1
Schulmathematik und universitäre Mathematik sind inhaltlich aufeinander bezogen.		DDIV_2
Es gibt in der universitären Mathematik zu wenig inhaltliche Bezüge zur Schule. (<i>N</i>)		DDIV_3
Schulmathematik und universitäre Mathematik sind inhaltlich zwei verschiedene Welten. (<i>N</i>)		DDIV_4
Die universitäre Mathematik hat inhaltlich kaum etwas mit der Schulmathematik zu tun. (<i>N</i>)	gar nicht; größtenteils nicht; eher nicht; eher schon; größtenteils; voll	DDIV_5
Die universitäre Mathematik hängt inhaltlich stark mit der Schulmathematik zusammen.		DDIV_6
Es gibt viele inhaltliche Verbindungen zwischen Schulmathematik und der universitären Mathematik.		DDIV_7
Zwischen Schulmathematik und der universitären Mathematik gibt es eine unüberwindbare Kluft. (<i>N</i>)		DDIV_8

Tabelle E.1: Items aus dem *Pretest zur doppelten Diskontinuität* zu Beliefs bezüglich der Koherenz zwischen Schulmathematik und universitärer Mathematik aus Isaev und Eichler (2022). (Die mit (*N*) gekennzeichneten Items sind negativ formuliert.)

Item	Ausprägungen	Bezeichner
Die universitäre Mathematik ist sehr nützlich für den Lehrerberuf.		DDRB_1
Die universitäre Mathematik werde ich nach meinem Studium kaum wieder benötigen. (N)		DDRB_2
Ohne die universitäre Mathematik könnte ich das Schulfach Mathematik kaum unterrichten.		DDRB_4
Das Lernen von Mathematik an der Universität ist nicht so wichtig für den Lehrerberuf. (N)		DDRB_5
Die universitäre Mathematik bringt mir nichts für meine spätere Tätigkeit als Lehrkraft in der Schule. (N)	gar nicht; größtenteils nicht; eher nicht; eher schon; größtenteils; voll	DDRB_6
Das Lernen von Mathematik an der Universität ist im Hinblick auf Schule reine Zeitverschwendung. (N)		DDRB_7
Auf die Inhalte der universitären Mathematik werde ich nach meinem Studium noch häufiger zurückgreifen.		DDRB_8
Die universitäre Mathematik bleibt nach meinem Studium eine Erinnerung, die auf meinen Unterricht keinen Einfluss hat. (N)		DDRB_9
Die universitäre Mathematik ist nicht relevant für den Lehrerberuf. (N)		DDRB_0
Die Relevanz der universitären Mathematik für den Lehrerberuf ist ...	sehr niedrig; niedrig; eher niedrig; eher hoch; hoch; sehr hoch	DDRB_3

Tabelle E.2: Items aus dem *Pretest zur doppelten Diskontinuität und Bildungsbiographie* zu Beliefs bezüglich der Nützlichkeit der universitären Mathematik für die spätere Tätigkeit als Lehrkraft in der Schule aus Isaev und Eichler (2022). (Die mit (N) gekennzeichneten Items sind negativ formuliert.)

Item	Ausprägungen	Bezeichner
Die Mathematik dieser Geometrie-Vorlesung weist viele inhaltliche Parallelen zur Schulmathematik auf.		GIV_1
Schulgeometrie und die Inhalte dieser Geometrie-Vorlesung sind inhaltlich aufeinander bezogen.		GIV_2
Es gab in dieser Geometrie-Vorlesung zu wenig inhaltliche Bezüge zur Schule. (N)		GIV_3
Schulgeometrie und die Geometrie in dieser Vorlesung sind inhaltlich zwei verschiedene Welten. (N)		GIV_4
Die Inhalte dieser Geometrie-Vorlesung haben inhaltlich kaum etwas mit der Schulmathematik zu tun. (N)	gar nicht; größtenteils nicht; eher nicht; eher schon; größtenteils; voll	GIV_5
Die Mathematik in dieser Geometrie-Vorlesung hängt inhaltlich stark mit der Schulmathematik zusammen.		GIV_6
Es gibt viele inhaltliche Verbindungen zwischen Schulgeometrie und der Geometrie in dieser Vorlesung.		GIV_7
Zwischen Schulgeometrie und der Geometrie in dieser Vorlesung gibt es eine unüberwindbare Kluft. (N)		GIV_8

Tabelle E.3: Items aus dem *Postest zur doppelten Diskontinuität und Veranstaltungsevaluation* zu Beliefs bezüglich der Kohärenz zwischen Schulmathematik und der Mathematik in der Geometrie-Vorlesung nach Isaev und Eichler (2022). (Die mit (N) gekennzeichneten Items sind negativ formuliert.)

Item	Ausprägungen	Bezeichner
Die Inhalte dieser Geometrie-Vorlesung waren sehr nützlich für den Lehrerberuf.		GRB_1
Die Inhalte dieser Geometrie-Vorlesung werde ich nach meinem Studium kaum wieder benötigen. (<i>N</i>)		GRB_2
Ohne diese Geometrie-Vorlesung könnte ich Geometrie in der Schule kaum unterrichten.		GRB_4
Die Mathematik dieser Geometrievorlesung ist nicht so wichtig für den Lehrerberuf. (<i>N</i>)		GRB_5
Die Mathematik in dieser Geometrie-Vorlesung bringt mir nichts für meine spätere Tätigkeit als Lehrkraft in der Schule. (<i>N</i>)	gar nicht; größtenteils nicht; eher nicht; eher schon; größtenteils; voll	GRB_6
Das Lernen von Geometrie in dieser Vorlesung ist im Hinblick auf Schule reine Zeitverschwendung. (<i>N</i>)		GRB_7
Auf die Inhalte dieser Geometrie-Vorlesung werde ich nach meinem Studium noch häufiger zurückgreifen.		GRB_8
Die Geometrie dieser Vorlesung bleibt nach meinem Studium eine Erinnerung, die auf meinen Unterricht keinen Einfluss hat. (<i>N</i>)		GRB_9
Die Mathematik in dieser Geometrie-Vorlesung ist nicht relevant für den Lehrerberuf. (<i>N</i>)		GRB_0
Die Relevanz der Mathematik in dieser Geometrievorlesung für den Lehrerberuf ist ... (<i>Erst ab dem zweiten Durchlauf der Veranstaltung</i>)	sehr niedrig; niedrig; eher niedrig; eher hoch; hoch; sehr hoch	GRB_3

Tabelle E.4: Items aus dem Items aus dem *Posttest zur doppelten Diskontinuität und Veranstaltungsevaluation* zu Beliefs bezüglich der Nützlichkeit der Mathematik in der Geometrievorlesung für die spätere Tätigkeit als Lehrkraft in der Schule nach Isaev und Eichler (2022). (Die mit (*N*) gekennzeichneten Items sind negativ formuliert.)